

PODATNOŚĆ DYNAMICZNA OBUSTRONNIE PODPARTEJ BELKI Z TŁUMIENIEM W RUCHU UNOSZENIA

SŁAWOMIR ŻÓLKIEWSKI

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,
Politechnika Śląska
e-mail:slawomir.zolkiewski@polsl.pl*

Streszczenie. Podatność dynamiczna jest jedną z szeroko stosowanych metod analizy dynamicznej [1-3, 6-7], dzięki której możliwe staje się określenie wzajemnych relacji pomiędzy amplitudą drgań a częstotliwością wymuszenia. W pracy zamodelowano układ obustronnie podpartej belki, znajdującej się na obrotowym stole, wraz z uwzględnieniem w modelu sił tłumiących amplitudy przemieszczenia. Belka znajduje się na obrotowym stole obracającym się ze stałą prędkością kątową. Rozważany ruch ograniczono do ruchu płaskiego, natomiast belkę do belki o przekroju symetrycznym, stałym na jej całej długości.

1. WSTĘP

Praca dotyczy problemu tłumionych drgań giętych obustronnie podpartej belki w ruchu unoszenia. W modelu matematycznym uwzględniono elementy będące wynikiem wykonywania przez układ ruchu obrotowego, w tym w szczególności sił Coriolisa i sił odśrodkowych, a także elementy związane z występowaniem sił tłumiących. Elementy te rozważano nie tylko w powiązaniu z ruchem głównym, ale przede wszystkim z ruchem lokalnym, w znacznym stopniu modyfikując postać podatności dynamicznej. W artykule przedstawiono formułę matematyczną podatności dynamicznej oraz wykresy podatności dynamicznej w zależności od częstotliwości jednostkowej siły wymuszającej. W pracy podatność dynamiczną rozumie się jako amplitudę uogólnionego przemieszczenia poprzecznego wywołanego przez siłę poprzeczną o jednostkowej amplitudzie.

2. MODELOWANE BELKI

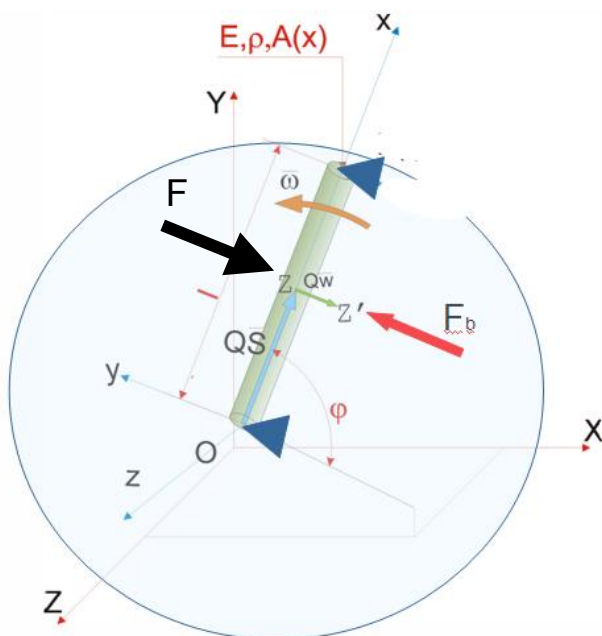
2.1. Model belki obustronnie podpartej na obrotowym stole

Założono, że w środku belki, przedstawionej na rys. 1, działa harmoniczna siła poprzeczna „ F ” o jednostkowej amplitudzie, jednostkowa w związku z definicją podatności dynamicznej. Siła tłumiąca „ F_b ” jest opisana jako funkcja pochodnej drgań przemieszczenie ośrodka w czasie oraz rozważana jako siła obracająca się razem z układem. Obydwu końcom belki przypisano zerowe przemieszczenie oraz zerową siłę poprzeczną, ponieważ belka jest belką obustronnie podpartą. Ruch belki opisano za pomocą równań ruchu (15-16) przedstawionych w rozdziale 3

niniejszej pracy. Układ równań opisujących warunki brzegowe do równań (13, 15-16) zapisano w następującej postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0,t) = 0, \\ E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0, \\ w(l,t) = 0, \\ E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0, \\ E \cdot I_z \cdot \frac{\partial^3 w(l/2,t)}{\partial x^3} = -2 \cdot \int_0^{l/2} F_0 \cdot \delta(x-l/2) \cdot e^{j\Omega t} dx = -1 \cdot e^{j\Omega t}. \end{array} \right. \quad (1)$$

w każdej chwili $t \geq 0$.



