MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
38, s. 279-286, Gliwice 2009

# ROZWIĄZANIA PODSTAWOWE QUASI-STATYCZNEGO ZAGADNIENIA TERMODYFUZJI SPRĘŻYSTEJ W OŚRODKU O WŁAŚCIWOŚCIACH MIKROPOLARNYCH

BARBARA WIECZOREK

*Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Śląska*
*e-mail: barbara.wieczorek@polsl.p*

Streszczenie. W opracowaniu rozważane jest zagadnienie termodyfuzji w ośrodku sprężystym o właściwościach mikropolarnych. Przebieg procesu opisany jest układem sprzężonych równań, którego postać zależy od przyjętego potencjału termodynamicznego. Dla sformułowanego zagadnienia w oparciu o transformatę Fouriera i jej własności oraz teorię dystrybucji wyznaczono rozwiązania podstawowe otrzymując funkcje opisujące zmienność wielkości charakteryzujących przemiany cieplne i dyfuzyjne oraz składowych pola przemieszczeń i pola obrotów wywołanych źródłowymi przyczynami.

## 1. WSTĘP

Klasyczna teoria sprężystości i lepkosprężystości opiera się na idealnym modelu ośrodka ciągłego, w którym transmisja obciążeń odbywa się wyłącznie za pośrednictwem tensora naprężeń. Przy tym założeniu otrzymuje się opis deformacji ciała przez symetryczne tensory odkształcenia i naprężenia.

Miedzy klasyczną teorią a doświadczeniem występują znaczne rozbieżności. Szczególnie zauważalne są one w przypadku ciał wielocząsteczkowych. W tych przypadkach korzysta się z modyfikacji klasycznego modelu ciała ciągłego, przyjmując założenie, że transmisja oddziaływań odbywa się przez wektor siły i wektor momentu. Takie założenie sprowadza się do stwierdzenia, iż na ciało działają nie tylko naprężenia siłowe, ale również naprężenia momentowe. Wówczas deformacja ośrodka charakteryzuje się niesymetrycznym tensorem deformacji i naprężenia.

Istota rozważań dotyczących modelowania procesów termodynamicznych w przypadku wieloskładnikowego ośrodka mikropolarnego opiera się na analizie zjawisk zachodzących w rozpatrywanym ośrodku. Analiza sposobu wzajemnego oddziaływania pól w trakcie procesu znajduje odzwierciedlenie w bilansie masy, pędu, momentu pędu i energii oraz nierówności wzrostu entropii. Natomiast dopiero sprecyzowanie fizykalnych równań pozwala uwzględnić fizykalne cechy materiału. Wprowadzenie założeń konstytutywnych umożliwia określenie ogólnej postaci równań tworzących. Na ich podstawie uzyskuje się równania procesu termodyfuzji, uwzględniające sprzężenie przepływów cieplnych i dyfuzyjnych oraz wpływów mechanicznych dla ośrodka o właściwościach mikropolarnych.

Zarówno dyfuzja jak i termodyfuzja w ośrodku stałym są procesami fizykalnymi, które często znajdują zastosowane w nowych technologiach. Teoria sprężystości i termosprężystości była rozwijana przez Nowackiego (por. [4]). Równania opisujące proces termodyfuzji z uwzględnieniem lepkosprężystych własności ośrodka przedstawił Kubik (por. [2]). Postać równań opisujących wzajemne sprzężenie przemian cieplnych i dyfuzyjnych z wpływami mechanicznymi w ośrodku o właściwościach mikropolanych została przedstawiona w [3]. Inne opisy termodyfuzji w ośrodku lepkosprężystym o właściwościch mikropolarnych, wynikające z równoważnych potencjałów termodynamicznych zawiera [8].

