

SYNTEZA ROZGAŁĘZIONYCH UKŁADÓW NAPĘDOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM TŁUMIENIA

TOMASZ DZITKOWSKI

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,
Politechnika Śląska
e-mail: tomasz.dzitkowski@polsl.pl*

Streszczenie. Dobór własności dynamicznych układu napędowego maszyny jest jedną z metod zwiększenia jej trwałości i niezawodności. Zadanie to może być zrealizowane przy wykorzystaniu algorytmu analizy i syntezy. Zadanie syntezy, umożliwiające otrzymanie parametrów i struktury układów ze względu na charakterystykę dynamiczną, może być więc wykorzystane jako narzędzie wspomagania projektowania dla każdego warunków pracy urządzenia. W pracy zaprezentowana zostanie metoda mieszana syntezy charakterystyki dynamicznej umożliwiająca otrzymanie parametrów i modeli układów napędowych.

1. WSTĘP

Podstawowym elementem maszyn jest układ napędowy. Układ taki ze względu na budowę dzieli się na prosty i rozgałęziony. Układ rozgałęziony (zwany również rozwidlonym) należy do powszechnie stosowanego napędu w maszynach i urządzeniach. Wykorzystuje się go w okrętownictwie, gdzie kilka silników przez przekładnię zębatą napędza jedną śrubę okrętową, ale także w napędach samochodów, pojazdów szynowych, samolotów, śmigłowców, zespołów prądotwórczych, pomp i wielu innych urządzeniach. Zapewnienie wysokiej trwałości i niezawodności podczas eksploatacji tego typu układów wymusza na projektantach przeprowadzanie dodatkowych analiz – w tym analiz drganiowych, umożliwiających dobór optymalnych własności dynamicznych układu. Zadanie doboru własności dynamicznych układów napędowych może być zrealizowane przy wykorzystaniu algorytmu analizy [2, 10 ÷ 12, 15] i syntezy [1 ÷ 9, 13, 14]. W pracy zaprezentowane zostanie zadanie syntezy układów napędowych o strukturze rozgałęzionej.

Synteza drgających skrętnie układów mechanicznych rozumiana jest w pracy jako metoda obliczeniowa, za pomocą której projektuje się układ mechaniczny wraz z parametrami, spełniający żadaną charakterystykę w postaci wybranych częstości rezonansowych i antyrezonansowych. Cechą charakterystyczną otrzymanych układów mechanicznych jest to, że wyznaczone parametry układu nie zmieniają się w czasie, a także to, iż spełnienie założonych własności nie wymaga dostarczenia zewnętrznego źródła energii.

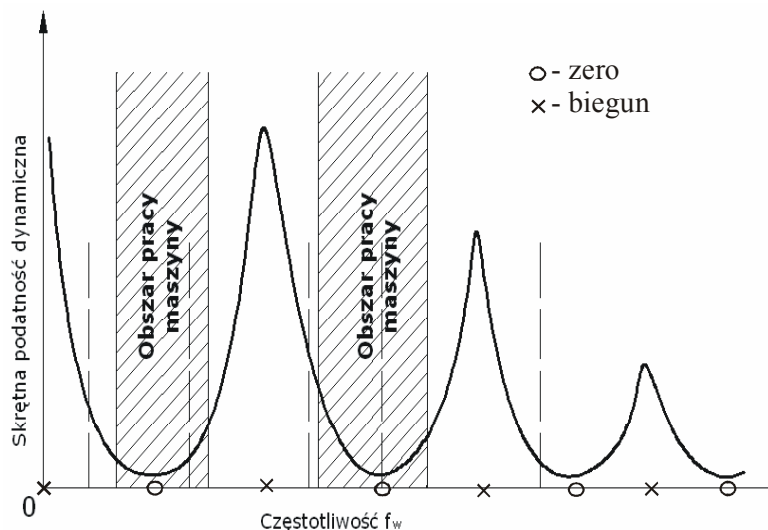
Wprowadzenie do syntezy układów napędowych przedstawiono w pracach [5 ÷ 8]. W niniejszym opracowaniu przedstawiona zostanie metoda mieszana syntezy układów dyskretnych drgających skrętnie. Metodę tę należy traktować jako uogólnienie wszystkich

metod syntezy układów mechanicznych. Projektowane tą metodą układy tworzą najbardziej złożone struktury ze wszystkich otrzymywanych drogą syntezy.

