MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
38, s. 19-26, Gliwice 2009

ZADANIE ODWROTNE JAKO PROJEKTOWANIE MECHATRONICZNYCH UKŁADÓW DRGAJĄCYCH

ANDRZEJ BUCHACZ, DAMIAN GAŁĘZIOWSKI

Instytut Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska
e-mail: andrzej.buchacz@ polsl.p, damian.galeziowski@interia.pl

Streszczenie. W pracy projektuje się układy mechatroniczne zbudowane z podukładów mechanicznych dyskretnych o „*n*" stopniach swobody, połączonych z ograniczonymi ośrodkami piezoelektrycznymi i z zewnętrznymi obwodami elektrycznymi *LRC*. Syntezy dokonuje się metodą rozszerzoną, opracowaną przez gliwicki ośrodek naukowy. Wobec otrzymanych w wyniku rozwiązania zadania odwrotnego struktur żąda się spełnienia wymaganych własności dynamicznych w postaci ciągu zer i biegunów.

1. WSTĘP

Literatura dotycząca problemu syntezy układów fizycznych, w tym mechanicznych, a przede wszystkim elektrycznych i elektronicznych, jest dobrze poznana [1-5]. Jednak w przypadku struktur mechanicznych przejście od modelu do układu rzeczywistego nie zawsze jest jednoznaczne[1]. Stąd też, na początku lat osiemdziesiątych, podjęto w gliwickim ośrodku naukowym badania nad syntezą i projektowaniem drgających układów ciągłych [6- 8], dyskretnych [9,10] i dyskretno ciągłych [11,12].

Brak jest natomiast w znanej literaturze pozycji traktujących o syntezie struktur mechatronicznych, w szczególności zbudowanych z dyskretnych układów mechanicznych połączonych z elementami piezoelektrycznymi. W pracach [13,14] wykazano możliwość zastosowania piezoaktuatora jako elementu tłumiącego, ale ograniczono się do analizy układu o jednym stopniu swobody[2].

W pracy, na podstawie [1-14], syntezuje się mechatroniczne układy drgające[3]. Funkcje charakterystyczne rozkłada się metodą rozszerzoną [9,10], natomiast struktury projektuje się ze względu na wymagane własności dynamiczne w postaci ciągu zer i biegunów.

Ze względu na nowatorskie podejście do tematu w artykule ograniczono się do przedstawienia problemu na przykładzie syntezy układu o trzech stopniach swobody. Otrzymany, w wyniku rozwiązania zadania odwrotnego, model mechaniczny o strukturze kaskadowej sprowadzono do postaci bezwymiarowej. Korzystając ze znanych zależności

---

[1] W świetle przyjętych założeń i praw mechaniki,

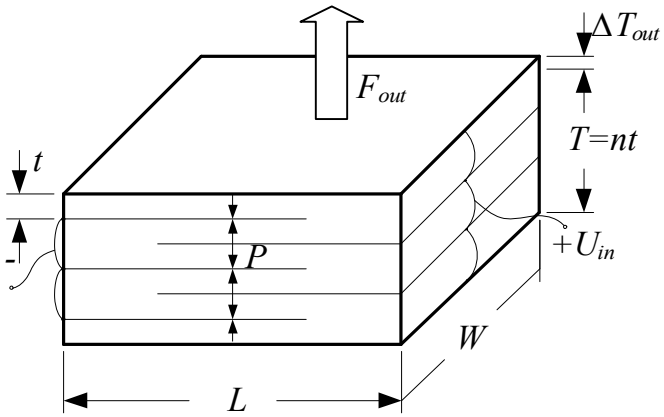
[2] Układ składał się z wymuszanego dynamicznie dyskretnego układu mechanicznego o jednym stopniu swobody połączonego z elementem piezoelektrycznym i zewnętrznym obwodem elektrycznym *LRC*. Ze względu na parametry obwodu elektrycznego analizowano możliwości tłumiące piezoelektryka,

[3] Zbudowane (wg założeń [13,14]) z dyskretnych układów mechanicznych o „*n*" stopniach swobody połączonych z ograniczonymi ośrodkami piezoelektrycznymi i zewnętrznymi obwodami elektrycznymi *LRC*.

związanych z odwrotnym efektem piezoelektrycznym, wyznaczono odpowiednie parametry elementu piezoelektrycznego i zewnętrznego obwodu elektrycznego *LRC*.

