

## ANALIZA STATYCZNA KONSTRUKCJI MOSTÓW EXTRADOSED W FAZIE BETONOWANIA WSPORNIKOWEGO

MAGDA LUBECKA

*Katedra Dróg i Mostów, Politechnika Śląska  
e-mail: magda.lubecka@polsl.pl*

Streszczenie. W pracy analizowana jest konstrukcja mostu typu extradosed wykonywana metodą betonowania wspornikowego. Numeryczna analiza statyczna obejmuje kolejne etapy budowy konstrukcji oraz fazę po zakończeniu budowy. Obliczenia mające na celu wyznaczenie sił naciągu kabli extradosed prowadzone są krok po kroku metodą macierzy wpływu przy wykorzystaniu programu *ROBOT MILLENNIUM*.

### 1. WSTĘP

Mosty extradosed to konstrukcje, których sztywny pomost sprężony jest za pomocą kabli zewnętrznych wyniesionych nad podporami pośrednimi ponad jego przekrój [2]. Pomimo że zewnętrzną formą konstrukcje te przypominają mosty podwieszane, to jednak przy ocenie nośności konstrukcji uwzględnia się współpracę pomiędzy betonowym pomostem i kablami extradosed. Związane jest to z małym kątem pochylenia kabli podwieszenia, który powoduje przekazanie na dźwigar dużych poziomych sił sprężających. Ciężki betonowy pomost zapewnia natomiast niewielkie zmiany naprężeń w kablach oraz praktycznie niezmienną ich sztywność. Wszystkie te zabiegi konstrukcyjne pozwalają na analizę konstrukcji mostu jako belki ciągłej sprężonej kablami umieszczonymi na dużych mimośrodkach.

W pracy rozważono wykorzystanie sprężenia typu extradosed jako sprężenia głównego nie tylko w fazie eksploatacji obiektu, ale również na etapie jego realizacji. Celem analiz była ocena przydatności macierzy wpływu stosowanej dotychczas przy regulowaniu napięcia want w mostach podwieszonych do wyznaczenia wstępnego naciągu kabli extradosed. Stwierdzono, że jej zastosowanie wydaje się być uzasadnione przy możliwości pominięcia nieliniowej pracy konstrukcji mostów extradosed.

### 2. OCENA WYTEŻENIA KONSTRUKCJI PRZY ZASTOSOWANIU MACIERZY WPLYWU

Najczęściej stosowaną metodą wznoszenia mostów extradosed jest betonowanie wspornikowe. Polega ono na wykonywaniu konstrukcji nośnej w formie wydłużającego się od podpory wspornika bez udziału rusztowań opartych na gruncie. W typowych realizacjach na wystającym zbrojeniu i deskowaniu co trzy dni betonowany jest odcinek długości 3-6 m. Siły wewnętrzne występujące we wspornikowej fazie pracy dźwigara przenoszone są przez kable extradosed. Ich duży mimośród nad podporami pośrednimi zwiększa efektywność

sprężenia i umożliwia realizację mostu o stałej wysokości konstrukcyjnej bez stosowania dodatkowych w stosunku do fazy użytkowania kabli wspornikowych. Stateczność wykonywanej części konstrukcji zapewniona jest poprzez symetryczne betonowanie wsporników po obu stronach podpory oraz wykonanie dwustronnych podparć montażowych lub tymczasowe kotwienie segmentu startowego w filarze [1].

Projektując konstrukcje extradosed, należy spełnić dwa warunki, a mianowicie: warunek geometryczny związany z utrzymaniem niwelety jezdni na założonym poziomie oraz warunek statyczny, zakładający, iż w żadnym z etapów budowy naciąg kabli nie zostanie zwolniony, a siły wewnętrzne w elementach konstrukcji nie przekroczą ich nośności.

