MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
38, s. 287-293, Gliwice 2009

ZAGADNIENIE CIEPLNO-DYFUZYJNE W MATERIALE O MIKROPOLARNEJ STRUKTURZE

BARBARA WIECZOREK

Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Śląska
e-mail: barbara.wieczorek@polsl.p

Streszczenie. W opracowaniu rozważane jest zagadnienie termodyfuzji w ośrodku sprężystym o właściwościach mikropolarnych. Przebieg procesu opisany jest układem równań różniczkowych cząstkowych, uwzględniających wzajemne sprzężenie przepływów cieplnych i dyfuzyjnych z wpływami mechanicznymi. W oparciu o twierdzenie o wzajemności i rozwiązania podstawowego dla tego zagadnienia wyprowadzono uogólnione wzory Somigliany, umożliwiające wyznaczenie rozwiązania przy dowolnych warunkach początkowych i brzegowych.

1. WSTĘP

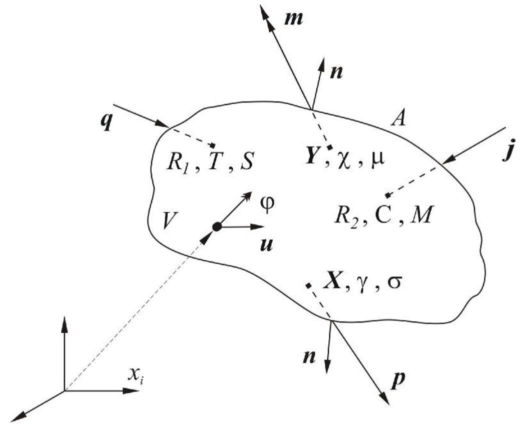
Istota rozważań dotyczących modelowania procesów termodynamicznych w przypadku ośrodka o własnościach sprężystych i dodatkowo posiadającego właściwości mikropolarne opiera się na analizie zjawisk zachodzących w rozpatrywanym ośrodku, która prowadzi między innymi do określenia układu równań, opisujących charakter wzajemnego oddziaływania zachodzących przemian. Wyznaczenie wielkości charakteryzujących przepływy termodyfuzyjne w ośrodku wymaga rozwiązania układu równań przy uwzględnieniu warunków początkowych i brzegowych dla konkretnego zagadnienia. W zależności od sformułowania zagadnienia warunki brzegowe zadane są w przemieszczeniach i obrotach lub obciążeniach. Dodatkowo określona jest koncentracja masy dyfundujące lub jej strumień, lub też potencjał chemiczny. Ponadto ustalony jest warunek brzegowy termiczny w postaci temperatury, strumienia ciepła lub warunku wymiany ciepła z otoczeniem. Warunki początkowe to zadane przemieszczenia i obroty oraz ich prędkości w chwili początkowej procesu, podobnie temperatura i koncentracja.

Jednym z możliwych podejść jest zastosowanie metody operatorowej do wyznaczenia rozwiązania podstawowego dla procesu termodyfuzji. Wówczas otrzymuje się funkcje opisujące zmienność temperatury, koncentracji i składowych pola przemieszczeń i obrotów wywołane chwilowymi źródłami punktowymi o mocy jednostkowej. Następnie wykorzystując twierdzenie o wzajemności dla tego typu zagadnienia otrzymuje się rozwiązania konkretnych zagadnień przepływów termodyfuzyjnych z uwzględnieniem złożonych warunków początkowo-brzegowych oraz źródłowych przyczyn wywołujących proces.

Opracowanie obejmuje wyprowadzenie uogólnionych wzorów Somigliany dla procesu termodyfuzji w ośrodku o właściwościach mikropolarnych, które otrzymano w oparciu o rozwiązania podstawowe i twierdzenie o wzajemności. W zakresie niesymetrycznej sprężystości uogólnione wzory Somigliany wyprowadził W.Nowacki (por. [1]).