2. SYNTEZY ROZGAŁĘZIONYCH UKŁADÓW NAPĘDOWYCH

Metoda syntezy przedstawiona w tym rozdziale jest wynikiem połączenia dwóch klasycznych metod syntezy – rozkładu charakterystyki dynamicznej na ułamki proste z rozkładem funkcji charakterystycznej na ułamek łańcuchowy (nazwana w [3] metodą mieszaną). Syntezując powolność (impedancję mechaniczną) i ruchliwość dyskretnych układów drgających metodą mieszaną, otrzymuje się nowe struktury i jednocześnie zbiór wartości parametrów w przypadku jednego układu spełniającego te same wymagania.

Pierwszym etapem syntezy układów mechanicznych jest utworzenie funkcji matematycznych, które z jednej strony spełniają warunki stawiane układom, a z drugiej mogą być w sposób dokładny zrealizowane w układzie rzeczywistym. Przedstawiony w pracy sposób wyznaczania analitycznej postaci charakterystyki dynamicznej polega na przyjęciu ciągu częstości rezonansowych i antyrezonansowych (biegunów i zer poszukiwanej charakterystyki dynamicznej – rys.1).



Rys. 1. Poszukiwana charakterystyka dynamiczna

Jeśli więc przyjąć ciąg częstości w postaci:

– biegunów:

$$\omega_0 = 0 \text{ rad/s}, \omega_2 = 10 \text{ rad/s}, \omega_4 = 20 \text{ rad/s}, \omega_6 = 30 \text{ rad/s}, \omega_8 = 40 \text{ rad/s},$$

– zer:

$$\omega_1 = 5 \text{ rad/s}, \omega_3 = 15 \text{ rad/s}, \omega_5 = 25 \text{ rad/s}, \omega_7 = 35 \text{ rad/s},$$

to funkcję opisującą własności dynamiczne drgającego układu dyskretnego można przedstawić w postaci powolności:

$$U(s) = H \frac{s(s^2 + 10^2)(s^2 + 20^2)(s^2 + 30^2)(s^2 + 40^2)}{(s^2 + 5^2)(s^2 + 15^2)(s^2 + 25^2)(s^2 + 35^2)}, \quad (1)$$

gdzie: $s = j\omega$, H - dowolna liczba rzeczywista dodatnia.

Funkcję charakterystyczną, w postaci powolności (1), rozkłada się na ułamki proste jako:

$$\frac{U(s)}{H} = k_{\infty}s + \frac{B_1}{(s-j5)} + \frac{B_2}{(s+j5)} + \frac{B_1}{(s-j15)} + \frac{B_2}{(s+j15)} + \dots + \frac{B_7}{(s-j35)} + \frac{B_8}{(s+j35)}, \quad (2)$$

gdzie $k_{\infty}, k_0, B_1, B_2, \dots, B_{2n-1}, B_{2n}$ - wartości residuów w biegunach odpowiednio równe $\infty, 0, js_2, -js_2, \dots, js_{2n-1}, -js_{2n}, j = \sqrt{-1}$.

Residua te wylicza się z zależności:

$$\begin{cases} k_{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(s)}{s} = 1, \\ B_1 = \lim_{s \rightarrow j5} (s-j5)U(s), B_2 = \lim_{s \rightarrow -j5} (s+j5)U(s), \\ \vdots \\ B_7 = \lim_{s \rightarrow j35} (s-j35)U(s), B_8 = \lim_{s \rightarrow -j35} (s+j35)U(s). \end{cases} \quad (3)$$

Z równań (3) wynika, że $B_1, B_2, \dots, B_{2n-1}, B_{2n}$ są liczbami sprzężonymi, oraz wiedząc, że wszystkie residua na osi urojonej są rzeczywiste dodatnie, a więc

$$B_1 = B_2 = 134.585, B_3 = B_4 = 126.89, B_5 = B_6 = 109.585, B_7 = B_8 = 78.55, \quad (4)$$

i stąd

$$\begin{cases} \frac{B_1}{(s-j5)} + \frac{B_2}{(s+j5)} = \frac{2 \cdot 134.585s}{s^2 + 5^2}, \\ \frac{B_3}{(s-j15)} + \frac{B_4}{(s+j15)} = \frac{2 \cdot 126.89s}{s^2 + 15^2}, \\ \frac{B_5}{(s-j25)} + \frac{B_6}{(s+j25)} = \frac{2 \cdot 109.585s}{s^2 + 25^2}, \\ \frac{B_{2n-1}}{(s-j35)} + \frac{B_{2n}}{(s+j35)} = \frac{2 \cdot 78.55s}{s^2 + 35^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Uwzględniając (5), równanie (2) można zapisać w postaci

$$\frac{U(s)}{H} = s + \frac{269.17s}{(s^2 + 5^2)} + \frac{253.78s}{(s^2 + 15^2)} + \frac{219.95s}{(s^2 + 25^2)} + \frac{157.1s}{(s^2 + 35^2)}. \quad (6)$$