Rys. 1. Model rozważanej obustronnie podpartej belki z tłumieniem (F_b)

2.2. Zagadnienie własne

Poszukuje się rozwiązania w postaci iloczynu funkcji własnych zmiennej przemieszczenia oraz funkcji własnych zmiennej czasu jako:

$$w(x,t) = V(x) \cdot W(t), \quad (2)$$

gdzie:

$V(x)$ - funkcja własna przemieszczenia,

$W(t)$ - funkcja własna czasu.

Uwzględniając harmoniczny przebieg funkcji własnej zmiennej czasu, przyjęto co następuje:

$$w(x,t) = V(x) \cdot e^{j\Omega t}, \quad (3)$$

gdzie:

Ω - częstość siły poprzecznej,

$j = \sqrt{-1}$ - jednostka urojona.

Zagadnienie brzegowe przedstawiono w następującej postaci:

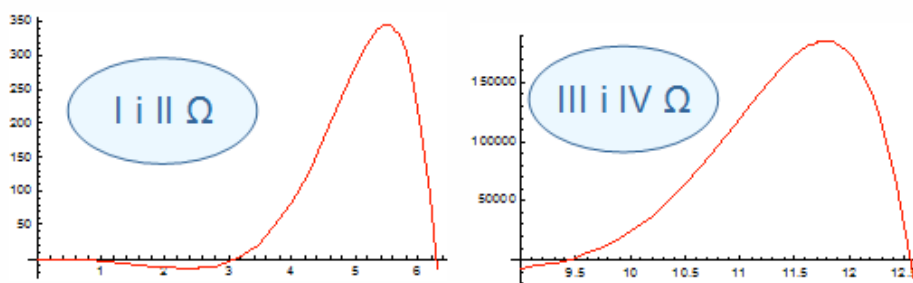
$$\begin{aligned} V^{IV}(x) - k^4 V(x) &= 0, \\ V(0) = 0, \quad V''(0) &= 0, \\ V(l) = 0, \quad V''(l) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Po rozwiązaniu układu równań ze stałymi całkowania z ogólnego rozwiązania układu:

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ -C_2 + C_4 &= 0, \\ C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) + C_3 \sinh(kl) + C_4 \cosh(kl) &= 0, \\ -C_1 \sin(kl) - C_2 \cos(kl) + C_3 \sinh(kl) + C_4 \cosh(kl) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

otrzymano wartości własne poprzez przyrównanie wyznacznika charakterystycznego układu (5) do zera:

$$-4 \sin(kl) \sinh(kl) = 0 \tag{6}$$



Rys. 2. Rozwiązania graficzne równania charakterystycznego układu (6) w przypadku ogólnym I, II, III i IV postaci drgań

Kolejne cztery wartości własne z równania (6) oraz z rozwiązania graficznego (rys. 2) wynoszą:

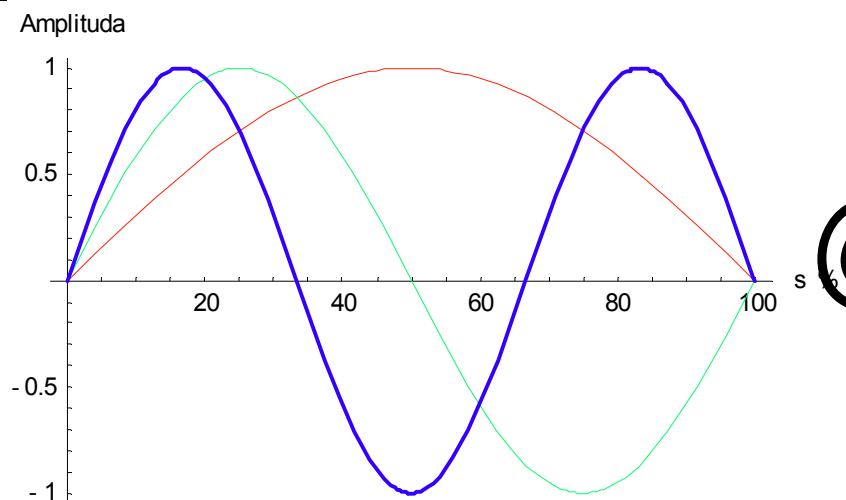
$$k_1 l = \pi, \quad k_2 l = 2\pi, \quad k_3 l = 3\pi, \quad k_4 l = 4\pi. \tag{7}$$

