ENERGETYKA z. 24

P. 3349/67

JÓZEF RÓŻEWICZ

ZASTOSOWANIE METODY MONTE CARLO DO ZAGADNIEŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 180 – GLIWICE 1967

SPIS TREŚCI

Str.

Przedmowa 3

0. Wstęp 5

1. Metoda Monte Carlo 7

2. Ustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych bez źródeł wewnętrznych 9

2.1. Pierwsze zagadnienie brzegowe 11
2.2. Drugie zagadnienie brzegowe 19
2.3. Trzecie zagadnienie brzegowe 22
2.4. Zagadnienie kontaktowe z idealnym stykiem 26
2.5. Zagadnienie kontaktowe z oporem cieplnym styku . . 28
2.6. Materiały niejednorodne i anizotropowe 32
2.7. Różnorodne warunki brzegowe 35

3. Ustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych ze źródłami wewnętrznymi 36

3.1. Nierównomierny rozkład źródeł 37
3.2. Miejscowe źródła ciepła 43
3.3. Równomiernie rozłożone źródła ciepła 44
3.4. Rozwiązywanie uogólnionego zagadnienia brzegowego drugiego rodzaju przy pomocy zastępczego źródła wewnętrznego 44

4. Nieustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych . . . 47

4.1. Pierwsze zagadnienie brzegowe 48
4.2. Drugie zagadnienie brzegowe 54
4.3. Trzecie zagadnienie brzegowe 56
4.4. Zagadnienie kontaktowe z idealnym stykiem 61
4.5. Zagadnienie kontaktowe z oporem cieplnym styku . . 64
4.6. Różnorodne warunki brzegowe 65

5. Problemy obliczeniowe 66

5.1. Generowanie liczb losowych 67
5.2. Dokładność obliczeń 68
5.3. Algorytmizacja i programowanie obliczeń 71
5.4. Uwagi końcowe 75

6. Przypisy 77

6.1. Przykład rozwiązania zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła: Pole temperatur w przekroju poprzecznym chłodzonej łopatki turbiny gazowej 77
6.2. Przykład rozwiązania zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku wielowarstwowym 85
6.3. Przykład rozwiązania zagadnienia nieustalonego przewodzenia ciepła 89

Literatura 96

Streszczenia 98

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Gliwice
P. 3349/67

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 180

JÓZEF ROZEWICZ

ZASTOSOWANIE METODY MONTE CARLO DO ZAGADNIEŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

PRACA HABILITACYJNA Nr 59

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 12. XII. 1966 r.

GLIWICE 1967

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Fryderyk Staub

REDAKTOR DZIAŁU

Ryszard Petela

SEKRETARZ REDAKCJI

Tadeusz Matula

PJ 236167

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Konarskiego 23

Nakł. 100+175 Ark. wyd. 3,7 Ark. druk. 6,25 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 70 g
Oddano do druku 31. 1. 1967 Podpis. do druku 24. 2. 1967 Druk ukoń. w kwietniu 1967
Zam. 268 26. 1. 1967 E-22 Cena zł 5.—

Skład, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

PRZEDMOWA

Podstawy matematycznej teorii przewodzenia ciepła w ciałach stałych sformułowane zostały przez J. Fouriera w dziele "Théorie analytique de la chaleur", które ukazało się w 1822 r. W ciągu ubiegłego wieku badania w tej dziedzinie prowadzone były przede wszystkim na bazie analizy Fouriera. Rezultaty tych prac znalazły swe odbicie w opublikowanym w 1906 r. dziele H.S. Carslawa "Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals and the Mathematical Theory of the Conduction of Heat".

W pierwszej połowie XX wieku obok znacznego rozwoju metod analitycznych rozpoczął się intensywny rozwój badań zagadnień przewodzenia ciepła za pomocą metod numerycznych. Podstawy metody różnic skończonych podał C. Runge w 1908 r. w pracy "Über eine Methode der partiallen Differentialgleichung, ΔU=Constans numerisch zu integrieren". W ciągu pierwszych czterdziestu lat praktyczne zastosowanie tych metod, które teoretycznie znacznie się rozwinęły, było ograniczone ze względu na trudności natury rachunkowej. Radykalna zmiana w tej dziedzinie nastąpiła w ciągu ostatnich dwudziestu lat, w wyniku powstania nowych urządzeń obliczeniowych - elektronowych maszyn cyfrowych.

Elektronowe maszyny cyfrowe wpłynęły nie tylko na intensywny rozwój istniejących metod matematycznych, ale spowodowały powstanie nowych metod, a nawet całych gałęzi matematyki.

Jedną z nowych metod jest metoda Monte Carlo, znajdująca szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach nauki.

W monografiach i publikacjach z dziedziny przewodzenia ciepła nie zwrócono dotychczas uwagi na praktyczne możliwości rozwiązań szeregu zagadnień, związane z zastosowaniem tej nowoczesnej metody.

Celem niniejszej pracy było określenie zależności i modeli stochastycznych umożliwiających analizę problemów związanych z przewodzeniem ciepła w ciałach stałych, za pomocą metody Monte Carlo. W rezultacie podano zasady stosowania metody Monte Carlo do podstawowych zagadnień ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych oraz naświetlono zalety i wady wynikające z właściwości kierunku zastosowań.

Praca wykonana została w Katedrze Cieplnych Maszyn Wirnikowych. Kierownikowi Katedry Panu prof. zw. n. t. Kazimierzowi Kutarbie, który przy wykonywaniu niniejszej pracy okazał dużo życzliwości i zainteresowania składam tą drogą serdeczne słowa podziękowania.

Pragnę równocześnie serdecznie podziękować Panu prof. dr inż. Janowi Szargutowi za cenne uwagi i sugestie przedstawione w przeprowadzonych ze mną dyskusjach na temat szeregu omawianych zagadnień.

0. WSTĘP

Wymiana ciepła drogą przewodzenia zachodzi prawie we wszystkich maszynach i urządzeniach energetycznych. Analiza tego zjawiska jest integralną częścią obliczeń projektowych i konstrukcyjnych maszyn cieplnych. Problem ma szczególne znaczenie przy projektowaniu turbin parowych i przede wszystkim turbin gazowych, pracujących przy wysokich temperaturach. Optymalna sprawność turbin cieplnych jest osiągana przy stosowaniu wysokich temperatur i ciśnień czynnika roboczego. Wywołuje to duże naprężenia cieplne w elementach konstrukcji i wymaga stosowania materiałów konstrukcyjnych odpowiedniej wytrzymałości.

Analiza wymiany ciepła przez przewodzenie jest ściśle związana z badaniem pola temperatur w ciałach stałych. W pewnych wypadkach określenie rozkładu temperatur jest głównym zadaniem, jak np. przy projektowaniu łopatek turbinowych, komór spalania, dysz silników odrzutowych, które winny pracować przy pewnych ograniczonych temperaturach. W innych natomiast przypadkach, zagadnienie rozkładu temperatur jest zagadnieniem bazowym, umożliwiającym określenie naprężeń termicznych.

Można wskazać cztery zasadnicze rodzaje metod wyznaczania pola temperatur w ciałach stałych: analityczne, numeryczne, wykreślne i eksperymentalne.

Metody analityczne pozwalają na znalezienie zależności temperatury od współrzędnych i czasu w postaci wzoru matematycznego. Prawie we wszystkich przypadkach zastosowań praktycznych układ rzeczywisty musi być uproszczony przez idealizację parametrów rzeczywistych, aby zadanie mogło być rozwiązane na drodze analitycznej. W ten sposób w odniesieniu do zagadnień praktyki inżynierskiej otrzymane wyniki nie są dokładnym rozwiązaniem problemu rzeczywistego. Niewątpliwą natomiast zaletą metod analitycznych stanowi możliwość parametryzacji rozwiązań.

Metody numeryczne umożliwiają rozwiązanie szeregu zagadnień, których rozwiązanie analityczne jest bardzo utrudnione lub praktycznie niemożliwe. Podstawą tych metod jest analiza różnic skończonych, bądź drogą zastąpienia równania różniczkowego - równaniami różnicowymi, bądź przez uzyskanie układu równań różnicowych bezpośrednio drogą elementarnych bilansów cieplnych.

Metody wykreślne opierają się na takich samych zasadach jak metody numeryczne, posiadają jednak mniejszy zakres stosowalności, a otrzymane wyniki mniejszą dokładność.

Metody eksperymentalne polegają na bezpośrednich pomiarach temperatur w poszczególnych punktach badanego obiektu lub pomiarach parametrów pola modelu fizycznego symulującego pole temperatur. W tym ostatnim przypadku są to metody analogii eksperymentalnej.

Wszystkie wskazane metody posiadają pewne zalety i wady. Zastosowanie określonej metody do konkretnego zadania winno być uzależnione od warunków zadania, dopuszczalnego nakładu pracy i pożądanej dokładności rozwiązania.

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda Monte Carlo w zastosowaniu do zagadnień przewodzenia ciepła, stanowi połączenie metody numerycznej z metodą analogii eksperymentalnej. Otrzymane na zasadzie analizy różnic skończonych równania ogólne są rozwiązane metodą analizy modelu stochastycznego.

Rozwiązanie zagadnień przewodzenia ciepła tą metodą daje szereg nowych możliwości, ale również związane jest z pewnymi utrudnieniami, z których na pierwszym miejscu należy wymienić bezwzględną konieczność stosowania elektronowych maszyn cyfrowych. Wydaje się, że sposób ten rozszerzy istniejący wachlarz metod, a dla pewnych zagadnień okaże się najdogodniejszy.

Pierwsze prace związane z zastosowaniem metody Monte Carlo do rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego i parabolicznego ukazały się w 1951 r. [6, 14, 23, 24]. Rozważania przeprowadzone w tych pracach mogły znaleźć zastosowanie do zagadnień ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju. W do-

stępnej literaturze brak jednak informacji wskazującej na wykorzystanie tych metod do zagadnień cieplnych. Wynikło to przypuszczalnie z bardzo ograniczonego zakresu występowania zadań z pierwszym warunkiem brzegowym w zagadnieniach inżynierskich dotyczących przewodzenia ciepła.

W pracy niniejszej przedstawiono możliwości uogólnienia zakresu stosowalności metody do praktycznych zagadnień przewodzeni ciepła.

W rozdziale 1 omówiono logiczne podstawy metody Monte Carlo. W rozdziale 2 podano wzory umożliwiające rozwiązywanie zagadnienia stacjonarnego bez wewnętrznych źródeł ciepła przy różnych warunkach brzegowych[x]. Rozdział 3 poświęcono rozwiązywaniu zagadnienia stacjonarnego z wewnętrznymi źródłami ciepła. W rozdziale 4 przedstawiono zależności dotyczące rozwiązywania zagadnień niestacjonarnych. W rozdziale 5 omówiono problem dokładności rozwiązań oraz problemy związane z algorytmizacją i programowaniem rozwiązań dla obliczeń na elektronowych maszynach cyfrowych. Liczbowe przykłady rozwiązań podano w przypisach.

1. METODA MONTE CARLO

Metoda Monte Carlo stanowi środek analizy zdeterminowanych zjawisk fizycznych lub zależności matematycznych przy pomocy modelu probabilistycznego.

Ściśle zdeterminowane procesy fizyczne opisują najczęściej równania różniczkowe lub całkowe. Badanie przebiegu tych procesów polega na rozwiązaniu analitycznym lub numerycznym równań, bądź na badaniu innych procesów fizycznych opisywanych analogicznymi równaniami.

---

x) Rozwiązanie podstawowych problemów obejmujących ten rozdział podano w opublikowanych uprzednio pracach [15, 20].

Istotą metody Monte Carlo jest zbudowanie sztucznego procesu stochastycznego o rozkładzie parametrów spełniającym związki opisujące zdeterminowane zjawisko fizyczne. Wielokrotne modelowanie przebiegu procesu stochastycznego umożliwia wyznaczenie przybliżonego rozwiązania zagadnienia fizycznego. Dla wielu problemów uzyskanie rozwiązania na tej drodze może okazać się bardziej celowe i dogodniejsze, niż przez stosowanie konwencjonalnych metod numerycznych.

Podstawowe zasady metody wykorzystania modelu probabilistycznego do rozwiązania problemów matematycznych o niestochastycznym charakterze, wskazali von Neumann i Ulam w 1945 r.[x]. Prace von Neumanna i Ulama nie zostały opublikowane w 1945 r., albowiem zastosowanie ich dotyczyło badań nad bronią atomową.

W latach 1947-1949 Fermi, Metropolis i Ulam zastosowali metodę Monte Carlo do rozwiązywania równania Schrödingera [11, 18]. Pierwsza publikacja opisująca metodę Monte Carlo ukazała się w 1949 r. autorami jej byli współpracownicy Fermi'ego - Metropolis i Ulam [11]. Natomiast pierwsze prace związane z zastosowaniem metody do zagadnień fizycznych zostały ogłoszone na seminarium I.B.M. w Nowym Jorku w 1949 r. a opublikowane drukiem w 1951 r. [14].

Intensywny rozwój metody nastąpił na skutek praktycznej możliwości realizacji obliczeń przy pomocy elektronowych maszyn cyfrowych, modelujących przebieg procesu stochastycznego.

W rozwiązaniu zagadnienia fizycznego metodą Monte Carlo można wyodrębnić trzy zasadnicze etapy:

1° Określenie modelu probabilistycznego zagadnienia.

2° Symulowanie przebiegów procesu stochastycznego połączone ze statystyką rezultatów.

---

x) Pewne elementarne możliwości związane z modelowaniem probabilistycznym znane były znacznie wcześniej. Prace Paryskiej Akademii z 1773 r. opisują tzw. problem igły, podany przez G.L. Buffona, który wyznaczył na zasadach probabilistycznych liczbę π .

3^{o} Wyznaczenie rozwiązania na podstawie statystyki.

Najbardziej pracochłonny etap drugi realizowany jest przy pomocy elektronowych maszyn cyfrowych. Przebieg procesów stochastycznych odtwarzany jest według kolejności występowania liczb losowych, względnie zastępujących je liczb pseudolosowych uzyskiwanych przy pomocy programu generatora liczb pseudolosowych.

Należy zwrócić uwagę, że dla rozwiązania tego samego zagadnienia można zastosować modele o różniących się zasadniczo schematach. Dobór odpowiedniego modelu może wpłynąć na przyspieszenie toku obliczeń. Sposoby realizacji wskazanych powyżej etapów przedstawione zostaną szczegółowo w następnych rozdziałach.

2. USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W CIAŁACH STAŁYCH BEZ ŹRÓDEŁ WEWNĘTRZNYCH

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych o przewodności λ, bez wewnętrznych źródeł ciepła sprowadza się do poszukiwania rozkładu temperatury w postaci funkcji $\vartheta(P)$, $(P \in \Omega)$, spełniającej równanie

$$\nabla(\lambda \nabla \vartheta) = 0 \qquad (2.1)$$

w obszarze Ω oraz warunki brzegowe na brzegu obszaru Γ_{Ω}.

Na dowolnej części brzegu obszaru Γ_{Ω} może zachodzić jeden z następujących warunków:

a) Określony rozkład temperatur na brzegu

$$\vartheta(P_{\Gamma}) = t(P_{\Gamma}) \qquad (P_{\Gamma} \in \Gamma_{\Omega}) \qquad (2.2)$$

gdzie: t(P) - funkcja określająca temperaturę płynu otaczającego ciało stałe.

Jest to warunek brzegowy pierwszego rodzaju.

b) Określony rozkład strumienia cieplnego na brzegu

$$-\lambda \nabla \vartheta(P_\Gamma) = q(P_\Gamma) \tag{2.3}$$

gdzie: q(P) - funkcja określająca strumień cieplny.

Związek ten nosi nazwę warunku brzegowego drugiego rodzaju.

Przypadek szczególny zachodzi przy $q(P_\Gamma) = 0$, tj. przy idealnej izolacji brzegu:

$$\nabla \vartheta(P_\Gamma) = 0 \tag{2.4}$$

c) Określony jest związek między temperaturą i jej gradientem na powierzchni:

$$\lambda \nabla \vartheta(P_\Gamma) + \alpha(P_\Gamma) \left[\vartheta(P_\Gamma) - t(P_\Gamma)\right] = 0 \tag{2.5}$$

gdzie: $\alpha(P_\Gamma)$ - współczynnik przejmowania ciepła.

Zależność ta nazywana jest warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju.

d) Określona jest wymiana ciepła przez przewodzenie, pomiędzy stykającymi się ciałami stałymi.

Jeżeli na powierzchni styku zachodzi idealny kontakt cieplny to

$$\vartheta_1(P_\Gamma) = \vartheta_2(P_\Gamma), \tag{2.6}$$

$$\lambda_1 \nabla \vartheta_1(P_\Gamma) = \lambda_2 \nabla \vartheta_2(P_\Gamma), \tag{2.7}$$

gdzie: wskaźniki 1,2 dotyczą odpowiednio, stykających się obiektów.

W przypadku kontaktu nieidealnego zamiast równania (2.6) zachodzi związek:

$$\lambda_1 \nabla \vartheta_1 (P_\Gamma) = \frac{1}{R}[\vartheta_2(P_\Gamma) - \vartheta_1(P_\Gamma)], \tag{2.8}$$

gdzie: R - opór cieplny połączenia kontaktowego.

Określenie na różnych częściach brzegu ciała stałego wymienionych wyżej warunków w dowolnej kombinacji, umożliwia w sposób jednoznaczny znalezienie funkcji $\vartheta(P)$ spełniającej równanie (2.1),[1, 9, 12].

2.1. Pierwsze zagadnienie brzegowe

W zagadnieniach dotyczących izotropowych ciał stałych równanie (2.1) można przedstawić w postaci równania Laplace'a:

$$\nabla^2 \vartheta = 0 \tag{2.9}$$

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy zagadnienie dwuwymiarowe w obszarze Ω, zorientowanym przy pomocy prostokątnego układu współrzędnych, tj. równanie

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \tag{2.10}$$

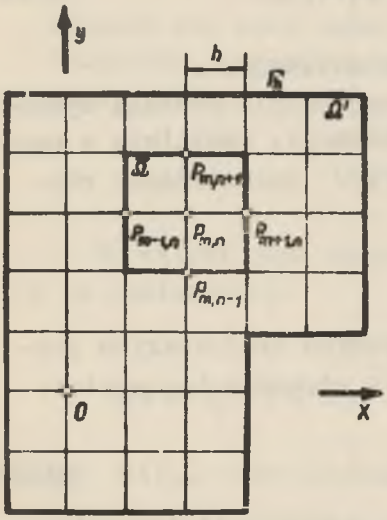
Poszukiwana jest funkcja $\vartheta(x,y)$ spełniająca równanie (2.10) oraz na brzegu obszaru Γ_Ω warunek:

$$\vartheta(x,y) = t(x,y) \tag{2.11}$$

gdy $P(x,y) \in \Gamma_\Omega$.

W teorii równań różniczkowych cząstkowych problem ten ma nazwę zagadnienia Dirichleta.

Celem przybliżonego rozwiązania zagadnienia rozpatrzmy obszar Ω, który można podzielić na skończoną całkowitą liczbę kwadratów o boku h.



Rys. 1. Obszar siatkowy

Zastąpimy obszar rzeczywisty obszarem siatkowym Ω'(rys. 1). Przyjmiemy punkt O (0,0) wewnątrz obszaru. Poprowadzimy na płaszczyźnie XOY dwie rodziny prostych, równoległych do osi układu współrzędnych w ten sposób by powstała siatka kwadratowa o boku h, przy czym początek układu był węzłem siatki.

Obszar siatkowy Ω' składać się będzie z węzłów, stanowiących wierzchołki kwadratów. Węzeł $P_{m,n}$ nazywać będziemy wewnętrznym jeżeli węzły $P_{m+1,n}$; $P_{m,n+1}$; $P_{m-1,n}$ oraz $P_{m,n-1}$ również należą do obszaru Ω. Zbiór węzłów wewnętrznych oznaczymy Ω_h. Wszystkie pozostałe węzły będziemy nazywać brzegowymi. Zbiór węzłów brzegowych oznaczymy Γ_h.

Zastępując w równaniu Laplace'a pochodne cząstkowe różnicami skończonymi, lub z elementarnych bilansów cieplnych, otrzymujemy zamiast równania (2.10), związek obowiązujący dla węzłów wewnętrznych:

$$v_{m,n} = \frac{1}{4}\left(v_{m+1,n} + v_{m,n+1} + v_{m-1,n} + v_{m,n-1}\right) \qquad (2.12)$$

Wprowadzając zapis symboliczny [7] :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & a_{m,n+1} & \\ a_{m-1,n} & a_{m,n} & a_{m+1,n} \\ & a_{m,n-1} & \end{array} \right\} \vartheta_{m,n} =$$

$$= a_{m,n}\vartheta_{m,n} + a_{m+1,n}\vartheta_{m+1,n} + a_{m,n+1}\vartheta_{m,n+1} + a_{m-1,n}\vartheta_{m-1,n} + \quad (2.13)$$

$$+ a_{m,n-1}\vartheta_{m,n-1}$$

Związek (2.12) można przedstawić w postaci:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right\} \vartheta_{m,n} \qquad (2.12a)$$

Dla węzłów brzegowych bezpośrednio z równania (2.11) mamy:

$$\vartheta_{m,n} = t_{m,n} \qquad (2.11a)$$

Model probabilistyczny dwuwymiarowego zagadnienia Dirichleta podał Yowell [24]. Modelować będziemy tzw. ruch błędny cząsteczki na płaszczyźnie. Cząsteczka znajdująca się chwilowo w węźle $P_{m,n}$ przechodzi w elementarnym ruchu do jednego z sąsiednich punktów $P_{m+1,n}$, $P_{m,n+1}$, $P_{m-1,n}$, $P_{m,n-1}$. Wybór punktu ma charakter losowy, przy czym prawdopodobieństwo przejścia do każdego z tych punktów jest jednakowe i wynosi 1/4. Cząsteczka będzie kolejno przemieszczać się po węzłach siatki i z prawdopodobieństwem równym 1, w serii składającej się ze skończonej liczby ruchów elementarnych, osiągnie brzeg obszaru, na którym ruch cząsteczki zostaje zakończony.