2. RÓWNANIA PROCESU TERMODYFUZJI

Rozważania dotyczą przemian cieplnych i dyfuzyjnych sprzężonych z oddziaływaniami mechanicznymi zachodzących w ośrodku ciągłym. W przyjętym modelu ośrodka (rys. 1) założono, że transmisja oddziaływań odbywa się przez wektor siły powierzchniowej P_i i wektor momentu powierzchniowego m_i. Dodatkowo ośrodek doznaje odkształceń nie tylko pod wpływem siły masowej X_i, ale także pod wpływem momentu masowego Y_i. Takie założenie sprowadza się do stwierdzenia, iż na ciało działają nie tylko naprężenia siłowe σ_{ji}, ale również naprężenia momentowe μ_{ji}. Natomiast jego deformacja opisana jest przez tensory odkształceń γ_{ji} i χ_{ji}. Wówczas ośrodek charakteryzuje się niesymetrycznym tensorem deformacji i naprężenia. Ruch określa wektor przemieszczenia u_i i wektor obrotu φ_i. Przemiany cieplne i dyfuzyjne wywołane są odpowiednio źródłem ciepła R_1 i źródłem masy R_2, a ich przepływ określa strumień ciepła q_i i strumień masy j_i.



Rys. 1 Model ośrodka ciągłego o własnościach mikropolarnych.

Wielkościami charakteryzującymi zachodzące procesy, zależnie od przyjętego funkcjonału termodynamicznego są odpowiednio: pole przemieszczeń u_i i obrotów φ_i oraz entropia S lub temperatura T i koncentracja C lub potencjał chemiczny M.

Zagadnienie quasi-statyczne sprzężonej termodyfuzji sprężystej w ośrodku o właściwościach mikropolarnych opisane jest układem ośmiu równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, określających charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola naprężeń.

Istnieją równoważne sformułowania opisu przepływów termodyfuzyjnych w ośrodku, które wynikają z różnych potencjałów termodynamicznych procesu (por. [3]). Postać układu równań dla ośrodka sprężystego centrosymetrycznego wyprowadzona w oparciu o potencjał energii swobodnej jest następująca:

$$
\begin{aligned}
&-(\mu+\alpha)u_{i,jj}-(\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji}-2\alpha\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\gamma_T T_{,i}+\gamma_C C_{,i}=X_i\\
&-(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj}-(\gamma+\beta-\varepsilon)\varphi_{j,ji}+4\alpha\,\varphi_i-2\alpha\in_{ijk}u_{k,j}=Y_i\\
&T_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T u_{j,j}+\mathrm{m}\,T+\mathrm{l}\,C\right]-k_1T_{,ii}=R_1\\
&\dot{C}-k_2\left[\gamma_C u_{j,j}+\mathrm{l}\,T+\mathrm{n}\,C\right]_{,ii}=R_2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdzie λ, μ, α, ε, γ, β oznaczają odpowiednio stałe materiałowe oraz $\gamma_T=\alpha_T(3\lambda+2\mu)$ i $\gamma_C=\alpha_C(3\lambda+2\mu)$, przy czym α_T i α_C to współczynniki przewodności cieplnej i dyfuzyjnej. Ponadto m, n, l są funkcjami relaksacji determinującymi proces dla izotropowego materiału. Natomiast symbole k_1, k_2 oznaczają odpowiednio współczynnik przewodności cieplnej i dyfuzyjnej.

Ponadto w opisie wykorzystano alternator $\in_{ijk}$, który przy parzystej permutacji wskaźników przyjmuje wartość +1, przy nieparzystej permutacji wartość –1 oraz wartość równą zero, gdy dwa wskaźniki są równe.

Dla sformułowanego zagadnienia w oparciu o transformatę Fouriera i jej własności oraz teorię dystrybucji wyznaczono rozwiązania podstawowe (por. [4]) otrzymując funkcje opisujące zmienność wielkości opisujących przemiany cieplne i dyfuzyjne oraz funkcje składowych pola przemieszczeń i pola obrotów wywołanych źródłowymi przyczynami.

