

## ZASTOSOWANIE METODY HYBRYDOWEJ DO ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO WYKORZYSTANEGO W WYZNACZANIU KIERUNKOWCH WŁAŚCIWOŚCI CIEPLNYCH CIAŁ ORTOTROPOWYCH – OPTYMALIZACJA EKSPERYMENTU

STANISŁAW KUCYPERA

*Institut Techniki Ciepłej, Politechnika Śląska  
e-mail: kucypera@itc.polsl.pl*

Streszczenie. Współcześnie produkowane materiały anizotropowe są najczęściej kompozytami wielowarstwowymi o periodycznie powtarzalnej strukturze, która pozwala traktować je jako jednorodne materiały ortotropowe o średnich parametrach termofizycznych. Wartości tych parametrów zależą od wielu czynników, np.: właściwości cieplnych włókien nośnych i lepiszczy użytych do ich połączenia, co uniemożliwia wyznaczanie ich metodami teoretycznymi. Dlatego w pracy do wyznaczania wielu parametrów termofizycznych w trakcie wykonywania jednego eksperymentu zaproponowano rozwiązanie odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła metodą hybrydową. Przedstawiono wybrane wyniki badań.

### 1. WSTĘP

Współczesna inżynieria materiałowa wymusza szybki rozwój nowych, bardziej dokładnych i uniwersalnych metod identyfikacji parametrów cieplnych produkowanych materiałów. Dużą część tych materiałów stanowią materiały anizotropowe (kompozyty) o właściwościach cieplnych znacznie różniących się od właściwości cieplnych materiałów składowych. Jednak ich cechą charakterystyczną jest to, że posiadają one periodycznie powtarzalną strukturę i można je traktować jako jednorodne materiały ortotropowe o średnich parametrach termofizycznych, które zależą od wielu czynników, np.: właściwości cieplnych włókien nośnych, ich orientacji i kształtu w materiale oraz właściwości cieplnych i udziału lepiszczy (macierzy) użytych do ich połączenia. Nie jest więc możliwe wyznaczenie ich metodami czysto teoretycznymi.

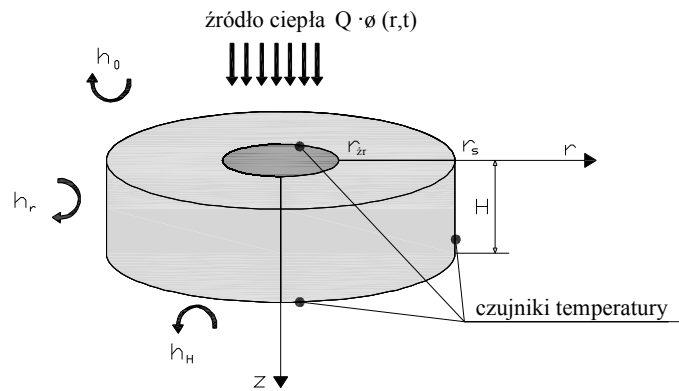
Dlatego w pracy do wyznaczenia tych parametrów połączono metodę eksperymentalną z metodą odwrotną przewodzenia ciepła. Połączenie takie umożliwia wyznaczanie wielu parametrów termofizycznych w trakcie wykonywania jednego eksperymentu.

Ogólnie metody odwrotne przewodzenia ciepła wykorzystują pomiar temperatury w wybranych punktach badanej próbki w funkcji czasu oraz model matematyczny opisujący nieustalony przepływ ciepła w badanej próbce. Model taki łączy wielkości wyznaczone z wielkościami mierzonymi. W pracy dwuwymiarowy model matematyczny sformułowano dla geometrii cylindrycznej stosując metodę bilansów elementarnych. Natomiast, odwrotne zagadnienie przewodzenia ciepła rozwiązano metodą hybrydową. Dokładność i efektywność

zaproponowanej metody oraz wrażliwość jej na dane wejściowe przetestowano za pomocą eksperymentu numerycznego. W wyniku eksperymentu numerycznego wybrano optymalne wartości promienia strumienia ciepła oraz liczbę i położenie węzłów pomiarowych temperatury. Następnie optymalne parametry eksperymentu oraz zaproponowany algorytm rozwiązania zagadnienia odwrotnego wykorzystano do identyfikacji następujących parametrów termofizycznych: liczby Fouriera  $Fo$ , ilorazu składowej kierunkowej do osiowej współczynnika przewodzenia ciepła  $k_r/k_z$ , liczby Biota  $Bi$  i strumienia ciepła  $Q$ . Przedstawiono wybrane wyniki badań.