Charakterystykę (6) można przedstawić także w postaci kombinacji sumy ułamków prostych. Przykładowe postacie są następujące:

$$\frac{U(s)}{H} = s + \frac{(522.95s^3 + 66907.75s)}{(s^2 + 5^2)(s^2 + 15^2)} + \frac{219.95s}{(s^2 + 25^2)} + \frac{157.1s}{(s^2 + 35^2)}, \quad (7)$$

$$\frac{U(s)}{H} = s + \frac{(522.95s^3 + 66907.75s)}{(s^2 + 5^2)(s^2 + 15^2)} + \frac{(377.05s^3 + 367626.25s)}{(s^2 + 25^2)(s^2 + 35^2)}, \quad (8)$$

$$\frac{U(s)}{H} = s + \frac{(742.9s^4 + 448739s^2 + 43054562.5)}{(s^2 + 5^2)(s^2 + 15^2)(s^2 + 25^2)} + \frac{157.1s}{(s^2 + 35^2)}. \quad (9)$$

Funkcje wymierne w równaniach (6 ÷ 9) poddaje się rozkładowi na ułamek łańcuchowy, otrzymując wartości elementów inercyjnych i sprężystych w postaci:

$$U(s) = J_1 s + \frac{1}{\frac{s}{c_2} + \frac{1}{J_2 s}} + \frac{1}{\frac{s}{c_3} + \frac{1}{J_3 s}} + \frac{1}{\frac{s}{c_4} + \frac{1}{J_4 s}} + \frac{1}{\frac{s}{c_5} + \frac{1}{J_5 s}}, \quad (10)$$

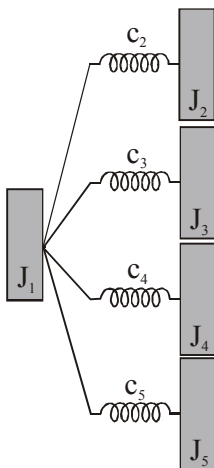
$$U(s) = J_1 s + \frac{1}{\frac{s}{c_2} + \frac{1}{J_2 s + \frac{1}{\frac{s}{c_3} + \frac{1}{J_3 s}}}} + \frac{1}{\frac{s}{c_4} + \frac{1}{J_4 s}} + \frac{1}{\frac{s}{c_5} + \frac{1}{J_5 s}}, \quad (11)$$

$$U(s) = J_1 s + \frac{1}{\frac{s}{c_2} + \frac{1}{J_2 s + \frac{1}{\frac{s}{c_3} + \frac{1}{J_3 s}}}} + \frac{1}{\frac{s}{c_4} + \frac{1}{J_4 s + \frac{1}{\frac{s}{c_5} + \frac{1}{J_5 s}}}}, \quad (12)$$

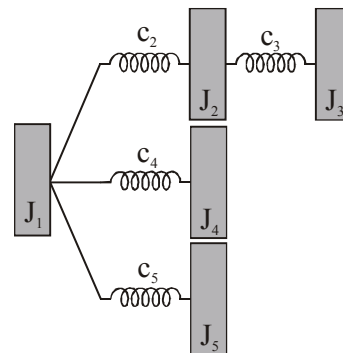
$$U(s) = J_1 s + \frac{1}{\frac{s}{c_2} + \frac{1}{J_2 s + \frac{1}{\frac{s}{c_3} + \frac{1}{J_3 s + \frac{1}{\frac{s}{c_4} + \frac{1}{J_4 s}}}}}} + \frac{1}{\frac{s}{c_5} + \frac{1}{J_5 s}}, \quad (13)$$

gdzie: J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 - wartości elementów inercyjnych poszukiwanego układu, c_2, c_3, c_4, c_5 - wartości elementów sprężystych poszukiwanego układu.

