

POŁĄCZENIE METODY EKSPERYMENTALNEJ I ODWROTNEJ PRZEWODZENIA CIEPŁA DO ESTYMACJI WŁAŚCIWOŚCI CIEPLNYCH MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH

STANISŁAW KUCYPERA

Institut Techniki Ciepłej, Politechnika Śląska, e-mail: Stanisław.kucypera@.polsl.pl

Streszczenie W pracy przedstawiono metodę identyfikacji parametrów termofizycznych materiałów kompozytowych. Do identyfikacji wykorzystano wyniki pomiarów czasowego rozkładu temperatury w wybranych punktach próbki oraz rozwiązanie odwrotnego współczynnikowego zagadnienia przepływu ciepła. Model matematyczny przepływu ciepła w badanej próbce sformułowano w oparciu o metodę bilansów elementarnych. Odwrotne współczynnikowe zagadnienie nieustalonego przepływu ciepła rozwiązano wykorzystując iteracyjną metodę dynamicznej estymacji sekwencyjnej. W celu poprawienia zbieżności i dokładności procesu estymacji zastosowano przedziałowe wygładzanie danych pomiarowych. Przedstawiono przykładowe wyniki badań.

1. WSTĘP

Materiały oparte na żywicach epoksydowych, silikonowych, fenolowych, itp., ze względu na wysoką wytrzymałość mechaniczną oraz stabilne właściwości elektryczne w warunkach podwyższonej temperatury a także podwyższonej wilgotności względnej mają bardzo szerokie zastosowanie w wielu gałęziach przemysłu, np. w lotnictwie, medycynie, sporcie, budownictwie, przemyśle morskim, samochodowym, transportowym, elektrotechnice czy elektronice.

Z danych literaturowych wynika, że materiały te mają bardzo dobrze zidentyfikowane właściwości mechaniczne, dobrze elektryczne, a bardzo słabo cieplne. Natomiast stosowanie ich w urządzeniach czy konstrukcjach gdzie wymagane jest dobre odprowadzenie ciepła, czy ich izolacyjność pociąga za sobą dokładną znajomość ich parametrów termofizycznych tzn. współczynnika przewodzenia ciepła i ciepła właściwego. Wykorzystanie jako nośnika w strukturze wewnętrznej tych materiałach włókien bawełnianych, szklanych, itp. powoduje, że właściwości cieplne tych materiałów stają się anizotropowe. Ze względu na ich złożoną budowę wartości tych parametrów zależą od wiele czynników, np.: rodzaju nośnika i lepiszcza (matrycy), wilgotności względnej, temperatury i wewnętrznej struktury, więc wyznaczenie ich metodami teoretycznymi może być obarczone dużymi błędami, a często jest wręcz niemożliwe. Z kolei wyznaczenie eksperymentalnie każdego parametru w oddzielnych pomiarach jest stosunkowo czasochłonne i kosztowne. Dlatego w pracy do wyznaczenia tych parametrów połączono metodę eksperymentalną z metodą odwrotną przewodzenia ciepła. Zagadnienie odwrotne rozwiązano iteracyjną metodą estymacji sekwencyjnej. W celu

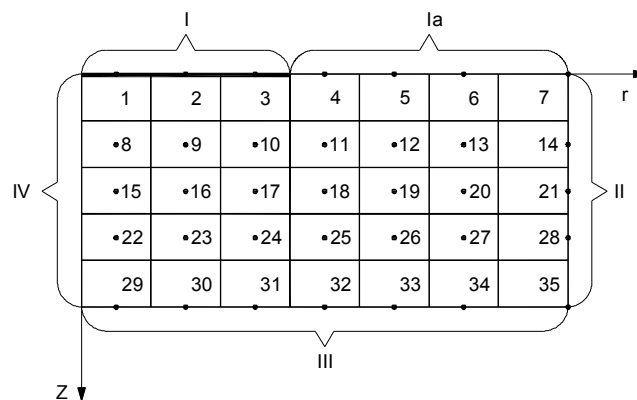
poprawy dokładności otrzymanych wyników estymacji zastosowano metodę wstępnego uśredniania (wygładzania) wyników pomiarów.

Jak wykazały przeprowadzone analizy numeryczne, w wyniku uśredniania poprawiły się znacznie odpowiedzi temperaturowe układu pomiarowego na wymuszenie cieplne brane do procesu estymacji, co istotnie zwiększyło dokładność otrzymanych ocen.