Powtarzając analogicznie serie ruchów σ_k razy, można zauważyć, że cząsteczka wychodząca z punktu $P_{m,n}$ osiągnie k_1 razy punkt P_1, k_2 razy punkt P_2, ..., k_r razy punkt P_r $(P_i \in \Gamma_h)$.
Przy czym

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = \sigma_k \tag{2.14}$$

Jeżeli punktom P_i przyporządkowane są wartości funkcji P_i wg wzoru (2.11a), to oczekiwana wartość końcowa ruchów rozpoczynających się w $P_{m,n}$ wyniesie:

$$v_{m,n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} k_i t_i}{\sigma_k} \tag{2.15}$$

Można wykazać, że funkcja określona powyższym wzorem stanowi rozwiązanie równania różnicowego (2.12) , a więc przybliżone rozwiązanie zagadnienia Dirichleta.

Opisany model probabilistyczny zrealizować można na maszynie cyfrowej przy pomocy następującego algorytmu. Z programu generatora liczb pseudolosowych uzyskiwany jest ciąg liczb z przedziału $[0,1)$, o równomiernym rozkładzie. Pojawieniu się liczby $0 \leqslant L < 1/4$ odpowiada przejście cząsteczki z punktu $P_{m,n}$ w kierunku poziomym do punktu $P_{m-1,n}$. Analogicznie pojawienie się liczb losowych L z przedziałów $[1/4, 1/2)$, $[1/2, 3/4)$, $[3/4,1)$ powoduje przesunięcie się cząsteczki odpowiednio do punktów $P_{m,n+1}$, $P_{m+1,n}$, $P_{m,n-1}$. Wybór przedziałów i przyporządkowanie kierunków ruchów jest tutaj swobodne, jednak z zachowaniem odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństw $p_{m+1,n} = p_{m,n+1} = p_{m-1,n} = p_{m,n-1} = \frac{1}{4}$.

Podobnie do symbolu określonego wzorem (2.13) wprowadzimy symboliczny zapis rozkładu prawdopodobieństw ruchu cząsteczki w poszczególnych kierunkach w postaci:

$$P_r = \begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & p'_{m,n} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

gdzie: $p_{m+1,n}$ - oznacza prawdopodobieństwo przejścia cząsteczki z punktu $P_{m,n}$ do punktu $P_{m+1,n}$

$p_{m,n+1}$ - do punktu $P_{m,n+1}$

$p_{m-1,n}$ - do punktu $P_{m-1,n}$

$p_{m,n-1}$ - do punktu $P_{m,n-1}$

$p'_{m,n}$ - oznacza prawdopodobieństwo pozostania cząsteczki w punkcie $P_{m,n}$.

Oczywiście $\sum_j p_{r,j} = 1$ oraz $p_{r,j} \in [0,1]$

W celu uproszczenia zapisu może okazać się wygodne zastąpienie w tablicy (2.16) liczb $p_{r,j}$ liczbami do nich proporcjonalnymi $\tilde{p}_{r,j}$. Wtedy $\tilde{p}_{r,j} \in [0, \infty)$.

W dalszym ciągu uznamy za równoważne zapisy:

$$\begin{bmatrix} & \tilde{p}_{m,n+1} & \\ \tilde{p}_{m-1,n} & \tilde{p}'_{m,n} & \tilde{p}_{m+1,n} \\ & \tilde{p}_{m,n-1} & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & p'_{m,n} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.16a)$$

przy czym $p_{r,j} = \tilde{p}_{r,j} / \sum_j \tilde{p}_{r',j}$.

Algorytm przewiduje realizację dowolnej liczby σ_k serii ruchów błędnych rozpoczynających się w $P_{m,n}$. W rezultacie wyznaczone są wartości:

$$k_i = \sum_{j=1}^{\sigma_k} \xi_j \qquad (2.17)$$

gdzie: $\xi_j = 1$, jeżeli seria zakończyła się w P_i

oraz $\xi_j = 0$, jeżeli seria zakończyła się nie w P_i, $(P_i \in \Gamma_h)$.

Wyznaczone liczby k_i pozwalają na obliczanie wartości funkcji według wzoru (2.15).

W związku z wprowadzeniem zapisu symbolicznego rozkładu prawdopodobieństw (2.16), uogólnimy go w ten sposób by można było objąć nim dalej rozpatrywane zagadnienia.

Oznaczenie $p'_{m,n}$ w środku tablicy (2.16) może dotyczyć następujących trzech przypadków:

1. Cząsteczka, która zatrzymała się w punkcie wyjściowym, może w następnym elementarnym ruchu przemieścić się do punktu sąsiedniego lub dalej pozostać chwilowo w miejscu. Dotyczy to dowolnego punktu obszaru.

2. Cząsteczka zostaje w punkcie pochłonęta, kończąc serię. Dotyczy to punktów położonych na brzegu zewnętrznym obszaru. W tym przypadku punktowi pochłonięcia będziemy przyporządkowywać wartość funkcji t_i, odpowiadającą punktowi należącemu do otoczenia badanego obszaru, który przylega bezpośrednio do miejsca pochłonięcia cząsteczki.

3. Jeżeli cząsteczka znajduje się w punkcie położonym na linii styku dwóch obszarów, to pozostając w punkcie wyjściowym, może zostać przyporządkowana drugiemu obszarowi, stykającemu się z obszarem, w którym znajdowała się przed ruchem elementarnym.

Dla punktów wewnętrznych obszaru zachodzi tylko pierwsza możliwość, a więc tablica rozkładów prawdopodobieństw ruchów cząsteczki jest następująca:

$$P_r = \begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & p_{m,n} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

gdzie: $p_{m,n}$ - oznacza prawdopodobieństwo chwilowego zatrzymania cząsteczki w punkcie $p_{m,n}$, pozostałe oznaczenia jak w (2.16).

W przypadku punktów brzegowych mogą być do wyboru możliwości 1 i 2. Rozkład prawdopodobieństw określa tablica:

$$P_{r;1,2} = \begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & \frac{p_{m,n}}{p^{o}_{m,n}} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.19)$$

gdzie: $p^{o}_{m,n}$ - oznacza prawdopodobieństwo pochłonięcia cząsteczki w punkcie $P_{m,n}$,
pozostałe oznaczenia jak w (2.16).

Dla uproszczenia zapisu będziemy uważać za równoważne symbole:

$$\begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & \frac{p_{m,n}}{0} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & p_{m,n} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.19a)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & \frac{0}{p^{o}_{m,n}} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & \frac{}{p^{o}_{m,n}} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \quad (2.19b)$$

W przypadku punktów położonych na wspólnym brzegu dwu obszarów mogą zachodzić równocześnie możliwości 1 i 3. Wtedy rozkład prawdopodobieństw określony może być przy pomocy tablicy:

$$P_{r,1,3} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} & & & p_{m,n+1} & & & \\ p_{m-1,n} & & p_{m,n} & p''_{m,n} & & p_{m+1,n} & \\ & & & p_{m,n-1} & & & \end{array}\right] \quad (2.20)$$

gdzie: $p''_{m,n}$ - oznacza prawdopodobieństwo pozostania cząsteczki w punkcie wyjściowym z równoczesną zmianą przyporządkowania obszaru,
pozostałe oznaczenia jak w (2.18).

W celu dalszego uproszczenia zapisu będziemy uważać za równoważne symbole:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} & & & p_{m,n+1} & & & \\ p_{m-1,n} & & p_{m,n} & 0 & & p_{m+1,n} & \\ & & & p_{m,n-1} & & & \end{array}\right] \equiv \begin{bmatrix} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & p_{m,n} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{bmatrix} \quad (2.20a)$$

oraz

$$\left[\begin{array}{ccc} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & 0 \,\big|\, p''_{m,n} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc} & p_{m,n+1} & \\ p_{m-1,n} & \big|\, p''_{m,n} & p_{m+1,n} \\ & p_{m,n-1} & \end{array}\right] \qquad (2.20b)$$

Analogicznie do (2.16a), będziemy uznawać za równoważne tablice, w których wszystkie wielkości $p_{r,j}$ zastąpiono wielkościami do nich proporcjonalnymi $\tilde{p}_{r,j}$.

2.2. Drugie zagadnienie brzegowe

Problem poszukiwania funkcji $v(x,y)$ spełniającej wewnątrz obszaru Ω równanie (2.10) oraz warunek:

$$-\lambda \frac{\partial v}{\partial n} = q(x,y) \qquad (2.21)$$

gdy $P(x,y) \in \Gamma\Omega$, stanowi drugie zagadnienie brzegowe, zwane również zagadnieniem Neumana.

W rozdziale tym rozważymy przypadek szczególny drugiego zagadnienia brzegowego:

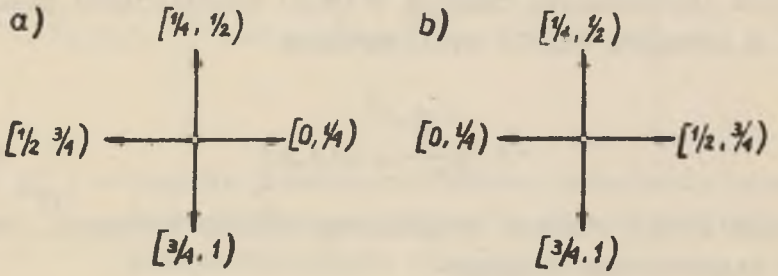
$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad (2.21a)$$

Przypadek ogólny rozpatrzony jest w ustępie 3.4.

Zagadnienie ma sens fizyczny wtedy, jeżeli warunek (2.21a) zachodzi tylko na części brzegu obszaru, a na pozostałych częściach brzegu zachodzą inne warunki brzegowe, np. (2.11).

W pracy [15] rozważono szczegółowo ten przypadek i podano model probabilistyczny, polegający na zmianie schematu przemieszczeń cząsteczki w przypadku dojścia do brzegu z warunkiem brzegowym drugiego rodzaju.

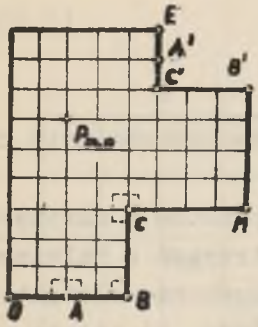
Wewnątrz obszaru ruchu błędne należy modelować analogicznie jak w przypadku zagadnienia Dirichleta, natomiast jeżeli cząsteczka dojdzie do brzegu z warunkiem (2.21a) i "zamierza" w kolejnym ruchu wyjść poza obszar, to należy zmienić schemat ruchu cząsteczki, w ten sposób by cząsteczka powróciła do wnętrza obszaru. Jeżeli np. przy modelowaniu na maszynie cyfrowej, przed osiągnięciem i zamierzonym przekroczeniem linii brzegowej z warunkiem (2.21a) pojawieniu się liczby losowej z przedziału $[0,1/4)$ odpowiadało przemieszczenie w kierunku dodatnim osi x, to po zamierzonym przekroczeniu tej linii, odpowiadać będzie przesunięcie w kierunku ujemnym. Podobnie pojawienie się liczby z przedziału $[1/2, 3/4)$ powodować wtedy będzie ruch w kierunku dodatnim.



Rys. 2. Schemat ruchów cząsteczki

Ruch cząsteczki według schematu rys. 2a zostaje zastąpiony ruchem według schematu rys. 2b, lub odwrotnie. Sygnałem zmiany kierunku winien być dopiero zamiar przekroczenia linii brzegowej, albowiem cząsteczka może z tej linii samodzielnie losowo powrócić. Zakończenie serii ruchów błędnych może nastąpić tylko w węzłach na brzegu z warunkami brzegowymi (2.11).

Istnieje oprócz tego druga możliwość modelowania zagadnienia z warunkami adiatermicznymi na brzegu. Rozpatrując węzeł położony na brzegu z warunkiem (2.21a), przy czym dla ustale-



Rys. 3. Obszar siatkowy z brzegiem adiatermicznym OBCMBCE

nia uwagi przyjmiemy, że węzeł jest położony na dolnym brzegu obszaru (rys.3) otrzymamy równanie elementarnego bilansu ciepłnego otoczenia węzła:

$$\lambda \frac{\vartheta_{m+1,n} - \vartheta_{m,n}}{h} \frac{h}{2} + \lambda \frac{\vartheta_{m,n+1} - \vartheta_{m,n}}{h} h +$$

$$+ \lambda \frac{\vartheta_{m-1,n} - \vartheta_{m,n}}{h} \frac{h}{2} = 0 \qquad (2.22)$$

Po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 0 & \end{array} \right\} \vartheta_{m,n} \qquad (2.22a)$$

Prawdopodobieństwo ruchu z linii brzegowej do wnętrza obszaru jest dwukrotnie większe niż w pozostałych dwu kierunkach.

Dla innych położeń węzłów na brzegu adiatermicznym obowiązywać będą zależności analogiczne do (2.22a).

Przy położeniu węzła na prawym brzegu (punkt A' na rys. 3), tablicę { } we wzorze (2.22a) należy obrócić o 90^0 w kierunku dodatnim i podobnie dla innych położeń.

Należy również rozpatrzyć przypadki szczególne, położenia w narożach zewnętrznym B lub wewnętrznym C.

Z równań elementarnych bilansów cieplnych dla tych przypadków otrzymujemy:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\} \vartheta_{m,n} \qquad (2.22b)$$

oraz

$$v_{m,n} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} & 2 & \\ 2 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} v_{m,n} \qquad (2.22c)$$

Z powyższych równań wynikają rozkłady prawdopodobieństw ruchu cząsteczki w poszczególnych kierunkach.

Dla szczególnych przypadków usytuowania punktów w narożach tego samego typu, odpowiednie wzory można otrzymać z zależności (2.22b) i (2.22c) przez cykliczne przestawienie elementów tablic{ }. Tak np. dla punktów B' oraz C' (rys. 3) należy w odpowiednich wzorach obrócić tablice{ } o 90° w kierunku dodatnim.

Realizacja obliczeń zagadnienia z granicami adiatermicznymi przebiega analogicznie jak dla zagadnienia z granicami izotermicznymi. W końcowym etapie dla wyznaczenia temperatury $v_{m,n}$ należy skorzystać ze wzoru (2.15).

2.3. Trzecie zagadnienie brzegowe

W zagadnieniach przewodzenia ciepła występujących w praktyce inżynierskiej najczęściej poszukiwana jest funkcja $v(x,y)$ spełniająca wewnątrz obszaru Ω równanie (2.10), oraz warunek

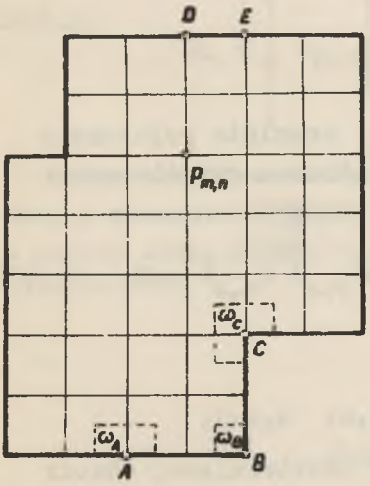
$$-\lambda \frac{\partial v}{\partial n} = \alpha_i \left[v(x,y) - t \right] \qquad (2.23)$$

gdy $P(x,y) \in \Gamma$.

Problem ten nosi nazwę trzeciego zagadnienia brzegowego.

Rozwiązanie przebiegać będzie podobnie jak w przypadku zagadnienia Dirichleta. Rozpatrzmy ponownie obszar siatkowy Ω' (rys.4), w którym modelować będziemy ruchy błędne cząsteczki [20].

Dla zbioru węzłów wewnętrznych Ω_h obowiązuje nadal związek (2.12). Równanie dla zbioru węzłów brzegowych Γ_n otrzymamy z bilansów cieplnych, określonych dla obszarów elementarnych otaczających węzły.



Rys. 4. Obszar siatkowy z trzecim warunkiem brzegowym

Rozpatrując węzeł położony na brzegu przy ścianie płaskiej z warunkiem (2.23), np. punkt A (rys. 4) znajdujący się na dolnym brzegu obszaru, otrzymujemy następujące równanie bilansu dla otoczenia tego punktu ω_A:

$$\lambda \frac{\vartheta_{m+1,n} - \vartheta_{m,n}}{h} \frac{h}{2} + \lambda \frac{\vartheta_{m,n+1} - \vartheta_{mn}}{h} h + \tag{2.24}$$

$$+\lambda \frac{\vartheta_{m-1,n} - \vartheta_{m,n}}{h} \frac{h}{2} + \alpha_{m,n}(t_{mn} - \vartheta_{m,n})h = 0$$

Po przekształceniach algebraicznych:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{Bi + 2} \left\{ \begin{matrix} & 1 & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & 0 & \end{matrix} \right\} \vartheta_{m,n} + \frac{Bi}{Bi + 2} t_{m,n} \tag{2.25}$$

gdzie:

$$Bi = \frac{\alpha_{m,n} h}{\lambda} \tag{2.25a}$$

Rozkład prawdopodobieństw ruchów w poszczególnych kierunkach, dla węzła A określa tabela odpowiadająca równaniu: (2.25):

$$P_r = \begin{bmatrix} & 1 & \\ \frac{1}{2} & Bi & \frac{1}{2} \\ & 0 & \end{bmatrix} \qquad (2.26a)$$

W ogólnym przypadku dla węzła $P_{m,n}$ dowolnie położonego na brzegu z warunkiem (2.23) równanie bilansu określa wzór:

$$\sum_{i,j} \lambda \frac{\nu_{i,j} - \nu_{m,n}}{h} s_{i,j} h + \alpha_{m,n} (t_{m,n} - \nu_{m,n}) r_{m,n} h = 0 \qquad (2.27)$$

gdzie:

$i,j = m+1,n;\ m,n+1;\ m-1,n;\ m,n-1;$

$s_{i,j}$ - stosunek długości linii oddzielającej obszar elementarny otaczający punkty sąsiednie do h ($s_{i,j}$ przyjmuje w zależności od usytuowania węzła wartości: $0;\ \frac{1}{2};\ 1$),

$r_{m,n}$ - stosunek długości linii oddzielającej obszar elementarny otaczający punkt $P_{m,n}$ od płynu do h ($r_{m,n} = 1$).

Z równania bilansu po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy:

$$\nu_{m,n} = \frac{1}{(Bi + \Sigma s_{i,j})} \left\{ \begin{matrix} & s_{m,n+1} & \\ s_{m-1,n} & 0 & s_{m+1,n} \\ & s_{m,n-1} & \end{matrix} \right\} \nu_{m,n} + \frac{Bi}{Bi + \Sigma s_{i,j}} t_{m,n} \qquad (2.28)$$

gdzie:

$$Bi = \frac{\alpha_{m,n} \cdot h}{\lambda}$$

Rozkład prawdopodobieństw ruchów cząsteczki dla dowolnie usytuowanego węzła z warunkiem (2.23) określa tablica.

$$p_r = \begin{bmatrix} & s_{m,n+1} & \\ s_{m-1,n} & Bi & s_{m+1,n} \\ & s_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

Rozpatrzmy dwa charakterystyczne położenia szczególne punktów, a mianowicie punkt B w narożu zewnętrznym oraz punkt C w narożu wewnętrznym. Dla tych przypadków ze wzoru (2.29) otrzymujemy:

$$p_{rB} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & Bi & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix} \qquad (2.26b)$$

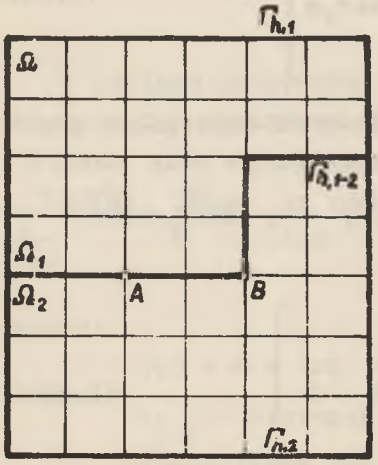
$$p_{rC} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & Bi & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \end{bmatrix} \qquad (2.26c)$$

Dla poszczególnych przypadków usytuowania punktów na brzegach z warunkiem (2.23) otrzymujemy analogiczne tablice rozkładu prawdopodobieństw, przy czym można je wyznaczyć z tablicy ogólnej (2.29), lub też drogą cyklicznego przedstawienia elementów tablic (2.26,a, b, c).

Realizacja obliczeń, drogą modelowania probabilistycznego trzeciego zagadnienia brzegowego, przebiega analogicznie jak w przypadku opisanym w ust. 2.1.

2.4. Zagadnienie kontaktowe z idealnym stykiem

Rozpatrzmy pokazany na rys. 5 obszar Ω składający się z dwu podobszarów Ω_1 i Ω_2 o różnych współczynnikach przewodzenia ciepła λ_1 i λ_2.



Rys. 5. Obszar siatkowy złożony z dwu podobszarów o różnych współczynnikach przewodzenia ciepła

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w takim przypadku sprowadza się do poszukiwania dwu funkcji $v_1(x,y)$ i $v_2(x,y)$ spełniających odpowiednio wewnątrz obszarów Ω_1 i Ω_2 równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.30)$$

$$k = 1,2$$

na wspólnym brzegu warunki:

$$v_1(x,y) = v_2(x,y) \qquad (2.31)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} \qquad (2.32)$$

dla $P(x,y) \in \Gamma_{h_{1,2}}$.

oraz odpowiednie warunki brzegowe na pozostałych brzegach.