2. OGRANICZONY OŚRODEK PIEZOELEKTRYCZNY

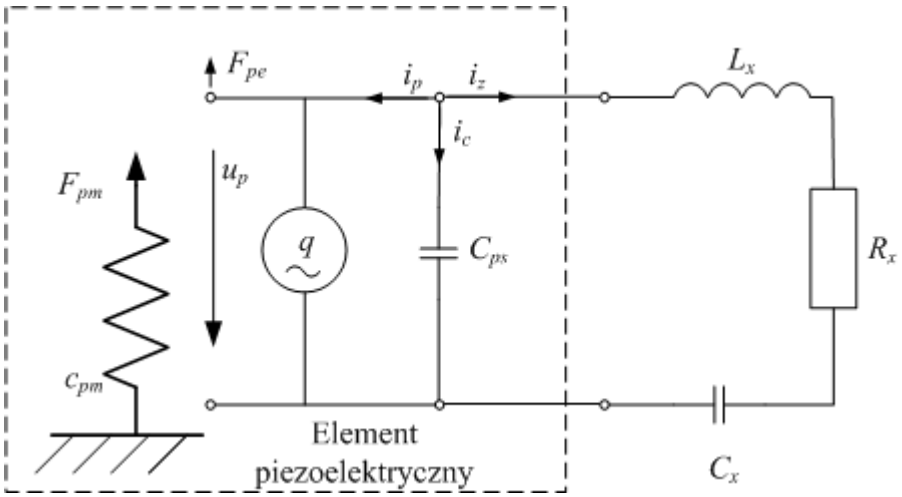
W projektowanych układach jako element tłumiący stosuje się ograniczony ośrodek piezoelektryczny, który pełni funkcję aktuatora typu „stack". Piezoelektryk składa się z dużej liczby połączonych ze sobą pojedynczych warstw piezoelektrycznych, gdzie przemieszczenie wypadkowe jest sumą przemieszczeń poszczególnych warstw, rys. 1.



Rys. 1. Aktuator typu „piezostack"

Element piezoelektryczny połączony jest z zewnętrznym układem elektrycznym *LRC*. Ze względu na parametry *L*, *R* i *C* możliwa jest realizacja tłumienia pasywnego (np. L_xR_x, R_x) bądź adaptacyjno-pasywnego (np. L_xC_x, $L_xR_xC_x$).

Ograniczony ośrodek piezoelektryczny w układzie mechanicznym reprezentowany jest przez element sprężysty o sztywności c_{pm}, natomiast w układzie elektrycznym przez kondensator o pojemności C_{ps}, (rys. 2).



Rys. 2. Model elementu piezoelektrycznego połączonego z zewnętrznym układem *LRC*

Napięcie u_p oraz natężenie prądu i_p są kolejno funkcjami:

$$u_p = f(e, F_{pe}), \tag{1}$$

$$i_p = f(e, \dot{x}) . \tag{2}$$

Wypadkową siłę pochodzącą od elementu piezoelektrycznego zdefiniowano jako:

$$F_p = F_{pm} + F_{pe} . \tag{3}$$

Aby wyznaczyć wartość siły (3), należy skorzystać z podstawowych związków, opisujących efekt piezoelektryczny, czyli:

$$\begin{aligned} \sigma &= K_E s - eE \\ D &= es - \varepsilon_s E , \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie: σ - naprężenia mechaniczne, K_E - moduł sprężystości, s-odkształcenie, D - przesunięcie elektryczne, ε_s - przenikalność elektryczna, E - natężenie pola elektrycznego, e – stała piezoelektryczna.