Istotą rozważań jest określenie zależności przedstawiających rozkład wielkości charakteryzujących przemiany zachodzące w ośrodku, na podstawie równań procesu. W zakresie sprężystości i termosprężystości rozwiązania uzyskano poprzez rozseparowanie równań opisujących proces (por. [4]). Jednak możliwości zastosowania tej metody są ograniczone i dotyczą tylko niektórych typów układów różniczkowy cząstkowych. Obecnie zostanie przedstawiona metoda rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych oparta na przekształceniu całkowym Fouriera, umożliwiająca poszukiwanie rozwiązań dla dowolnego typu układu równań.

## 2. RÓWNANIA PROCESU TERMODYFUZJI

Zagadnienie quasi-statyczne sprzężonej termodyfuzji sprężystej w ośrodku o właściwościach mikropolarnych opisane jest układem ośmiu równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, określających charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola naprężeń.

Istnieją cztery równoważne sformułowania opisu przepływów termodyfuzyjnych w ośrodku, które wynikają z różnych potencjałów termodynamicznych procesu (por. [3], [8]). Postać układów równań dla ośrodka sprężystego centrosymetrycznego wyprowadzona w oparciu o różne potencjały termodynamiczne jest następująca:

$$\begin{aligned}
&-(\tilde{\mu}+\tilde{\alpha})u_{i,jj}-(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu}-\tilde{\alpha})u_{j,ji}-2\tilde{\alpha}\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\tilde{\gamma}_S S_{,i}+\tilde{\gamma}_C C_{,i}=X_i\\
&-(\tilde{\gamma}+\tilde{\varepsilon})\varphi_{i,jj}-(\tilde{\gamma}-\tilde{\varepsilon}+\tilde{\beta})\varphi_{j,ji}+4\tilde{\alpha}\varphi_i-2\tilde{\alpha}\in_{ijk}u_{k,j}=Y_i\\
&T_o\dot{S}-k_1\left[-\tilde{\gamma}_S u_{j,j}+\mathrm{m}_1 S+\mathrm{l}_1 C\right]_{,ii}=R_1\\
&\dot{C}-k_2\left[-\tilde{\gamma}_C u_{j,j}+\mathrm{l}_1 S+\mathrm{n}_1 C\right]_{,ii}=R_2
\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&-(\mu+\alpha)u_{i,jj}-(\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji}-2\alpha\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\gamma_T T_{,i}+\gamma_C C_{,i}=X_i\\
&-(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj}-(\gamma+\beta-\varepsilon)\varphi_{j,ji}+4\alpha\varphi_i-2\alpha\in_{ijk}u_{k,j}=Y_i\\
&T_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma_T u_{j,j}+\mathrm{m}_2 T+\mathrm{l}_2 C\right]-k_1 T_{,ii}=R_1\\
&\dot{C}-k_2\left[\gamma_C u_{j,j}+\mathrm{l}_2 T+\mathrm{n}_2 C\right]_{,ii}=R_2
\end{aligned}\tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
&-(\bar{\mu}+\bar{\alpha})u_{i,jj}-(\bar{\lambda}+\bar{\mu}-\bar{\alpha})u_{j,ji}-2\bar{\alpha}\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\bar{\gamma}_T\,T_{,i}+\bar{\gamma}_M\,M_{,i}=X_i\\
&-(\bar{\gamma}+\bar{\varepsilon})\varphi_{i,jj}-(\bar{\gamma}-\bar{\varepsilon}+\bar{\beta})\varphi_{j,ji}+4\bar{\alpha}\,\varphi_i-2\bar{\alpha}\in_{ijk}u_{k,j}=Y_i\\
&T_o\frac{\partial}{\partial t}\left[-\bar{\gamma}_T\,u_{j,j}+\mathtt{m}_3\,T+\mathtt{l}_3\,M\right]-k_1T_{,ii}=R_1\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left[-\bar{\gamma}_M\,u_{j,j}+\mathtt{l}_3\,T+\mathtt{n}_3\,M\right]-k_2M_{,ii}=R_2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(\hat{\mu}+\hat{\alpha})u_{i,jj}-(\hat{\lambda}+\hat{\mu}-\hat{\alpha})u_{j,ji}-2\hat{\alpha}\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\hat{\gamma}_S\,S_{,i}+\hat{\gamma}_M\,M_{,i}=X_i\\
&-(\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon})\varphi_{i,jj}-(\hat{\gamma}-\hat{\varepsilon}+\hat{\beta})\varphi_{j,ji}+4\hat{\alpha}\,\varphi_i-2\hat{\alpha}\in_{ijk}u_{k,j}=Y_i\\
&T_o\dot{S}-k_1\left[-\hat{\gamma}_S\,u_{j,j}+\mathtt{m}_4\,S-\mathtt{l}_4\,M\right]_{,ii}=R_1\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left[-\hat{\gamma}_M\,u_{j,j}+\mathtt{l}_4\,S+\mathtt{n}_4\,M\right]-k_2M_{,ii}=R_2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