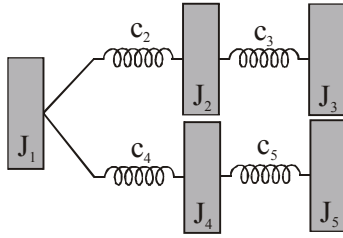
Na rysunkach 2 ÷ 5 przedstawiono dyskretny układy mechaniczne jako fizyczne realizacje zsyntezowanych charakterystyk 10 ÷ 13.



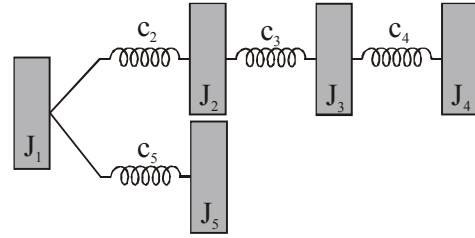
Rys. 2. Model układu napędowego odpowiadający rozkładowi charakterystyki (10)



Rys. 3. Model układu napędowego odpowiadający rozkładowi charakterystyki (11)



Rys. 4. Model układu napędowego odpowiadający rozkładowi charakterystyki (12)



Rys. 5. Model układu napędowego odpowiadający rozkładowi charakterystyki (13)

W odniesieniu do każdego z modeli dyskretnych układów mechanicznych można otrzymać zbiór parametrów dynamicznych. W przypadku rozkładu charakterystyki (6) do postaci (12), można tego dokonać dla następującego zbioru (wszystkie kombinacje sumy ułamków prostych):

$$\frac{U1(s)}{H} = s + \frac{(522.95s^3 + 66907.75s)}{(s^4 + 250s^2 + 5625)} + \frac{(377.05s^3 + 367626.25s)}{(s^4 + 1850s^2 + 765625)}, \quad (14)$$

$$\frac{U2(s)}{H} = s + \frac{(489.12s^3 + 173730s)}{(s^4 + 650s^2 + 15625)} + \frac{(410.88s^3 + 346228s)}{(s^4 + 1450s^2 + 275625)}, \quad (15)$$

$$\frac{U3(s)}{H} = s + \frac{(426.27s^3 + 333660.75s)}{(s^4 + 1250s^2 + 30625)} + \frac{(473.73s^3 + 208101.25s)}{(s^4 + 850s^2 + 140625)} \quad (16)$$

Wartości parametrów dynamicznych otrzymane w wyniku rozkładu charakterystyk (14) – (16) przedstawiono w tabelcy1.

Tabela 1. Wartości parametrów dynamicznych układu

Parametry dynamiczne	Rozpatrywana charakterystyka		
	$U1(s)$	$U2(s)$	$U3(s)$
J_1 [kgm ²]	1.00	1.00	1.00
c_2 [Nm/rad]	522.95	489.12	426.28
J_2 [kgm ²]	4.28	1.66	0.91
c_3 [Nm/rad]	350.71	501.38	654.28
J_3 [kgm ²]	7.61	9.46	9.98
c_4 [Nm/rad]	377.04	410.88	473.73
J_4 [kgm ²]	0.43	0.68	1.15
c_5 [Nm/rad]	43.09	263.06	111.77
J_5 [kgm ²]	0.05	0.58	0.33

W celu wprowadzenia tłumienia w układzie (rys.4) należy wyznaczyć wartości współczynników tłumienia zgodnie z założeniem, gdy:

- tłumienie jest proporcjonalne do sztywności

$$b_i = \lambda c_i, \quad (17)$$

gdzie: b_i - wartość elementu tłumiącego, c_i - wartość sztywności wyznaczona w wyniku syntezy, $\lambda = \text{idem}$ - współczynnik proporcjonalności, który powinien być dobrany z przedziału $0 < \lambda < \frac{2}{\omega_n}$, ω_n - największa wartość częstości;

- tłumienie jest proporcjonalne do masy

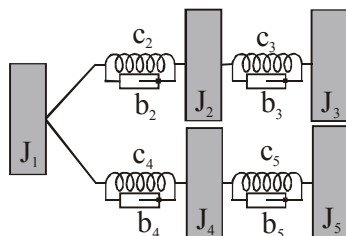
$$b_i = 2h \cdot m_i, \quad (18)$$

gdzie: h - parametr odpowiadający za tłumienie w układzie, mający wymiar częstości, dobierany z przedziału $0 < h < \omega_{\min}$, ω_{\min} - najmniejsza wartość częstości, m_i - wartość elementu inercyjnego wyznaczonego w wyniku syntezy.