Ciąg wartości własnych belki obustronnie podpartej rozwiązanych również graficznie na rys. 2, można zatem zapisać następującym wyrażeniem:

$$k = n\pi. \tag{8}$$

Funkcja własna przemieszczenia belki obustronnie podpartej jest równa:

$$V(x) = C_1 \left[\sin(kx) - \frac{\sin(kl)}{\sinh(kl)} \sinh(kx) \right] \tag{9}$$



Rys. 3. Trzy kolejne postacie drgań belki obustronnie podpartej

Na rys. 3 przedstawiono kolejne trzy postacie drgań belki obustronnie podpartej. Zakłada się tożsamość funkcji własnych zmiennej przemieszczenia belki stacjonarnej z funkcjami własnymi zmiennej przemieszczenia belki w ruchu unoszenia, a różnice wynikające z obracania się belki uwzględniono dalej w modelu matematycznym układu.

3. RÓWNANIA RUCHU BELKI

W rozdziale zawarto wyprowadzenie równań ruchu belek obustronnie podpartych na obrotowym dysku. W modelu matematycznym uwzględniono wpływ sił tłumienia. Równania ruchu wyprowadzono za pomocą metod klasycznych, zakładając współrzędne uogólnione jako poszczególne współrzędne opisujące położenie i orientację analizowanego przekroju oraz prędkości uogólnione jako odpowiednie pochodne względem czasu z tych współrzędnych:

$$\begin{aligned} q_1 = r_x, \dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{r}_x = v_x, \\ q_2 = r_y, \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt} = \dot{r}_y = v_y. \end{aligned} \quad (10)$$

Siły uogólnione zapisano w zależności od elementów macierzy rotacji, której użyto do transformacji poszczególnych wartości z lokalnego układu współrzędnych do globalnego układu współrzędnych, uwzględniając zaczepienie siły w połowie długości belki względem osi X siła ma postać:

$$F_x = \frac{\partial F_g Q_{11} l}{2 \partial x}. \quad (11)$$

Siły uogólnione względem osi Y globalnego układu współrzędnych są następujące:

$$F_y = \frac{\partial F_g Q_{21} l}{2 \partial x}. \quad (12)$$

Po przyjęciu, że oś belki pokrywa się z osią x lokalnego układu współrzędnych, założono, że wszystkie siły poprzeczne, które zwrócone są przeciwnie do zwrotu osi y lokalnego układu współrzędnych wywołują momenty ujemne, natomiast siły zwrócone zgodne ze zwrotami osi y lokalnego układu współrzędnych, wywołują dodatnie momenty. Otrzymano równania ruchu w postaci macierzowej:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega^2 \cdot s \\ \omega^2 \cdot w \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{b}{M} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -w \cdot \omega \\ s \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{b}{M} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & - 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\omega} \cdot w \\ \dot{\omega} \cdot s \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & = -\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie:

E – moduł Younga,

I_z – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki,

b – współczynnik tłumienia siły tłumiącej $F_b = b \cdot \frac{\partial w}{\partial t}$.

Dalej przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} w_X &= w \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = w \cdot \sin \varphi, \\ w_Y &= w \cdot \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -w \cdot \cos \varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

Ostatecznie uwzględniając zależności (13-14), otrzymano równania ruchu belki drgającej giętnie z uwzględnieniem tłumienia w ruchu unoszenia zrzutowane na osie X i Y globalnego układu współrzędnych:

Rzutując względem osi X globalnego układu odniesienia:

$$\frac{\partial^2 w_X}{\partial t^2} + \frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 w_X}{\partial x^4} + \frac{b}{M} \cdot \left[\frac{\partial w_X}{\partial t} + \omega \cdot (s \cdot \sin \varphi - w_Y) \right] = 2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial w_Y}{\partial t} - \omega^2 \cdot (s \cdot \cos \varphi - w_X). \quad (15)$$