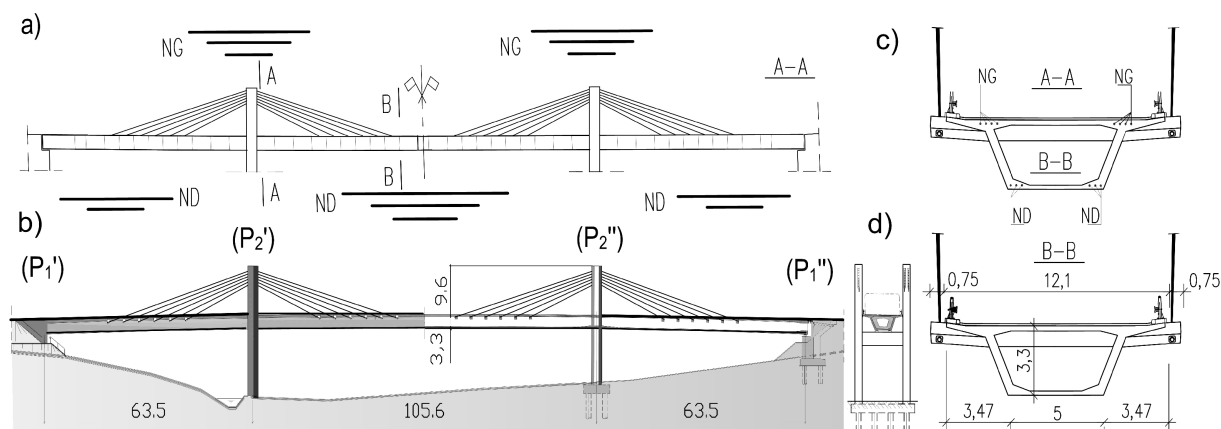
Tak jak w klasycznych mostach podwieszonych, naciągu poszczególnych kabli można poszukiwać, wykorzystując macierz wpływu siły wewnętrznej lub ugięcia przęsła [1,4]. Procedura postępowania polega na numerycznej analizie pracy konstrukcji, w której wszystkie siły i przemieszczenia podzielone są na dwie kategorie: wielkości nieznane, związane z poszukiwanym naciągiem want  $\{n\}$  oraz wielkości dane, powstające w elementach konstrukcji w wyniku oddziaływań i obciążeń zewnętrznych  $\{z\}$ . Zakładając sprężystą pracę konstrukcji, możemy określić zależność między naciągiem a odpowiedzią konstrukcji na oddziaływanie, któremu ma on przeciwdziałać:

$$[L_{zn}] \cdot \{n\} = \{z\} \quad (1)$$

gdzie  $[L_{zn}]$  oznacza macierz wpływu.

### 3. KRÓTKI OPIS ANALIZOWANEJ KONSTRUKCJI ORAZ TECHNOLOGII JEJ WZNOSZENIA

Analizowana w pracy konstrukcja posiada wszystkie cechy właściwe mostom extradosed [2,3]. W schemacie statycznym jest ona trójprzęsłową belką ciągłą o rozpiętości przęsł: 63.50, 105.60, 63.50m (rys. 1).