gdzie $\lambda$, $\mu$, $\alpha$, $\varepsilon$, $\gamma$, $\beta$ oznaczają odpowiednio stałe materiałowe oraz $\gamma_T=\alpha_T(3\lambda+2\mu)$ i$\gamma_C=\alpha_C(3\lambda+2\mu)$, przy czym $\alpha_T$ i $\alpha_C$ to współczynniki przewodności cieplnej i dyfuzyjnej. Ponadto $\mathtt{m}_\mathtt{k}$, $\mathtt{n}_\mathtt{k}$, $\mathtt{l}_\mathtt{k}$ dla $\mathtt{k}=1,2,3,4$ są funkcjami relaksacji determinującymi proces dla izotropowego materiału. Pomiędzy współczynnikami $\lambda$, $\mu$, $\alpha$, $\varepsilon$, $\gamma$, $\beta$ oraz $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\beta}$ oraz $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\beta}$ oraz $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\beta}$, a także $\mathtt{m}_\mathtt{k}$, $\mathtt{n}_\mathtt{k}$, $\mathtt{l}_\mathtt{k}$ zachodzą relacje, wynikające z zależności między funkcjonałami termodynamicznymi (por. [6]). Ponadto w opisie wykorzystano alternator $\in_{ijk}$, który przy parzystej permutacji wskaźników przyjmuje wartość +1, przy nieparzystej permutacji wartość –1 oraz wartość równą zero, gdy dwa wskaźniki są równe.

W układach (1)-(4) symbole $X_i$, $Y_i$, $R_1$, $R_2$, $k_1$, $k_2$ oznaczają odpowiednio składowe wektora sił masowych i momentów masowych, źródło ciepła i masy, współczynnik przewodności cieplnej i dyfuzyjnej.

Na każdy z układów równań (1)-(4) składają się trzy równania ruchu w przemieszczeniach i trzy równania ruchu w obrotach oraz równanie przepływu cieplnego i równanie dyfuzji.

Poszukiwanymi wielkościami zależnie od przyjętego funkcjonału termodynamicznego są odpowiednio: pole przemieszczeń $u_i$ i obrotów $\varphi_i$ oraz entropia $S$ lub potencjał chemiczny $M$, temperatura $T$ lub koncentracja $C$.

## 3. METODA ROZWIĄZANIA

Przy wyznaczaniu rozwiązania układów (1)-(4) stosowana będzie transformacja Fouriera i jej własności (por. [1]), która dla dowolnej funkcji $g(x_i,t)$ określonej w przestrzeni $\Re^4$ zdefiniowana jest wzorem:

$$
\mathsf{F}[g(x_i,t)]=\hat{g}(s_i,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Re^4}g(x_i,t)\,e^{-i(x_is_i+t\omega)}dx_idt \tag{5}
$$

przy czym $g(x_i,t)$ jest bezwzględnie całkowalną w przedziale $(-\infty;+\infty)$, tzn. jest lokalnie całkowalna oraz istnieje całka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x_i,t)|\, dx_i dt < \infty$$

Transformatę odwrotną określa wyrażenie

$$g(x_i,t) \cong \mathsf{F}^{-1}[\hat{g}(s_i,\omega)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Re^4} \hat{g}(s_i,\omega)\, e^{i(x_i s_i + t\omega)} ds_i\, d\omega \tag{6}$$

gdzie $\hat{g}(x_i,t)$ bezwzględnie całkowalną w przedziale $(-\infty;+\infty)$.