W celu rozwiązania zagadnienia dzielimy podobszary Ω_1 i Ω_2 przy pomocy siatki kwadratowej o boku h, przy czym zakładamy, że istnieje możliwość podziału każdego z tych obszarów w taki sposób. Linia kontaktu podobszarów Ω_1 i Ω_2 leżeć będzie na linii podziału obszaru siatkowego Ω_h. (Drugą, nie rozpatrywaną tutaj możliwością, jest podział obszaru Ω w ten sposób, by linia kontaktu przebiegała pomiędzy dwiema liniami podziału obszaru Ω na obszar siatkowy Ω_h).

Dla węzłów siatki podziału nie leżących na linii kontaktu obowiązują wzory podane powyżej w ust. 2.1, 2.2, i 2.3. Dla punktów $P_{m,n} \in \Gamma_{h_{1,2}}$, tj. leżących na linii kontaktu, odpowiednie wzory można otrzymać z równań elementarnych bilansów cieplnych:

$$\sum_{i,j} (\lambda_1 s_{i,j,1}{}^{h} + \lambda_2 s_{i,j;2}{}^{h}) \frac{\vartheta_{k;i,j} - \vartheta_{1-2;m,n}}{h} = 0 \qquad (2.33)$$

gdzie: $i,j = m+1,n;\quad m,n+1;\quad m-1,n;\quad m,n-1;$

$\vartheta_{1-2;m,n} = \vartheta_{1;m,n} = \vartheta_{2;m,n},$

$\vartheta_{k;i,j}$ - w zależności od usytuowania może być,

$\vartheta_{1;i,j}$ lub $\vartheta_{2;i,j}$

$s_{i,j;1}$ - stosunek długości linii podziału pomiędzy otoczeniem punktu $P_{i,j}$ znajdującym się wewnątrz obszaru Ω_1 do h,

$s_{i,j;2}$ - jak wyżej - wewnątrz obszaru Ω_2,

$s_{i,j;1,2}$ przyjmują wartości 0, $\frac{1}{2}$, 1, w zależności od usytuowania węzła.

Z równania (2.33) otrzymujemy po przekształceniach:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{\sum_{i,j}(\sum_{k}\lambda_k s_{i,j;k})} \; x$$

$$x \left\{ \begin{array}{ccc} & \sum_k \lambda_k s_{m,n+1;k} & \\ \sum_k \lambda_k s_{m-1,n;k} & 0 & \sum_k \lambda_k s_{m+1,n;k} \\ & \sum_k \lambda_k s_{m,n-1;k} & \end{array} \right\} \vartheta_{k;m,n} \qquad (2.34)$$

$$k = 1,2$$

Z powyższego równania widoczny jest rozkład prawdopodobieństw ruchów w poszczególnych kierunkach, przy modelowaniu przemieszczeń cząsteczki.

W przypadkach szczególnych dla punktów A i B otrzymujemy odpowiednio:

$$P_{rA} = \begin{bmatrix} & \lambda_1 & \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & 0 & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \\ & \lambda_2 & \end{bmatrix} \qquad (2.35a)$$

$$P_{rB} = \begin{bmatrix} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} & 0 & \lambda_2 \\ & \lambda_2 & \end{bmatrix} \qquad (2.35b)$$

Dalszy przebieg realizacji obliczeń jest analogiczny jak w wyżej opisanych zagadnieniach.

2.5. Zagadnienie kontaktowe z oporem cieplnym styku

Rozpatrzmy zagadnienie połączenia kontaktowego z występującym oporem cieplnym. Na skutek oporu cieplnego na styku nie obowiązuje równanie (2.31).

Dla takiego zagadnienia warunki brzegowe przyjmują postać:

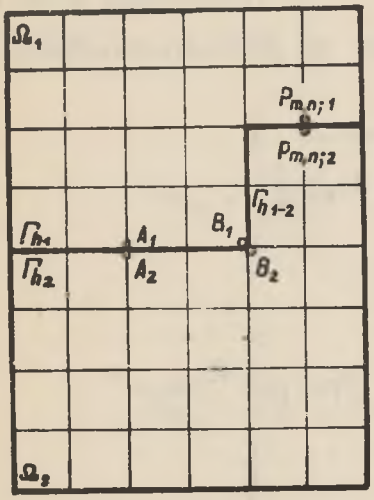
$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = \frac{1}{R}\left[\vartheta_2(x,y) - \vartheta_1(x,y)\right] \qquad (2.36)$$

oraz

$$\lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{1}{R}\left[\vartheta_1(x,y) - \vartheta_2(x,y)\right] \qquad (2.37)$$

dla $P(x,y) \in \Gamma_{h1-2}$

Celem rozwiązania zagadnienia rozpatrzymy obszary Ω_1 i Ω_2 pokazane na rys. 6.



Rys. 6. Dwa stykające się obszary siatkowe z oporem cieplnym na linii kontaktu

Dla punktów leżących na linii kontaktu należących równocześnie do obydwu obszarów, wprowadzimy podwójne oznaczenia $P_{m,n;1}$ i $P_{m,n;2}$. Tak oznaczone punkty będziemy przyporządkowywać tylko jednemu obszarowi Ω_1 lub Ω_2 i w ten sposób pozornie rozdzielimy wspólny brzeg na Γ_{h1} i Γ_{h2}.

Punktom należącym do Γ_{h1} przyporządkujemy temperatury ϑ_1, a punktom należącym do Γ_{h2} temperatury ϑ_2.

Dla otoczenia należącego do Ω_1 punktów ze zbioru Γ_{h1} równanie elementarnego bilansu cieplnego jest:

$$\sum_{i,j} \lambda_1 \frac{\vartheta_{1;i,j} - \vartheta_{1;m,n}}{h} s_{i,j} h + \frac{1}{R_{m,n}} (\vartheta_{2;m,n} - \vartheta_{1;m,n}) r_{i,j} h = 0 \qquad (2.38)$$

gdzie: $R_{m,n}$ - opór cieplny połączenia kontaktowego w $P_{m,n}$,

$i,j = m+1;n;\quad m,n+1;\quad m-1,n;\quad m,n+1;$

$s_{i,j}$ - stosunek długości linii oddzielającej obszar elementarny otaczający punkt $P_{m,n}$ od obszarów elementarnych otaczających punkty sąsiednie z obszaru Ω_1 do h,

($s_{i,j}$ przyjmuje wartości: $0; \frac{1}{2}; 1$).

$r_{m,n}$ - stosunek długości linii kontaktu obszaru elementarnego z obszarem Ω_2 do h; ($r_{m,n} = 1$).

Dla punktów należących do Γ_{h2} równanie bilansu jest podobne, z tą różnicą że w równaniu (2.38) należy wskaźniki 1 zastąpić wskaźnikami 2 i odwrotnie.

Z równania bilansu (2.38) otrzymujemy po przekształceniach:

$$v_{1;m,n} = \frac{1}{(r_{m,n}\, h/\lambda_1\, R_{m,n}) + \sum s_{i,j}} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} & s_{m,n+1} & \\ s_{m-1,n} & 0 & s_{m+1,n} \\ & s_{m,n-1} & \end{Bmatrix} v_{1;m,n} +$$

$$+ \frac{r_{m,n} h/\lambda_1\, R_{m,n}}{r_{m,n} h/\lambda_1\, R_{m,n} + \sum s_{i,j}}\, v_{2;m,n} \qquad (2.39)$$

Dla modelowania ruchów błędnych cząsteczki wprowadzimy następujące zasady dla punktów położonych na brzegu Γ_{h1}:. Cząsteczka może z punktu P_1 przejść do jednego z punktów sąsiednich należących do obszaru Ω_1 lub zatrzymać się w punkcie P. W tym ostatnim przypadku będziemy uważać, że cząsteczka znalazła się w punkcie P_2.

Zgodnie z równaniem (2.39) schemat rozkładu prawdopodobieństw ruchów błędnych cząsteczki określa tablica:

$$p_{r1} = \begin{bmatrix} & s_{m,n+1} & \\ s_{m+1,n} & (r_{m,n}\, h/\lambda_1\, R_{m,n}) & s_{m+1,n} \\ & s_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.40)$$

Analogicznie cząsteczka znajdująca się na brzegu Γ_{h2} może z punktu P_2 przejść do jednego z punktów sąsiednich z obszaru Ω_2 lub pozostać w punkcie P, przechodząc z P_2 do P_1.

Dla dwóch charakterystycznych położeń punktów, a mianowicie A i B otrzymujemy następujące rozkłady prawdopodobieństw ruchów cząsteczki:

Dla A_1 i A_2;

$$p_{rA_1} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ \frac{1}{2} & | (h/\lambda_1 \quad R) & \frac{1}{2} \\ & 0 & \end{bmatrix} \tag{2.41a}$$

$$p_{rA_2} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ \frac{1}{2} & | (h/\lambda_2 \quad R) & \frac{1}{2} \\ & 1 & \end{bmatrix} \tag{2.41b}$$

oraz dla B_1 i B_2:

$$p_{rB_1} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & | (h/\lambda_1 \; R) & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix} \tag{2.42a}$$

$$p_{rB_2} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & | (h/\lambda_2 \; R) & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \tag{2.42b}$$

Dla punktów nie leżących na brzegu Γ_{h1-2} modelowanie ruchów błędnych odbywa się na opisanych uprzednio zasadach.

2.6. Materiały niejednorodne i anizotropowe

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w dwuwymiarowym ośrodku niejednorodnym sprowadza się do poszukiwania rozwiązania równania

$$\nabla(\lambda \nabla \vartheta) = 0 \qquad (2.43)$$

gdzie: $\lambda = \lambda(x,y)$,
przy warunkach brzegowych 1, 2, lub 3 rodzaju.

Rozpatrzmy ponownie obszar siatkowy Ω' pokazany na rys. 1. Ciągłą zmianę współczynnika przewodzenia ciepła będziemy aproksymować zmianą skokową i przyporządkujemy obszarom elementarnym otaczającym węzeł $P_{m,n}$ wartości współczynnika przewodzenia ciepła $\lambda_{m,n}$.

Zakładamy, że ilość ciepła przepływającego pomiędzy dwoma sąsiednimi elementarnymi obszarami otaczającymi punkty węzłowe jest proporcjonalna do zastępczych współczynników przewodzenia ciepła $\bar{\lambda}_{i,j}$ pomiędzy węzłami:

$$\Delta Q_{i,j} = \bar{\lambda}_{i,j} \frac{\vartheta_{i,j} - \vartheta_{m,n}}{h} h \qquad (2.44)$$

gdzie: $\bar{\lambda}_{i,j}$ - zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła.

Jeżeli $\lambda(x,y)$ - jest funkcją ciągłą to można przyjąć

$$\lambda_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\lambda(x_m,y_n) + \lambda(x_i, y_j)\right]$$

Przy takim założeniu równanie elementarnego bilansu cieplnego dla otoczenia węzła $P_{m,n} \in \Omega_h$ jest:

$$\sum_{i,j} \bar{\lambda}_{i,j} \frac{\vartheta_{i,j} - \vartheta_{m,n}}{h} h = 0 \qquad (2.45)$$

$i,j = m+1,n; \quad m,n+1; \quad m-1,n; \quad m,n-1$

Po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{\sum_{i,j} \bar{\lambda}_{i,j}} \begin{Bmatrix} & \bar{\lambda}_{m,n+1} & \\ \bar{\lambda}_{m-1,n} & 0 & \bar{\lambda}_{m+1,n} \\ & \bar{\lambda}_{m,n-1} & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} \qquad (2.46)$$

Przy modelowaniu przemieszczeń cząsteczki dla rozpatrywanego przypadku, rozkład prawdopodobieństw ruchów w poszczególnych kierunkach winien odpowiadać tablicy:

$$p_{i,j} = \begin{bmatrix} & \bar{\lambda}_{m,n+1} & \\ \bar{\lambda}_{m-1,n} & 0 & \bar{\lambda}_{m+1,n} \\ & \bar{\lambda}_{m,n-1} & \end{bmatrix} \qquad (2.47)$$

W zależności od warunków brzegowych można z bilansów elementarnych określić odpowiednie wzory dla węzłów położonych na brzegu obszaru Ω.

W pewnych ośrodkach naturalnych lub sztucznych wartości współczynników przewodzenia ciepła nie zależą od położenia punktu lecz od kierunku przepływu ciepła.

Jeżeli różnią się tylko współczynniki przewodzenia ciepła w kierunkach wzajemnie prostopadłych:

$$\lambda_x \neq \lambda_y \tag{2.48}$$

to ośrodek nazywamy ortotropowym.

Równanie bilansu cieplnego dla elementarnego obszaru otaczającego węzeł $P_{m,n}$, należący do obszaru Ω_h przyjmuje w tym przypadku postać:

$$\lambda_x \frac{v_{m+1,n} - v_{m,n}}{h} h + \lambda_y \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{h} h + \tag{2.49}$$

$$+ \lambda_x \frac{v_{m-1,n} - v_{m,n}}{h} h + \lambda_y \frac{v_{m,n-1} - v_{m,n}}{h} h = 0$$

skąd otrzymujemy

$$v_{m,n} = \frac{1}{2(\lambda_x + \lambda_y)} \begin{bmatrix} & \lambda_y & \\ \lambda_x & 0 & \lambda_x \\ & \lambda_y & \end{bmatrix} v_{m,n} \tag{2.50}$$

Rozkład prawdopodobieństw ruchów błędnych cząsteczki przy modelowaniu zagadnienia dla ośrodka charakteryzującego się anizotropią w kierunkach ortogonalnych określa tablica:

$$p_{i,j} = \begin{bmatrix} & \lambda_y & \\ \lambda_x & 0 & \lambda_x \\ & \lambda_y & \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Odpowiednie zależności można określić dla innych przypadków położenia węzłów brzegowych z równań elementarnych bilansów cieplnych.

2.7. Różnorodne warunki brzegowe

Powyżej rozpatrzono zasadniczo jednorodne warunki brzegowe. W przypadku różnorodnych warunków brzegowych na poszczególnych częściach linii brzegowej, obowiązuje rozszerzony na zasadzie superpozycji wzór (2.15) w postaci:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{\sigma_k}\left[\sum_{i=1}^{r} k_i' t_i' + \sum_{i=1}^{s} k_i'' t_i''\right] \qquad (2.52)$$

gdzie:

k_i' - ilość serii ruchów zakończonych w punktach brzegowych o temperaturze t_i' na brzegu z pierwszym warunkiem

k_i'' - ilość serii ruchów zakończonych w punktach brzegowych o temperaturze przy tych punktach t_i'', na brzegu z trzecim warunkiem.

Oczywiście:

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{r} k_i' + \sum_{i=1}^{s} k_i'' \qquad (2.53)$$

Zakończenie serii ruchów może nastąpić tylko na brzegach z pierwszym lub trzecim warunkiem brzegowym. Jeżeli elementarny obszar siatki podziału jest położony w ten sposób, że na jednej linii ograniczającej obszar elementarny zachodzi pierwszy warunek brzegowy a na innej trzeci, to za dominujący uznać trzeba pierwszy warunek brzegowy.

Węzłowi znajdującemu się w takim obszarze przyporządkować należy temperaturę

$$\vartheta_{m,n} = t_{m,n}$$

Wzór (2.15) jest podstawowym rozwiązaniem problemu z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju, albowiem może być wykorzystany przy dowolnych wartościach t_i na brzegu.

Wzór (2.52) może być wykorzystany przy dowolnych wartościach t_i' na brzegu oraz dowolnych wartościach t_i'' przy brzegu, tylko wtedy gdy pozostają stałe liczby Biota badanych obszarów. Wynika to z zależności liczb k_i'', a za ich pośrednictwem liczb k_i' od liczby Biota (2.29). Liczba Biota dotyczy tutaj obszaru elementarnego, zgodnie z (2.25a).

W przypadku zagadnienia kontaktowego lub przy zmiennym współczynniku przewodzenia ciepła w badanym obszarze, można wyniki modelowania probalistycznego określonego zagadnienia transportować na zagadnienia podobne przy spełnionych powyżej warunkach, jeżeli ponadto nie ulegają zmienie współczynniki przewodzenia ciepła i opór cieplny.

W każdym przypadku przy ustalonych λ, α, R można ze wzoru (2.52) otrzymać rozwiązanie przy różnych wartościach t_i' oraz t_i'' znając k_i' oraz k_i''.

3. USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W CIAŁACH STAŁYCH ZE ŹRÓDŁAMI WEWNĘTRZNYMI

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych z wewnętrznymi źródłami ciepła sprowadza się do poszukiwania rozkładu temperatur w postaci funkcji $v(P)$, $(P \in \Omega)$ spełniającej wewnątrz obszaru Ω równanie:

$$\nabla(\lambda \nabla v) + q_v(P) = 0 \qquad (3.1)$$

gdzie: $q_v(P)$ - wydajność wewnętrznych źródeł ciepła.

Na brzegu obszaru funkcja $\vartheta(P)$ winna spełniać odpowiednie warunki, które mogą być określone równaniami (2.2)...(2.8).

Dla izotropowych ciał stałych równanie (3.1) przechodzi w równanie Poissona:

$$\nabla^2 \vartheta + \frac{q_v(P)}{\lambda} = 0 \qquad (3.2)$$

Dalej rozpatrywać będziemy zagadnienie dwuwymiarowe w obszarze Ω ,zorientowanym przy pomocy kartezjańskiego układu współrzędnych. Równanie Poissona przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{q_v(x,y)}{\lambda} = 0 \qquad (3.3)$$

W ogólnym przypadku rozkład źródeł jest nierównomierny. Jeżeli działają tylko miejscowe źródła ciepła, to funkcja $q_v(x,y)$ jest tylko dla skończonej liczby punktów z obszaru Ω różna od zera, a dla prawie wszystkich równa zeru. W przypadku równomiernie rozłożonych źródeł ciepła

$$q_v = \text{const} \qquad (3.4)$$

3.1. Nierównomierny rozkład źródeł

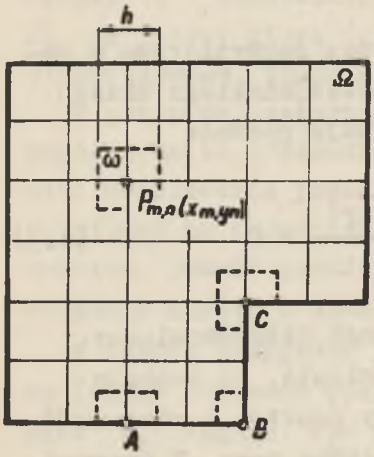
Rozpatrzmy obszar Ω pokazany na rys. 7, który analogicznie jak w rozdziale 2 zastąpimy obszarem siatkowym Ω'. Nierównomiernie rozłożone źródła ciepła zastąpimy zródłami miejscowymi skupionymi w węzłach siatki podziału.

Dla dowolnego punktu $P_{m,n}$ o współrzędnych (x_m, y_n) określimy źródło miejscowe, ze wzoru

$$q_{m,n} = \iint_{\omega} q_v(x,y)\,d\sigma \qquad (3.5)$$

gdzie:

$\omega_{m,n}$ - elementarny obszar otaczający punkt $P_{m,n}$.



Rys. 7. Obszar siatkowy

Jeżeli $q_v(x,y)$ jest funkcją liniową lub w obszarze $\omega_{m,n}$ może być z wystarczającą dokładnością aproksymowana funkcją liniową, to wzór (3.5) można dla węzłów wewnętrznych zastąpić zależnością:

$$q_{m,n} = q_v(x_m, y_n)h^2 \qquad (3.6)$$

Dla węzłów brzegowych A,B,C, można podać podobne przybliżone zależności:

$$q_{m,n} = \frac{1}{2} q^{śr}_{v;\omega_{m,n}} h^2 \qquad (3.7a)$$

$$q_{m,n} = \frac{1}{4} q^{śr}_{v;\omega_{m,n}} h^2 \qquad (3.7b)$$

$$q_{m,n} = \frac{3}{4} q^{śr}_{v;\omega_{m,n}} h^2 \qquad (3.7c)$$

gdzie:

$q^{śr}_{v;\omega_{m,n}}$ - średnia wartość funkcji $q_v(x,y)$ w obszarze elementarnym $\omega_{m,n}$.

Średnia wartość $q^{śr}_{v;\omega_{m,n}}$ może być w przybliżeniu wyznaczona ze wzoru:

$$q^{śr}_{v;\omega_{m,n}} = \frac{1}{2}\left(q^{min}_{v;\omega_{m,n}} + q^{min}_{v;\omega_{m,n}}\right) \qquad (3.8)$$

gdzie:

$q^{min}_{v;\omega_{m,n}}$, $q^{max}_{v;\omega_{m,n}}$ - minimalna i maksymalna wartość, funkcji $q_v(x,y)$ w obszarze elementarnym $\omega_{m,n}$.

Jeżeli zależności (3.6) i (3.7) nie mogą być przyjęte z wystarczającą dokładnością, to dla punktów brzegowych należy stosować wzór (3.5) lub ewentualnie aproksymować go zależnością przybliżoną o odpowiedniej dokładności.

Zastępując w równaniu (3.3) pochodne cząstkowe różnicami skończonymi oraz uwzględniając wzór (3.6) otrzymujemy dla wewnętrznych węzłów $P_{m,n} \in \Omega_h$, równanie różnicowe

$$v_{m,n} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} v_{m,n} + \frac{q_{m,n}}{4\lambda} \qquad (3.9)$$

Równanie (3.9) wskazuje, że wartość $v_{m,n}$ w dowolnym punkcie węzłowym wewnętrznym jest równa średniej arytmetycznej wartości $v_{i,j}$ w sąsiednich punktach węzłowych powiększonej o $(q_{m,n}/4\lambda)$.

Rozpatrzmy problem z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju.