Poszukiwane wielkości wyrażają się wzorami:

$$
T=\left\{\mathrm{P}_{2j}\Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t)+\mathrm{Q}_{2j}\Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)+\frac{1}{4\pi}\mathrm{R}_{2j}\frac{\delta(t)}{|x|}\right\}*F_j
\tag{2}
$$

$$
C=\left\{\mathrm{P}_{3j}\Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t)+\mathrm{Q}_{3j}\Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)+\frac{1}{4\pi}\mathrm{R}_{3j}\frac{\delta(t)}{|x|}\right\}*F_j
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
u_i=\mathrm{G}_4\frac{1}{|x|}*\Bigg\{&\left(\mathrm{H}_{1j}\,\Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t)+\mathrm{H}_{2j}\,\Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)-\mathrm{H}_{3j}\frac{1}{2|x|}\right)*F_{j,i}+X_i+\\
&+\mathrm{G}_5\,\Omega_{\mathrm{d}}(x_i,t)*\Bigg[\in_{ijk}\left(\Omega_{\mathrm{e}}(x_i,t)*\left(\mathrm{Q}_1\,Y^{(\mathrm{k})}_{m,mjk}+\mathrm{Q}_2\frac{1}{|x|}*Y_{m,mjk}\right)+Y_{k,j}\right)+\\
&+\mathrm{G}_3\frac{1}{|x|}*X_{j,ji}-\mathrm{G}_6\,X_i\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_i=\mathrm{G}_1\,\Omega_{\mathrm{d}}(x_i,t)*\Bigg\{&\mathrm{G}_3\frac{1}{|x|}*\in_{ijk}\left[X_{k,j}+\left(\mathrm{H}_{1j}\,\Gamma_{\mathrm{a}}(x_i,t)+\mathrm{H}_{2j}\,\Gamma_{\mathrm{b}}(x_i,t)-\mathrm{H}_{3j}\frac{1}{2|x|}\right)*F_{j,jk}\right]+\\
&+\Omega_{\mathrm{e}}(x_i,t)*\left(\mathrm{Q}_1\,Y_{m,mj}+\mathrm{Q}_2\frac{1}{|x|}*Y_{m,mj}\right)+Y_i\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

gdzie:

$$
\mathbf{F}=\left[X_{i,i}\ ,\ R_1\ ,\ R_2\right]^{\mathrm{T}}
$$

natomiast współczynniki i funkcje występujące w zależnościach (2)-(5) przytoczone są w [4].

W oparciu o zależności (2)-(4) i równanie konstytutywne (por. [3])

$$M = \gamma_C\, u_{i,i} + \mathrm{l}\, T + \mathrm{n}\, C \tag{6}$$

wyznacza się rozkład potencjału chemicznego w ośrodku.

Postać układów równań opisujących przemiany zachodzące w ośrodku sprężystym wyprowadzona w oparciu o pozostałe potencjały termodynamiczne przedstawiona jest w [3]. Rozwiązania podstawowe dla każdego z tych przypadków zamieszczone są w [5].

3. UOGÓLNIONE WZORY SOMIGLIANY

Do rozwiązania konkretnego zadania brzegowego wykorzystuje się twierdzenie o wzajemności sformułowane dla termodyfuzji w ośrodku o właściwościach mikropolarnych przyjmując dwa układy przyczyn

$$\mathbf{I} = \{X_i, Y_i, R_1, R_2, P_i, q_i, j_i\} \qquad \mathbf{I}' = \{X_i', Y_i', R_1', R_2', P_i', q_i', j_i'\} \tag{7}$$

i skutków

$$\mathbf{J} = \{u_i, \varphi_i, T, M\} \qquad \mathbf{J}' = \{u_i', \varphi_i', T', M'\} \tag{8}$$

którego postać dla zagadnienia quasi-statycznego jest następująca (por. [2])

$$\begin{aligned}
&\int_{A_\sigma} \left(P_i * du_i' - P_i' * du_i\right) dV + \int_V \left(X_i * du_i' - X_i' * du_i\right) dV + \\
&+ \int_{A_\mu} \left(m_i * d\varphi_i' - m_i' * d\varphi_i\right) dV + \int_V \left(Y_i * d\varphi_i' - Y_i' * d\varphi_i\right) dV + \\
&+ \int_{A_q} \frac{1}{T_o}\left(q_i * T' - q_i' * T\right) n_i\, dA + \int_V \frac{1}{T_o}\left(R_1 * T' - R_1' * T\right) dV + \\
&+ \int_{A_j} \left(j_i * M' - j_i' * M\right) n_i\, dA + \int_V \left(R_2 * M' - R_2' * M\right) dV = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Do pierwszego z układów zalicza się działanie sił i źródeł oraz wpływ warunków brzegowych, przy czym przyczyny te odnoszą się do ciała zajmującego obszar $x_k \in V$ ograniczony powierzchnią A. Na powierzchni A_σ i A_μ zadane są warunki brzegowe dotyczące przemieszczeń u_i i obrotów φ_i, natomiast warunki brzegowe dla temperatury T i koncentracji C zadane są odpowiednio na powierzchni A_q i A_j. Warunki początkowe zagadnienia są jednorodne. Drugi układ przyczyn dotyczy ciała nieograniczonego $\varsigma_k \in V_\infty$, w którym zmiany wywołane są przez oddziaływania w postaci jednostkowego impulsu: siły masowej, momentu masowego oraz źródeł ciepła i masy.