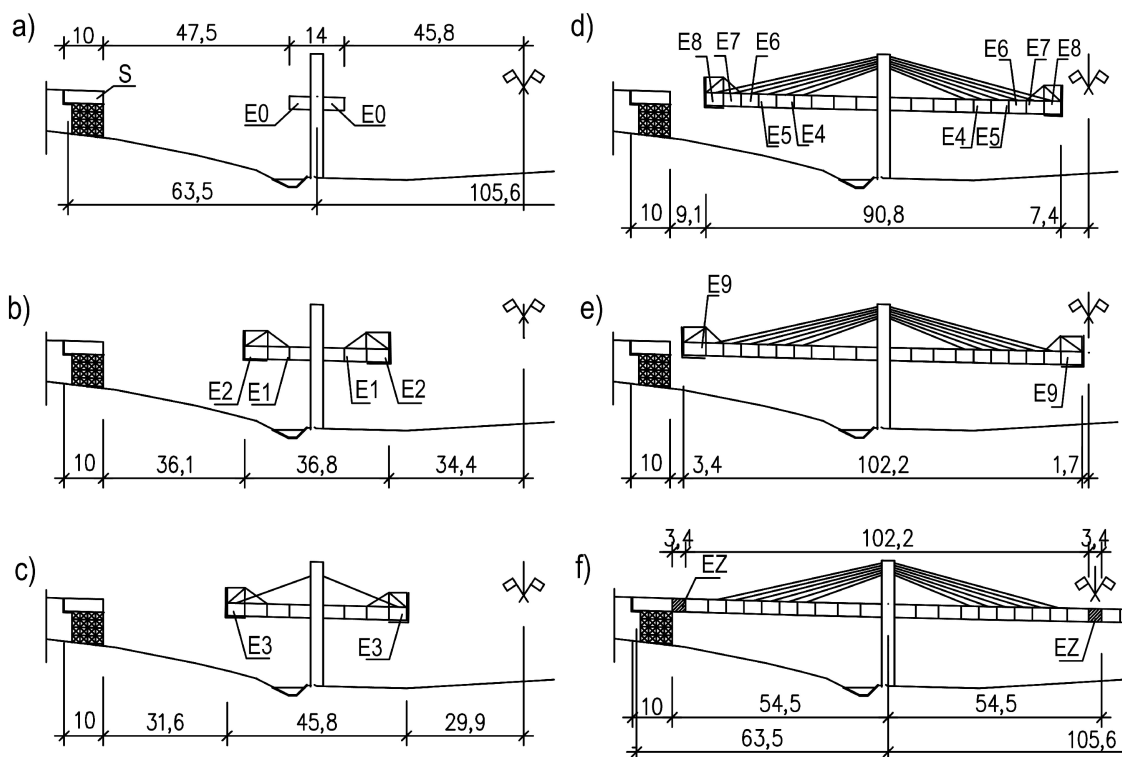


Rys.1. Analizowana konstrukcja: a) schemat podziału konstrukcji na etapy budowy oraz zasięg sprężenia wewnętrznego: górnego NG oraz dolnego ND, b), c), d) widok podłużny oraz przekroje poprzeczne konstrukcji nośnej

Skrzynkowy ustrój nośny jest sprężony głównie kablami zewnętrznymi, kotwionymi w dźwigarze poprzez poprzeczne belki żelbetowe umieszczone pod wspornikami płyty pomostowej oraz w niskich pylonach (rys. 1). Przewidziane, w niewielkiej ilości, kable wewnętrzne na poziomie górnej NG i dolnej ND płyty (rys. 1) pełnią funkcję pomocniczą,

a ich zastosowanie jest konsekwencją przyjętej technologii budowy.

Dobór naciągu kabli podwieszenia uwzględniający fazę realizacji obiektu jest bardzo pracochłonny, gdyż wymaga numerycznej analizy pracy konstrukcji na każdym etapie jej budowy. W mostach extradosed, tak jak w mostach podwieszonych, oparty jest na sposobie kolejnych przybliżeń, jednak liczba iteracji zmniejsza się z uwagi na uzależnienie jej jedynie od czynników montażowych związanych z systematycznie wydłużającymi się ramionami wahadła.