Model probabilistyczny równania Poissona z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju jest analogiczny jak dla zagadnienia Dirichleta [23]. Należy jednak śledzić nie tylko punkt końcowy, ale całą trajektorię ruchów błędnych cząsteczki. Jeżeli seria ruchów, która rozpoczęła się w punkcie $P_{m,n}$ na drodze do punktu brzegowego P_1 o temperaturze t_1 przeszła przez k_1 węzłów, to wartość końcową serii ruchów błędnych należy przyjąć:

$$W_1 = t_1 + \sum_{l=0}^{k_1} (q_{i,j})_l \qquad (3.10)$$

gdzie:

$$\bar{q}_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{4\lambda} \tag{3.11}$$

Powtarzając analogicznie serię ruchów błędnych σ razy odnotujemy po zakończeniu każdej serii ruchów wartość końcową:

$$W_g = t_g + \sum_{l=0}^{k_g} (\bar{q}_{i,j})_l \tag{3.12}$$

$$g = 1,2,\ldots,\sigma$$

Poszukiwana wartość funkcji $v_{m,n}$ będzie równa oczekiwanej wartości końcowej ruchów rozpoczynających się w punkcie $P_{m,n}$ i wyniesie

$$v_{m,n} = \frac{1}{\sigma} \sum_{g=1}^{\sigma} \left[t_g + \sum_{l=0}^{k_g} (\bar{q}_{i,j})_l \right] \tag{3.13}$$

Dla uproszczenia algorytmizacji modelowania na maszynie cyfrowej można powyższy wzór przekształcić. Jeżeli obszar składa się z u grup węzłów wewnętrznych ze źródłami o wydajności $q_\alpha, (\alpha = 1,2,\ldots,u)$ oraz v grup węzłów brzegowych, w których określona jest temperatura $t_\beta, (\beta = 1,2,\ldots,v)$ to zamiast wzoru (3.13) otrzymujemy

$$v_{m,n} = \frac{1}{\sigma} \left[\sum_{\alpha=1}^{u} k_\alpha \bar{q}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{v} k_\beta t_\beta \right] \tag{3.14}$$

gdzie:

k_α – liczba przejść cząsteczki przy modelowaniu serii ruchów błędnych przez punkty ze źródłami q_α,

k_β - liczba określająca ilość serii ruchów zakończonych w jednym z punktów brzegowych o temperaturze t_β.

$$\bar{q}_\alpha = q_\alpha / 4\lambda \tag{3.11a}$$

Oczywiście

$$\sum_{\alpha=1}^{u} k_\alpha = \sum_{g=1}^{\sigma} k_g \tag{3.15}$$

oraz

$$\sum_{\beta=1}^{v} k_\beta = \sigma \tag{3.16}$$

Rozwiązanie w postaci (3.14) jest rozwiązaniem podstawowym i pozwala na wyznaczenie przy pomocy jednego modelowania rozwiązań dla zagadnień geometrycznie podobnych, przy różnych wartościach temperatur na brzegu i przy różnym rozkładzie wewnętrznych źródeł ciepła.

Przebieg modelowania jest identyczny jak w przypadku opisanym w ust. 2.1.

Dla innych zagadnień brzegowych obowiązuje wewnątrz obszaru również wzór (3.9). Dla węzłów brzegowych należy odpowiednie równania wyznaczyć analogicznie jak w rozdziale 2, z równań bilansu cieplnego dla elementarnego obszaru otaczającego węzeł.

W ogólnym przypadku dla węzła położonego na brzegu z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju równanie bilansu określa wzór:

$$\sum_{i,j} \lambda \frac{\vartheta_{i,j} - \vartheta_{m,n}}{n} s_{i,j}^{h+\alpha}{}_{m,n}(t_{m,n} - \vartheta_{m,n}) r_{m,n}^{h+q}{}_{m,n} = 0 \tag{3.17}$$

gdzie:

$i,j = m+1,n;\quad m;n+1;\quad m-1,n;\quad m,n-1;$

$s_{i,j}$, $r_{m,n}$ - jak we wzorze (2.27).

Po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{Bi + \sum s_{i,j}} \left\{ s_{m-1,n} \; \begin{matrix} s_{m,n+1} \\ 0 \\ s_{m,n-1} \end{matrix} \; s_{m+1,n} \right\} \vartheta_{m,n} +$$

$$+ \frac{Bi}{Bi + \sum s_{i,j}} t_{m,n} + \frac{(q_{m,n}/\lambda)}{Bi + \sum s_{i,j}} \qquad (3.18)$$

Modelowanie ruchów błędnych cząsteczki dla tego zagadnienia przebiega analogicznie jak w przypadku opisanym w ust. 2.3, tj. według wzoru (2.29).

Wartość temperatur $\vartheta_{m,n}$ należy wyznaczyć ze wzoru analogicznego do (3.13):

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{\sigma} \sum_{g=1}^{\sigma} \left[t_g + \sum_{l=0}^{k_g} (\bar{q}_{i,j})_l \right] \qquad (3.19)$$

gdzie:

$\bar{q}_{i,j} = \frac{q_{m,n}}{4\lambda}$ - dla węzłów wewnętrznych $P_{m,n}$

i

$\bar{q}_{i,j} = \frac{q_{m,n}/\lambda}{(Bi + \sum s_{i,j})}$ - dla węzłów brzegowych $P_{m,n}$.

Wzór powyższy można sprowadzić do postaci analogicznej do (3.14):

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{\sigma} \left[\sum_{\alpha=1}^{u'} k_\alpha \, q_\alpha + \sum_{\beta=1}^{v} k_\beta \, t_\beta \right] \qquad (3.20)$$

gdzie:

u' - ilość grup węzłów brzegowych i wewnętrznych ze źródłami o wydajności q_α,

- pozostałe oznaczenia według (3.14).

Rozwiązanie powyższe jest rozwiązaniem podstawowym pod warunkiem spełnienia dodatkowych ograniczeń wskazanych w ust. 2.7.

Dla zagadnienia z nierównomiernie rozłożonymi źródłami ciepła przy warunkach dodatkowych analogicznych do opisanych w ust. 2.4, 2.5, 2.6 i 2,7 można z równań bilansu wyznaczyć odpowiednie zależności oraz odpowiednie wzory podobne do (3.19) i (3.20).

3.2. Miejscowe źródła ciepła

W przypadku zagadnienia dla obszaru, w którym działają miejscowe skupione źródła ciepła, należy dokonać podziału obszaru Ω na obszar siatkowy Ω', w ten sposób, by źródła miejscowe znalazły się w węzłach siatki.

Jeżeli taki podział obszaru jest praktycznie niemożliwy, z uwagi na konieczność wprowadzenia dużej liczby węzłów, to będziemy uważać, że w węźle $P_{m,n}$ działa źródło zastępcze o wydajności równej sumie wydajności wszystkich źródeł działających w elementarnym obszarze w otaczającym punkt $P_{m,n}$

$$q'_{m,n} = \sum_i (q_{m,n})_i \qquad (3.21)$$

Zakładamy więc, że w skończonej liczbie węzłów działają źródła $q'_{m,n}$.

Przy modelowaniu ruchów błędnych cząsteczki posługiwać się będziemy sposobami opisanymi powyżej w ust. 3.1,

Wartości $p'_{m,n}$ wyznaczamy ze wzorów (3.19) lub (3.20). W tym ostatnim przypadku rejestrować należy tylko przejścia cząsteczki przez węzły, w których działają źródła rzeczywiste lub zastępcze.

3.3. Równomiernie rozłożone źródła ciepła

Jeżeli zgodnie z (3.4) $q_v = \text{const}$, to dla węzłów wewnętrznych $P_{m,n}$ obszaru zachodzi

$$q_w = q_v \cdot h^2 \tag{3.22}$$

Dla węzłów brzegowych P_i typu A,B,C obowiązują odpowiednie wzory

$$q_A = \frac{1}{2} q_w \tag{3.22a}$$

$$q_B = \frac{1}{4} q_w \tag{3.22b}$$

$$q_C = \frac{3}{4} q_w \tag{3.22c}$$

Wzór (3.20) dla takiego zagadnienia sprowadza się do postaci

$$v_{m,n} = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{4\lambda} q_w\left(k_w + \frac{1}{2} k_A + \frac{1}{4} k_B + \frac{3}{4} k_C\right) + \sum_{\beta=1}^{s} k_\beta t_\beta\right] \tag{3.23}$$

gdzie:

k_w – ilość przejść cząsteczki przez węzły wewnętrzne,

k_A, k_B, k_C – ilość przejść cząsteczki przez węzły brzegowe, odpowiednio typu A,B,C

3.4. Rozwiązanie uogólnionego zagadnienia brzegowego drugiego rodzaju za pomocą zastępczego źródła wewnętrznego

W ust. 2.2 rozpatrzono szczególny przypadek drugiego zagadnienia brzegowego, określony równaniem (2.21a). W przypadku

ogólnym drugiego zagadnienia brzegowego określony jest na brzegu niezerowy strumień ciepła w postaci (2.21).

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = q(x,y)$$

Założymy, że warunek ten jest określony tylko na części linii brzegowej, a na pozostałych częściach zachodzą inne warunkac brzegowe, np. pierwszego lub trzeciego rodzaju.

Jeżeli przyjmiemy jako wartość średnią strumienia cieplnego na brzegu obszaru elementarnego otaczającego węzeł brzegowy, wartość

$$\bar{q}_{m,n} = q(x_m, y_n) \tag{3.24}$$

to równanie bilansu cieplnego dla tego obszaru elementarnego określa wzór:

$$\sum_{i,j} \lambda \frac{\vartheta_{i,j} - \vartheta_{m,n}}{h} s_{i,j}^{h} + \bar{q}_{m,n} \cdot r_{m,n}^{h} = 0 \tag{3.25}$$

oznaczenia jak we wzorze (2.27).

Z równania bilansu po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy:

$$\vartheta_{m,n} = \frac{1}{\sum s_{i,j}} \left\{ s_{m-1,n} \quad \begin{matrix} s_{m,n+1} \\ 0 \\ s_{m,n-1} \end{matrix} \quad s_{m+1,n} \right\} \vartheta_{m,n} + \frac{q_{m,n}/\lambda}{\sum s_{i,j}} \tag{3.26}$$

gdzie:

$$q_{m,n} = \bar{q}_{m,n} \cdot r_{m,n}$$

Równanie (3.26) jest szczególnym przypadkiem równania (3.18) przy Bi = 0.

Zatem przy rozwiązywaniu zagadnienia ogólnego z drugim warunkiem brzegowym, możemy analizowany problem sprowadzić do przypadku rozpatrywanego w ust. 3.1.

Warunek brzegowy w postaci (2.21) zastępujemy warunkiem (2.21a) i zastępczym miejscowym źródłem ciepła o intensywności

$$q_{m,n} = q(x_m, y_n) \cdot r_{m,n} h \tag{3.27}$$

gdzie:

$r_{m,n}$ - stosunek długości linii granicznej obszaru elementarnego z drugim warunkiem brzegowym do h.

Modelowanie i rejestracja ruchów błędnych cząsteczki przebiega analogicznie do przypadku opisanego w ust. 3.1. Wartości temperatur $v_{m,n}$ w punktach badanego obszaru wyznaczyć należy ze wzorów (3.19) lub (3.20).

W przypadkach szczególnych dla węzłów typu A, B, C (rys. 3) ze wzoru (3.26) otrzymujemy:

$$v_{m,n} = \frac{1}{4}\left\{\begin{matrix} & 2 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 0 & \end{matrix}\right\} v_{m,n} + \frac{\bar{q}_{m,n} \cdot h}{4\lambda} \tag{3.28a}$$

$$v_{m,n} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix}\right\} v_{m,n} + \frac{\bar{q}_{m,n} \cdot h}{2\lambda} \tag{3.28b}$$

$$v_{m,n} = \frac{1}{6}\left\{\begin{matrix} & 2 & \\ 2 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\} v_{m,n} + \frac{\bar{q}_{m,n} \cdot h}{3\lambda} \tag{3.28c}$$

Opisany sposób zastąpienia warunku (2.21) warunkiem (2.21a) i zastępczym źródłem ciepła, pozwala na rozwiązanie zagadnień z ogólną postacią drugiego warunku brzegowego, zarówno ze źródłami wewnętrznymi jak i bez źródeł wewnętrznych.

4. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W CIAŁACH STAŁYCH BEZ ŹRÓDEŁ WEWNĘTRZNYCH

Zagadnienie nieustalonego przewodzenia ciepła w ciałach stałych bez wewnętrznych źródeł ciepła sprowadza się do poszukiwania rozkładu temperatury w postaci funkcji $\vartheta(P,\tau)$, $(P \in \Omega, \tau > 0)$ spełniającej w obszarze Ω równanie:

$$\nabla(\lambda \nabla \vartheta) = c_p \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}, \tag{4.1}$$

warunek początkowy

$$\vartheta(P,0) = \vartheta_0(P) \tag{4.2}$$

oraz warunki brzegowe na brzegu obszaru Γ_Ω.

W równaniu (4.1) oznaczono:

λ - współczynnik przewodzenia ciepła,

c_p - ciepło właściwe,

γ - gęstość.

Na poszczególnych częściach brzegu obszaru Γ_Ω może zachodzić jeden z następujących warunków:

a) Warunek brzegowy pierwszego rodzaju:

$$\vartheta(P_\Gamma,\tau) = t(P_\Gamma,\tau) \qquad (P_\Gamma \in \Gamma_\Omega) \tag{4.3}$$

b) Warunek brzegowy drugiego rodzaju:

$$-\lambda \nabla \vartheta(P_\Gamma,\tau) = q(P_\Gamma,\tau), \tag{4.4}$$

lub w przypadku szczególnym:

$$\nabla \vartheta(P_\Gamma,\tau) = 0 \tag{4.5}$$

c) Warunek brzegowy trzeciego rodzaju:

$$\lambda \nabla \vartheta(P_\Gamma, \tau) + \alpha(P_\Gamma, \tau)\left[\vartheta(P_\Gamma, \tau) - t(P_\Gamma, \tau)\right] = 0 \qquad (4.6)$$

d) Warunki określające wymianę ciepła przez przewodzenie pomiędzy stykającymi się ciałami stałymi:

$$\lambda_1 \nabla \vartheta_1(P_\Gamma, \tau) = \lambda_2 \nabla \vartheta_2(P_\Gamma, \tau) \qquad (4.7)$$

orza w przypadku kontaktu idealnego

$$\vartheta_1(P_\Gamma, \tau) = \vartheta_2(P_\Gamma, \tau) \qquad (4.8)$$

natomiast dla kontaktu nieidealnego

$$\lambda_1 \nabla \vartheta_1(P_\Gamma, \tau) = \frac{1}{R}\left[\vartheta_2(P_\Gamma, \tau) - \vartheta_1(P_\Gamma, \tau)\right] \qquad (4.9)$$

Jeżeli współczynniki charakteryzujące własności fizyczne materiału λ, c_p, γ - są stałe, to równanie (4.1) można przedstawić w postaci:

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \qquad (4.10)$$

gdzie:

$a = \frac{\lambda}{c_p \gamma}$ - współczynnik wyrównywania temperatury.

4.1. Pierwsze zagadnienie brzegowe

Rozpatrzmy zagadnienie dwuwymiarowe w obszarze Ω, zorientowanym przy pomocy prostokątnego układu współrzędnych tj. równanie paraboliczne:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \qquad (4.11)$$

Poszukiwanym rozwiązaniem jest funkcja $\vartheta(x,y,\tau)$ spełniająca równanie (4.11) wewnątrz obszaru, warunek początkowy

$$\vartheta(x,y,0) = \vartheta_0(x,y) \tag{4.12}$$

oraz warunek

$$\vartheta(x,y,\tau) = t(x,y,\tau) \tag{4.13}$$

na brzegu obszaru.

Podobnie jak dla zagadnienia opisanego w ust. 2.1. zastępujemy obszar rzeczywisty Ω obszarem siatkowym Ω' (rys. 1).

Zastępując w równaniu (4.11) pochodne cząstkowe różnicami skończonymi lub bezpośrednio z bilansów elementarnych, otrzymujemy równanie różnicowe obowiązujące dla węzłów wewnętrznych Ω_n:

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = Fo(\vartheta_{m+1,n}+\vartheta_{m,n+1}+\vartheta_{m-1,n}+\vartheta_{m,n-1})+Fo(\frac{1}{Fo}-4)\vartheta_{m,n} \tag{4.14}$$

$$Fo = \frac{a\Delta\tau}{h^2}$$

gdzie:

$$\vartheta_{m,n} \equiv \vartheta(P_{m,n},\tau),$$

$$\bar{\vartheta}_{m,n} \equiv \vartheta(P_{m,n},\tau+\Delta\tau).$$

Warunkiem zbieżności rozwiązania jest

$$(\frac{1}{Fo}-4) \geqslant 0, \tag{4.15}$$

skąd

$$\Delta\tau \leqslant \frac{h^2}{4a} \tag{4.16}$$

Maksymalny dopuszczalny krok różnicowy czasowy wynosi:

$$\Delta\tau = \frac{h^2}{4a} \tag{4.17}$$

W tym przypadku zamiast równania (4.14) otrzymujemy:

$$v^{k}_{m,n} = \frac{1}{4}\left(v^{k}_{m+1,n} + v^{k}_{m,n+1} + v^{k}_{m-1,n} + v^{k}_{m,n-1}\right) \tag{4.18}$$

Dla $\tau = 0$ mamy bezpośrednio z (4.12)

$$v^{0}_{m,n} = v_{0,m,n}, \tag{4.19}$$

natomiast dla punktów brzegowych P_i z (4.13)

$$v^{k}_{i} = t_i \qquad (\tau > 0) \tag{4.20}$$

Model probabilistyczny dla równania parabolicznego podał King [6]. Modelować będziemy podobnie jak w przypadku opisanym w ust. 2.1., ruchy błędne cząsteczki. Cząsteczka znajdująca się chwilowo w węźle $P_{m,n}$ przechodzi w elementarnym ruchu odbywającym się w ciągu czasu $\Delta\tau$ do jednego z sąsiednich punktów $P_{m+1,n}$; $P_{m,n+1}$; $P_{m-1,n}$, $P_{m,n-1}$. Wybór punktu ma charakter losowy, przy czym prawdopodobieństwo przejścia do każdego z tych punktów jest jednakowe i wynosi 1/4. Jeżeli cząsteczka osiągnie brzeg, ruch zostaje zakończony.

Celem znalezienia wartości $v^{k}_{m,n}$ w momencie $\tau = s\,\Delta\tau$ należy modelować σ_k razy serię zawierającą nie więcej niż s ruchów błędnych, rozpoczynającesię w punkcie $P_{m,n}$.

Spośród tych σ_k serii ruchów błędnych część zakończy się w ciągu s ruchów lub wcześniej w jednym z punktów brzegowych P_i, część natomiast zostanie przerwana po s ruchach w chwili gdy cząsteczka znajdzie się w jednym z punktów wewnętrznych P_{ξ_i,η_i}.

W ciągu modelowania σ_k serii można zarejestrować ilości $k_1, k_2, \ldots, k_p$ serii zakończonych w punktach brzegowych $P_1, P_2, \ldots, P_p$ oraz ilości $k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots, k_r$ serii przerwanych w punktach wewnętrznych $P_{\xi\, p+1}, \eta_{p+1}, P_{\xi\, p+2}, \eta_{p+2}, \ldots, P_{\xi\, r}, \eta_r$.

Przy czym

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = \sigma_k \tag{4.21}$$

Jeżeli punktom P_i przyporządkowane są wartości funkcji v_i wg wzoru (4.20), a punktom P_{ξ_i, η_i} wartości początkowe v_{0,ξ_i,η_i} wg wzoru (4.19), to oczekiwana wartość funkcji $v_{m,n}$ w punkcie $P_{m,n}$ i momencie $\tau = s\,\Delta\tau$ wyniesie:

$$v^s_{m,n} = \frac{\sum_{i=1}^{p} k_i\, t_i + \sum_{i=p+1}^{r} k_i\, v_{0,\xi_i,\eta_i}}{k} \tag{4.22}$$

Dowód powyższego można przeprowadzić następująco: Jeżeli przez $u_s(P_{m,n}, P)$ oznaczymy prawdopodobieństwo przejścia w ciągu s ruchów cząsteczki wychodzącej z $P_{m,n}$ do węzła P, to

$$u_s(P_{m,n}, P) = \frac{1}{4}\left[u_{s-1}(P_{m+1,n}, P) + u_{s-1}(P_{m,n+1}, P) + u_{s-1}(P_{m-1,n}, P) + u_{s-1}(P_{m,n-1}, P)\right] \tag{4.23}$$

gdzie: P - węzeł wewnętrzny lub brzegowy.

Oczywiście zachodzą związki:

$$\begin{aligned} u_s(P_i, P_i) &= 1 \\ u_s(P_i, P) &= 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

gdzie: P_i - węzły brzegowe

oraz

$$u_0(P_{m,n}, P_{m,n}) = 1$$

$$u_0(P_{m,n}, P) = 0 \qquad (4.25)$$

gdy $P_{m,n}$ nie pokrywa się z P.

Jeżeli punktom brzegowym P_i (i=1,2,...,p) przyporządkowane są wartości funkcji t_i, a punktom wewnętrznym $P_{\xi i, \eta i}$ (i=p+1,p+2,...,r) - wartości $\nu_{0, \xi i, \eta i}$, to oczekiwana wartość końcowa po s ruchach wynosi:

$$v_s(P_{m,n}) = \sum_{i=1}^{p} u_s(P_{m,n}, P_i)\, t_i + \sum_{i=p+1}^{r} u_s(P_{m,n}, P_{\xi i, \eta i}) \times$$

$$\times \nu_{0;\, \xi i, \eta i} \qquad (4.26)$$

Podstawiając do równania (4.23) $P = P_i$ i mnożąc przez t_i oraz $P = P_{\xi i, \eta i}$ i mnożąc przez $\nu_{0;\, \xi i, \eta i}$ otrzymamy r równań.