Następnie wykorzystując zaproponowany algorytm i opierając się na rzeczywistych danych pomiarowych wyznaczono składowe kierunkowe współczynnika przewodzenia ciepła λ_r i λ_z oraz ciepło właściwe c badanej próbki dla jednego z materiałów opartego na osnowie żywiczej. Przedstawiono wybrane wyniki badań.

2. PRZEDSTAWIENIE GEOMETRII I WARUNKÓW BRZEGOWYCH DLA BADANEJ PRÓBKII ORAZ SFORMUŁOWANIE MODELU MATEMATYCZNEGO

Model fizyczny układu pomiarowego składał się z cienkiego (w postaci folii) oporowego grzejnika elektrycznego, dwóch symetrycznie rozmieszczonych względem grzejnika walcowych próbek oraz czterech o różnych rozmiarach płytek miedzianych z termoparami. Próbki wymieniały ciepło z otoczeniem przez powierzchnie cylindryczne i powierzchnie czołowe ze współczynnikami wnikania ciepła odpowiednio (h_r, h_H, h_0) . Ze względu na symetrię przepływu ciepła do obu próbek jak również jego rozptyw promieniowy można w modelu matematycznym rozpatrywać $\frac{1}{4}$ pojedynczej próbki. Na rys.1 przedstawiono dyskretny podział próbki pomiarowej oraz sposób jej grzania i chłodzenia na stanowisku pomiarowym.



Rys. 1 Dyskretyzacja analizowanego obszaru próbki i opis warunków brzegowych:

I- $q \neq 0$; I_a- $h_0 = 0$; II- $h_r \neq 0$ i $t_{ot} \neq 0$; III- $h_H \neq 0$ i $t_{ot} \neq 0$; IV- (warunek symetrii)

Dwuwymiarowe zagadnienie przepływu ciepła dla podanej geometrii cylindrycznej opisano znanym równaniem różniczkowym [6]:

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r \frac{\partial t}{\partial r} \right), \quad (r, z, \tau) \in (0, r_s) \times (0, H) \times (0, \tau_k), \quad (1)$$

z warunkami granicznymi:

- dla powierzchni grzanej:

$$\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = \dot{q} \quad \text{dla } 0 \leq r \leq r_{zr} \quad \text{i} \quad \lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{dla } r_{zr} < r \leq r_s \quad (1a)$$

- dla przeciwległej powierzchni czołowej:

$$\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=H} = h_H (t - t_{ot}), \quad 0 \leq r \leq r_s \quad (1b)$$

- dla powierzchni cylindrycznej:

$$\lambda_r \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=\pm r_s} = h_r (t - t_{ot}), \quad 0 \leq z \leq H \quad (1c)$$

- warunek symetrii dla rozptywu promieniowego ciepła:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lambda_r \frac{\partial t}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z \leq H \quad (1d)$$

- warunek początkowy:

$$t(z, r, \tau = 0) = t_{ot}, \quad (r, z) \in (0, R) \times (0, H) \quad (1e)$$

gdzie: t - temperatura w próbce, t_{ot} - temperatura otoczenia, r, z - współrzędne przestrzenne (promieniowa i osiowa), τ - czas, λ_r, λ_z - kierunkowe współczynniki przewodzenia ciepła materiału, ρ - gęstość materiału, c - ciepło właściwe materiału, h - współczynnik wnikania ciepła, r_s, H - promieniowy i osiowy rozmiar próbki.

3. KRÓTKA CHARAKTERYSTYKA METODY WYGŁADZANIA WYNIKÓW POMIAROWYCH ORAZ ALGORYTM ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

3.1. Istota metody wygładzania wyników pomiarowych

W przypadku estymacji parametrów cieplnych z zastosowaniem iteracyjnej metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej bardzo duże znaczenie ma macierz kowariancji błędów ocen modyfikowana w procesie estymacji, a w szczególności wartości diagonalnych elementów tej macierzy. Z wstępnie wykonanej analizy wynika, że im mniejsze są elementy diagonalne tej macierzy tym oceny są dokładniejsze. Należy w tym miejscu dodatkowo podkreślić, że w procesie estymacji norma tej macierzy dąży do normy macierzy kowariancji błędów pomiarowych. Stąd wynika, że błędy ocen estymowanych parametrów są określone błędami pomiarowymi. Dlatego dla zwiększenia dokładności estymowanych wielkości stosuje się m.in. optymalizację eksperymentu, której celem jest częściowe zmniejszenie błędów pomiarowych, [1]. Innym sposobem mającym istotny wpływ na szybkość i dokładność estymacji jest wcześniejsze wygładzanie pomiarów przed wykorzystaniem ich w procesie estymacji [2, 3]. Obie metody są szczególnie ważne przy stosowaniu metod iteracyjnych, czy to w poszczególnych krokach czasowych, czy też dla całego pomiarowego przedziału czasowego.