Rozwiązanie konkretnych zagadnień poszukuje się na podstawie rozwiązania podstawowego (2)-(5) układu (1) jako przypadków szczególnych (rys.2), kiedy

1° $X_i' = 1_i\,\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t) \qquad Y_i' = 0_i \qquad R_1' = 0 \qquad R_2' = 0$ (10)

2° $X_i' = 0_i \qquad Y_i' = 1_i\,\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t) \qquad R_1' = 0 \qquad R_2' = 0$ (11)

3° $X_i' = 0_i \qquad Y_i' = 0_i \qquad R_1' = 1\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t) \qquad R_2' = 0$ (12)

4° $X_i' = 0_i \qquad Y_i' = 0_i \qquad R_1' = 0 \qquad R_2' = 1\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t)$ (13)

Stan $\mathbf{I}' = \{\,1_i\,\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t),\, 0_i\,,\, 0\,,\, 0\,\}$ odpowiada działaniu chwilowej i skupionej siły przyłożonej w punkcie o współrzędnych ς_k wywołującej skutki

$$\mathbf{J}' = \{\, u_i'(X_i'=1_i)\,,\, \varphi_i'(X_i'=1_i)\,,\, T'(X_i'=1_i)\,,\, M'(X_i'=1_i)\,\}$$

Stan $\mathbf{I}' = \{\,0_i\,,\, 1_i\,\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t),\, 0\,,\, 0\,\}$ odpowiada działaniu chwilowego momentu o skutkach

$$\mathbf{J}' = \{\, u_i'(Y_i'=1_i)\,,\, \varphi_i'(Y_i'=1_i)\,,\, T'(Y_i'=1_i)\,,\, M'(Y_i'=1_i)\,\}$$

Stan $\mathbf{I}' = \{\,0_i\,,\, 0_i\,,\, 1\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t),\, 0\,\}$ odpowiada działaniu skupionego i chwilowego źródła ciepła wywołującego skutki

$$\mathbf{J}' = \{\, u_i'(R_1'=1)\,,\, \varphi_i'(R_1'=1)\,,\, T'(R_1'=1)\,,\, M'(R_1'=1)\,\}$$