Sumując powstałe w ten sposób równania stronami otrzymujemy:

$$v_s(P_{m,n}) = \frac{1}{4} \left[v_{s-1}(P_{m+1,n}) + v_{s-1}(P_{m,n+1}) + \right.$$

$$\left. + v_{s-1}(P_{m-1,n}) + v_{s-1}(P_{m,n-1}) \right] \qquad (4.27)$$

Zatem wartość oczekiwana $v_s(P_{m,n})$ jest rozwiązaniem równania różnicowego (4.18).

Warunki początkowe i brzegowe są spełnione, albowiem przy $s = 0$ i $P_{\xi i,\, \eta i} = P_{m,n}$ z równania (4.26) otrzymuje się po uwzględnieniu (4.25)

$$v_0(P_{m,n}) = \vartheta_0;\ \xi i,\ \eta i, \tag{4.28}$$

a przy $P_{m,n} = P_i$ z równania (4.26) wynika po uwzględnieniu (4.24):

$$v_s(P_i) = t_i$$

Ponieważ wzory (4.26) i (4.22) są równoważne, to opisany model spełnia warunek zadania.

Algorytm realizujący opisany model probabilistyczny dla zagadnienia dwuwymiarowego w obszarze siatkowym Ω_h, jest następujący:

Pojedynczemu przejściu cząsteczki odpowiada krok różnicowy $\Delta\tau$ określony wzorem (4.17). W celu znalezienia wartości funkcji w momencie $s\Delta\tau$ w punkcie $P_{m,n}$ należy modelować serie rozpoczynające się w $P_{m,n}$ i zawierające co najwyżej s ruchów.

Z programu generatora liczb pseudolosowych uzyskuje się liczby $L \in [0,1)$. Podobnie jak w algorytmie opisanym w ust. 2.1. pojawieniu się liczb z przedziałów $[0,1/4)$; $[1/4, 1/2)$; $[1/2, 3/4)$; $[3/4, 1)$ odpowiada przesunięcie cząsteczki do punktów $P_{m+1,n}$; $P_{m,n+1}$; $P_{m-1,n}$; $P_{m,n-1}$. Jeżeli po wykonaniu pewnej ilości r $(r \leqslant s)$ ruchów pojedynczych, cząsteczka osiągnie brzeg w punkcie P_i, to seria zostaje zakończona i zarejestrowane zostaje "pochłonięcie" cząsteczki przez punkt brzegowy p_i. Jeżeli w toku s ruchów cząsteczka nie osiągnie brzegu, to zarejestrowane zostanie przerwanie serii w punkcie $P(\xi_i, \eta_i)$. Algorytm przewiduje realizację dowolnej liczby σ_k serii ruchów błędnych rozpoczynających się w $P_{m,n}$.

W rezultacie obliczeń wyznaczone są wartości k_i dla każdego punktu obszaru osobno, według wzoru:

$$k_i = \sum_{j=1}^{\sigma_k} \varsigma_j \qquad (4.30)$$

gdzie:

$\varsigma_j = 1$ - jeżeli seria zakończyła się w P_i lub została przerwana w $P_{\xi i, \eta i}$,

$\varsigma_j = 0$ - jeżeli seria nie zakończyła się w P_i lub nie została przerwana w $P_{\xi i, \eta i}$.

$(P_i \in \Gamma_h; \quad P_{\xi i, \eta i} \in \Omega_h)$

Wyznaczone liczby k_i pozwalają na obliczanie wartości funkcji według wzoru (4.22).

Algorytm przewiduje również możliwości wyznaczania wartości k_i dla dowolnego $r < s$, a więc na określanie wartości funkcji w momencie $\tau = r\Delta\tau$ $(o < r\Delta\tau < s\Delta\tau)$.

Wartości $\vartheta^r_{m,n}$ wyznaczyć należy również według wzoru (4.22).

4.2. Drugie zagadnienie brzegowe

Rozpatrzmy problem dotyczący poszukiwania funkcji $\vartheta(x,y,\tau)$ spełniającej wewnątrz obszaru Ω równanie (4.11), warunek początkowy (4.12) oraz na brzegu Γ warunek:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = q\,(x,y,\tau) \qquad (4.31)$$

Przy tym ograniczymy się tylko do przypadku szczególnego warunku (4.31)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0 \qquad (4.32)$$

Tutaj zagadnienie fizyczne ma sens zarówno wtedy, gdy na wszystkich brzegach zachodzi warunek (4.32) jak i w przypadku gdy warunek ten zachodzi tylko na części brzegu, a na pozostałych brzegach zachodzą inne warunki, np. (4.13).

Z rozważań podobnych do przeprowadzonych w ust. 2.2 wynika identyczny model probabilistyczny zagadnienia. Cząsteczka rozpoczynająca ruch w dowolnym punkcie obszaru Ω_h, dochodząc do brzegu z warunkiem (4.32) zmienia zwrot ruchu w kierunku prostopadłym do tego brzegu w przypadku "zamiaru" opuszczenia obszaru Ω.

Drugi sposób modelowania wynika z równań bilansów elementarnych. Np. dla punktu A (rys. 3) otrzymujemy:

$$\lambda \frac{\vartheta_{m+1,n} - \vartheta_{m,n}}{h} \frac{h}{2}\Delta\tau + \lambda \frac{\vartheta_{m,n+1} - \vartheta_{m,n}}{h} h\Delta\tau +$$

$$+ \lambda \frac{\vartheta_{m,n-1} - \vartheta_{m,n}}{h} \frac{h}{2}\Delta\tau = c\,\gamma \frac{h^2}{2} (\bar{\vartheta}_{m,n} - \vartheta_{m,n}) \qquad (4.32)$$

Skąd po przekształceniach algebraicznych z uwzględnieniem (4.17):

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} & 2 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 0 & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} \qquad (4.33a)$$

Podobnie dla przypadków szczególnych położenia punktów w narożach zewnętrznym B, lub wewnętrznym C (rys. 3) otrzymujemy:

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} \qquad (4.33b)$$

oraz

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} & 2 & \\ 2 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} \qquad (4.33c)$$

Dla punktów wewnętrznych obszaru obowiązuje więc równanie (4.18), a dla punktów brzegowych z granicami adiatermicznymi równania typu (4.33.a, b, c).

Realizacja obliczeń przebiega analogicznie jak w przypadku pierwszego zagadnienia brzegowego. Wartość temperatur $\vartheta^{s}_{m,n}$ wyznaczyć należy ze wzoru (4.22).

4.3. Trzecie zagadnienie brzegowe

W najczęściej występujących przypadkach w zagadnieniach praktycznych, poszukiwana jest funkcja $\vartheta(x,y,\tau)$ spełniająca wewnątrz obszaru Ω równanie (4.1), warunek początkowy (4.12) oraz warunek

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha_i \left[\vartheta(x,y,\tau) - t \right] \qquad (4.34)$$

na brzegu Γ.

Rozwiązanie przebiegać będzie podobnie jak w przypadku opisanym w ust. 4.1. Po zastąpieniu obszaru rzeczywistego obszarem siatkowym Ω' otrzymujemy dla węzłów wewnętrznych z równania bilansu zależność (4.14).

Przyjmując, że w obszarze Ω' mogą być trzy typy punktów węzłowych brzegowych, reprezentowane przez węzły A, B, C na rys. 4, otrzymujemy ogólne równanie bilansu cieplnego dla węzłów brzegowych:

$$\sum_{i,j} \lambda \frac{\vartheta_{i,j} - \vartheta_{m,n}}{h} s_{i,j} h \Delta\tau + \alpha_{m,n} (t_{m,n} - \vartheta_{m,n}) r_{m,n} h =$$

$$= c_p \gamma f_{m,n} h^2 (\bar{\vartheta}_{m,n} - \vartheta_{m,n}) \qquad (4.35)$$

$i,j = m+1,n;\quad m,n+1;\quad m-1,n;\quad m,n-1.$

$s_{i,j};\ r_{i,j}$ - jak we wzorze (2.27).

$f_{m,n}$ - stosunek pola obszaru elementarnego otaczającego punkt brzegowy, do h^2 ($f_{m,n}$ przyjmuje wartości 1/4; 1/2; 3/4).

Z równania bilansu otrzymujemy po przekształceniach algebraicznych

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{Fo}{f_{m,n}} \left\{ s_{m-1,n} \quad \begin{matrix} s_{m,n+1} \\ s_{m,n} \\ s_{m,n-1} \end{matrix} \quad s_{m+1,n} \right\} \vartheta_{m,n} +$$

$$+ \frac{Bi_{m,n}\, Fo}{f_{m,n}}\ t_{m,n} \tag{4.36}$$

gdzie:

$$s_{m,n} = \frac{f_{m,n}}{Fo} - \sum_{i,j} s_{i,j} - Bi_{m,n}$$

$$Fo = \frac{a\Delta\tau}{h^2}$$

$$Bi_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}\, h}{\lambda}$$

Warunkiem zbieżności rozwiązania jest

$$s_{m,n} \geqslant 0 \tag{4.37}$$

Dla węzłów A, B, C (rys. 4) otrzymujemy:

$$s_{m,n} = \frac{1/2}{Fo} - 2 - Bi_{m,n} \tag{4.38a}$$

$$s_{m,n} = \frac{1/4}{Fo} - 1 - Bi_{m,n} \tag{4.38b}$$

$$s_{m,n} = \frac{3/4}{Fo} - 3 - Bi_{m,n} \tag{4.38c}$$

Dla węzłów wewnętrznych:

$$s_{m,n} = \frac{1}{Fo} - 4 \tag{4.38d}$$

Dla spełnienia nierówności (4.37) wystarczy by

$$Fo = \frac{1}{4 + 4\,Bi'_{m,n}} \tag{4.39}$$

gdzie:

$Bi'_{m,n}$ - maksymalna wartość $Bi_{m,n}$ dla punktów brzegowych obszaru Ω'.

Wzory szczegółowe dla poszczególnych punktów brzegowych obszaru Ω' otrzymujemy z (4.36) po podstawieniu (4.39), a dla punktów wewnętrznych z (4.14).

Zakładając, że dla całego brzegu obszaru

$$\alpha_{m,n} = \text{idem}, \tag{4.40}$$

a więc

$$Bi_{m,n} = Bi = \text{idem} \tag{4.40a}$$

otrzymujemy dla punktów węzłowych wewnętrznych oraz brzegowych typu A, B i C - następujące związki:

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{1}{4 + 4Bi} \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & 4Bi & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} \qquad (4.41)$$

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{1}{2 + 2Bi} \begin{Bmatrix} & 1 & \\ \frac{1}{2} & Bi & \frac{1}{2} \\ & 0 & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} + \frac{Bi}{2 + 2Bi} t_{m,n} \qquad (4.42a)$$

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{1}{1 + Bi} \begin{Bmatrix} & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} + \frac{Bi}{1 + Bi} t_{m,n} \qquad (4.42b)$$

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = \frac{1}{3 + 3Bi} \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & 2Bi & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \end{Bmatrix} \vartheta_{m,n} + \frac{Bi}{3 + 3Bi} t_{m,n} \qquad (4.42c)$$

Modelowanie zagadnienia opisanego równaniami (4.41) i (4.42) przeprowadzać będziemy podobnie jak w przypadku opisanym w ust. 4.1.

Cząsteczka znajdująca się w węźle wewnętrznym może w wyniku pojedynczego ruchu przejść do jednego z punktów sąsiednich lub pozostać w miejscu.

Cząsteczka znajdująca się w węźle brzegowym również może przejść do jednego z punktów sąsiednich, może pozostać w miejscu z możliwością wykonania dowolnego następnego ruchu lub zatrzymać się na brzegu, kończąc serię.

Dla węzła wewnętrznego rozkład prawdopodobieństw ruchów cząsteczki określa zgodnie z (4.41) wzór:

$$p_r = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 4Bi & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

Dla węzłów brzegowych A, B, C otrzymujemy z równań (4.42):

$$p_{rA} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1/2 & \frac{Bi}{Bi} & 1/2 \\ & 0 & \end{pmatrix} \tag{4.44a}$$

$$p_{rB} = \begin{pmatrix} & 1/2 & \\ 1/2 & \frac{C}{Bi} & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \tag{4.44b}$$

$$p_{rC} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & \frac{2Bi}{Bi} & 1/2 \\ & 1/2 & \end{pmatrix} \tag{4.44c}$$

Dla różnych przypadków usytuowania punktów na brzegach otrzymujemy analogiczne tablice rozkładu prawdopodobieństw ruchów cząsteczki.

Po ustaleniu rozkładów prawdopodobieństw ruchów cząsteczki dalsza realizacja obliczeń drogą modelowania probabilistycznego, trzeciego zagadnienia brzegowego, przebiega analogicznie jak w przypadku opisanym w ust. 4.1.

Wartości temperatur w punkcie $P_{m,n}$ i momencie $\tau = s\Delta\tau$ wyznaczyć należy ze wzoru (4.22). Zgodnie z warunkiem (4.39) krok różnicowy czasowy wynosi:

$$\Delta\tau = \frac{h^2}{a\,(4 + 4Bi)} \tag{4.45}$$

4.4. Zagadnienie kontaktowe z idealnym stykiem

Rozpatrzmy niestacjonarne zagadnienie kontaktowe z idealnym stykiem dla obszaru Ω składającego się z dwu podobszarów Ω_1, Ω_2 (rys. 5) o współczynnikach charakteryzujących własności fizyczne ośrodków c_{p1}, γ_1, λ_1 oraz c_{p2}, γ_2, λ_2. Poszukiwane są dwie funkcje $\vartheta_1(x,y,\tau)$ i $\vartheta_2(x,y,\tau)$ spełniające odpowiednio wewnątrz obszarów Ω_1 i Ω_2 równanie:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_k}{\partial y^2} = \frac{\partial \vartheta_k}{\partial \tau} \qquad (k = 1,2) \tag{4.46}$$

warunki początkowe, na wspólnym brzegu warunki brzegowe:

$$\vartheta_1(x,y,\tau) = \vartheta_2(x,y,\tau) \tag{4.47}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} \tag{4.48}$$

dla $P(x,y) = \Gamma_{h1-2}$

oraz odpowiednie warunki na pozostałych brzegach.

Obszar Ω dzielimy przy pomocy siatki kwadratowej w sposób opisany w ust. 2.4..Równania różnicowe dla poszczególnych węzłów siatki podziału otrzymujemy z bilansów elementarnych. Dla węzłów nie leżących na wspólnym brzegu, obowiązują równania podane powyżej.

Bilans cieplny dla węzłów leżących na linii kontaktu określa równanie:

$$\sum_{i,j} (\lambda_1 s_{i,j;1} + \lambda_2 s_{i,j;2}) \frac{\vartheta_{k;i,j} - \vartheta_{1,2;m,n}}{h} h\Delta\tau =$$

$$= (c_{p1}\gamma_1 + c_{p2}\gamma_2) \frac{h^2}{2} (\bar{\vartheta}_{1-2;m,n} - \vartheta_{1-2;m,n}) \qquad (4.49)$$

gdzie:

$i,j = m+1,n;\quad m,n+1;\quad m-1,n;\quad m,n-1,$

$s_{i,j}$ - jak w równaniu (2.33).

Z równania bilansu otrzymujemy związek określający $\bar{\vartheta}_{1,2;m,n}$, z którego wynika model probabilistyczny.

W przypadku szczególnym dla punktu A (rys. 5) otrzymujemy równanie bilansu:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \frac{\vartheta_{1-2;m+1,n} - \vartheta_{1-2;m,n}}{h} h\Delta\tau +$$

$$+ \lambda_1 \frac{\vartheta_{1;m,n+1} - \vartheta_{1-2;m,n}}{h} h\Delta\tau + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} x$$

$$x \frac{\vartheta_{1-2;m-1,n} - \vartheta_{1-2;m,n}}{h} h\Delta\tau + \lambda_2 \frac{\vartheta_{2;m,n-1} - \vartheta_{1-2;m,n}}{h} h\Delta\tau =$$

$$= \frac{c_{p1}\gamma_1 + c_{p2}\gamma_2}{2} h^2 (\bar{\vartheta}_{1-2;m,n} - \vartheta_{1,2;m,n}) \qquad (4.50)$$

Skąd otrzymujemy:

Skąd otrzymujemy:

$$\bar{\vartheta}_{1-2;m,n} = Fo_{1-2} \begin{Bmatrix} & \frac{2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} & \\ 1 & 0 & 1 \\ & \frac{2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} & \end{Bmatrix} \vartheta_{k;m,n} +$$

$$+ Fo_{1-2} \left(\frac{1}{Fo_{1-2}} - 4\right) \vartheta_{1-2;m,n} \qquad (4.51)$$

gdzie:

$$Fo_{1-2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\Delta\tau}{(c_{p1}\gamma_1 + c_{p2}\gamma_2)h^2}$$

Dla rozpatrywanego węzła warunek zbieżności określa nierówność

$$\frac{1}{Fo_{1-2}} - 4 \geqslant 0. \qquad (4.52)$$

Wybór $\Delta\tau$ winien być dokonany z uwzględnieniem warunku (4.52) oraz odpowiednich warunków dla pozostałych węzłów.

Po określeniu wartości $\Delta\tau$, z równania (4.51) wynika rozkład prawdopodobieństw ruchów błędnych cząsteczki dla węzłów typu A położonych na wspólnym brzegu.

Dalsza realizacja obliczeń przebiega jak w przypadku opisanym w ust. 4.1.

4.5. Zagadnienie kontaktowe z oporem cieplnym styku

Dla połączenia kontaktowego z oporem cieplnym obowiązują zamiast równania (4.47) warunki:

$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = \frac{1}{R}\left[\vartheta_2(x,y,\tau) - \vartheta_1(x,y,\tau)\right] \tag{4.53a}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = \frac{1}{R}\left[\vartheta_1(x,y,\tau) - \vartheta_2(x,y,\tau)\right] \tag{4.53b}$$

dla $P(x,y) \in \Gamma_{h;1-2}$.

Wprowadzając geometryczny model siatkowy badanego obszaru analogicznie jak w przypadku opisanym w ust. 2.5 (rys. 6), otrzymujemy dla otoczenia należącego do Ω_1 punktu ze zbioru Γ_{h1} równanie elementarnego bilansu cieplnego:

$$\sum_{i,j} \lambda_1 \frac{\vartheta_{1;i,j} - \vartheta_{1;m,n}}{h} s_{i,j}\, h\Delta\tau + \frac{1}{R_{m,n}}(\vartheta_{2;m,n} - \vartheta_{1;m,n})\, r_{i,j}\, h\Delta\tau = c_{p1}\gamma_1 h^2(\bar{\vartheta}_{1;m,n} - \vartheta_{1;m,n}) \tag{4.54}$$

$i,j = m+1,n;\quad m,n+1;\quad m-1,n;\quad m,n-1.$

pozostałe oznaczenia jak w (2.38).

Z równania bilansu otrzymujemy:

$$\bar{\vartheta}_{m,n} = Fo_1 \left\{ \begin{matrix} & s_{m,n+1} & \\ s_{m-1,n} & s_{m,n} & s_{m+1,n} \\ & s_{m,n-1} & \end{matrix} \right\} \vartheta_{1;m,n} + s''_{m,n-1}\, \vartheta_{2;m,n} \tag{4.55}$$

gdzie:

$$s_{m,n} = \frac{1}{Fo_1} - \sum_{i,j} s_{i,j} - \frac{r_{m,n}\, h}{R_{m,n}\lambda_1},$$

$$s''_{m,n} = \frac{Fo_1\, r_{m,n}\, h}{R_{m,n}\, \lambda_1}$$

$$Fo_1 = \frac{a_1 \Delta\tau}{h^2}.$$

Warunkiem zbieżności rozwiązania jest:

$$s_{m,n} \geqslant 0 \tag{4.56}$$

Rozkład prawdopodobieństw ruchów błędnych cząsteczki określa tablica:

$$p_r = \begin{pmatrix} & s_{m,n-1} & \\ s_{m-1,n} & s_{m,n} \mid s''_{m,n} & s_{m+1,n} \\ & s_{m,n-1} & \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

Krok różnicowy czasowy należy dobrać w ten sposób, by spełniony był warunek (4.56) oraz odpowiednie warunki równocześnie dla wszystkich punktów obszaru Ω.

Dalszy przebieg realizacji obliczeń drogą modelowania ruchów błędnych cząsteczki nie ulega zmianie.

4.6. Różnorodne warunki brzegowe

Powyżej rozpatrzono zasadniczo jednorodne warunki brzegowe. Przy różnorodnych warunkach brzegowych obowiązują również analogiczne zasady rozwiązania zagadnienia nieustalonego przewodzenia ciepła oraz podstawowy wzór (4.22). Przy wyborze kroku

różnicowego $\Delta\tau$ należy się kierować spełnieniem warunków zbieżności rozwiązania dla wszystkich punktów węzłowych badanego obszaru.

Rozważania dotyczące zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła ograniczono do przypadków podstawowych tj. materiałów jednorodnych, izotropowych oraz do zagadnień bez wewnętrznych źródeł ciepła.

Opisana metoda modelowania probabilistycznego może być stosowana również do zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła w ośrodkach stałych niejednorodnych lub anizotropowych, a także problemów z wewnętrznymi źródłami ciepła.

W oparciu o przeprowadzone w rozdziłach 2 i 3 szczegółowe rozważania dotyczące zagadnień stacjonarnych oraz modele dla zagadnienia niestacjonarnego określone powyżej, można wyprowadzić zależności dotyczące poszczególnych badanych przypadków.