Ogólna teoria dotycząca transformacji Fouriera zawiera część obejmującą dystrybucje, które wykorzystane zostaną przy konstrukcji rozwiązania podstawowego.

## 4. ROZWIĄZANIE ROWNAŃ PROCESU

Różniczkując pierwsze dwa równania w układach (1)-(4) i wprowadzając dylatację przemieszczania i obrotu

$$e \cong u_{i,i} \quad , \quad f \cong \varphi_{i,i} \tag{7}$$

otrzymuje się układy składające się z czterech równań różniczkowych cząstkowych:

$$\overline{\mathbf{A}}^{(k)}(\partial_i,\partial_t)\, \overline{\mathbf{y}}^{(k)} = \overline{\mathbf{F}} \tag{8}$$

przy $\mathrm{k} = 1,2,3,4$, gdzie:

$$\overline{\mathbf{A}}^{(1)} = \begin{bmatrix} -(2\tilde{\mu}+\tilde{\lambda})\partial_{ii} & 0 & \tilde{\gamma}_S\,\partial_{ii} & \tilde{\gamma}_C\,\partial_{ii} \\ 0 & -(2\tilde{\gamma}+\tilde{\beta})\partial_{ii}+4\tilde{\alpha} & 0 & 0 \\ k_1\tilde{\gamma}_S\,\partial_{ii} & 0 & -k_1\mathrm{m}_1\,\partial_{ii}+T_o\,\partial_t & -k_1\mathrm{l}_1\,\partial_{ii} \\ k_2\tilde{\gamma}_C\,\partial_{ii} & 0 & -k_2\mathrm{l}_1\,\partial_{ii} & -k_2\mathrm{n}_1\,\partial_{ii}+\partial_t \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}^{(2)} = \begin{bmatrix} -(2\mu+\lambda)\partial_{ii} & 0 & \gamma_T\partial_{ii} & \gamma_C\,\partial_{ii} \\ 0 & -(2\gamma+\beta)\partial_{ii}+4\alpha & 0 & 0 \\ T_o\,\gamma_T\,\partial_t & 0 & -k_1\,\partial_{ii}+T_o\mathrm{m}_2\,\partial_t & T_o\mathrm{l}_2\,\partial_t \\ k_2\gamma_C\,\partial_{ii} & 0 & k_2\,\mathrm{l}_2\,\partial_{ii} & -k_2\,\mathrm{n}_2\,\partial_{ii}+\partial_t \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}^{(3)} = \begin{bmatrix} -(2\bar{\mu}+\bar{\lambda})\partial_{ii} & 0 & \bar{\gamma}_T\partial_{ii} & \bar{\gamma}_M\,\partial_{ii} \\ 0 & -(\bar{\gamma}+\bar{\beta})\partial_{ii}+4\bar{\alpha} & 0 & 0 \\ -T_o\bar{\gamma}_T\,\partial_t & 0 & -k_1\,\partial_{ii}+T_o\mathrm{m}_3\,\partial_t & T_o\mathrm{l}_3\,\partial_t \\ -\bar{\gamma}_M\,\partial_t & 0 & \mathrm{l}_3\,\partial_t & -k_2\,\partial_{ii}+\mathrm{n}_3\,\partial_t \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}^{(4)} = \begin{bmatrix} -(2\hat{\mu}+\hat{\lambda})\partial_{ii} & 0 & \hat{\gamma}_S\,\partial_{ii} & \hat{\gamma}_M\,\partial_{ii} \\ 0 & -(2\hat{\gamma}+\hat{\beta})\partial_{ii}+4\hat{\alpha} & 0 & 0 \\ k_1\hat{\gamma}_S\,\partial_{ii} & 0 & -k_1\mathrm{m}_4\,\partial_{ii}+T_o\,\partial_t & k_1\mathrm{l}_4\,\partial_{ii} \\ -\hat{\gamma}_M\,\partial_t & 0 & \mathrm{l}_4\,\partial_t & -k_2\,\partial_{ii}+\mathrm{n}_4\,\partial_t \end{bmatrix}$$