## 2. SCHEMAT GEOMETRII PRÓBKII POMIAROWEJ ORAZ SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO

Na rys.1 przedstawiono kształt analizowanej próbki pomiarowej oraz sposób jej grzania i chłodzenia.



Rys. 1 Schemat analizowanej próbki pomiarowej wraz z warunkami brzegowym

W czasie  $t_0$  powierzchnia górna próbki o wysokości  $H$  i promieniu  $r_s$  była poddana osiowemu nagrzewaniu płaskim źródłem ciepła o promieniu  $r_{zr}$  ( $r_{zr} < r_s$ ). Próbką wymieniała ciepło z otoczeniem przez powierzchnię cylindryczną i powierzchnie czołowe ze współczynnikami wnikania ciepła odpowiednio ( $h_r$ ,  $h_H$ ,  $h_0$ ). Wprowadzając zmienne bezwymiarowe:

$$r = r^+ / H; \quad z = z^+ / H; \quad \tau = t / t_0; \quad T = (T' - T_0') / T_m \quad (1)$$

gdzie  $T_0'$  temperatura początkowa, a  $T_m$  fikcyjna temperatura obejmująca strumień ciepła  $\dot{Q}$ :

$$T_m = \dot{Q} \cdot t_0 / \rho \cdot c \cdot H^3. \quad (2)$$

Dwuwymiarowy rozkład temperatury w próbce opisuje znane równanie postaci [1]:

$$\frac{1}{Fo_z} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{K_{rz}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3a)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\Phi(r,t)}{\pi \cdot r_{zr}^2 \cdot Fo_z} + Bi_0 T \quad \text{dla } z = 0 \quad (3b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{dla } r = 0 \quad (3c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -Bi_z T \quad \text{dla } z = 1 \quad (3d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -Bi_r T \quad \text{dla } r = r_s \quad (3e)$$

i warunkiem początkowym:

$$T=0 \quad \text{dla } \tau=0 \quad (3f)$$

gdzie  $Fo_z$  jest osiową liczbą Fouriera określoną następująco:

$$Fo_z = \frac{a \cdot t_0}{H^2} \quad (4)$$

$K_{rz}$  jest ilorazem promieniowej do osiowej przewodności cieplnej:

$$K_{rz} = \frac{k_r}{k_z} \quad (5)$$

Liczby Biota odpowiadające powierzchniom cylindrycznej  $r = r_s$  i czołowym  $z=0$  i  $z = H$ , są odpowiednio określone:

$$Bi_r = \frac{\alpha_r \cdot H}{k_r}; \quad Bi_0 = \frac{\alpha_0 \cdot H}{k_z}; \quad Bi_H = \frac{\alpha_h \cdot H}{k_z}; \quad (6)$$

W badaniach przyjęto, że współczynniki ciepła  $hr = h_H = h_0$  oraz wprowadzono liczbę Biota  $Bi_z$ , która odpowiada powierzchniom czołowym:

$$Bi_z = Bi_H = Bi_0 \quad (7)$$

Stąd promieniowa liczba Biota może być zapisana następująco:

$$Bi_r = \frac{Bi_z}{K_{rz}} \quad (8)$$

Strumień ciepła w formie znormalizowanej na powierzchni  $z = 0$  jest określony zależnością:

$$\Phi(r, t) = \begin{cases} 1 & \text{gd } \tau < 1 \text{ i } 0 < r < r_{zr} \\ 0 & \text{gd } \tau > 1 \text{ i } r \geq r_{zr} \end{cases} \quad (9)$$

Dyskretyzacja próbki i zastosowanie metody bilansów elementarnych umożliwiło zapisanie modelu w postaci układu równań algebraicznych.

### 3. SFORMUŁOWANIE ODWROTNEGO ZAGADNIENIA HYBRYDOWEGO

Zagadnienie odwrotne sformułowano jako zagadnienie optymalizacyjne, które rozwiązano zmodyfikowanym algorytmem hybrydowym. Modyfikacja polegała na krokowym łączeniu metody zmiennej metryki z metodą dynamicznej estymacji sekwencyjnej. W tym celu każdą długość kroku czasowego między krokiem  $k$  i  $k+1$  przyjętą dla metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej podzielono na krótsze kroki czasowe i temperaturę mierzono z krótszymi krokami. Wyniki tych pomiarów wykorzystano w metodzie zmiennej metryki, a otrzymane wyniki obliczeń oraz wyniki pomiaru temperatury z kroku  $k+1$  zastosowano w metodzie dynamicznej estymacji sekwencyjnej dla poprawy identyfikowanych parametrów.