5. PROBLEMY OBLICZENIOWE

Przeprowadzenie obliczeń za pomocą metody Monte Carlo jest praktycznie możliwe wyłącznie drogą wykorzystania elektronowych maszyn cyfrowych. W celu otrzymania szczególnego rozwiązania w postaci jednej wartości poszukiwanej funkcji, z dokładnością wymaganą w zastosowaniach technicznych, należy przeprowadzić modelowanie błędnych ruchów cząsteczki w ilości rzędu kilkudziesięciu tysięcy. Zastosowanie elektronowej maszyny cyfrowej pozwala na wykonanie tego zadania przeciętnie w czasie kilku minut (przy zastosowaniu małej maszyny cyfrowej). Wyznaczenie rozwiązania dla zespołu punktów - dla całego zadania, może być wykonane w ciągu kilku lub kilkunastu godzin.

Przeprowadzenie obliczeń przy pomocy konwencjonalnych ("ręcznych") środków trwałoby przypuszczalnie tysiące godzin i praktycznie nie może być brane pod uwagę.

Korzyści płynące z zastosowania metody Monte Carlo do zagadnień przewodzenia ciepła, w dużej mierze są uzależnione od właściwego rozwiązania problemów ubocznych związanych z programowaniem i realizacją obliczeń. Program winien być opracowany w ten sposób, by możliwe było uzyskanie wyników z pożądaną dokładnością w możliwie najkrótszym czasie. Związane jest to z obniżeniem kosztów realizacji obliczeń na maszynie cyfrowej. Równocześnie należy dążyć do uniwersalności programu, pozwalającej na jego wielokrotne wykorzystanie do podobnych zagadnień.

Aczkolwiek optymalizacja procesu rozwiązywania poszczególnych zagadnień zależy od ich indywidualnych cech, zwrócimy uwagę na najistotniejsze problemy programowania i realizacji obliczeń przy pomocy metody Monte Carlo.

5.1. Generowanie liczb losowych

Przebieg modelowania ruchów błędnych cząsteczki na maszynie cyfrowej uzależniony jest od ciągu liczb losowych. Program realizujący modelowanie przed odtworzeniem pojedynczego ruchu, odwołuje się do źródła liczb losowych. Dlatego istotnym zagadnieniem jest włączenie do programu odpowiedniego źródła liczb losowych. Można wskazać trzy podstawowe sposoby rozwiązania tego zagadnienia [5,21].

Najprostszym formalnie rozwiązaniem jest wprowadzenie do pamięci maszyny tablic liczb losowych o rozkładzie równomiernym. Praktycznie ze względu na małe pojemności pamięci operacyjnej maszyn sposób ten nie znalazł zastosowania.

Drugi sposób otrzymywania liczb losowych o rozkładzie równomiernym polega na włączeniu do układu elektronicznego maszyny cyfrowej urządzenia stanowiącego nadajnik liczb losowych. Nadajnik tworzy ciąg liczb losowych przetwarzając na liczby losowe zjawiska fizyczne, np. szumy lamp elektronowych, promieniowanie źródeł radioaktywnych i następnie liczby przesyła do pamięci operacyjnej maszyny. Sposób ten, który zresztą posiada również szereg cech ujemnych, wymaga stosowania specjalnych maszyn, wyposażonych w odpowiednie nadajniki.

Najczęściej stosowanym sposobem, szczególnie przy realizacji obliczeń na maszynach cyfrowych ogólnego przeznaczenia, jest zastąpienie ciągu liczb losowych ciągiem liczb pseudolosowych (lub kwazilosowych) uzyskiwanych programowo.

Liczby pseudolosowe o rozkładzie równomiernym są tworzone przy pomocy odpowiednio przystosowanego programu zwanego generatorem liczb losowych. Podstawą programu jest związek rekurencyjny, który wyznacza kolejną liczbę losową L_i w zależności od jednej lub kilku liczb poprzedzających L_{i-1}, L_{i-2}, ..., L_{i-k}. Tak utworzony ciąg liczb winien spełniać kryteria statystyczne równomiernego rozkładu.

Przy wykonywaniu obliczeń na maszynie ZAM2 zastosowano generator liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym na odcinku $[0,1)$ opisany w [13] i nazwany generatorem RNB.

Liczby losowe wyznaczone są przy pomocy wzoru rekurencyjnego

$$L_i = \left[(2^{35} \cdot L_{i-1} \cdot C) \bmod 2^{35+p}\right] \cdot 2^{-35} \qquad (5.1)$$

gdzie:

C - stała (w obliczeniach numerycznych przykładów przyjęto C=0,376.128.171.3),

p - liczba całkowita, zależna od skali obliczeń na maszynie cyfrowej.

Wartość L_0 można przyjąć dowolnie. (Przyjęto $L_0 = 1$).

Według danych zamieszczonych w [13] czas generowania jednej liczby pseudolosowej na maszynie ZAM2 wynosi około 5 ms.

5.2. Dokładność obliczeń

Przy rozwiązywaniu zagadnień przewodzenia ciepła metodą Monte Carlo, otrzymane wyniki w ogólnym przypadku posiadają odchylenia od wartości dokładnej.

Na dokładność wyniku końcowego wpływają dwa typy odchyłek: błąd metody różnicowej (δ_h) i błąd modelowania probabilistycznego (δ_{MC}). Stąd błąd rozwiązania

$$\delta \leqslant \delta_h + \delta_{MC} \tag{5.2}$$

W praktycznym stosowaniu metod numerycznych do złożonych zagadnień bardzo rzadko można określić błąd obliczeniowy na podstawie teoretycznego wzoru. Często jednak dokładność skomplikowanych obliczeń można oszacować na podstawie uzupełniającej analizy. Podstawą takiej analizy może być porównanie wyników obliczeń przybliżonych z wynikami dokładnymi uzyskanymi dla zagadnień posiadających znane analityczne rozwiązania, lub z wynikami uzyskanymi innymi metodami przybliżonymi, albo z wynikami pomiarów eksperymentalnych.

Błąd metody różnicowej - δ_h, powstaje na skutek zastąpienia obszaru rzeczywistego obszarem siatkowym oraz funkcji ciągłej - funkcją zmienną skokowo, a więc pochodnych cząstkowych - ilorazami różnic skończonych. Jak wiadomo, błąd ten zmniejsza się wraz z zmniejszaniem kroków różnicowych - przestrzennego h i czasowego $\Delta\tau$[2,4].

Ściśle oszacowanie błędu metody Monte Carlo - δ_{MC} nie jest nawet teoretycznie możliwe. Przeprowadzone oszacowanie statystyczne zapewnić może uzyskanie pożądanej dokładności z pewnym prawdopodobieństwem p_δ.

W [21] przyjęto $p_\delta = 0{,}997$ i oszacowano błąd rozwiązania dla zagadnienia Dirichleta przy pomocy nierówności

$$\delta_{MC} \leqslant \frac{3 \max \vartheta(x,y)}{\sqrt{\sigma_k}} \tag{5.3}$$

gdzie:

gdzie:

$\max \vartheta(x,y)$ - maksymalne wartości poszukiwanej funkcji $\vartheta(x,y)$ w badanym obszarze,

σ_k - ilość modelowanych serii ruchów błędnych.

Przytoczone w [21] sposoby oszacowania błędu prowadzące do nierówności (5.3) wyraźnie zawyżają ocenę odchyłki. Zwrócili na to uwagę Demidowicz i Maron [3].

Porównanie rezultatów obliczeń metodą Monte Carlo szeregu zadań z dziedziny przewodzenia ciepła, z wynikami uzyskanymi innymi metodami wskazuje, że w zakresie zadań objętych porównaniem ocena dokonana wzorem (5.3) jest co najmniej kilkakrotnie zawyżona (dziesięciokrotnie!).

Ze względu na trudności w teoretycznym ustaleniu przewidywanego błędu wyników, należy w omawianym przypadku szacować odchyłkę na podstawie analizy uzupełniającej.

W każdym razie słuszny jest wniosek wynikający z (5.3), stwierdzający, że:

$$\delta_{MC} \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_k}} \tag{5.4}$$

Błąd obliczeń jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka z ilości modelowanych serii ruchów błędnych.

Przy wyborze właściwej liczby σ_k dla określonego zadania i pożądanej dokładności należy eksperymentalnie badać wpływ wzrostu σ_k na uzyskiwane w toku obliczeń wyniki. Jeżeli dla kilku punktów w badanym obszarze, różnice wartości wyników uzyskanych przy $\sigma_{k'}$ i $\sigma_{k''}$ ($\sigma_{k'} < \sigma_{k''}$ np. $\sigma_{k''} = 2\sigma_{k'}$) nie przekraczają dopuszczalnego błędu, to można przeprowadzić obliczenie dla wszystkich badanych punktów przy $\sigma_k = \sigma_{k'}$.

Ponieważ rozważania powyższe przeprowadzono przy założeniu równomiernego rozkładu prawdopodobieństw, przy przeprowadzeniu obliczeń i wyborze σ_k należy zwracać uwagę by wystę-

pujące we wzorze (2.15) i dalszych odpowiednich wzorach wartości $k_i \gg 1$. Jeżeli dla pewnych punktów (lub podobszarów) z obszaru objętego analizą ten warunek nie jest spełniony, to należy zwiększyć σ_k przynajmniej dla tych punktów.

Zwiększenie ilości serii modelowanych ruchów błędnych zwiększa czas obliczeń na maszynie cyfrowej. Również zmniejszenie h i $\Delta\tau$ prowadzące do zmniejszenia błędu różnicowego δ_h, powoduje zwiększenie czasu obliczeń. Okoliczności te nie wpływają jednak na pracochłonność czynności wykonywanych przez rozwiązującego zadanie. Uzyskanie odpowiedniej dokładności jest zatem możliwe dzięki zwiększeniu czasu obliczeń wykonywanych automatycznie (przy założeniu realizacji obliczeń na określonej maszynie cyfrowej).

5.3. Algorytmizacja i programowanie obliczeń

Realizacja rozwiązania zagadnienia przewodzenia ciepła przy pomocy Metody Monte Carlo na maszynie cyfrowej polega na symulowaniu ruchów błędnych cząsteczki. Cząsteczka znajdująca się w punkcie P (x,y) może w najogólniejszym przypadku przejść do jednego z czterech punktów sąsiednich, pozostać w punkcie wyjściowym z możliwością dalszego dowolnego wyboru przejścia lub pozostania w tym punkcie, lub zatrzymać się w punkcie P(x,y) na stałe.

Wybór jednej z tych sześciu możliwości winien być uzależniony od wielkości liczby losowej kierującej danym ruchem elementarnym.

Jeżeli prawdopodobieństwa wyboru jednej z tych możliwości są odpowiednio dla danego punktu P: p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, ($\sum_{i=1}^{6} p_i=1$; $p_i \in [0,1]$) to algorytm modelowania ruchów błędnych może być następujący (w języku ALGOL):

```
begin  if   L_i < p_Σ1  then begin x: = x+1;
                                   y: = y ;
                                   go to E
                            end;
```

```
begin   if   L_i < p_Σ2   then begin   x: = x;
                                       y: = y+1;
                                       go to E
                          end;

        if   L_i < p_Σ3   then begin   x: = x-1;
                                       y: = y;
                                       go to E          (5.5)
                          end;

        if   L_i < p_Σ4   then begin   x: = y;
                                       y: = y-1;
                                       go to E
                          end;

        if   L_i < p_Σ5   then begin   x: = x;
                                       y: = y;
                                       go to E
                          end;

        k_p: = k_p+1;

E: end
```

We wzorach powyższych oznaczono:

$$p_{\Sigma j} = \sum_{i=1}^{j} p_i$$

k_p - ilość serii zakończonych w punkcie $P(x,y)$

Wielkości p_i zależą od położenia punktu w badanym obszarze. Dlatego przed przeprowadzeniem porównania według algorytmu (5.5) należy określić wielkości p_i dla danego punktu.

Wielkości p_i są uzależnione przede wszystkim od położenia geometrycznego punktu P, a ponadto od własności fizycznych ma-

teriału oraz dla punktów położonych na brzegu od warunków brzegowych.

Związki (5.5) są algorytmem podstawowym ważnym dla wszystkich rozpatrywanych powyżej zagadnień.

Dla zagadnień stacjonarnych bez wewnętrznych źródeł ciepła algorytm ten nie wymaga zasadniczo żadnych uzupełnień, a program powinien przewidywać możliwość realizacji dowolnej żądanej liczby serii ruchów. Przy czym seria pojedyncza kończy się w momencie wykonania działania: $k_p := k_p+1$. Wyniki obliczeń podają wartości k_p stanowiące podstawę do wyznaczenia poszukiwanej funkcji według wzoru (2.15).

Przy modelowaniu zagadnień stacjonarnych z wewnętrznymi źródłami ciepła należy ponadto przed każdym ruchem pojedynczym rejestrować przejście przez dany punkt Q, tj.

$$k_q := k_q+1 \tag{5.6}$$

Wyniki obliczeń określają wartości k_p oraz k_q stanowiące podstawę do wyznaczenia poszukiwanej funkcji według wzoru (3.14).

W przypadku rozwiązywania zagadnień niestacjonarnych bez wewnętrznych źródeł ciepła należy modelować serie zawierające określone ilości s ruchów błędnych.

Dla wyznaczenia wartości poszukiwanej funkcji w momencie τ odpowiadającym s, według wzoru (4.22) należy rejestrować k_p - ilość serii zakończonych w punktach brzegowych P w ciągu s ruchów lub w ciągu mniejszej ilości ruchów, oraz k_r - ilość serii przerwanych po wykonaniu s ruchów w punktach R (z określonym warunkiem początkowym). W toku tych obliczeń równocześnie można wyznaczyć wartości poszukiwanej funkcji w momentach $\tau_i<\tau$ którym odpowiadają ilości s_i ruchów w serii, przez rejestrację wartości k_{pi} oraz k_{ri}.

Jeżeli w pewnej grupie punktów brzegowych określone są identyczne warunki brzegowe, to dla tych punktów można wartości k_p

rejestrować wspólnie. Podobnie, w przypadku działania jednakowych źródeł w grupie punktów można łącznie rejestrować k_q, a w zagadnieniach niestacjonarnych - k_r dla identycznych warunków początkowych. Pozwala to na uproszczenie programowania i skrócenie czasu obliczeń.

Przy układaniu programu należy również grupować punkty o jednakowych cechach geometrycznych oraz warunkach brzegowych, co ułatwia wyznaczanie wartości p_i niezbędnych do realizacji algorytmu (5.5).

Ponadto należy dążyć do ułożenia programu w ten sposób, by w toku modelowania serii ruchów błędnych korzystać tylko z pamięci operacyjnej maszyny. Wykorzystanie pamięci pomocniczej powoduje wielkrotne zwiększenie czasu obliczeń.

Wyniki obliczeń według opracowanego programu powinny przede wszystkim zawierać statystykę przeprowadzonego modelowania ruchów błędnych, tj. wartości k_p, k_q, k_r.

Wyznaczenie wartości poszukiwanej funkcji na podstawie szczegółowych warunków granicznych przy pomocy wzoru (2.15) lub analogicznych dalszych wzorów, jest nieskomplikowane i może być ujęte w osobnym programie.

Otrzymane w wyniku obliczeń wartości k_p, k_q, k_r pozwalają przeprowadzić analizę poprawności modelowania i ocenę dokładności według zasad wyżej opisanych.

W przypisach podano schematy blokowe przykładowych programów. W przykładzie 1 program przeprowadza modelowanie w obszarze posiadającym granice o charakterze nieregularnym. Każdy punkt tego obszaru wymaga indywidualnej analizy w toku modelowania. W przykładzie 2 granice obszaru są liniami prostymi, co pozwala na zgrupowanie punktów o wspólnych cechach i znacznie ułatwia programowanie. Przykład 3 opisuje modelowanie zagadnienia niestacjonarnego.

Program oprócz elementów istotnych do rozwiązania właściwego problemu powinien zawierać, zgodnie z ogólnie przyjętymi przy programowaniu zasadami, testy kontrolne sprawdzające po-

prawność wprowadzonych danych wejściowych i poprawność realizowanych obliczeń.

5.4. Uwagi końcowe

Opisane powyżej w rozdziałach 2, 3 i 4 modele probabilistyczne umożliwiają przybliżone rozwiązanie podstawowych zadań związanych z określeniem rozkładu temperatur w ciałach stałych.

W porównaniu z innymi metodami przybliżonymi, przedstawiona metoda wyróżnia się szeregiem istotnych zalet:

Metoda Monte Carlo pozwala na obliczanie temperatur w pojedynczych, dowolnie wybranych punktach. Natomiast w klasycznych metodach różnicowych wymagane jest równoczesne rozwiązywanie całego problemu, tj. obliczanie temperatury we wszystkich punktach rozpatrywanego obszaru.

Ilość działań rachunkowych wykonywanych w toku obliczeń jest proporcjonalna do wymiaru obszaru, przez co czas obliczeń dla zagadnień wielowymiarowych wzrasta liniowo. W klasycznych metodach różnicowych ilość działań oraz czas obliczeń przy zagadnieniach wielowymiarowych rośnie wykładniczo.

Otrzymane rozwiązania posiadają w wielu przypadkach charakter rozwiązań podstawowych problemu. Umożliwia to wyznaczenie rozwiązań szczegółowych odpowiadających różnym warunkom granicznym, a także przeprowadzenie analizy wpływu warunków granicznych.

Modelowanie probabilistyczne przeprowadzane jest przy użyciu uniwersalnych maszyn cyfrowych. Ze względu na możliwość analizy pojedynczych punktów obszaru, obliczenia mogą być wykonywane na małych maszynach cyfrowych wyposażonych w stosunkowo małą pamięć operacyjną. Natomiast rozwiązywanie zagadnień metodami analogii fizycznej wymaga użycia maszyn analogowych lub modeli fizycznych o charakterze specjalistycznym.

Programowanie obliczeń metodą Monte Carlo jest bardzo łatwe, a dla zagadnień typowych może być w znacznym stopniu zautomatyzowane.

Jako wady metody Monte Carlo należy wskazać długotrwałość obliczeń niezbędną dla przypadków wymagających dużej dokładności oraz trudności związane z oszacowaniem błędu wyników. Pierwsza z tych wad może być zniwelowana drogą zastosowania maszyn cyfrowych o dużej prędkości działania, drugą zaś - należy eliminować pośrednio przez analizę uzupełniającą otrzymanych wyników.

W praktycznych zagadnieniach przewodzenia ciepła wyboru właściwego sposobu rozwiązania problemu należy dokonać po przeprowadzeniu oceny wad i zalet szeregu znanych metod. Niewątpliwie dla pewnych zagadnień metoda Monte Carlo może okazać się najodpowiedniejszą.

Przy rozwiązywaniu zagadnień przewodzenia ciepła występujących przy projektowaniu turbin cieplnych można wykorzystać szereg zalet metody. Elementy turbin cieplnych posiadają przeważnie nieregularne kształty. Warunki wymiany ciepła w poszczególnych częściach elementów są zmienne. Praktycznie uniemożliwia to ścisłe analityczne rozwiązanie rozpatrywanych zadań.

Zastosowanie metody Monte Carlo pozwala na przybliżone rozwiązanie zagadnienia, przy czym często wystarczające jest wyznaczenie temperatur w tych punktach badanych elementów, w których występują ekstremalne temperatury.

Uzyskane przy pomocy metody Monte Carlo rozwiązania podstawowe umożliwiają przeprowadzenie analizy wpływu warunków granicznych na rozkład temperatur. Problemy tego typu występują bardzo często przy projektowaniu elementów turbin cieplnych pracujących przy wysokich temperaturach [8, 10, 16, 22]. Przy tym wymagana dokładność wyników dla tych zagadnień jest względnie mała (rzędu 1...2%) a więc czas obliczeń na maszynie cyfrowej jest również mały.

Przygotowanie do rozwiązania metodą Monte Carlo zagadnień przewodzenia ciepła jest stosunkowo łatwe. Przy użyciu nawet małych maszyn cyfrowych otrzymać można szybko wyniki z

dokładnością wystarczającą w praktyce inżynierskiej. Pozwala to przypuszczać, że metoda Monte Carlo znajdzie szerokie zastosowanie w obliczeniach projektowanych urządzeń cieplnych.

6. PRZYPISY

6.1. Przykład rozwiązania zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła: Pole temperatur w przekroju poprzecznym chłodzonej łopatki turbiny gazowej

Model probabilistyczny opisany w ust. 2.3. zastosowano do wyznaczenia rozkładu temperatur w przekroju poprzecznym łopatki turbiny gazowej, chłodzonej wodą. Przeprowadzone poniżej obliczenia szczegółowe oparto na danych liczbowych zamieszczonych w [8]. (Cyt. wg [16]).

Przekrój poprzeczny łopatki przedstawiono na rys. 8. W całym przekroju założono niezmienny współczynnik przewodzenia ciepła λ. Temperatura czynnika chłodzącego kanały wewnętrzne: t_w. Współczynnik wnikania ciepła do czynnika chłodzącego: α_w. Temperatura czynnika roboczego: t_z. Współczynnik wnikania ciepła α_z jest zmienny wzdłuż tworzącej łopatki.