natomiast:

$$\left(\overline{\mathbf{F}}\right)^{\mathrm{T}} = \left[X_{i,i}\,,\,Y_{i,i}\,,R_1\,,R_2\right]$$
$$\left(\overline{\mathbf{y}}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,f\,,\,S\,,\,C\right]$$
$$\left(\overline{\mathbf{y}}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,f\,,\,T\,,C\right]$$
$$\left(\overline{\mathbf{y}}^{(3)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,f\,,\,T,\,M\right]$$
$$\left(\overline{\mathbf{y}}^{(4)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,f\,,\,S\,,\,M\right]$$

W skutek przeprowadzonych przekształceń trzy równania ruchu w przemieszczeniach i trzy równania ruchu w obrotach sprowadzone zostały do dwóch równań, opisujących zmienność dylatacji przemieszczenia i obrotu. Ponadto w każdym z układów uzyskano rozprzężenie drugiego z równań od pozostałych równań. Zatem rozwiązanie poszukiwane będzie w dwóch krokach. Najpierw dla każdego z układów, rozwiązywany będzie układ trzech zależnych równań, a następnie oddzielnie niezależne równanie.

W zapisie macierzowym układ trzech sprzężonych równań w rozpatrywanych układach (8) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{k})}\left(\partial_i,\partial_t\right)\mathbf{y}^{(\mathrm{k})} = \mathbf{F} \tag{9}$$

gdzie macierz $\mathbf{A}^{(\mathrm{k})}$ uzyskano z macierzy $\overline{\mathbf{A}}^{(\mathrm{k})}$ usuwając drugi wiersz i kolumnę odpowiadającą niesprzężonemu równaniu w układzie (8), natomiast:

$$\left(\mathbf{F}\right)^{\mathrm{T}} = \left[X_{i,i}\,,R_1\,,R_2\right]$$
$$\left(\mathbf{y}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,S\,,C\right]$$
$$\left(\mathbf{y}^{(2)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,T\,,C\right]$$
$$\left(\mathbf{y}^{(3)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,T,\,M\right]$$
$$\left(\boldsymbol{y}^{(4)}\right)^{\mathrm{T}} = \left[e\,,S\,,M\right]$$

Dla zagadnienia opisanego układem równań różniczkowych (9) wyznacza się rozwiązanie podstawowe, wykorzystując przekształcenie całkowe Fouriera (por. [1], [5]) poszukując dystrybucji $\mathbf{E}^{(\mathrm{k})}$ spełniającej równanie

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{k})}\left(\partial_i,\partial_t\right)\mathbf{E}^{(\mathrm{k})} = \mathbf{I}\,\delta\left(x_i\right)\delta\left(t\right) \tag{10}$$

Po wykonaniu transformacji Fouriera równań układu (10) zgodnie ze wzorem (5) otrzymuje się układ równań:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(\mathrm{k})}(s_i,\omega)\;\hat{\mathbf{E}}^{(\mathrm{k})}(s_i,\omega) = \left(2\pi\right)^{-2}\mathbf{I} \tag{11}$$

który są układem równań algebraicznych, a macierz $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową.