Na podstawie związków (4) możliwe jest wyznaczenie ładunku elektrycznego na płytkach piezoelektryka, a więc:

$$Q_p = e\frac{A_P}{l_p}x_1 + \varepsilon_s \frac{A_p}{l_p}u_p , \tag{5}$$

gdzie: A_p – pole powierzchni elektrod, l_p - odległość między elektrodami (wysokość elektrod), x_1 – przemieszczenie,.

Stałą piezoelektryczną e opisano zależnością:

$$e = K_E d_{33} , \tag{6}$$

gdzie: d_{33} - gęstość ładunku na jednostkę naprężenia pod wpływem działania stałego natężenia pola elektrycznego, K_E - moduł Young'a.

Pojemność kondensatora C_{ps} przyjęto jako:

$$C_{ps} = \varepsilon_s \frac{A_p}{l_p} . \tag{7}$$

Sztywność c_{pm} zdefiniowano natomiast w postaci

$$c_{pm} = K_E \frac{A_p}{l_p} . \tag{8}$$

Korzystając z pierwszego prawa Kirchhoffa, zapisano równanie układu elektrycznego

$$0 = u_p + L\frac{di_p}{dt} + Ri_c + \frac{1}{C}\int i_p dt . \tag{9}$$

Opisane parametry są niezbędne do wyznaczenia syntezowanego układu mechatronicznego, spełniającego określone żądania w postaci ciągu zer i biegunów.

3. SYNTEZA ZE WZGLĘDU NA ŻĄDANE WIDMO CZĘSTOŚCI

Syntezy układów rozumianej jako rozwiązania zadania odwrotnego mechaniki dokonano metodą rozszerzoną[4].

Funkcje charakterystyczne układów utwierdzonych rozpatrywano jako powolność:

$$U(s) = H\frac{d_l s^l + d_{l-1}s^{l-1} + ... + d_0}{c_k s^k + c_{k-1}s^{k-1} + ...c_1 s}, \tag{10}$$

gdzie: l– nieparzysty stopień licznika, k– stopień mianownika, $l-k=1$, H – dowolna liczba rzeczywista dodatnia,
lub ruchliwość:

$$V(s) = H\frac{c_k s^k + c_{k-1}s^{k-1} + ...c_1 s}{d_l s^l + d_{l-1}s^{l-1} + ... + d_0}, \tag{11}$$

gdzie: k – nieparzysty stopień licznika, l – stopień mianownika, $k-l=1$, H – dowolna liczba rzeczywista dodatnia.

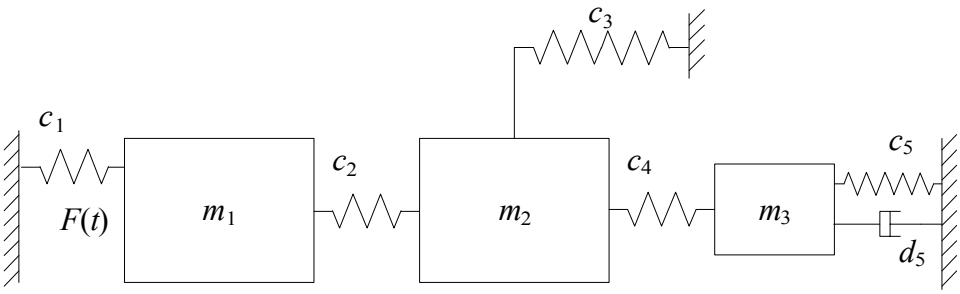
Przyjęto wymagane bieguny ω_1, ω_3, ω_5 oraz zera ω_0, ω_2, ω_4 (wyrażone w rad/s). Zadanie odwrotne rozwiązano metodą rozszerzoną, w wyniku czego uzyskano charakterystykę dynamiczną w postaci powolności:

$$U(s) = \frac{c_1}{s} + m_1 s + \cfrac{1}{\cfrac{s}{c_2} + \cfrac{1}{\cfrac{c_3}{s} + m_2 s + \cfrac{1}{\cfrac{s}{c_4} + \cfrac{1}{m_3 s + \cfrac{1}{\cfrac{s}{c_5}}}}}}. \tag{12}$$

Na tym etapie syntezy, w razie potrzeby wprowadzenia do projektowanego układu elementów rozpraszających energię oraz w odniesieniu do projektowanego docelowego układu mechatronicznego, korzysta się głównie z elementów tłumiących, proporcjonalnych do elementów sprężystych, czyli:

$$d_i = \lambda c_i, \tag{13}$$

gdzie: d_i – tłumienie i-tego elementu, λ=*idem* współczynnik proporcjonalności, c_i – sztywność i-tego elementu.