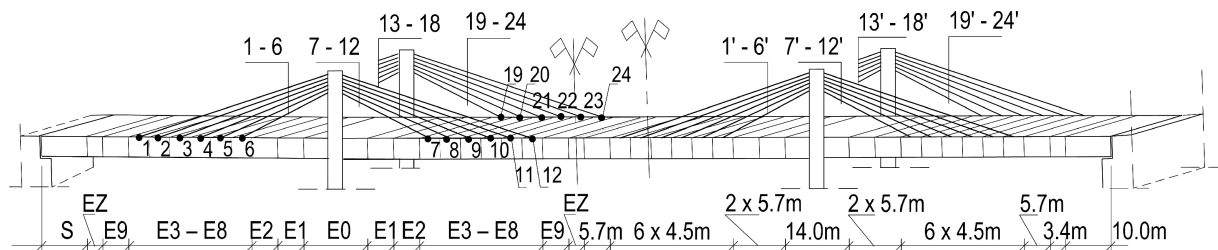


Rys.2. Schemat realizacji obiektu

W analizowanej konstrukcji zakłada się budowę obiektu z czterech niezależnych stanowisk (rys. 1). Krótkie odcinki S pomostu (rys. 2a) przy podporach skrajnych ( $P_1'$ ) i ( $P_1''$ ) - rys. 1 wykonywane są na rusztowaniach stacjonarnych i nie wymagają sprężenia w czasie budowy. Podobnie realizowane są, nad podporami pośrednimi ( $P_2'$ ) i ( $P_2''$ ), segmenty startowe E0 wahadeł (rys. 2a). Utrzymujące je, rusztowania muszą być jednak rozebrane przed rozpoczęciem betonowania nawisowego celem montażu trawelerów. Konsekwencją tego jest sprężenie segmentów od E0 do E2 kablami wewnętrznymi NG (rys. 2b). W czasie budowy odcinków od E3 do E8 (rys. 2c i rys. 2d) bezpieczną pracą konstrukcji zapewniają instalowane po dwa na każdy segment kable extradosed. W dwóch ostatnich etapach betonowania ustroju nośnego nie przewidziano montażu kabli extradosed. Ciężar własny segmentów E9 (rys. 2e) i EZ równoważony jest poprzez zwiększenie naciągu tych kabli, które zostały zainstalowane już wcześniej. Faza budowy kończy się połączeniem sąsiadujących części ustroju nośnego za pomocą krótkich segmentów – zworników EZ (rys. 2f). Po zwarcie konstrukcji zmienia się jej schemat statyczny i dla poprawnej pracy ustroju konieczne jest uciąglenie sprężenia poprzez wprowadzenie w przekrojach przeszłowych płyty dolnej dodatkowych kabli sprężających ND (rys. 1).

## 4. MODELE OBLICZENIOWE ORAZ PROCEDURA OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Idealizacja przeszła mostowego przez przestrzenną ramownicę jest dogodnym sposobem sprawdzania zachowania się konstrukcji przy zmieniającym się na każdym etapie budowy schemacie statycznym. Ogólny widok modelu konstrukcji pokazano na rys. 3. W przestrzennym układzie prętów pomost dyskretyzowano w postaci dwubelkowego rusztu połączonego poprzecznymi elementami górnej i dolnej płyty dźwigara skrzynkowego. Ponieważ rozciąganie elementów podwieszenia spowodowane obciążeniem przekazywanym przez pomost było dużo większe niż to wywołane ciężarem własnym kabla, a wpływ obciążeń zmiennych był nieznaczny w stosunku do wpływu obciążeń stałych, w analizie pominięto nieliniowość geometryczną. Kable podwieszenia odwzorowano za pomocą prętów, zakładając występowanie w nich tylko sił rozciągających. Przyjęta metodyka obliczeń numerycznych zapobiegała występowaniu w nich sił ściskających poprzez model obciążenia, w którym wszystkie wpływy zewnętrzne definiowane były wraz z ciężarem własnym elementów ustroju nośnego. Z uwagi na przyjęty model geometrii obciążenia zewnętrzne zapisano układem uogólnionych sił przykładanych do elementów prętowych, a wpływ sprężenia wewnętrznego i strat reologicznych określono metodą obciążeń równoważnych.



Rys.3. Schematyczny widok modelu konstrukcji z podziałem na segmenty realizowane w kolejnych etapach oraz numeracją kabli extradosed i punktów ich zaczepienia w pomoście

W rozpatrywanym zadaniu pominięto również nieliniowości związane ze zwisem kabli. Zgodnie bowiem ze wzorem Ernsta [1] moduł wzdłużnej sprężystości kabla extradosed ( $E^*$ ) był prawie równy modułowi materiałowemu ( $E$ ):

$$E^* = \frac{E}{1 + \frac{g_{ci}^2 \cdot l^2}{12 \cdot A_{ci}^2 \cdot \sigma^3} \cdot E} \quad (2)$$

gdzie:  $g_{ci}$  - ciężar ciągu na jednostkę długości,  
 $A_{ci}$  - pole przekroju poprzecznego ciągu,  
 $E$  - moduł sprężystości ciągu,  
 $\sigma$  - naprężenia osiowe w ciągu,  
 $l$  - długość rzutu poziomego ciągu.