Po zrzutowaniu na oś Y:

$$\frac{\partial^2 w_Y}{\partial t^2} + \frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 w_Y}{\partial x^4} + \frac{b}{M} \cdot \left[\frac{\partial w_Y}{\partial t} - \omega \cdot (s \cdot \cos \varphi - w_X) \right] = -\omega^2 \cdot (s \cdot \sin \varphi - w_Y) - 2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial w_X}{\partial t}. \quad (16)$$

4. PODATNOŚĆ DYNAMICZNA ANALIZOWANEGO UKŁADU

Podatność dynamiczną wyznaczono po ortogonalizacji równań ruchu i poszukiwaniu rozwiązania w postaci sumy iloczynów funkcji własnych zmiennej przemieszczenia oraz funkcji własnych zmiennej czasu. Po kilku przekształceniach uzyskano postać podatności dynamicznej w następującej postaci:

$$Y = Sqrt \left\{ \frac{V(x)V(l)}{\rho A \gamma_n^2 (Y_1^2 + Y_2^2)} \left[(Y_1 Y_3 + Y_2 Y_4)^2 + (Y_3^2 - Y_4^2 + Y_5^2 - Y_6) Y_4 - Y_2 Y_3 \right] \right\} \quad (17)$$

gdzie:

$$Y_1 = (a^2 k^4 - \omega^2 - \Omega^2)^2 - (b\Omega/M)^2 + (b\omega/M)^2 - 4\omega^2 \Omega^2 \quad (18)$$

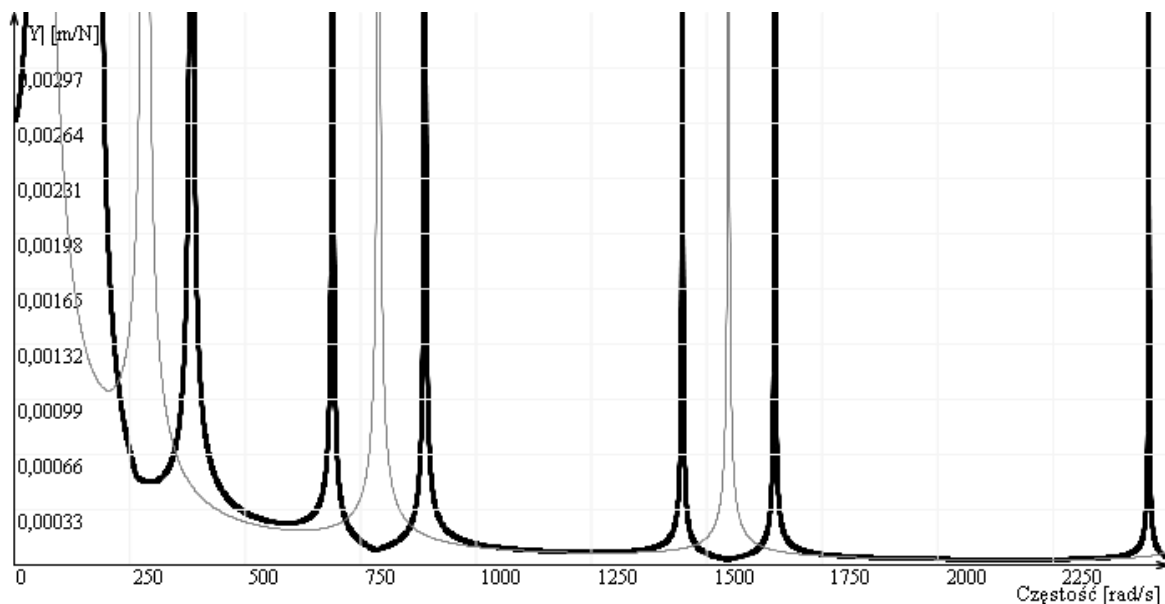
$$Y_2 = 2 \frac{b}{M} (a^2 k^4 - \omega^2 - \Omega^2) \Omega + 4 \frac{b}{M} \omega^2 \Omega \quad (19)$$

$$Y_3 = a^2 k^4 - \omega^2 - \Omega^2 \quad (20)$$

$$Y_4 = \frac{b}{M} \Omega \quad (21)$$

$$Y_5 = \frac{b}{M} \omega \quad (22)$$

$$Y_6 = 4\omega^2 \Omega^2 \quad (23)$$



Rys. 4. Podatność dynamiczna belki drgającej giętnie w ruchu unoszenia bez tłumienia (linia gruba) oraz belki stacjonarnej (linia cienka)

Na rys. 4 przedstawiono przykładowy wykres podatności dynamicznej (17) belki obracającej się z prędkością kątową 100 rad/s drgającej giętnie bez tłumienia.