Rys. 3. Struktura syntezowanego układu

[4] Metoda rozszerzona pozwala na syntezowanie struktur, na które nałożone jest „*p*” utwierdzeń.

W praktyce najczęściej wartość współczynnika proporcjonalności dobiera się z przedziału:

$$0 < \lambda = \frac{2}{\omega_n}, \tag{14}$$

gdzie: ω_n – największa wartość częstości rezonansowej lub antyrezonansowej, różna od zera.

Otrzymana na drodze syntezy struktura składa się z trzech mas m_1, m_2, m_3 połączonych ze sobą elementami sprężystymi o sztywności c_2 i c_4 utwierdzonymi przy pomocy elementów sprężystych c_1, c_3 i c_5. Do układu dodano element rozpraszający energię d_5, rys 3. Układ wprawiony jest w ruch przy pomocy siły harmonicznie zmiennej $F(t)=F_0\cos\Omega t$, która działa na masę m_1.

4. SPROWADZENIE ZAGADNIENIA DO POSTACI BEZWYMIAROWEJ

Aby wyznaczyć wartości parametrów układu mechatronicznego, w pierwszej kolejności równania ruchu zapisano w postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{m_1}{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{c_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3}{c_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_5}{c_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\frac{c_2}{c_1} & -\frac{c_2}{c_1} & 0 \\ -\frac{c_2}{c_3} & 1+\frac{c_2}{c_3}+\frac{c_4}{c_3} & -\frac{c_4}{c_3} \\ 0 & -1 & 1+\frac{c_5}{c_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Układ następnie rozpatrzono w bezwymiarowym czasie τ:

$$\tau = \omega_m t \qquad \dot{x}_i = \omega_m x_i' \qquad \ddot{x}_i = \omega_m x_i'' \qquad i = 1...3 \tag{16}$$

Uwzględniając z kolei parametry:

$$\omega_m^2 = \frac{c_3}{m_2} \qquad \omega_{pe}^2 = \frac{c_4}{m_3} \qquad \omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1} \qquad x_0 = \frac{F_0}{c_1} \qquad F(t) = \hat{F}\cos(\Omega t) \tag{17}$$

$$\beta = \frac{c_2}{c_1} \qquad \chi = \frac{c_2}{c_3} \qquad \alpha = \frac{\omega_m^2}{\omega_1^2} \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega_m} \tag{18}$$

$$2D = \frac{d\omega_{pe}}{c_2} \qquad \lambda = \frac{\omega_m^2}{\omega_{pe}^2} \qquad \gamma = \frac{c_2}{c_1} \qquad \delta = \frac{c_3}{c_2} \tag{19}$$

zapisano bezwymiarowy układ równań:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\beta & -\beta & 0 \\ -\chi & 1+\gamma+\chi & -\gamma \\ 0 & -1 & 1+\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0\cos(\eta\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