Kolejną różnicą w stosunku do klasycznych mostów podwieszonych było wymiarowanie kabli extradosed. Przeprowadzono je zgodnie z zasadami stosowanymi w przypadku typowego sprężenia wewnętrznego, tj. na siłę równą 60% wartości siły zrywającej [2].

Obliczenia przeprowadzono za pomocą: własnych arkuszy kalkulacyjnych stworzonych w Microsoft Office Excel oraz programu Robot Millennium, w których naciąg kabla extradosed realizowano w postaci ujemnej dylatacji (skrócenia) pręta odwzorowującego

kabel. Analizą objęto 3 fazy pracy konstrukcji: montażową (F0), bezużytkową (FI) i użytkową (FII), w których rozważono 10 schematów symetrycznego wahadła oraz 3 schematy belki ciągłej.

W opracowanym algorytmie obliczania naciągu posługiwano się warunkiem geometrycznym związanym z zachowaniem założonej w projekcie niwelety konstrukcji. Niezmienne położenie wysokościowe pomostu na każdym etapie jego istnienia miało być zapewnione poprzez odpowiedni naciąg kablów extradosed. Wartość naciągu wyznaczano niezależnie dla każdego z wyróżnionych schematów statycznych, przy założeniu, że w żadnym kroku iteracji nie zostanie on zwolniony, a wielkości sił wewnętrznych w elementach konstrukcji nie przekroczą nośności tych elementów.

Przeprowadzone obliczenia wstępne wykazały że w każdej fazie pracy konstrukcji na wielkość naciągu kablów extradosed decydujący wpływ ma ciężar własny. Postanowiono więc przeanalizować wyznaczaną wartość skrócenia kablów w zależności od postępującego, wraz z zaawansowaniem robót, wzrostu długości wsporników. Zagadnienie sformułowano, budując modele różniące się schematami statycznymi, w których układ obciążeń ograniczono do ciężaru własnego i sprężenia. Dostosowując zależność (1) do sformułowanego powyżej zadania, uwzględniono w niej wzmocnienie efektu podnoszenia pomostu przez pionową składową siłę naciągu kablów extradosed spowodowane sprężeniem dźwigara dodatkowymi kablami wewnętrznymi. Ostatecznie zapis macierzowy układu równań dla wyznaczania skrótu prętów opisujących kable extradosed był następujący:

$$[L_{i,k}] \cdot \{dL\} - \{U_{g+s}\} = 0 \quad (3)$$

gdzie:

$[L_{i,k}]$  - macierz wpływu jednostkowych skrótów kablów extradosed (k) na przemieszczenia pionowe w miejscach bloków kotwiących (i),

$\{dL\}$  - wektor niewiadomych naciągów wyrażonych poprzez ujemne dylatacje kablów,

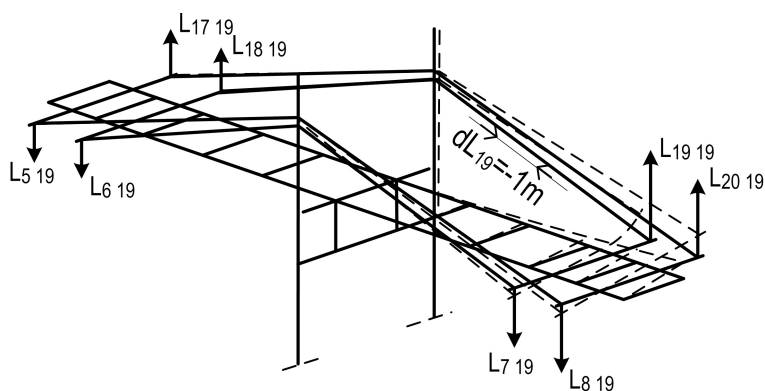
$\{U_{g+s}\}$  - wektor wyrazów wolnych, określający przemieszczenia pionowe w miejscach kotwienia kablów w pomoście spowodowane obciążeniem zewnętrznym (g) i sprężeniem wewnętrznym (s).