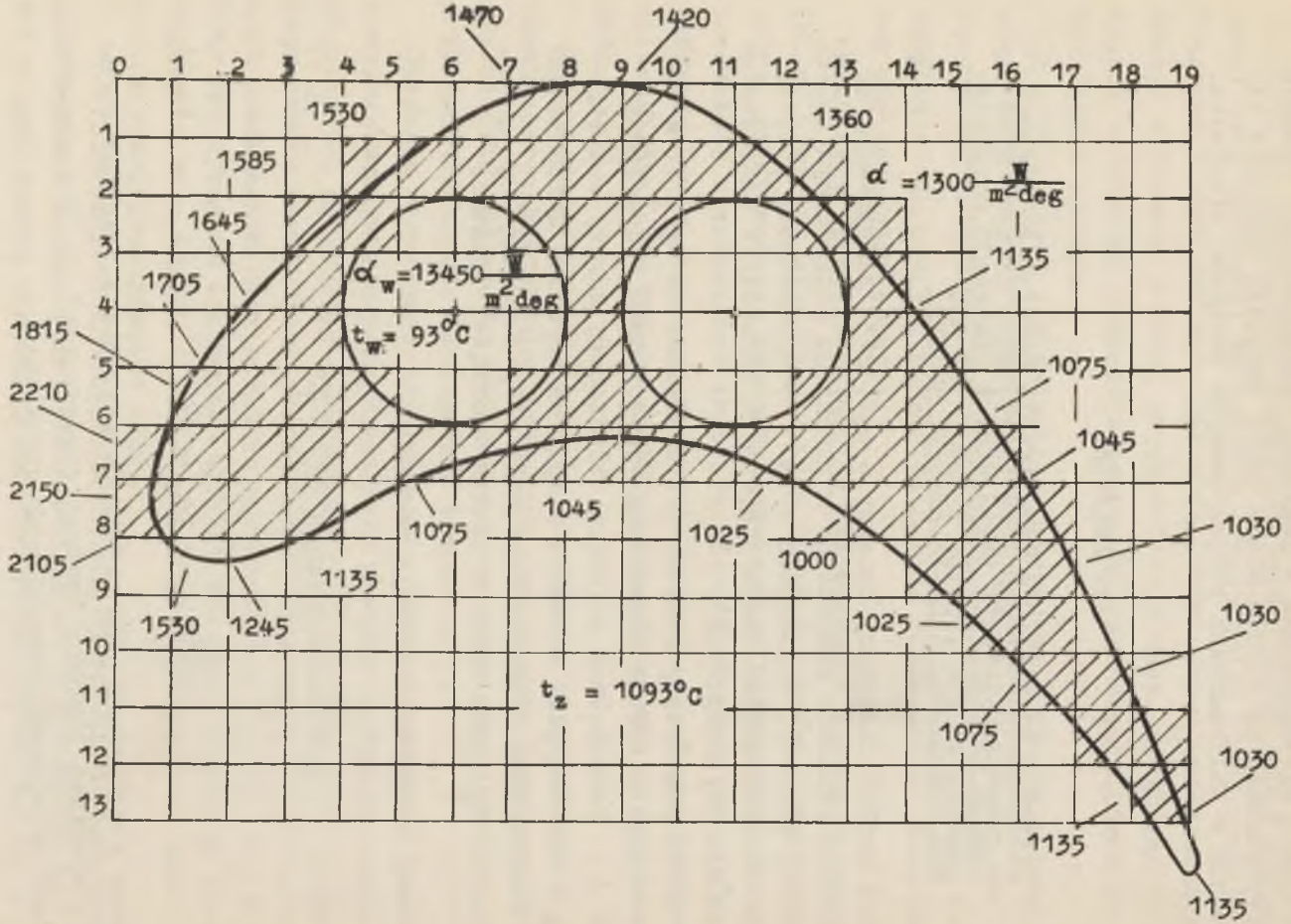
Warunki brzegowe określają równania:

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha_z(x,y)\ (t_z - \vartheta) \tag{6.1}$$

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \alpha_w\ (t_w - \vartheta) \tag{6.2}$$

Obszar rzeczywisty pola przekroju zastąpiono obszarem siatkowym o wymiarze liniowym komórki elementarnej h. Dla punktów węzłowych brzegowych zewnętrznych określono:

$$\alpha_{m,n} = \alpha_z\ (x_m, y_n) \tag{6.3}$$



Rys. 8. Przekrój poprzeczny łopatki turbiny gazowej. (Pole zacieniowane: obszar siatkowy aproksymujący obszar rzeczywisty)

Dla punktów węzłowych brzegowych wewnętrznych:

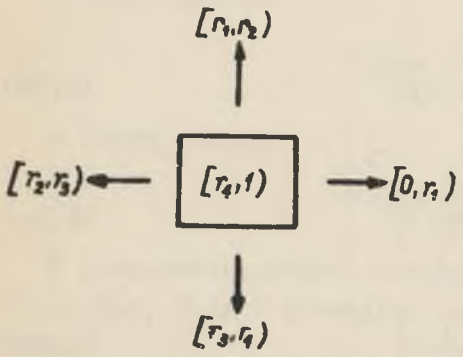
$$\alpha_{m,n} = \alpha_w \tag{6.4}$$

Modelowanie ruchów błędnych winno odbywać się według następujących zasad:

W przypadku położenia cząsteczki w punkcie węzłowym wewnętrznym - według schematu równania (2.12).

Dla punktów węzłowych brzegowych położonych przy ścianie płaskiej "dolnej" - według tablicy (2,26a). W przypadku ściany płaskiej "prawej", "górnej" i "lewej" przez kolejne obroty tablicy (2.26a) w kierunku dodatkim o 90°, otrzymujemy właściwe tablice ruchów cząsteczki.

Dla punktów węzłowych w narożu wewnętrznym, prawym dolnym" obowiązuje tablica (2.26b), z której przez cykliczne przestawienie elementów otrzymuje się tablice dla pozostałych trzech przypadków "prawego górnego", "lewego górnego" i "lewego dolnego".



Rys. 9. Schemat ruchów cząsteczki

Dla punktów węzłowych w narożu zewnętrznym "prawym dolnym" ruchy cząsteczki winny odbywać się wg tablicy (2.26c) z której otrzymać można tablice dla pozostałych trzech możliwych położeń.

Ogólny schemat ruchów cząsteczki przedstawiono na rys.9. Cząsteczka wykonuje ruch lub pozostaje na brzegu w zależności od wielkości kolejno uzyskiwanych liczb losowych.

Wielkości r_i wyznaczyć należy zgodnie z tablicami (2.12) i (2.26) w zależności

od położenia punktu oraz liczby Bi. Wielkości r_i określają następujące związki:

$$r_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} p_j}{\sum_{j=1}^{4} p_j + Bi} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{6.5}$$

gdzie:

$$Bi = \frac{\alpha_{m,n}\, h}{\lambda} \tag{6.5a}$$

W zależności od położenia punktu, elementy macierzy $M_s \equiv$ $\equiv |p_1, p_2, p_3, p_4|$ określone są następująco:

Dla punktów węzłowych wewnętrznych:

$$M_0 = |1,1,1,1| \tag{6.6}$$

Dla punktów przy ścianie płaskiej:

- dolnej

$$M_1 = \left|\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2},0\right| \tag{6.7a}$$

- prawej

$$M_2 = \left|0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2}\right| \tag{6.7b}$$

- górnej

$$M_3 = \left|\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},1\right| \tag{6.7c}$$

- lewej

$$M_4 = \left|1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right| \tag{6.7d}$$

Dla punktów w narożu wewnętrznym:

- prawym dolnym

$$M_5 = \left|0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0\right| \tag{6.8a}$$

- prawym górnym

$$M_6 = \left|0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \tag{6.8b}$$

- lewym górnym

$$M_7 = \left|\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right| \tag{6.8c}$$

- lewym dolnym

$$M_8 = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right| \tag{6.8d}$$

Dla punktów w narożu zewnętrznym

- prawym dolnym

$$M_9 = \left|\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2}\right| \tag{6.9a}$$

- prawym górnym

$$M_{10} = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1\right| \tag{6.9b}$$

- lewym górnym

$$M_{11} = \left|1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right| \tag{6.9c}$$

- lewym dolnym

$$M_{12} = \left|1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \tag{6.9d}$$

W przypadku punktów brzegowych Bi należy wyznaczać ze wzoru (6.5a). Jeżeli określimy symbolicznie dla punktów wewnętrznych

$$\alpha_{m,n} = 0, \tag{6.10}$$

to wzór (6.5a) będzie ważny również dla tych punktów.

W algorytmie obliczeń przewidziano wyznaczenie liczb k_w oraz k_z określających ilości serii ruchów cząsteczki zakończonych odpowiednio na brzegach wewnętrznym i zewnętrznym.

Przyjęto, że określona będzie symbolicznie charakterystyka każdego punktu węzłowego obszaru. Symbolami określającymi są liczby 0,1,...,12 odpowiadające macierzom $M_0, M_1, \ldots, M_{12}$ wyznaczonym równaniami (6.6) ... (6.9).

Przed przeprowadzeniem obliczeń należy określić liczby $\alpha_{m,n}$ dla każdego punktu węzłowego według (6.3), (6.4) i (6.10).

Sieć działań programu według omawianego algorytmu przedstawiono na rys. 10.

Na wstępie wczytywane są dane wejściowe zawierające blok $Z_{m,n}$ określający charakterystykę punktów; blok $\alpha_{m,n}$ oraz λ i h, a ponadto współrzędne analizowanego punktu oraz pożądaną liczbę serii ruchów cząsteczki σ_k. Wskaźniki m,n odpowiadają współrzędnym punktów.

W programie przewidziano generowanie liczb losowych o rozkładzie równomiernym na odcinku $[0,1)$.

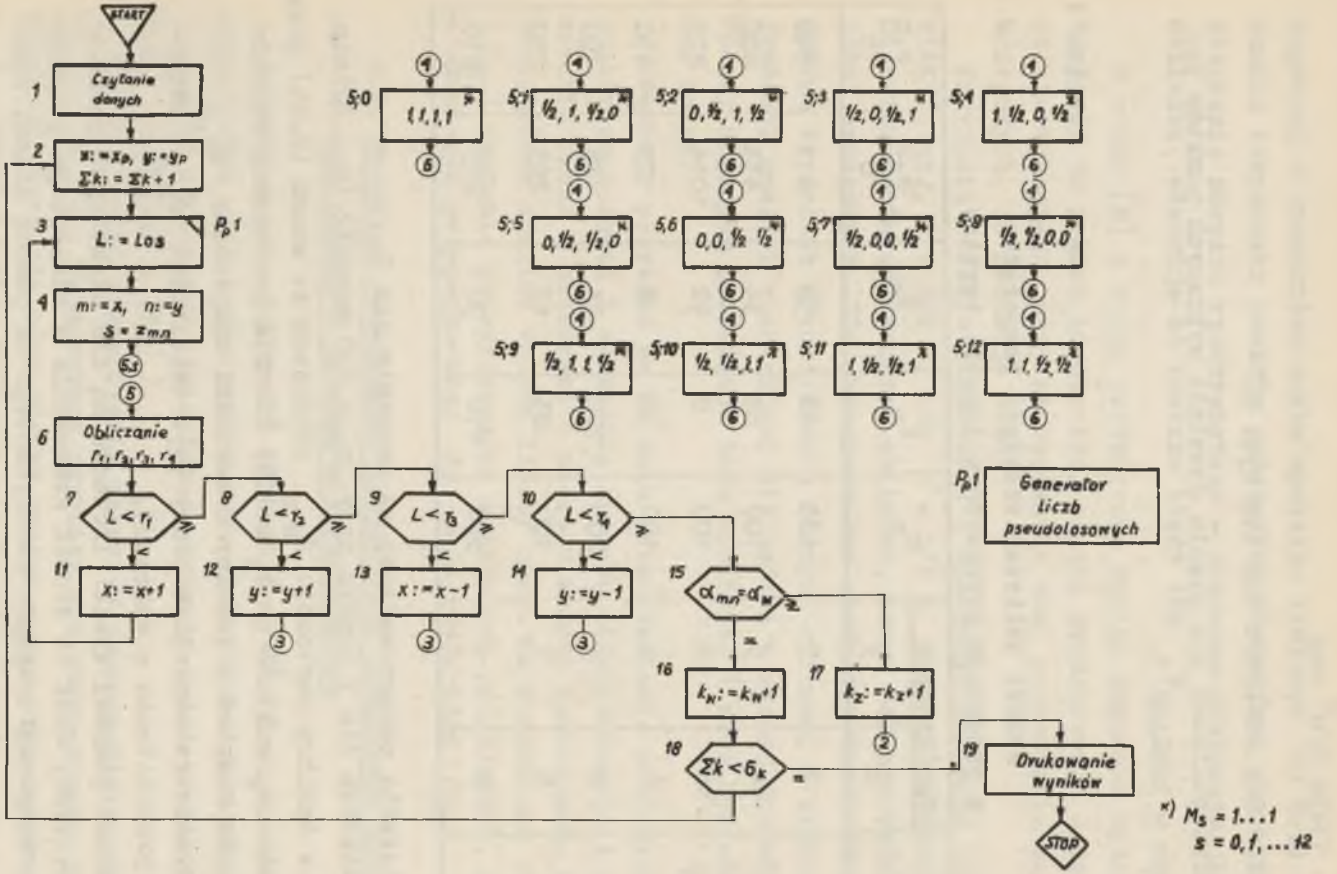
Po określeniu chwilowego położenia cząsteczki, odczytywane są liczby $Z_{m,n}$ i $\alpha_{m,n}$ odpowiadające temu położeniu i wyznaczone według wzoru (6.5) liczby r_1, r_2, r_3, r_4.

Odpowiednio do wielkości liczby losowej uzyskanej z programu - generatora wykonany zostaje ruch w jednym z czterech kierunków lub zostaje zarejestrowane zatrzymanie (pochłonięcie) cząsteczki na brzegu. Celem określenia miejsca pochłonięcia porównane zostają wielkości $\alpha_{m,n}$ i α_w. Jeżeli $\alpha_{m,n} = \alpha_w$, to miejscem pochłonięcia jest brzeg wewnętrzny, w przeciwnym przypadku - zewnętrzny, (założono tutaj że $\alpha_w \neq \alpha_z$).

Obliczenia szczegółowe przeprowadzono dla przykładu przekroju łopatki turbiny pokazanego na rys. 8, przy następujących wartościach parametrów:

$h = 0{,}0015875$ m

$\lambda = 25{,}96$ W/m deg



Rys. 10. Schemat blokowy algorytmu zagadnienia rozkładu temperatur w przekroju łopatki turbiny

α_w = 13456 W/m^2 deg

α_z = (1000...2210)W/m^{2}deg (wg rys. 8)

Wyniki obliczeń dla pięciu dowolnie wybranych punktów zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Wyniki obliczeń rozkładu temperatur
w przekroju poprzecznym łopatki turbiny

Punkt	Współrzędne		σ_k	k_w	k_z	$\vartheta_{m,n}$ °C	$\vartheta'_{m,n}$ °C
	x	y					
$P_{2,7}$	2	7	100	48	52	613	540
$P_{14,5}$	14	5	100	66	34	433	400
$P_{18,12}$	18	12	100	8	92	1014	871
$P_{8,6}$	8	6	100	92	8	173	190
$P_{8,6}$	8	6	200	179	21	188	190
$P_{8,1}$	8	1	100	83	17	263	210
$P_{8,1}$	8	1	500	410	90	273	210

Obliczenia przeprowadzono na maszynie ZAM 2.
Czas obliczeń dla 1 punktu przy σ_k = 100 wynosił (4...20)min. Podane w tablicy wartości $\vartheta_{m,n}$ obliczono ze wzoru (2.15) przy założeniu t_w = 93 °C i t_z = 1093 °C. Dla porównania wyników zestawiono również w tablicy 2 wartości temperatur $\vartheta'_{m,n}$ uzyskane metodą relaksacji w pracy [8]. (Wielkości $\vartheta'_{m,n}$ odczytano w przybliżeniu z wykresu).

Uzyskane powyżej wyniki liczbowe są dla niektórych punktów mało dokładne. Jest to skutek stosowania w niniejszym przykładzie aproksymacji obszaru rzeczywistego za pomocą siatki kwa-

dratowej o stosunkowo dużym wymiarze liniowym h. Przy wyznaczaniu temperatur punktów położonych w strefie, dla której zastąpienie obszaru rzeczywistego - obszarem siatkowym jest mało dokładne, powoduje to znaczne błędy (np. $P_{18,12}$).

W pracy [8] z którą porównywano wyniki dokonana była aproksymacja za pomocą identycznej siatki kwadratowej. Jednak obliczenia wykonywano przy zastosowaniu tzw. poprawienia wartości brzegowych, co redukuje błędy.

Przyjęcie obszaru siatkowego o mniejszym wymiarze liniowym siatki, np. $h' = 1/2\ h$, lub $h'' = 1/3\ h$ wpłynie niewątpliwie na zwiększenie dokładności obliczeń, nawet bez poprawiania wartości brzegowych. Dla obszaru o tak skomplikowanych kształtach, wymaga to jednak wykorzystania maszyny cyfrowej o większej pojemności pamięci operacyjnej niż będąca w naszej dyspozycji. Podany algorytm przewiduje taką możliwość i może być stosowany bez zmian.

Omawiany przykład ma na celu przedstawienie możliwych kierunków zastosowań i wskazanie sposobu algorytmizacji i programowania zadań z obszarami o nieregularnych kształtach. Bardziej szczegółowa analiza wpływu liczby serii na dokładność obliczeń (δ_{MC}) zostanie przeprowadzona w dalszych przykładach, albowiem w omawianym przypadku błąd δ_h majoryzuje błąd δ_{MC}.

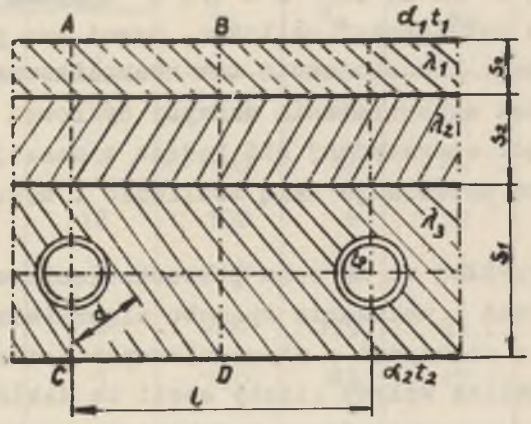
6.2. Przykład rozwiązania zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku wielowarstwowym

Opisany w ust. 2.7 model probabilistyczny zastosowano do wyznaczenia pola temperatur w betonowej płycie grzejnej, przylegającej do warstwy izolacyjnej, która z kolei przylega do muru. (Przykład z [19]).

Współczynniki przewodzenia ciepła w poszczególnych warstwach są λ_1, λ_2, λ_3. Temperatura czynnika grzejnego wynosi t_w, temperatura otoczenia przy górnym brzegu - t_1, przy dolnym brzegu - t_2. Współczynniki wnikania ciepła odpowiednio - α_1 i α_2.

Założono, że ze względu na $\frac{\lambda}{\alpha_w h} \approx 0$ na granicy obszaru płyty przy rurach grzejnych można przyjąć $\vartheta(x,y) = t_w$.

Ze względu na symetrię pola temperatur można ograniczyć się do rozpatrzenia odcinka płyty obejmującego połowę rury grzejnej. Obszar rzeczywisty zastąpimy obszarem siatkowym pokazanym na rys. 12, przy czym łuk EF aproksymujemy linią łamaną EGHF.



Rys. 11. Izolowana betonowa płyta grzejna

Zgodnie z założeniami na brzegach określone są następujące warunki:

$$\text{AB:}\quad \lambda \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} = \alpha_1 (t_1 - \vartheta_1) \tag{6.11a}$$

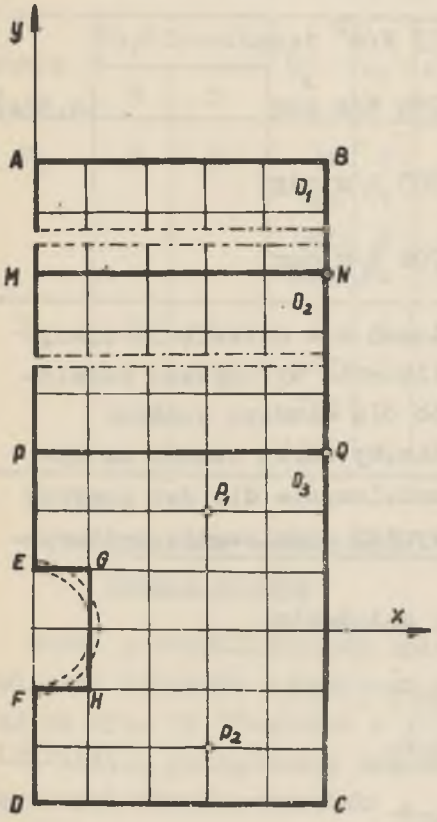
$$\text{CD:}\quad \lambda \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y} = \alpha_2 (t_2 - \vartheta_3) \tag{6.11b}$$

$$\text{EGHF:}\quad \vartheta_3 = t_w \tag{6.11c}$$

$$\text{AE, FD, BC: } \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \qquad (6.11d)$$

$$\text{MN: } \vartheta_1 = \vartheta_2 \qquad (6.11e)$$

$$\text{PQ: } \vartheta_2 = \vartheta_3 \qquad (6.11f)$$



Rys. 12. Obszar siatkowy aproksymujący część izolowanej płyty grzejnej

W rozpatrywanym obszarze wsytępują cztery typy warunków brzegowych. Na brzegach AB i CD - warunki brzegowe trzeciego rodzaju, na linii EGHF - pierwszego rodzaju, a na odcinkach AE, FD i BC - drugiego rodzaju. Linie MN i PQ przyjęto jako wspólne brzegi obszarów z idealnym stykiem.

Algorytm rozwiązania wskazanego zadania opisano szczegółowo w [20]. W algorytmie przewidziano wyznaczenie liczb k_1, k_2 i k_0 określających ilość serii ruchów błędnych kończących się przy brzegu górnym AB, brzegu dolnym CD oraz na brzegu EGHF.