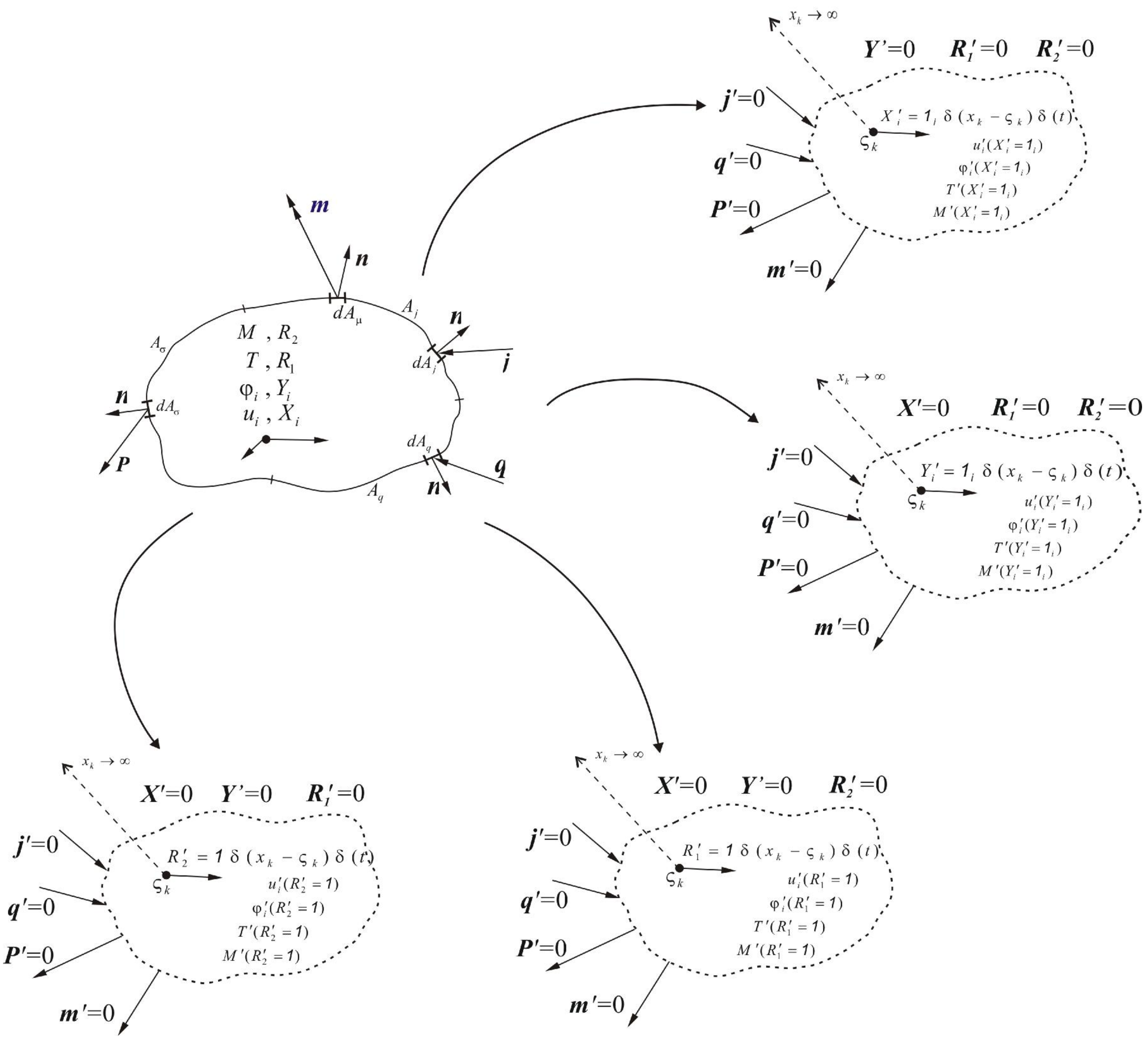
Stan $\mathbf{I}' = \{\,0_i\,,\, 0_i\,,\, 0\,,\, 1\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t)\,\}$ odpowiada działaniu skupionego i chwilowego źródła dyfundującej masy o skutkach

$$\mathbf{J}' = \{\, u_i'(R_2'=1)\,,\, \varphi_i'(R_2'=1)\,,\, T'(R_2'=1)\,,\, M'(R_2'=1)\,\}$$

Przyjęte stany szczególne zestawiono w tabeli:

przyczyny $\mathbf{I}'$	*skutki* $\mathbf{J}'$			
$\{\,1_i\,\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t),\, 0_i\,,\, 0\,,\, 0\,\}$	$u_i'(X_i'=1_i)$	$\varphi_i'(X_i'=1_i)$	$T'(X_i'=1_i)$	$M'(X_i'=1_i)$
$\{\,0_i\,,\, 1_i\,\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t),\, 0\,,\, 0\,\}$	$u_i'(Y_i'=1_i)$	$\varphi_i'(Y_i'=1_i)$	$T'(Y_i'=1_i)$	$M'(Y_i'=1_i)$
$\{\,0_i\,,\, 0_i\,,\, 1\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t),\, 0\,\}$	$u_i'(R_1'=1)$	$\varphi_i'(R_1'=1)$	$T'(R_1'=1)$	$M'(R_1'=1)$
$\{\,0_i\,,\, 0_i\,,\, 0\,,\, 1\delta(x_k-\varsigma_k)\delta(t)\,\}$	$u_i'(R_2'=1)$	$\varphi_i'(R_2'=1)$	$T'(R_2'=1)$	$M'(R_2'=1)$

Skutki wywołane przez jednostkowe impulsy: siły masowej, momentu masowego, źródła ciepła i źródła masy, opisują zależności (2)-(5) oraz (6), po uwzględnieniu dla rozpatrywanych przypadków przyczyn w postaci (10)-(13).



Rys. 2 Schemat rozwiązania zagadnienia.