Wykorzystując równanie (3) procedura postępowania rozdzielala każdy krok iteracji na dwie części. W pierwszej części obliczenia miały doprowadzić do wyznaczenia naciągu, który w części drugiej był weryfikowany poprzez określenie zmian, jakie ten naciąg wywoływał w pracy statycznej konstrukcji. Każdy krok iteracji rozpoczynał się od rozwiązywania układu równań liniowych (3). Dowolne i-te równanie określało warunek geometryczny, w myśl którego w pomoście w miejscu kotwienia kabla sumaryczne przemieszczenia pionowe od ciężaru własnego i sprężenia były minimalne, a więc równe 0. Wprowadzenie do rozwiązywanego układu równań wielkości danych wymagało rozważenia dwóch scenariuszy obciążenia. Pierwszy scenariusz obciążeń, w którym pręty podwieszenia były obciążone jedynie pomostem i pracowały jak bierne wieszaki, posłużył do wyznaczenia przemieszczeń  $u_{g+s}$ , tworzących wektor wyrazów wolnych. Drugi scenariusz obciążenia został stworzony aby określić wpływ naciągu pojedynczego kabla extradosed na deformacje pomostu. Poprzez definiowanie jednostkowych, ujemnych dylatacji oddzielnie na każdym z prętów podwieszenia oraz wyznaczanie powstałych pod ich wpływem przemieszczeń uzyskiwano kolejne kolumny macierzy wpływu  $[L_{ik}]$ . Ostatni, trzeci, scenariusz obciążenia wykorzystywano przy kontroli warunku geometrycznego i wytrzymałościowego wykonywanej w celu sprawdzenia poprawności przeprowadzonych obliczeń. Po obciążeniu modelu konstrukcji ciężarem własnym i sprężeniem w postaci kablów wewnętrznych i zewnętrznych analizowano: ugięcia pomostu, wzrost sił wewnętrznych w elementach podwieszenia oraz redystrybucję momentu zginającego na długości belki głównej.

## 5. WYNIKI OBLICZEŃ

Opisaną w punkcie 4 procedurę postępowania szczegółowo omówiono na przykładzie obliczeń przeprowadzonych w czwartym etapie budowy wahadła. Poniżej przedstawiono zarówno sposób wyznaczenia naciągu jak i sprawdzenia jego skuteczności.

W wybranym kroku iteracji określano, o ile należy skrócić każdy z ośmiu prętów podwieszenia (5-8 i 17-20), aby przy zdefiniowanym w modelu układzie obciążeń (g+s) zapewnić stałe położenie wysokościowe węzłów (5-8 i 17-20) odpowiadających w rzeczywistej konstrukcji miejscom kotwienia kabli extradosed. Stosowaną w pierwszej części obliczeń (rys. 5) macierz wpływu  $[L_{ik}]^{(4)}$  zbudowano na podstawie przemieszczeń pionowych w punktach (5-8 i 17-20) powstałych po skróceniu o 1m niezależnie każdego z kabli (5-8 i 17-20). Deformację pomostu powstałą po jednostkowej dylatacji pręta nr 19 przedstawia rys. 4. Wyróżnione na rys. 4 przemieszczenia pionowe  $L_{5\ 19} - L_{20\ 19}$  tworzą siódmą kolumnę macierzy  $[L_{ik}]^{(4)}$  (rys. 5).



Rys.4. Widok fragmentu modelu konstrukcji dla czwartego etapu budowy (E4) po wykonaniu jednostkowego naciągu kabla nr 19

Wykorzystując równanie (3) (rys. 5), wyznaczano naciąg  $\{dL\}$  zapobiegający wyiężeniu konstrukcji, powodowanym ciężarem własnym (g) czterech par segmentów E1-E4 i reprezentowanym przez wektor  $\{U_{g+s}\}^{(4)}$ . Indeks – s oznacza pomniejszenie przemieszczeń pionowych o odciążający konstrukcję wpływ sprężenia kablami wewnętrznymi. Deformacja pomostu wywołana naciągiem kabli extradosed  $\{dL\}$  zrealizowanym w trzecim scenariuszu obciążeń powinna doprowadzić do założonej w projekcie niwelety obiektu. Kontrolę geometryczną uzyskanego w etapie 4 rozwiązania przedstawiono w tabeli 1.