W pracy do wygładzania wyników pomiarów zaproponowano metodę uśredniania arytmetycznego w małych podprzedziałach czasowych (nazywanych przedziałami wygładzania) wokół punktu środkowego podprzedziału, [4].

Istota zaproponowanej metody wygładzania pomiarów polega na podziale całego okresu czasu, w którym wykonywany był eksperyment na podprzedziały i w każdym podprzedziale czasowym uśredniano wynik pomiaru. Otrzymaną w ten sposób wartość średnią przypisano średniej wartości czasu w tym podprzedziale. Innymi słowy wygładzanie wyników pomiarów polegało na uśrednianiu temperatury w małych przedziałach czasowych wokół punktu środkowego przedziału, co można zapisać:

$$\bar{t}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{k,i} \quad (2)$$

Dla każdej wartości średniej w przypadku n wykonanych pomiarów w danym podprzedziale

oszacowano zgodnie z zasadami statystyki matematycznej odchylenia standardowe dla tej

$$\text{wartości, wg zależności: } \sigma_{\tilde{t}_k} = \frac{\sigma_{t_k}}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

Jak widać z wzoru (3) wartość odchylenia standardowego po wygładzaniu zmniejsza się \sqrt{n} razy, co przy stosunkowo dużej wartości n prowadzi do istotnego zmniejszenia błędów pomiarowych. Oszacowane w ten sposób wartości odchylenia standardowego średnich w poszczególnych krokach czasowych przypisano wartościom błędów pomiarowych, które przyjęto w procesie identyfikacji iteracyjną metodą dynamicznej estymacji sekwencyjnej.

3.2. Algorytm rozwiązania odwrotnego zagadnienia przewodzenia ciepła

Istota iteracyjnej metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej polega na sformułowaniu funkcji celu F w następującej postaci, [5]:

$$F(\mathbf{p}_k, \tilde{\mathbf{Y}}_k, j) = \left(h(\hat{\mathbf{p}}_k^{j-1}) - \tilde{\mathbf{Y}} \right)^T \mathbf{R}_k^{-1} \left(h(\hat{\mathbf{p}}_{k+1}^{j-1}) - \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \right) + \frac{1}{j} \left(\left(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k+1}^{j-1} \right)^T \left[\mathbf{G}_{k/k}^j \right]^{-1} \left(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k+1}^{j-1} \right) \right) \quad (4)$$

gdzie: \mathbf{Y} – wektor mierzonych temperatur, \mathbf{p} – wektor identyfikowanych wielkości, \mathbf{G} – macierz kowariancji błędów wielkości estymowanych, \mathbf{R} – macierz kowariancji błędów wielkości mierzonych (temperatur).

Minimalizując funkcję celu oraz uwzględniając równanie modelu pomiarowego opisanego zależnością:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{p}_k) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (5)$$

Algorytm rozwiązania zagadnienia identyfikacji parametrycznej za pomocą iteracyjnej metody dynamicznej estymacji sekwencyjnej (DES) można zapisać w następującej postaci:

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1/k+1}^{(j)} = \hat{\mathbf{p}}_{k+1/k+1}^{(j-1)} + \mathbf{M}_{k+1}^{(j)} \left[\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}^{(j)} \hat{\mathbf{p}}_{k+1/k+1}^{(j-1)} \right] \quad (6)$$

\mathbf{M} jest macierzą wzmocnienia określoną zależnością:

$$\mathbf{M}_{k+1}^{(j)} = \mathbf{G}_{k/k} \left[\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)} \right]^T \left\{ \hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)} \mathbf{G}_{k/k} \left[\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)} \right]^T + \mathbf{R}_{k+1} \right\}^{-1} \quad (7)$$

a macierz kowariancji błędów estymowanych parametrów \mathbf{G} określone jest zależnością:

$$\mathbf{G}_{k+1/k+1} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)} \hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(ost_j)} \right] \cdot \mathbf{G}_{k/k} \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)} \hat{\mathbf{H}}_k^{(ost_j)} \right]^T + \mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)} \mathbf{R}_{k+1} \left[\mathbf{M}_{k+1}^{(ost_j)} \right]^T \quad (8)$$