Funkcję celu dla metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej zapisano w postaci:

$$S(\mathbf{y}) = \left( F_{k+1/k}(\hat{\mathbf{y}}_k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \right)^T \mathbf{V}_{k+1}^{-1} \left( F_{k+1/k}(\hat{\mathbf{y}}_k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \right) + \left( (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1/k})^T [\mathbf{G}_{k+1/k}]^{-1} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1/k}) \right) \quad (11)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{Y}}$  – wektor mierzonych temperatur,  $F(\hat{\mathbf{y}}_k)$  – wektor predykcji dla mierzonych temperatur,  $\mathbf{G}$  – macierz kowariancji błędów ocen wielkości estymowanych,  $\mathbf{V}$  – macierz kowariancji błędów wielkości mierzonych, a wektor stanu  $\mathbf{y}$  zawiera wszystkie identyfikowane wielkości, tzn.  $N$  temperatur w węzłach podziału różnicowego oraz identyfikowane parametry:

$$\mathbf{y} = [T_1, T_2, \dots, T_N, K_{rz}, Bi_z, Fo_z, T_m]^T \quad (12)$$

Natomiast funkcję celu dla metody zmiennej metryki zapisano w postaci:

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{kk} \sum_{i=1}^{MP} (t_{k,i}^{obl}(\mathbf{p}) - t_{k,i}^{mierz})^2 = [\mathbf{t}_{k,i}^{obl}(\mathbf{p}) - \mathbf{t}_{k,i}^{mierz}]^T [\mathbf{t}_{k,i}^{obl}(\mathbf{p}) - \mathbf{t}_{k,i}^{mierz}] \Rightarrow \min, \quad (13)$$

gdzie:  $MP$  – liczba punktów pomiarowych w układzie przestrzennym próbki,  $kk$  – liczba kroków czasowych,  $t_{k,i}^{obl}$ ,  $t_{k,i}^{mierz}$  – obliczone i zmierzone temperatury w  $k$  – tym kroku czasowym oraz  $i$  – tym punkcie próbki W rozpatrywanym przypadku wektor  $\mathbf{p}$  obejmuje tylko identyfikowane parametry i ma postać:

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T = [K_{rz}, Bi_z, Fo_z, T_m]^T \quad (14)$$

Sposób rozwiązania zagadnienia odwrotnego metodami dynamicznej estymacji sekwencyjnej i zmiennej metryki podano w [2, 3]. Natomiast celem zmniejszenia błędów wielkości pomiarowych, w pierwszej kolejności przeprowadzono optymalizację eksperymentu w oparciu o analizę wrażliwości. Względne współczynniki wrażliwości określa zależność [4]:

$$J_{i,j} = p_j \frac{\partial T_i}{\partial p_j}. \quad (15)$$

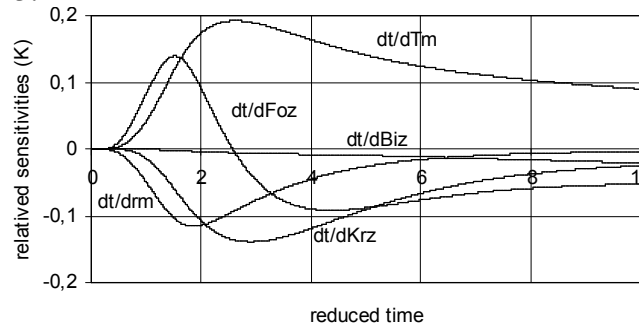
Z obliczonych współczynników wrażliwości budowana jest macierz informacyjna postaci:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T. \quad (16)$$

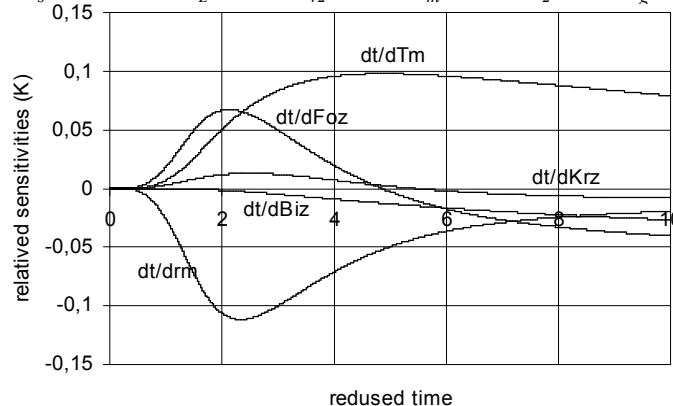
Warunek dużej wartości wyznacznika macierzy informacyjnej gwarantowany jest dla dużych wartości współczynników wrażliwości, a to gwarantuje brak korelacji między parametrami.