Na rys. 6 zebrano wyniki pierwszej części obliczeń numerycznych przeprowadzonych dla każdego etapu budowy. W postaci map wartości dylatacji prętów podwieszenia przedstawiono stopniowy wzrost naciągu kabli extradosed wraz z wydłużaniem się wsporników wahadła w kolejnych etapach budowy. Końcowa wartość naciągu  $dL^{FI}$  spowodowała korzystną dla pracy konstrukcji redystrybucję momentów zginających (M) na długości przęsła (rys. 7) i zapewniła bezpieczeństwo jej pracy również w fazie użytkowania.

Budowa macierzy wpływu dla etapu E4

$$[L_{ik}]^{(4)} = \begin{matrix} \text{numer punktu} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 242 & 194 & 12 & 11 & -85 & -80 & -5 & -5 \\ 148 & 199 & 9 & 8 & -63 & -66 & -4 & -3 \\ 8 & 9 & 199 & 148 & -3 & -4 & -66 & -63 \\ 11 & 12 & 194 & 242 & -5 & -5 & -80 & -85 \\ -85 & -80 & -5 & -5 & 242 & 194 & 12 & 11 \\ -63 & -66 & -4 & -3 & 148 & 199 & 9 & 8 \\ -3 & -4 & -66 & -63 & 8 & 9 & 199 & 148 \\ -5 & -5 & -80 & -85 & 11 & 12 & 194 & 242 \end{bmatrix}$$

$$\{U_{g+s}\}^{(4)} = \begin{matrix} \text{numer punktu} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -17.9 \\ -13.9 \\ -13.9 \\ -17.9 \\ -17.9 \\ -13.9 \\ -13.9 \\ -17.9 \end{matrix} \right\}$$

$$\{dL\}^{(4)} = \begin{matrix} \text{numer kabla} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -6.7 \\ -5.7 \\ -5.7 \\ -6.7 \\ -6.7 \\ -5.7 \\ -5.7 \\ -6.7 \end{matrix} \right\}$$

Układ równań opisujących naciąg kabli w etapie E4

$$[L_{ik}]^{(4)} \cdot \{dL\}^{(4)} = \{U_{g+s}\}^{(4)}$$

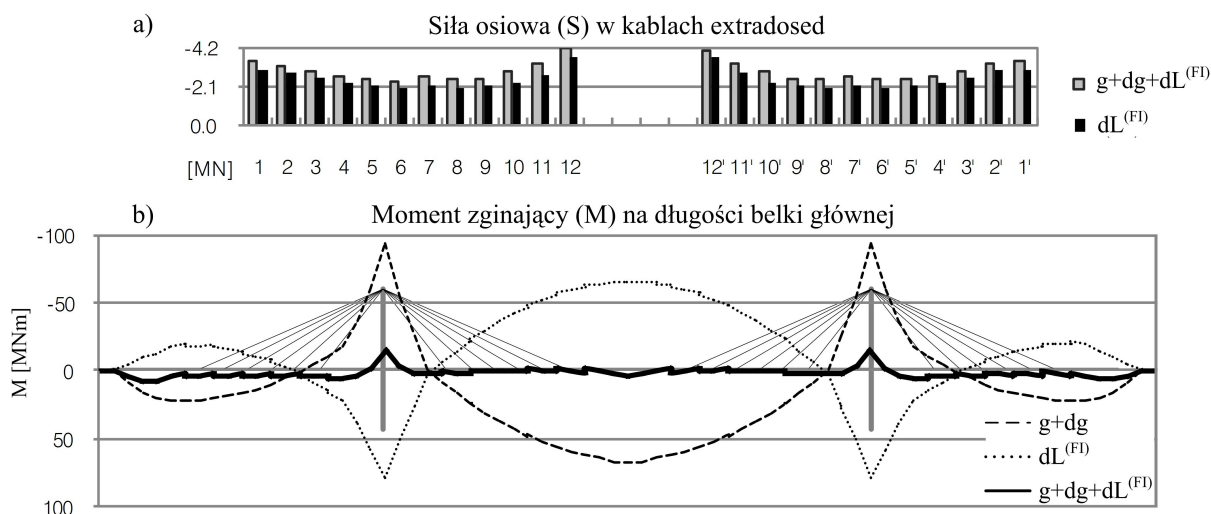
Rys.5. Metodyka wyznaczenia naciągu kabli extradosed w 4 etapie wznoszenia konstrukcji