Elementy macierzy wrażliwości \mathbf{H} mają postać:

$$\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^{(j)} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{p}} \right\}_{k+1}^{(j)} \quad (9)$$

Jako zakończenie procesu iteracyjnego przyjęto następujące kryteria:

$$\left\| \hat{\mathbf{B}}_k^{(j)} \hat{\mathbf{p}}_k^{(j)} - \tilde{\mathbf{Y}}_k \right\| \leq \gamma \sum_{i=1}^k \beta_i; \text{ lub } \left\| \hat{\mathbf{p}}_k^{(j)} - \hat{\mathbf{p}}_k^{(j-1)} \right\| < \varepsilon \quad (10)$$

gdzie: β_i jest sumą błędów pomiarów temperatury w k -tym kroku czasowym. Natomiast wektory \mathbf{p} i \mathbf{Y} określone są zależnościami:

$$\hat{\mathbf{p}}_k^{(j)} = \left\{ \tilde{\mathbf{p}}_{1/1}^{(ost_1)}, \hat{\mathbf{p}}_{2/2}^{(ost_2)}, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{k/k}^{(ost_j)} \right\} \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k = \left\{ \tilde{\mathbf{t}}_1, \tilde{\mathbf{t}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{t}}_m \right\} \quad (12)$$

a macierz \mathbf{B} zapisać można równaniem:

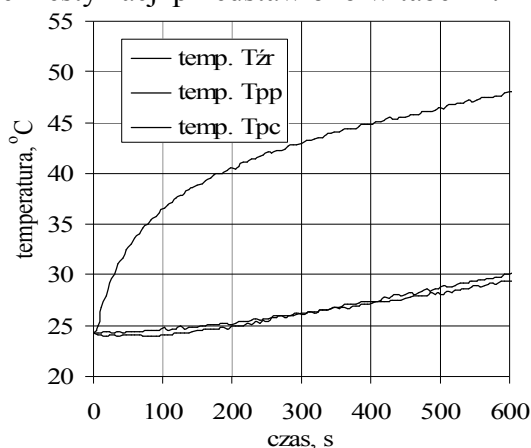
$$\mathbf{B}_k^{(j)} = \text{diag} \left\{ \hat{\mathbf{H}}_{1/1}^{(ost_1)}, \hat{\mathbf{H}}_{2/2}^{(ost_2)}, \dots, \hat{\mathbf{H}}_{k/k}^{(j)} \right\} \quad (13)$$

4. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ

Dokładność zaproponowanej metody zweryfikowano za pomocą eksperymentu numerycznego. W celu otrzymania symulowanych danych pomiarowych do wyników dokładnych t_i otrzymanych z rozwiązania zagadnienia bezpośredniego (dla założonych wartości parametrów cieplnych i geometrii próbek) dodawano zaburzenie $(\omega \cdot v)$ zgodnie z zależnością:

$$t_i^{mierz} = t_i + \omega \cdot v \quad (14)$$

gdzie v jest odchyleniem standardowym. Dla zakłóceń podlegających rozkładowi normalnemu z 99% poziomem ufności dla danych pomiarowych $-2.576 \leq \omega \leq 2.576$. Wielkość ta obliczana jest za pomocą generatora liczb pseudolosowych. W eksperymencie numerycznym zagadnienie bezpośrednio rozwiązano dla próbek cylindrycznych o następujących parametrach: średnica próbki i źródła $d_p = 72$ mm i $d_g = 40$ mm, wysokość próbki $h = 15.1$ mm, gęstość materiału $\rho = 1785$ kg/m³ i gęstość strumienia ciepła $\dot{q} = 306.12$ W/m². Na podstawie analizy wrażliwości termopary umieszczono w węzłach 1, 21, 29. Parametry cieplne przyjęte w eksperymencie numerycznym: $k_r = 0.650$ W/(mK), $k_z = 0.260$ W/(mK) i ciepło właściwe $c = 1337$ J/(kgK) oraz błąd zakłócenia $v = 0.05$ K. Wejściowe dane do procesu estymacji przyjęto: $k_r = 0.40$ W/(mK), $k_z = 0.40$ W/(mK) i ciepło właściwe $c = 850$ J/(kgK). Po dwóch krokach czasowych estymacji otrzymano: $k_r = 0.649$ W/(mK), $k_z = 0.261$ W/(mK) i ciepło właściwe $c = 1335$ J/(kgK). W rzeczywistym eksperymencie wykorzystano te same dane materiału żywicznego, geometrię próbek oraz wartość strumienia ciepła, lecz wykorzystano rzeczywisty rozkład temperatury otrzymany z pomiarów przedstawiony na rys. 2. Wstępne wyniki identyfikacji parametrów termofizycznych dla rzeczywistych danych pomiarowych zaproponowanym algorytmem estymacji przedstawiono w tabeli 1.