Rozpatrując pierwszy układ przyczyn i skutków z twierdzenia o wzajemności (9) uzyskuje się zależność opisującą pole przemieszczeń. Z drugiego układu zadań wyprowadza się zależność opisująca pole obrotów. W analogiczny sposób z trzeciego układu zadań uzyskuje się temperaturę. Natomiast z czwartego układu zadań otrzymuje się potencjał chemiczny.

Uzyskane rozwiązania przedstawia zależność:

$$\begin{aligned} w_j = & \int_{A_\sigma} \left(P_i * du'_{i(W_j)}\right) dV + \int_V \left(X_i * du'_{i(W_j)}\right) dV + \\ & + \int_{A_\mu} \left(m_i * d\varphi'_{i(W_j)}\right) dV + \int_V \left(Y_i * d\varphi'_{i(W_j)}\right) dV + \\ & + \int_{A_q} \frac{1}{T_o}\left(q_i * T'_{(W_j)}\right) n_i \, dA + \int_V \frac{1}{T_o}\left(R_1 * T'_{(W_j)}\right) dV + \\ & + \int_{A_j} \left(j_i * M'_{(W_j)}\right) n_i \, dA + \int_V \left(R_2 * M'_{(W_j)}\right) dV \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie:

$$\mathbf{w} = \left[\, u_i \,, \varphi_i \,, T \,, M \,\right]^{\mathrm{T}} \qquad \mathbf{W} = \left[X_i' = 1_i \,, Y_i' = 1_i \,, R_1' = 1 \,, R_2' = 1\right]^{\mathrm{T}}$$

Wzory (14) opisują stan termodyfuzyjny ciała sprężystego o właściwościach mikropolarnych, wynikający z oddziaływań wywołujących proces przy zadanych warunkach początkowo-brzegowych.

4. PODSUMOWANIE

Wzory (14) przedstawiają uogólnienie klasycznych wzorów Somigliany na dziedzinę niesymetrycznej termodyfuzji sprężystej. Wzory te pozwalają na wyznaczenie wielkości $u_i(\varsigma_k,t)$, $\varphi_i(\varsigma_k,t)$, $T(\varsigma_k,t)$ i $M(\varsigma_k,t)$ dla $\varsigma \in V$ wewnątrz ciała przy znanych na brzegu A wielkościach $u_i(x_k,t)$, $\varphi_i(x_k,t)$, $T(x_k,t)$ i $M(x_k,t)$ oraz $P_i(x_k,t)$, $m_i(x_k,t)$, $q(x_k,t)$ i $j(x_k,t)$ przy $x \in A$. Wyprowadzone uogólnione wzory Somigliany mogą być przydatne przy konstruowaniu rozwiązań w przypadku konkretnych zagadnień brzegowych termodyfuzji w ośrodku o strukturze mikropolarnej.

LITERATURA

1. Nowacki W.: Teoria niesymetrycznej sprężystości, PWN, Warszawa, 1971.
2. Wieczorek B.: The forms of the reciprocal theorem for different thermodynamic formulations of the thermodifusion process in the micropolar medium, VII[th] International Conference "Static-structural and constructional-physical problems of engineering constructions", Košice 2005
3. Wieczorek B.: The forms of the thermodiffusion flows equations in the micropolar medium for different thermodynamic formulations of the process, 4[rd] International Conference "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings", Bratislava 2005
4. Wieczorek B.: Fundamental solution for the quasi-static problem of elastic thermodiffusion in the micropolar solid, "Selected topics in mechanics of the inhomogeneuous media", Zielona Góra 2008
5. Wieczorek B.: Rozwiązania podstawowe quasi-stytycznego zagadnienia termodyfuzji sprężystej w ośrodku o właściwościach mikropolarnych, „Modelowanie Inżynierskie", Tom 2, nr 37, 2009.

THE PROBLEM OF HEAT FLOW AND DIFFUSION IN A MATERIAL WITH MICROPOLAR STRUCTURE

Summary. The paper covers generalized Somigliana's formulas for the thermodiffusion processes in the solid of micropolar properties, which have been obtained based on fundamental solutions and reciprocity theorem for this type of problem. They enable to determine solutions of given problem of heat and diffusion flows for arbitraries initial-boundary conditions and causes which start the process.