#### 4. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ

Przykładowe wyniki zależności współczynników wrażliwości w funkcji czasu przedstawiono na rys. 2-3.



Rys. 2. Względne współczynniki wrażliwości dla:  $r_{zr}/r_s = 0.2$   
i  $r_m/r_s = 0.3$   $r_s/H = 0.5$   $Fo_z = 0.1$   $K_{rz} = 0.1$   $T_m = 0.2$   $Bi_z = 0.1$   $\tau_g = 30$ sek.



Rys. 3 Względne współczynniki wrażliwości:  $r_{zr}/r_s = 0.5$  i  $r_m/r_s = 0.7$ ,  $r_s/H = 0.5$ ,  $Fo_z = 0.1$ ,  $K_{rz} = 0.1$ ,  $T_m = 0.2$ ,  $Bi_z = 0.1$ ,  $\tau_g = 30$  s.

Na rys. 2 widać, że odpowiednie współczynniki wrażliwości zmieniają się w różny sposób i nie osiągają maksimum w tym samym czasie, więc parametry nie są między sobą skorelowane. Natomiast na rys 3. widać, że parametry są skorelowane ponieważ wartości maksimum współczynników wrażliwości są różnego rzędu (0.02 - 0.2) i wzajemnie zbliżone. Stąd trudniejsza identyfikacja i bardzo wrażliwa na błędy pomiarowe.

W celu porównania wyników identyfikacji wymienionych wyżej parametrów przeprowadzono eksperyment numeryczny.

Symulowane pomiary temperatury  $T^{em}$  otrzymano przez dodanie do wartości dokładnej w sensie modelu  $T^{obl}$ , wyrażenia zakłócającego  $\omega \cdot \sigma$ , czyli:

$$T^{zm} = T^{obl} + \omega \cdot \sigma \quad (17)$$

Zakłócenie ma rozkład normalny, a  $\sigma$  jest odchyleniem standardowym błędów pomiarowych. Zakładając poziom ufności 99% dla danych pomiarowych,  $\omega$  obliczane jest generatorem liczb losowym i znajduje się w przedziale  $-2.576 \leq \omega \leq 2.576$ .

Dane dla eksperymentu numerycznego:  $d = 71.6$  mm, wysokość próbki  $H = 15.45$  mm oraz gęstość materiału  $\rho = 1310$  kg/m<sup>3</sup> i gęstość strumienia ciepła  $\dot{q} = 306$  W/m<sup>2</sup>.

Temperatury mierzono co  $\tau_{\Delta} = 1$  s, i taki krok czasowy przyjęto w metodzie zmiennej metryki, natomiast dla metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej  $\tau = 5$  s.

Wyniki identyfikacji dla optymalnych parametrów eksperymentu i różnych wartości odchyłeń standardowych oraz  $n = 100$  punktów pomiarowych w czasie pokazano w tabeli 1. Początkowe wartości parametrów estymowanych przyjęto o 50% różne od wartości dokładnych.

Tabela 1. Wyniki identyfikacji dla  $r_s/H = 0.5$ ,  $r_z/r_s = 0.2$ ,  $r_m/r_s = 0.3$ ,  $\tau_g = 40$  s.

	Wartości początkowe	$\sigma = 0.0$ K	$\sigma = 0.01$ K	$\sigma = 0.05$ K	Wartości dokładne
$K_{rz}$	0.05	0.1	0.1011	0.1051	0.1
$Fo_z$	0.05	0.1	0.1005	0.1009	0.1
$T_m$	0.1	0.2	0.2014	0.2108	0.2
$Bi_z$	0.05	0.1	0.0998	0.1016	0.1

Tabela 2. Wyniki identyfikacji przy  $r_s/H = 0.5$ ,  $Fo_z = 0.1$ ,  $K_{rz} = 0.1$ ,  $T_m = 0.25$ ,  $Bi_z = 0.1$ ,  $\tau_g = 40$  s