Rys. 2. Rozkład temperatury w mierzonych punktach próbki w funkcji czasu. T_{zr} – temperatura w węźle 1, T_{pp} – temperatura w węźle 29, T_{pc} – temperatura w węźle 21

Tabela 1. Wyniki otrzymane po czterech krokach czasowych podczas procesu estymacji

Parametr	Wartości początkowe	identyfikacja bez uśredniania	identyfikacja z uśrednianiem
		Ocena po czterech krokach czasowych	Ocena po czterech krokach czasowych
λ_r	0.500	0.790	1.017
λ_z	0.500	0.674	0.333
c	700	850	957

Z przeprowadzonej analizy wynika, że w przypadku procesu estymacji bez stosowania uśredniania wyników pomiarów lepszą dokładność otrzymuje się poprzez zwiększanie liczby kroków czasowych, czyli wydłużania czasu eksperymentu. Natomiast w procesie estymacji z uśrednianiem wyników pomiarów prawie dokładne wyniki otrzymują się szybciej i dodawanie dodatkowych kroków czasowych nie zmienia wartości parametrów estymowanych.

7. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Wykonane badania numeryczne i eksperymentalne wykazały, że zaproponowane modyfikacje w rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego w postaci wygładzania wyników pomiarów oraz zastosowanie metody iteracyjnej znacznie poprawiają wyniki estymacji. Powodem tego jest skrócenie czasu przeprowadzenia eksperymentu, a tym samym wykorzystanie mniejszej liczby wykonywanych pomiarów w czasie. Zmniejsza to liczbę wprowadzanych błędów pomiarowych, którymi obarczony jest każdy wykorzystany w procesie estymacji pomiar. Być może lepszy efekt otrzymano by zmieniając kolejność zaproponowanych metod estymacyjnych.

W przyszłości należałoby również przeanalizować możliwość zastosowania zaproponowanej metody do estymacji parametrów zmieniających się w funkcji temperatury.

LITERATURA

1. MARTIN T. J. and DULIKRAVICH G.S.: Inverse determination of temperature-dependent thermal conductivity using steady surface data on arbitrary objects. Proc. 34th ASME National heat transfer conference, (compact Disc) Pittsburgh 2000, USA.
2. Taler J.: Teoria i praktyka identyfikacji procesów przepływu ciepła. Wrocław: Wyd. Ossolińskich, 1995.
3. Legras. J.: Praktyczne metody analizy numerycznej. (tłum z j. fran) Warszawa: WNT, 1974.
4. Kucypera S.: Estymacja parametrów termofizycznych izotropowych za pomocą metody filtracji dynamicznej oraz przedziałowego uśredniania wyników pomiarów. Modelowanie Inżynierskie. t 3, Nr 34, Gliwice 2007, s.73-78.
5. MOULTANOVSKY A.V., REKADA M.: Inverse heat conduction problem approach to identify the thermal characteristics of super-hard synthetic materials. Inverse Problems in Engineering, vol. 10, No 11, 2002, pp.79-85.

JOINT EXPERIMENTAL AND INVERSE HEAT CONDUCTION METHODS TO DETERMINATION THERMAL PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIALS

Summary. The paper presents a method of identification of the chosen thermophysical parameters of the composite materials. Those parameters have been used the measurement results of the transient temperature at selected points of the investigated sample and a solution of the inverse coefficient heat conduction problem. The mathematical model of the heat conduction in the investigated sample has been formulated basing on the control volume method. The inverse coefficient transient heat conduction problem has been solved using a iterative method of the dynamic sequantial estimation. To improve a convergence and precision of the estimate process the interval smoothing method to the measurement data has been applied. The investigated method has been illustrated by selected results.