Tabela 1. Wyniki kontroli geometrycznej

		U [cm]					
		wpływ	g	s	dL	g+s	g+s+dL
numer punktu	5	-34.1	16.2	17.9	-17.9	0.0	
	6	-25.7	11.8	13.9	-13.9	0.0	
	7	-25.7	11.8	13.9	-13.9	0.0	
	8	-34.1	16.2	17.9	-17.9	0.0	
	17	-34.1	16.2	17.9	-17.9	0.0	
	18	-25.7	11.8	13.9	-13.9	0.0	
	19	-25.7	11.8	13.9	-13.9	0.0	
	20	-34.1	16.2	17.9	-17.9	0.0	

faza pracy	numer kabla												skala barwy	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
E3						-2.6	-2.6							-2.6
E4					-6.7	-5.7	-5.7	-6.7						-5.8
E5				-10.4	-8.7	-6.9	-6.9	-8.7	-10.4					-9.1
E6			-10.4	-11.9	-9.8	-7.6	-7.6	-9.8	-11.9	-10.4				-12.4
E7		-12.3	-11.4	-13.0	-10.5	-8.0	-8.0	-10.5	-13.0	-11.4	-12.3			-15.7
E8	-13.9	-13.5	-12.4	-13.9	-11.1	-8.4	-8.4	-11.1	-13.9	-12.4	-13.5	-13.9		-19.0
E9	-23.7	-18.9	-15.0	-15.2	-11.4	-8.3	-8.3	-11.4	-15.2	-15.0	-18.9	-23.7		-22.3
EZ	-24.1	-18.9	-17.0	-18.2	-13.6	-9.6	-9.6	-13.6	-18.2	-17.0	-18.9	-24.1		-25.6
FI	-24.1	-20.2	-17.0	-18.2	-13.6	-9.6	-11.4	-15.4	-20.2	-19.7	-24.1	-28.8		-28.8

Rys.6. Mapa wartości naciągu kabli extradosed w kolejnych etapach realizacji, gdzie wielkość naciągu określona jest poprzez skrócenie długości kabla [cm]



Rys.7. Wpływ naciągu kabli extradosed na siły wewnętrzne w elementach konstrukcji  
 a) siły osiowe w kablach extradosed, b) moment zginający w połowie dźwigara

## LITERATURA

1. Biliszczuk J.: Mosty podwieszane : projektowanie i realizacja. Warszawa: Arkady, 2005.
2. Komiya M.: A characteristic and design of bridges with large eccentric cables (PC Extradosed Bridge). Japan Bridge & Structure Institute, INC, 16th March, 1999.
3. Lubecka M.: Some aspects of structural analyses of the extradosed bridges. In: Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings". Bratislava, Slovakia, October 22-23 2009, s. 19-22, (full text on CD-ROM).
4. Machelski Cz.: Zastosowanie macierzy wpływu w projektowaniu kładki podwieszanej. „Inżynieria i Budownictwo” 2002, 3-4, s. 201-203.
5. Wang P.H., Tang T.Y., Zheng H.N.: Analysis of cable-stayed bridges during construction by cantilever methods. “Computers & Structures” 2004, 82, 4-5, p. 329-346

## STATIC ANALYSIS OF EXTRADOSED BRIDGES DURING CONSTRUCTION BY CANTILEVER METHOD

**Summary.** This paper presents a numerical analysis of extradosed bridge during construction based on the cantilever method. The major work of undertaken analysis is to determine the appropriate post tensioning cable forces for the optimum structural performance at each erection stage. The computation procedure is set up by using an influence matrix describing relationship between post tensioning cable forces and displacements of the deck.