Rys. 5. Wykres podatność dynamicznej tłumionej belki w ruchu unoszenia

Na rysunku 5 przedstawiono przykładowy wykres podatności dynamicznej belki obracającej się przy znacznym tłumieniu drgań.

5. PODSUMOWANIE

Problem tłumionych drgań giętnych belek w ruchu unoszenia ma wiele zastosowań technicznych [1-7]. W niniejszej pracy przeanalizowano układ belki obustronnie podpartej z rozważaniem w modelu matematycznym rotacyjnych sił tłumienia. Rozważany model można bezpośrednio przełożyć na aplikację w postaci turbiny pompy łopatkowej, gdzie poszczególne łopatki są zamocowane na obracającej się tarczy [3, 5]. Model ten powinien dodatkowo uwzględniać nieliniowości związane z geometrycznym kształtem łopatek oraz nieliniowości fizyczne wynikające z zastosowanych tworzyw. Siły tłumienia w przedstawionym modelu mają za zadanie dyssypację energii z jednej strony oraz transfer energii z ruchu głównego w pracy traktowanego jako ruch unoszenia do lokalnych drgań układu. Wyprowadzona w pracy podatność dynamiczna belki podpartej obustronnie wyraża z jednej strony wpływ prędkości unoszenia na charakterystyki dynamiczne (wyraźne przesunięcia „zer” charakterystyki podatności dynamicznej oraz podwojenie biegunów podatności dynamicznej w miejscu zer charakterystyki układu stacjonarnego) oraz z drugiej strony zawiera elementy związane z występowaniem w układzie sił tłumienia. W pracy wyniki przedstawiono w postaci formuły matematycznej podatności dynamicznej oraz charakterystyk dynamicznych podatności w postaci wykresów wygenerowanych za pomocą autorskiego oprogramowania Modyfit [7].

Praca wykonana w ramach grantu N N501 222035 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji w latach 2008-2011.

This work has been conducted as a part of research project N N501 222035 supported by the Ministry of Science and Higher Education in 2008-2011.

LITERATURA

1. Buchacz A., Żółkiewski S.: Transverse vibrations of the elastic multielement manipulator in terms of plane motion and taking into consideration the transportation effect. In: 8th Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications. Łódź 2005, Proceedings vol. 2, p.641-648.
2. Buchacz A., Żółkiewski S.: Dynamic analysis of the mechanical systems vibrating transversally in transportation. “Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering” 2007, Vol. 20, issues 1-2, p. 331-334.
3. Genta G.: Dynamics of rotating systems. New York : Springer, 2005.
4. Szefer G.: Dynamics of elastic bodies in terms of plane frictional motion. “Journal of Theoretical and Applied Mechanics” 2001, 2, 39.
5. Vance J. M.: Rotordynamics of turbomachinery. Wiley, 1988.
6. Żółkiewski S.: Model matematyczny obracających się tłumionych belek podatnych. “Modelowanie Inżynierskie” 2008, nr 36, t. 5, s. 327 – 334.
7. Żółkiewski S.: Analysis and modelling of rotational systems with the Modyfit application. “Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering” 2008, Vol. 30, issue 1, p. 59-66.

DYNAMICAL FLEXIBILITY OF THE TWO-SIDED SUPPORTED DAMPED BEAM IN TRANSPORTATION

Summary. One of the most widely used method of dynamical analysis is the dynamical flexibility method [1-3, 6-7], thanks to this method we can determine mutual relations between an amplitude of vibrations and a frequency of load. In this thesis there was modeled the two-sided supported beam being on the rotational table. In this model there were took into consideration the damping forces. The beam is on the rotational table that rotates with constant angular velocity. Considered motion is limited to plane motion and the beam has a symmetrical cross-section constant on its whole length.