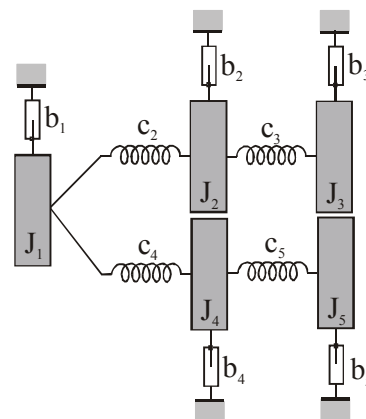
Wykorzystując zależności (17) i (18), wyznacza się parametry współczynników tłumienia (tablica 2) oraz otrzymuje się struktury modeli układów napędowych przedstawione na rys. 6. i 7.

Tabela 2. Parametry współczynników tłumienia

Współczynniki tłumienia	$\lambda = 0.004$			$h = 0.8$		
	$U1(s)$	$U2(s)$	$U3(s)$	$U1(s)$	$U2(s)$	$U3(s)$
b_1 [Ns/rad]	-	-	-	0.80	0.80	0.80
b_2 [Ns/rad]	2.09	1.96	1.71	3.43	1.33	0.73
b_3 [Ns/rad]	1.40	2.01	2.62	6.09	7.57	7.98
b_4 [Ns/rad]	1.51	1.64	1.90	0.35	0.54	0.92
b_5 [Ns/rad]	0.17	1.05	0.45	0.04	0.46	0.27

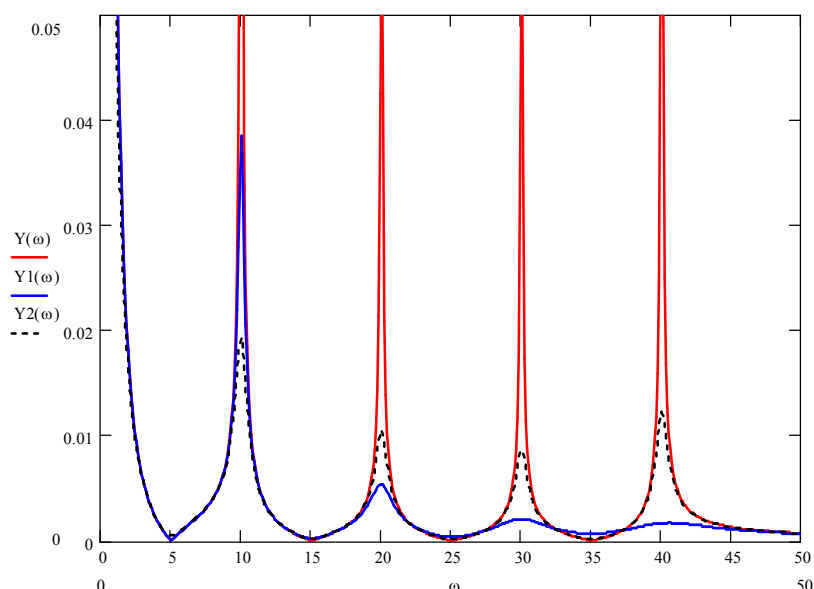


Rys. 6. Model układu napędowego z uwzględnieniem tłumienia proporcjonalnego do sztywności



Rys. 7. Model układu napędowego z uwzględnieniem tłumienia proporcjonalnego do masy

Problem analizy, wyznaczonej klasy drgających skrętnie mechanicznych układów napędowych wraz z parametrami dynamicznymi, sprowadza się do wyznaczenia zer i biegunów tych układów oraz przebiegów charakterystyki w postaci wykresu podatności dynamicznej (rys.8).