5. PRZEKSZTAŁCENIE UKŁADU MECHANICZNEGO

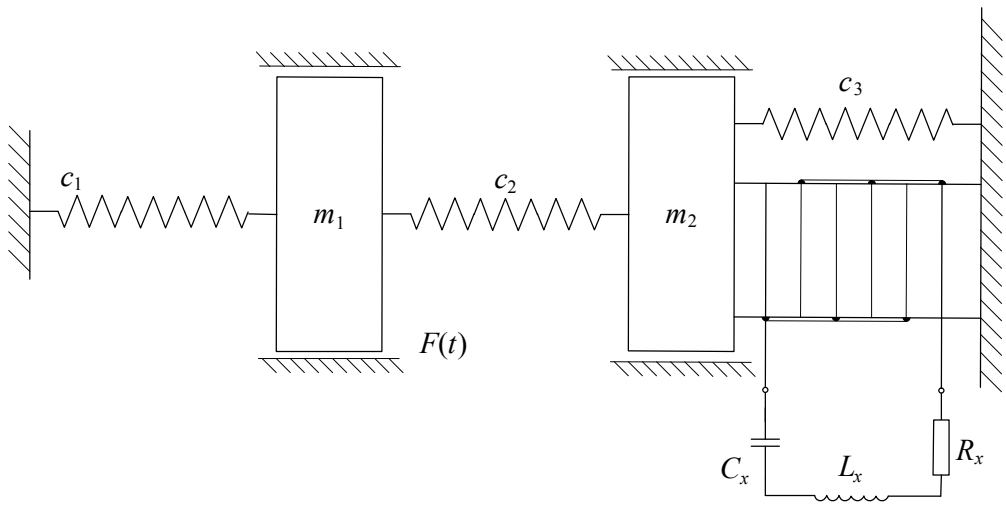
Wprowadzając dodatkową zmienną do układu (15), zdefiniowaną jako:

$$x_3 = x_2 + u_p \frac{\varepsilon_s}{e} \tag{21}$$

oraz rozwijając zależność (9), zapisano równania dynamiczne układu mechatronicznego:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & LC_{ps} & \frac{\varepsilon_s}{e} LC_{ps} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{u}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & RC_{ps} & \frac{\varepsilon_s}{e} RC_{ps} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{u}_p \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 & -\frac{eA_p}{l_p} \\ 0 & \frac{C_{ps}}{C} & \frac{\varepsilon_s}{e}\left(1 + \frac{C_{ps}}{C}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

A zatem w wyniku przekształceń z uzyskanej na drodze syntezy struktury układu mechanicznego uzyskano układ mechatroniczny składający się z dyskretnego układu mechanicznego połączonego z elementem piezoelektrycznym i zewnętrznym układem *LRC*, rys. 4.



Rys. 4. Układ mechatroniczny uzyskany na drodze syntezy

Układ równań (23) sprowadzono do postaci bezwymiarowej (21), w wyniku czego otrzymano:

$$2D = R_x C_{ps} \omega_m \qquad \lambda = L_x C_{ps} \omega_m^2 \qquad \gamma = \frac{(c_{pm} d_{33})^2}{C_{ps} c_m} \qquad \delta = \frac{C_{ps}}{C_x} \tag{23}$$

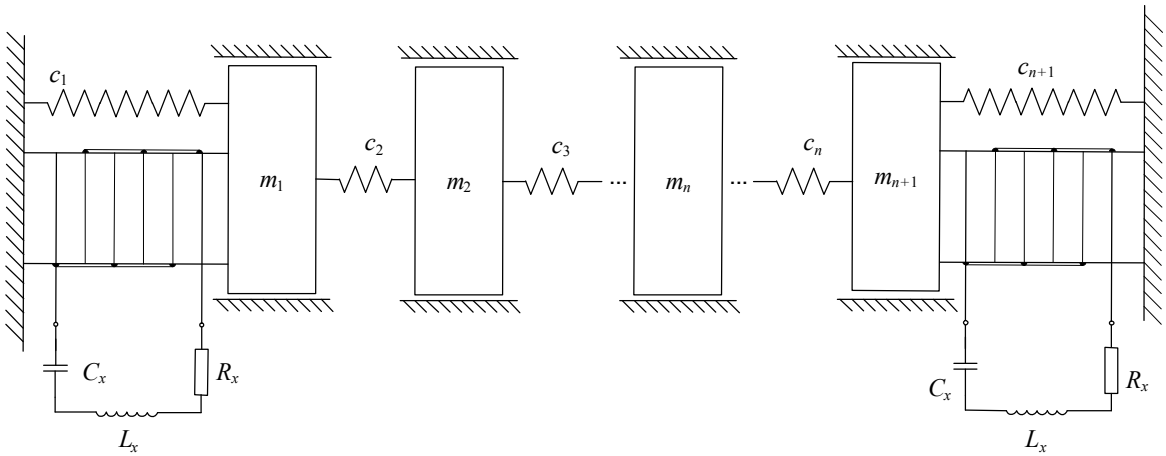
Podstawiając równania (23) do (19), wyznaczono odpowiednie parametry zewnętrznego układu elektrycznego i elementu piezoelektrycznego:

$$L_x = \frac{C_{ps}\omega_m^2}{\lambda} \qquad R_x = \frac{d_5}{C_{ps}c_4} \qquad C_x = \frac{C_{ps}}{\delta} \tag{24}$$

Parametry (24) wyrażone są w jednostkach fizycznych.