Rozwiązaniem układu (11) jest macierz $\hat{\mathbf{E}}^{(\mathrm{k})}$, której elementy przyjmują postać:

$$\hat{E}_{ij}^{(\mathrm{k})} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\mathrm{c}^{(\mathrm{k})}}\left[\frac{\widetilde{P}_{ij}^{(\mathrm{k})}}{s^2+\mathrm{a}^{(\mathrm{k})}i\omega} + \frac{\widetilde{Q}_{ij}^{(\mathrm{k})}}{s^2+\mathrm{b}^{(\mathrm{k})}i\omega} + \frac{\widetilde{R}_{ij}^{(\mathrm{k})}}{s^2}\right] \quad dla \quad i,j=1,2,3 \tag{12}$$

Elementy macierzy $\widetilde{P}_{ij}^{(\mathrm{k})},\widetilde{Q}_{ij}^{(\mathrm{k})},\widetilde{R}_{ij}^{(\mathrm{k})},\widetilde{S}_{ij}^{(\mathrm{k})}$ i stałe $\mathrm{a}^{(\mathrm{k})},\mathrm{b}^{(\mathrm{k})},\mathrm{c}^{(\mathrm{k})}$ zależą od współczynników występujących odpowiednio w równaniach (9).

Wykonując transformację odwrotną wg wzoru (6) elementów macierzy $\hat{\mathbf{E}}^{(\mathrm{k})}$ otrzymuje się macierz rozwiązań podstawowych (por. [5]) układów (9) określoną następująco :

$$E_{ij}^{(\mathrm{k})} = P_{ij}^{(\mathrm{k})}\,\Gamma_{\mathrm{a}}^{(\mathrm{k})}(x_i,t) + Q_{ij}^{(\mathrm{k})}\,\Gamma_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{k})}(x_i,t) + R_{ij}^{(\mathrm{k})}\,\frac{\delta(t)}{|x|} \tag{13}$$

gdzie:

$$\Gamma_{\mathrm{a}}^{(\mathrm{k})}(x_i,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{4\pi t}{\mathrm{a}}\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{a}\,|x_i x_i|}{4t}} & ,\ dla\ t > 0 \\ 0 & ,\ dla\ t < 0 \end{cases}$$

Określona wzorem (13) macierz rozwiązań podstawowych zawiera 9 niezależnych dystrybucji, spełniających założenia omówione w [5] i może posłużyć do wyznaczenia rozwiązania wyjściowych zagadnień (9) zgodnie z relacją:

$$\mathbf{y}^{(\mathrm{k})} = \mathbf{E}^{(\mathrm{k})} * \mathbf{F} \tag{14}$$

gdzie symbol gwiazdki oznacza splot funkcji. Wzór (14) wynika z ogólnych własności rozwiązań podstawowych równań różniczkowych fizyki matematycznej (por. [5]).

Wówczas

$$y_i^{(\mathrm{k})} = \left\{ P_{ij}^{(\mathrm{k})}\Gamma_{\mathrm{a}}^{(\mathrm{k})}(x_i,t) + Q_{ij}^{(\mathrm{k})}\Gamma_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{k})}(x_i,t) + R_{ij}^{(\mathrm{k})}\,\frac{\delta(t)}{|x|} \right\} * F_j^{(\mathrm{k})} \tag{15}$$

Rozwiązanie niesprzężonego równania w układach (8) uzyskuje się analizując jego transformatę Fouriera, która prowadzi do równania algebraicznego.

$$\left(\mathrm{d}^{(\mathrm{k})} s^2 + \mathrm{e}^{(\mathrm{k})}\right) \hat{f}^{(\mathrm{k})} = \hat{Y}_{i,i} \tag{16}$$

przy czym:

$$\mathrm{d}^{(\mathrm{k})} = \begin{cases} 2\tilde{\gamma} + \tilde{\beta} & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 1 \\ 2\gamma + \beta & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 2 \\ 2\bar{\gamma} + \bar{\beta} & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 3 \\ 2\hat{\gamma} + \hat{\beta} & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 4 \end{cases} \qquad \mathrm{e}^{(\mathrm{k})} = \begin{cases} 4\tilde{\alpha} & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 1 \\ 4\alpha & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 2 \\ 4\bar{\alpha} & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 3 \\ 4\hat{\alpha} & ,\ gdy\ \mathrm{k} = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie równania (16) określa transformację pola obrotów. Wykonując transformację odwrotną uzyskuje się zależność określającą pole obrotów

$$f^{(\mathrm{k})} = \mathrm{G}_7^{(\mathrm{k})}\,\Omega_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{k})}(x_i,t) * Y_{i,i} \tag{17}$$

gdzie:

$$\Omega_{\mathrm{e}}^{(\mathrm{k})}(x_i,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}\,|\mathrm{x}|}\,\delta(t)$$

Stała $\mathrm{G}_7^{(\mathrm{k})}$ określona jest przed współczynniki występujące w równaniach (16), dla których otrzymano rozwiązanie.

Pole przemieszczeń $u_i$ i obrotów $\varphi_i$ uzyskuje się analizując transformatę Fouriera trzech równań ruchu w przemieszczeniach i trzech równań ruchu w obrotach składających się na układy (1)-(4), które mają postać:

$$\kappa_1^{(k)}\, s^2 \hat{u}_i - \kappa_2^{(k)}\, is_i \hat{e} - 2\alpha \in_{ijk} is_j \hat{\varphi}_k + \gamma_1\, is_i \hat{y}_2^{(k)} + \gamma_2\, is_i \hat{y}_3^{(k)} = \hat{X}_i \tag{18}$$

$$\kappa_3^{(k)}\, s^2\, \hat{\varphi}_i - \kappa_4^{(k)}\, is_i \hat{f} - 2\alpha \in_{ijk} is_j \hat{u}_k + 4\alpha\, \hat{\varphi}_i = \hat{Y}_i \tag{19}$$

gdzie stałe $\kappa_1^{(k)}$, $\kappa_2^{(k)}$, $\kappa_3^{(k)}$, $\kappa_4^{(k)}$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ odpowiadają współczynnikom występującym w tych równaniach.

Po wykonaniu transformat rozwiązań (15) i (17), podstawieniu do (18) i (19) oraz uporządkowaniu otrzymuje się układ równań, którego rozwiązanie określa transformatę składowych pola przemieszczeń i obrotów. Dokonując następnie transformaty odwrotnej wyznaczonych rozwiązań uzyskuje się zależności określające pole przemieszczeń i obrotów:

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} = \mathrm{G}_4^{(k)} \frac{1}{|x|} * \Bigg\{ & \left( \mathrm{H}_{1j}^{(k)}\, \Gamma_{\mathrm{a}}^{(k)}(x_i,t) + \mathrm{H}_{2j}^{(k)}\, \Gamma_{\mathrm{b}}^{(k)}(x_i,t) - \mathrm{H}_{3j}^{(k)} \frac{1}{2|x|} \right) * F_{j,i} + X_i + \\ & + \mathrm{G}_5^{(k)}\, \Omega_{\mathrm{d}}^{(k)}(x_i,t) * \left[ \in_{ijk} \left( \Omega_{\mathrm{e}}^{(k)}(x_i,t) * \left( \mathrm{Q}_1^{(k)}\, Y_{m,mjk} + \mathrm{Q}_2^{(k)} \frac{1}{|x|} * Y_{m,mjk} \right) + Y_{k,j} \right) + \right. \\ & \left. + \mathrm{G}_3^{(k)} \frac{1}{|x|} * X_{j,ji} - \mathrm{G}_6^{(k)}\, X_i \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(k)} = \mathrm{G}_1^{(k)}\, \Omega_{\mathrm{d}}^{(k)}(x_i,t) * \Bigg\{ & \mathrm{G}_3^{(k)} \frac{1}{|x|} * \in_{ijk} \Bigg[ X_{k,j} + \\ & + \left( \mathrm{H}_{1j}^{(k)}\, \Gamma_{\mathrm{a}}^{(k)}(x_i,t) + \mathrm{H}_{2j}^{(k)}\, \Gamma_{\mathrm{b}}^{(k)}(x_i,t) - \mathrm{H}_{3j}^{(k)} \frac{1}{2|x|} \right) * F_{j,jk} \Bigg] + \\ & + \Omega_{\mathrm{e}}^{(k)}(x_i,t) * \left( \mathrm{Q}_1^{(k)}\, Y_{m,m\,i} + \mathrm{Q}_2^{(k)} \frac{1}{|x|} * Y_{m,m\,i} \right) + Y_i \Bigg\} \end{aligned} \tag{21}$$