Rys. 8. Charakterystyki dynamiczne dyskretnych układów otrzymanych w wyniku syntezy: $Y(\omega)$ – podatność układu bez tłumienia, $Y1(\omega)$ – podatność układu z uwzględnieniem tłumienia proporcjonalnego do sztywności, $Y2(\omega)$ – podatność układu z uwzględnieniem tłumienia proporcjonalnego do masy

3. WNIOSKI

Synteżąc charakterystykę powolności układów drgających skądnie, otrzymuje się ciąg struktur i zbiór wartości parametrów odnośnie do jednej charakterystyki dynamicznej, w postaci ciągu częstości rezonansowych i antyrezonansowych. Tak utworzony zbiór modeli układów napędowych maszyn, a zwłaszcza parametry tych układów, spełniające żądane własności dynamiczne, stanowią bazę jakościowych poszukiwań modelu. Wybór modelu z grupy zsyntezowanych zależy od warunków pracy maszyny. Praca maszyny w pobliżu stanu rezonansowego jest możliwa tylko wtedy, kiedy wartość tłumienia wewnętrznego układu jest wystarczająco duża, ze względu na największe naprężenia. Innym sposobem poprawy działania maszyny jest odpowiedni dobór częstości naturalnej układu lub częstości wymuszenia. Wyjście ze strefy rezonansu jest podstawowym warunkiem pracy urządzenia, lecz nie eliminuje całkowicie problemu drgań. Jeśli jednak maszyna pracuje poza obszarem rezonansu, to obliczenia dynamiczne mogą być w wystarczający sposób zrealizowane dla układów z pominięciem wpływu tłumienia.

Część badań zrealizowano w ramach projektu badawczego N 502 071 31/3719 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2006 – 2009.

LITERATURA

1. Buchacz A., Dymarek A., Dzitkowski T.: Projektowanie i badanie wrażliwości ciągłych i dyskretno-ciągłych układów mechanicznych o żądanym widmie częstości w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Gliwice : Wyd. Pol. Śl., 2005. Monografia z. 88.
2. Družinskij I. A.: Mechaničeskie cepi. Leningrad: Mašinostroenie, 1977.

3. Dymarek A., Dzitkowski T.: Modelling and synthesis of discrete – continuous subsystems of machines with damping. “Journal of Materials Processing Technology”, 2005, 164-165, p. 1317-1326.
4. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Gliwice 2000.
5. Dzitkowski T.: Computer aided synthesis of discrete – continuous subsystems of machines with the assumed frequency spectrum represented by graphs. “Journal of Materials Processing Technology” 2004, 157-158, p. 144-149.
6. Dzitkowski T., Dymarek A.: The synthesis of machine driving systems. Twelfth International Scientific and Engineering Conference - Machine-Building and Technosphere on the Border of the XXI Century, 5, Donetsk – Sevastopol 2005, pp. 66÷70.
7. Dzitkowski T., Dymarek A.: Synthesis and sensitivity of machine driving systems. “Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering” 2006, 20, p. 359 - 362.
8. Dzitkowski T., Dymarek A.: Design and examining sensitivity of machine driving systems with required frequency spectrum. “Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering” 2008, Vol. 26, p.49 - 56.
9. Dzitkowski T., Dymarek A.: Projektowanie układów napędowych maszyn ze względu na widmo częstości. „Modelowanie Inżynierskie” 2008, nr 36, t.5. Tom 5. s.55 - 62.
10. Kruszewski J., Wittbrodt E., Walczyk Z.: Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym. T.2 : zagadnienia wybrane. Warszawa : WNT, 1993.
11. Marchelek K.: Dynamika obrabiarek. Warszawa : WNT, 1991.
12. Mężyk A.: Optymalizacja własności dynamicznych układów napędowych maszyn. Gliwice 2002. ZN Pol. Śl. s. „Mechanika” z.139.
13. Redfield R. C., Krishnan S.: Dynamic system synthesis with a bond graph approach. Part I: Synthesis of one-port impedances. “Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control” 1993, Vol. 115, No.3, p. 357-363.
14. Redfield R. C.: Dynamic system synthesis with a bond graph approach. Part II: Conceptual design of an inertial velocity indicator. “Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control” 1993, Vol. 115, No.3, 1993, p. 364-369.
15. Światoński E. [red]: Modelowanie mechatronicznych układów napędowych. Gliwice : Wyd. Pol. Śl., 2004. Monografia z. 70.

THE SYNTHESIS OF BRANCHED DRIVE SYSTEMS WITH DAMPING

Summary. The selection of the dynamical properties of machines is one of the methods enhancing their durability and reliability. Such task may be accomplished with the use of the analysis and synthesis algorithm. Accordingly, the issue of the synthesis, enabling the determination of the parameters and structure of the systems in view of their dynamical characteristics, may be applied as a tool supporting the design process under any operating conditions. The scope of discussion is the mixed method of synthesising dynamic characteristic enables the derivation of the parameters and models of drive systems.