6. SPOSTRZEŻENIA

Na drodze syntezy możliwe jest uzyskiwanie układów o strukturze kaskadowej, na które może być nałożone „*p*” utwierdzeń. Układy te można zastąpić na podstawie odpowiednich przekształceń układami mechatronicznymi drgającymi składającymi się z podukładów mechanicznych dyskretnych o „*n*” stopniach swobody połączonymi z elementami piezoelektrycznymi i zewnętrznymi obwodami elektrycznymi *LRC* (przykład rys. 5.).



Rys. 5. Struktura kaskadowa układu mechatronicznego z układem dyskretnym o „*n*” stopniach swobody

W przypadku zastosowania innych metod rozwiązań zadania odwrotnego np. metody rozkładu na ułamki proste, czy metody mieszanej pole możliwych rozwiązań (struktur) znacznie się zwiększa. Sposób ich projektowania i wyznaczania będzie tematem kolejnych artykułów i publikacji.

LITERATURA

1. Arczewski K.: Analiza i synteza drgających układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych. Praca doktorska. Politechnika Warszawska, Warszawa 1974.
2. Bellert S., Wojciechowski J.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Warszawa : WNT, 1968.
3. Białko M. [red]: Filtry aktywne RC. Warszawa : WNT, 1979.
4. Heinlen W.E., Holmes W. H.: Active filters for integrated circuits, fundamentals and design methods. Munchen : Oldenbourg Verlag, 1974.
5. Soluch W. [red.]: Filtry piezoelektryczne. Warszawa : WKiŁ, 1982.

6. Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mechanika z. 104. Gliwice 1991.
7. Buchacz A.: Modeling, synthesis and analysys of bar systems characterized by a cascade structure represented by graphs. "Mech. Mach. Theory" 1995, No 7, p. 969-989.
8. Buchacz A. [red.]: Komputerowe wspomaganie syntezy i analizy podzespołów maszyn modelowanych grafami I liczbami strukturalnymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mechanika z. 127. Gliwice 1997.
9. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 2000.
10. Dymarek A.: Komputerowo wspomagana synteza dyskretnych układów mechanicznych z tłumieniem. Zeszyty Naukowe Katedry Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, z. 1. Gliwice 2003, s. 15-22.
11. Dzitkowski T.: Odwrotne zadania dynamiki dyskretno-ciągłych układów mechanicznych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 2001.
12. Dzitkowski T.: Komputerowo wspomagana synteza dyskretno-ciągłych układów mechanicznych z tłumieniem. Zeszyty Naukowe Katedry Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, z. 3. Gliwice 2003, s. 23-32.
13. Ahlers H.: Passive Dampfung reibungsinduzierter Bremsgerausche mit Piezoelementen. VDI Verlag GmbH, Dusseldorf 2002.
14. Neubaer M., Oleskiewicz, R., Popp K., Krzyżynski T.: Optimization of damping and absorbing performance of shunted piezo elements utilizing negative capacitance, "Journal of Sound and Vibration" 2006, Vol. 298, No1-2, p. 84-107, 2006.

REVERSE TASK AS A DESIGNING OF MECHATRONIC VIBRATING SYSTEMS

Streszczenie. In this paper reverse task as a designing of mechatronic vibrating systems is highlighted. Mechatronic systems can be achieved from mechanical discrete subsystems with "*n*" degree of freedom connected with piezo element and external *LRC* Network. Dynamical characteristics has been distributed with widened method of synthesis. Systems must comply with the dynamical properties in the form of frequency spectrum: resonant and anti-resonant frequencies.