	Wartości początkowe	$\sigma = 0.0$ K	$\sigma = 0.001$ K	$\sigma = 0.01$ K	Wartości dokładne
$r_m/r_s$	0.693	0.695	0.696	0.696	0.700
$T_m$	0.220	0.199	0.199	0.246	0.250
$Bi_z$	0.11	0.102	0.108	0.118	0.100
$Fo_z$	0.11	0.099	0.098	0.097	0.100
$K_{rz}$	0.11	0.102	0.107	0.108	0.100

Tabela 3. Wyniki identyfikacji przy  $r_s/H = 0.5$ ,  $Fo_z = 0.1$ ,  $K_{rz} = 0.1$ ,  $T_m = 0.25$ ,  $Bi_z = 0.1$ ,  $\tau_g = 40$  s

	Wartości początkowe	$\sigma = 0.0$ K	$\sigma = 0.001$ K	$\sigma = 0.01$ K	Wartości dokładne
$r_m/r_s$	0.693	0.705	0.705	0.706	0.700
$T_m$	0.300	0.189	0.189	0.203	0.250
$Bi_z$	0.150	0.034	0.035	0.159	0.100
$Fo_z$	0.150	0.107	0.107	0.093	0.100
$K_{rz}$	0.150	0.149	0.149	0.147	0.100

## 5. PODSTAWOWE SPOSTRZEŻENIA I WNIOSKI KOŃCOWE

**Spostrzeżenia:** W pierwszym przypadku (tabela 1) parametry termofizyczne są identyfikowane z błędem mniejszym niż 8% przy zakłóconych pomiarach.

W drugim przypadku (tabela 2) gdy przyjmiemy, że wartości początkowe różnią się o (+10%) od rzeczywistych, parametry są identyfikowane z dobrą dokładnością (błąd mniejszy niż 7%).

W trzecim przypadku (tabela 3) gdy wartości początkowe różnią się od rzeczywistych o 50% to otrzymane wyniki identyfikacji posiadają błąd 80%.

**Wnioski końcowe:** Rozwiązanie odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła za pomocą połączenia metod: dynamicznej estymacji sekwencyjnej i zmiennej metryki staje się bardzo efektywnym narzędziem do identyfikacji parametrów termofizycznych różnych materiałów stałych.

Zaproponowane podejście pozwala znacznie skrócić czas eksperymentu co jest bardzo dużą zaletą metody – eksperyment może trwać tylko ok. 500 s.

Pokazano, że z optymalnymi parametrami pomiaru można identyfikować w jednym eksperymencie 5 parametrów i unika się lokalnych minimów.

Wyniki identyfikacji wykazały, że osiową i promieniową przewodność cieplną można identyfikować dokonując pomiaru temperatury w jednym optymalnym punkcie próbki.

## LITERATURA

1. Modelowanie numeryczne pól temperatury. Praca zbiorowa pod red. J. Szarguta. Warszawa: WNT, 1992.
2. Kucypera S.: Simultaneous determination of the thermal characteristics of the specific heat and thermal conductivity of solids using the inverse heat conduction method, Proc. of 13 ISTP, Victoria – Kanada 2002, pp. 297- 302.
3. Kucypera S.: Zastosowanie metody hybrydowej do rozwiązania odwrotnych zagadnień współczynnikowych przewodzenia ciepła. Materiały konferencyjne XVIII Zjazdu Termodynamików, T. 4. Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2002, s. 1467 -1474.
4. SAWAF B., ÖZİŞİK M. N., JARNY Y.: An inverse analysis to estimate thermal conductivity components and heat capacity of an orthotropic medium. International Journal of Heat and Mass Transfer. vol. 35, no 16, 1998, , pp. 3001- 3005.

## APPLYING HYBRID METHOD TO SOLUTION OF INVERSE PROBLEM USED TO IN DETERMINING OF THE DIRECTIONAL THERMAL PROPERTIES OF ORTHOTROPIC SOLIDS – OPTIMIZATION OF EXPERIMENT

Summary. Contemporarily produced anisotropic materials are the most often multi-layered composites with a periodical repeatable structure, which permits to treat it as homogeneous orthotropic materials with average thermophysical parameters. The value of those parameters depend on many factors, for example: the property of thermal bearing fibres and the part of adhesives used to their connection. In described situation it is not possible to determine those parameters by theoretical methods. Therefore in the paper for determination many thermophysical parameters during executing one experiment was proposed the solution of inverse heat conduction problem by the hybrid method. The selected results of described analysis have been presented