Współczynniki występujące w (20) i (21) zależą bezpośrednio od współczynników występujących w wyjściowych układach równań (1)-(4).

## 5. PODSUMOWANIE

Wyznaczone rozwiązania (15), (16), (19) i (20) dla układów (1)-(4) mogą być wykorzystane do poszukiwania rozwiązań równań zagadnienia w ciele sprężystym.

Rozwiązania konkretnych zagadnień przepływów termodyfuzyjnych w ośrodku o właściwościach mikropolarnych z uwzględnieniem warunków początkowo-brzegowych uzyskuje się na podstawie wyprowadzonego rozwiązania podstawowego i twierdzenia o wzajemności dla tego typu zagadnienia (por. [6]), po przyjęciu źródeł wywołujących proces termodyfuzji w postaci jednostkowych impulsów:

$$X_i = 1_i \delta(x_i)\delta(t) \quad , \quad Y_i = 1_i \delta(x_i)\delta(t) \quad , \quad R_1 = 1\delta(x_i)\delta(t) \quad , \quad R_2 = 1\delta(x_i)\delta(t) \tag{22}$$

Uzyskane rozwiązania pozwalają na przeprowadzenie analizy zmienności pól wpływających na proces termodyfuzji oraz określenie wpływu wzajemnych sprzężeń między rozpatrywanymi polami na ich rozkład.

LITERATURA


1. Davis B.: Integral transforms and their applications, Springer, New York 1978
2. Kubik J.: Thermodiffusion in viscoelastic solids, SGT 8,2,1986.
3. Nowacki W.: Teoria niesymetrycznej sprężystości, PWN, Warszawa, 1971.
4. Nowacki W.: Teoria sprężystości, PWN Warszawa 1970.
5. Szmydt Z.: Transformata Fouriera i równania różniczkowe liniowe, PWN, Warszawa 1972.
6. Wieczorek B.: The connections between the material coefficients for different thermodynamical formulation of the thermodiffusion in the micropolar medium, 5rd International Conference "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings", Bratislava 2006
7. Wieczorek B.: The forms of the reciprocal theorem for different thermodynamic formulations of the thermodifusion process in the micropolar medium, VIIth International Conference "Static-structural and constructional-physical problems of engineering constructions", Košice 2005
8. Wieczorek B.: The forms of the thermodiffusion flows equations in the micropolar medium for different thermodynamic formulations of the process, 4rd International Conference "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings", Bratislava 2005


## BASIC SOLUTIONS OF QUASI-STATIC PROBLEM OF ELASTIC THERMODIFFUSION IN A MEDIUM OF MICROPOLAR PROPERTIES

Summary. The paper discusses the problem of determination of displacement coupled with the flow of mass and heat consideration, which is analysed in the elastic solid with micropolar properties. The problem of quasi-static process is described by diffusion and conductivity equations and systems of motion equations for displacements and rotations. The system of equations has eight partial differential equations of the second order. The method of the solution for that equations' system is presented. The transformation methods are used in the construction of solutions of the system of equations. The solution of that system is built on the basis of Fourier's transformation, its properties and theory of distribution and on that basis the solution of the initial system has been obtained.