Obliczenie szczegółowe przeprowadzono dla następujących wartości parametrów:

$$l = 100 \text{ mm}$$
$$s_1 = 250 \text{ mm}$$
$$s_2 = 70 \text{ mm} \qquad (6.12a)$$

$$s_3 = 60 \text{ mm}$$
$$\alpha_1 = 23{,}26 \text{ W/m}^2 \text{ deg}$$
$$\alpha_2 = 11{,}63 \text{ W/m}^2 \text{ deg}$$
$$\lambda_1 = 0{,}756 \text{ W/m deg} \qquad (6.12a)$$
$$\lambda_2 = 0{,}105 \text{ W/m deg}$$
$$\lambda_3 = 0{,}704 \text{ W/m deg}$$

W pracy [20] podano wyniki obliczeń dla dziewięciu dowolnie wybranych punktów obszaru. Obliczenia wykonywano modelując $\sigma_k = 100$ serii ruchów błędnych dla każdego punktu:

Celem przeanalizowania wpływu liczby serii ruchów na dokładność obliczeń przeprowadzono modelowanie dla dwu punktów przy różnej ilości serii ruchów. Wyniki modelowania zestawiono w tablicy 2.

Wartości $\vartheta_{m,n}$ wyznaczono przy założeniu:

$$t_1 = -20^\circ C$$
$$t_2 = 20^\circ C \qquad (6.12b)$$
$$t_w = 80^\circ C$$

Podano również w tablicy 2 wartości $\vartheta'_{m,n}$ wyznaczone w pracy [19] za pomocą metody różnic skończonych, oraz $\Delta\vartheta_{m,n} = \vartheta_{m,n} - \vartheta'_{m,n}$. Zestawiono także ilości pojedynczych ruchów błędnych l_j w ogólnej liczbie σ_k serii.

Wpływ liczby serii ruchów błędnych na wyniki obliczeń

Punkt	Współrzędne		σ_k	k_1	k_2	k_o	$\vartheta_{m,n}$ °C	$\vartheta'_{m,n}$ °C	$\Delta\vartheta_{m,n}$ deg	l_j
	x	y								
P_1	3	2	50	1	7	42	69,6	72,9	-3,3	3113
			100	1	11	88	72,4		-0,5	4614
			200	2	18	180	73,6		+0,7	10187
			1000	24	62	914	73,88		+0,98	83963
P_2	3	-2	50	1	12	37	63,6	65,0	-1,4	2233
			100	1	29	70	61,6		-3,4	3451
			200	1	52	147	63,6		-1,1	9095
			1000	7	235	758	65,20		+0,2	46675

6.3. Przykład rozwiązania zagadnienia nieustalonego przewodzenia ciepła

Model probabilistyczny opisany w ust. 4.1. zastosowano do obliczeń rozkładu temperatur w ścianie paleniska przedstawionej na rys. 13 (Przykład z [17]).

W chwili początkowej temperatury w punktach węzłowych wewnętrznych określa warunek:

$$\overset{0}{\vartheta}_{m,n} = \text{const.} \tag{6.13}$$

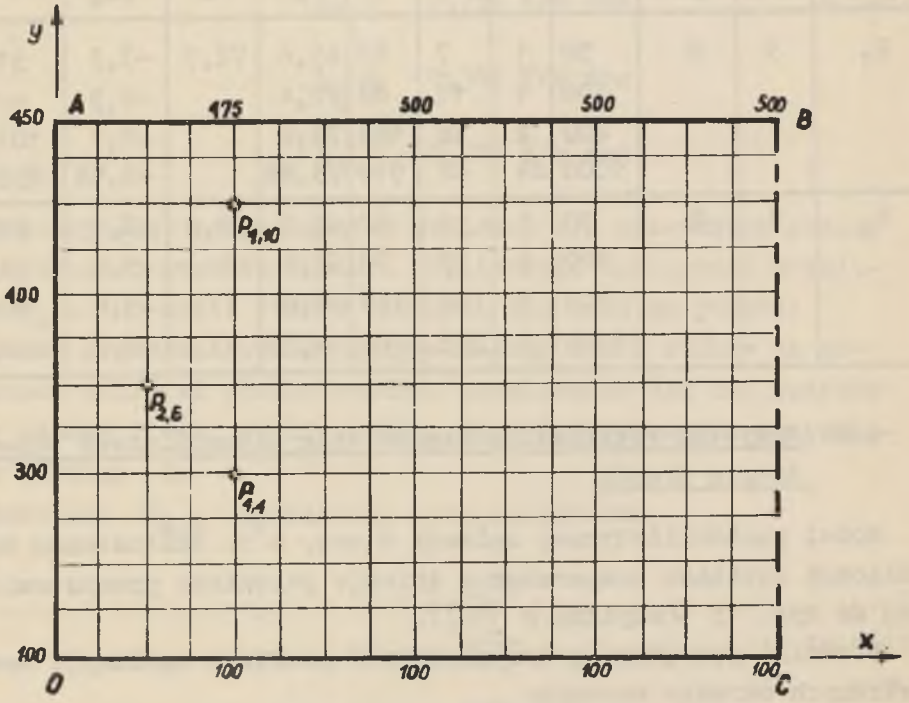
Warunki brzegowe określają związki:

$$\vartheta^{\tau}_{m,0} = t_{m,o} \qquad \vartheta^{\tau}_{m,12} = t_{m,12} \qquad m \geqslant 8$$

$$\vartheta^{\tau}_{0,4} = t_{0,4} \qquad \vartheta^{\tau}_{0,8} = t_{0,8} \qquad \vartheta^{\tau}_{0,12} = t_{0,12}$$

$$\vartheta^{\tau}_{4,12} = t_{4,12} \tag{6.14}$$

Dla węzłów na odcinkach brzegów OA, OC i AB dla których nie określono temperatur związkami (6.14) założono liniową zmianę temperatury.



Rys. 13. Obszar siatkowy ściany paleniska

Na brzegu BC przyjęto warunek:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \qquad (6.15)$$

Współczynnik wyrównywania temperatury:

$$a = 0{,}002 \ m^2/h \qquad (6.16)$$

Wymiar liniowy:

$$h = 0{,}01 \text{ m} \tag{6.17}$$

Z równania (4.17) otrzymujemy:

$$\Delta\tau = \frac{0{,}01^2}{4 \cdot 0{,}002} = 0{,}0125 \text{ h} \tag{6.18}$$

Będziemy wyznaczać temperatury w momentach

$$\tau_1 = 0{,}2 \text{ h}; \qquad \tau_2 = 0{,}4 \text{ h} \quad \text{i} \quad \tau_3 = 0{,}6 \text{ h}.$$

Ze związku

$$s_i = \frac{\tau_i}{\Delta\tau}$$

wynikają następujące ilości ruchów w serii

$$s_1 = 16; \qquad s_2 = 32; \qquad s_3 = 48$$

W rozpatrywanym obszarze siatkowym modelujemy ruchy błędne cząsteczki z zachowaniem następujących rozkładów prawdopodobieństw ruchów w poszczególnych kierunkach:

- dla węzłów wewnętrznych

$$p_w = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

- dla węzłów położonych na brzegu BC (z wyłączeniem punktów B i C)

$$p_b = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & 0 & 0 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

Zakończenie serii może nastąpić po wykonaniu co najwyżej s_3 ruchów, w punktach brzegowych na brzegach OA, OC lub AB. Ze względu na równe temperatury we wszystkich punktach brzegu OC można rejestrować wspólnie zakończenie ruchów w tych punktach ($k_{1,0}$). Podobnie - dla brzegu AB na odcinku od $P_{8,12}$ do C ($k_{8,12}$). Dla pozostałych punktów na tych brzegach rejestrować należy osobno $k_{i,j}$ ($i = 0$, $j = 1...11$; $j = 12$, $i = 1...7$).

W algorytmie przewidziano wyznaczenie liczb $k^l_{i,j}$ ($l = 1,2,3$) określających zakończenie serii w ciągu s_1 ruchów lub wcześniej - $k^1_{i,j}$; s_2 ruchów lub wcześniej - $k^2_{i,j}$, oraz s_3 ruchów lub wcześniej - $k^3_{i,j}$.

Ponieważ warunek (6.13) określa jednakową temperaturę początkową we wszystkich punktach wewnętrznych obszaru, rejestrowane są wspólnie ilości k^1_o serii nie zakończonych w ciągu s_1 ruchów k^2_o - w ciągu s_2 ruchów i k^3_o - w ciągu s_3 ruchów.

Temperaturę należy wyznaczyć ze wzoru:

$$\vartheta^{s_l}_{m,n} = \frac{\sum k^l_{m,n}\ t_{m,n} + k^l_o\ \vartheta^o_{m,n}}{\sigma_k} \qquad (6.19)$$

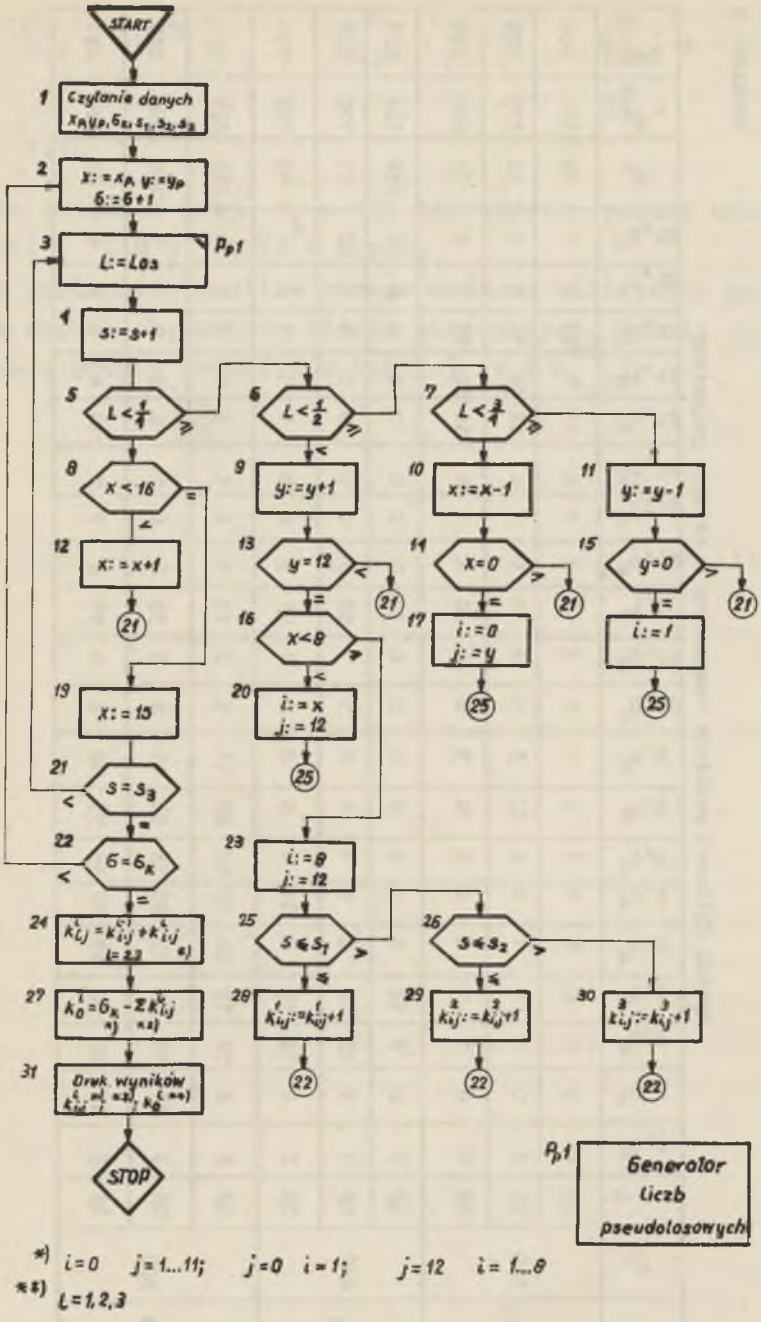
$$l = 1,2,3$$

Sieć działań programu obliczeń według podanego algorytmu przedstawiono na rys. 14. Algorytm przewiduje możliwość realizacji modelowania dowolnej liczby serii ruchów błędnych σ_k.

W tablicy 3 zestawiono wyniki obliczeń dla trzech punktów. Podano również wyznaczone wartości temperatur przy następujących szczegółowych warunkach granicznych:

$$\vartheta^o_{m,n} = 100^oC$$

$$\vartheta^\tau_{m,0} = 100^oC, \qquad \vartheta^\tau_{m,n} = 500^oC \quad \text{dla} \quad m \geqslant 8$$



Rys. 14. Schemat blokowy algorytmu zagadnienia rozkładu temperatur w ścianie paleniska

Tablica 3

Wyniki obliczeń rozkładu temperatur w ścianie paleniska

$P_{m,n}$	σ_k	$\frac{x}{r}$	$k_{0,1}$	$k_{0,2}$	$k_{0,3}$	$k_{0,4}$	$k_{0,5}$	$k_{0,6}$	$k_{0,7}$	$k_{0,8}$	$k_{0,9}$	$k_{0,10}$	$k_{0,11}$	$k_{1,0}$	$k_{1,12}$	$k_{2,12}$	$k_{3,12}$	$k_{4,12}$	$k_{5,12}$	$k_{6,12}$	$k_{7,12}$	$k_{8,12}$	k_0	$\vartheta^{\tau}_{m,n}$ °C	$\vartheta^{\tau'}_{m,n}$ °C
$P_{4,10}$	100	0,2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	5	2	1	0	1	4	11	8	13	2	1	50	314	308
		0,4	0	0	1	1	1	0	2	0	3	5	2	1	3	1	4	12	10	14	3	5	32	375	366
		0,6	0	0	1	1	2	0	2	0	3	6	2	2	4	1	4	14	10	15	3	7	23	404	389
$P_{4,4}$	200	0,2	0	2	7	12	7	5	2	2	0	0	0	31	0	0	0	0	0	0	0	0	132	138	131
		0,4	1	5	15	17	7	8	4	4	2	1	1	52	0	0	0	0	0	1	1	0	81	170	168
		0,6	2	6	16	19	8	11	4	5	2	1	1	71	3	0	0	1	1	1	2	1	45	193	193
$P_{2,6}$	500	0,2	2	6	12	19	38	75	48	22	11	5	2	11	1	4	5	3	1	0	0	0	235	229	227
		0,4	3	11	19	26	45	85	53	33	13	8	3	35	2	6	7	8	2	0	1	1	139	266	270
		0,6	5	12	22	30	49	87	55	35	16	8	4	51	2	7	7	10	4	0	3	4	89	284	291

$\vartheta^{\tau}_{0,4} = 300^{\circ}C$, $\vartheta^{\tau}_{0,8} = 400^{\circ}C$, $\vartheta^{\tau}_{0,12} = 450^{\circ}C$

$\vartheta^{\tau}_{4,12} = 475^{\circ}C$.

Czas obliczeń przy $\sigma_k = 100$ dla jednego punktu wynosi na maszynie ZAM 2 około 4 minut.

Dla porównania wyników przeprowadzono obliczenia przy tych samych warunkach, metodą różnic skończonych. Wyniki uzyskane tą metodą podano wrównież w tablicy 3 ($\vartheta^{\tau'}_{m,n}$).

LITERATURA

[1] Carslaw H.S., Jaeger J,C.: Conduction of heat in solids, Oxford, 1959.

[2] Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, 1960.

[3] Demidowicz B.P., Maron I.A.: Metody numeryczne, cz. I, PWN, 1965.

[4] Forsythe G.E., Wasow W.R.: Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley, 1959.

[5] Golenko D.J.: Modelirowanije i statisticzeskij analiz psewdosłuczajnych czisieł na elektronnych wyczislitielnych maszinach, Nauka, 1965.

[6] King G.W.: Monte Carlo method for solving diffusion problems, Indust. Eng. Chemistry, 43, 1951.

[7] Kunz K.S.: Numerical analysis, Mc Graw, 1957.

[8] Livingood J.N.B., Sams E.W.: Computed temperature distribution through cross-section of water-cooled turbine blade, NACA, E7B11F, 1947.

[9] Madejski J.: Teoria wymiany ciepła, PWN, 1963.

[10] May H.: Investigation of forced convection liquid cooled gas-turbine blades. Trans. ASME Ser. C, 87 Nr 1, 1965.

[11] Metropolis N., Ulam S.: The Monte Carlo method, Jour. Amer. Stat. Assoc. 44, Nr 247, 1949.

[12] Ochęduszko S.: Termodynamika stosowana, WNT, 1964.

[13] Pleszczyńska E.: Technika stosowania metod Monte Carlo na ZAM-2, Algorytmy, 3, Nr 5, 1965.

[14] Proceeding seminar on scientific computation (November 1949), I.B.M., 1951.

[15] Rozewicz J.: Przybliżone rozwiązywanie zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła metodą Monte Carlo Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej Energetyka Nr 21, 1966.

[16] Schneider P.J.: Conduction heat transfer., Addison Wesley, 1957.

[17] Staniszewski B.: Wymiana ciepła, PWN, 1963.

[18] Symposium on Monte Carlo methods (March. 1954), John Wiley, 1956.

[19] Szargut J., Mierzwiński S., Garwoliński E.: Obliczanie wydajności betonowych płyt grzejnych, GWTS, 11, Nr 5, 1957.

[20] Szargut J., Rozewicz J.: Zastosowanie metody Monte Carlo do trzeciego zagadnienia brzegowego ustalonego przewodzenia ciepła. Zesz. Nauk. Politechniki Śl. Energetyka Nr 22 1966.

[21] Szrejder J.A.: Metod statisticzeskich ispytanij (Metod Monte - Carlo), Fizmatgiz, 1962.

[22] Szwec I.T., Dyban B.P.: Wozdusznoje ochłażdienije rotorow gazowych turbin, Izd. Kij. Uniw., 1959.

[23] Wasow W.: Random walks and the eigenvalues of eliptic difference equation. J. Res. N. Bur. of Stand. 46, 1951.

[24] Yowell E.C.: A Monte Carlo method of solving Laplace's equation, Proceeding seminar on scientific computation, I.B.M., 1951.

STRESZCZENIE

W pracy podano zasady stosowania metody Monte Carlo do rozwiązywania podstawowych zagadnień przewodzenia ciepła w ciałach stałych. Przedstawione zależności umożliwiają przybliżone rozwiązywanie problemów ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła przy różnorodnych warunkach brzegowych. Przeanalizowano również przypadek występowania wewnętrznych źródeł ciepła. Rozpatrzono ciała stałe izotropowe oraz niejednorodne anizotropowe, a także obiekty wielowarstwowe.

Podano zasady opracowania algorytmów i programów do obliczeń na elektronowych maszynach cyfrowych. Wskazano sposoby oceny dokładności wyników.

Naświetlono zalety i wady stosowania metody do rozpatrywanych problemów. Metoda Monte Carlo jest szczególnie efektywna w przypadkach gdy wystarczające jest określenie temperatur w kilku pojedynczych punktach analizowanego obiektu.

Przykłady liczbowe ilustrują zastosowanie metody do wyznaczania pola temperatur w elementach maszyn cieplnych i urządzeń energetyki przemysłowej.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО К ПРОБЛЕМАМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

Излагаются основы применения метода Монте-Карло к решению фундаментальных задач теплопроводности в твердых телах. Приведены теоретическо-вероятностные схемы для приближенного решения задач стационарной и нестационарной теплопроводности с разными краевыми условиями. Рассмотрены также системы с внутренними источниками тепла. Исследованы изотропные однородные, анизотропные твердые тела, многослойные и составные структуры.

Приведены принципы построения алгорифмов решении и программирования для расчетов на электронных цифровых вычислительных машинах. Указаны средства оценки точности результатов.

Отмечены положительные особенности и недостатки приложении метода к рассматриваемым вопросам. Метод Монте-Карло, особенно перспективен в случаях, когда определяется температура в одной точке или небольшом числе отдельных точек исследуемого объекта.

Приведены численные примеры определения температурных полей в элементах машин и устройств теплоэнергетики.

MONTE CARLO TECHNIQUE
IN CONDUCTION HEAT TRANSFER PROBLEMS

S u m m a r y

The principles of applications of Monte Carlo method to solution of conduction heat transfer problems in solids are presented. Probabilistic analogues are estabilished for solving problems of stationary and nonstationary heat conduction with different boundary conditions, including problems with internal heat sources. Homogeneous isotropic solid bodies are considered an although nonhomogeneous, and multilayer ones.

The algorithms and programmes for solving the above problems by use the electronic digital computer are considered. The method for estimation errors of the results is pointed.

Advantages and disadvantages of applications the method to heat transfer problems are discussed. The Monte Carlo technique is used with especially good effects when determination of temperature in some single points of the body is inquired.

Application is illustrated by three numerical examples concerned determination of the temperature distribution in details of thermal equipment.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty z serii En.:

Energetyka z. 1, 1956 r., s. 174, zł 26,—
Energetyka z. 2, 1957 r., s. 118, zł 24,—
Energetyka z. 3, 1959 r., s. 62, zł 7,—
Energetyka z. 4, 1960 r., s. 113, zł 22,80
Energetyka z. 5, 1961 r., s. 103, zł 16,25
Energetyka z. 6, 1961 r., s. 55. zl 4,15
Energetyka z. 7, 1961 r., s. 60, zł 5.50
Energetyka z. 8, 1961 r., s. 50, zł 3,70
Energetyka z. 9, 1962 r., s. 127, zł 9,55
Energetyka z. 10, 1962 r., s. 73, zł 5,50
Energetyka z. 11, 1963 r., s. 178, zł 9,30
Energetyka z. 12, 1964 r., s. 89, zł 4,65
Energetyka z. 13, 1964 r., s. 109, zł 8,10
Energetyka z. 14, 1964 r., s. 104, zł 8,15
Energetyka z. 15, 1964 r., s. 69, zł 4,65
Energetyka z. 16, 1964 r., s. 149, zł 7,50
Energetyka z. 17, 1964 r., s. 152, zł 7,10
Energetyka z. 18, 1965 r., s. 128, zł 6,40
Energetyka z. 19, 1965 r., s. 92, zł 6,—
Energetyka z. 20, 1965 r., s. 90, zł 4,70
Energetyka z. 21. 1966 r., s. 120, zł 8,—
Energetyka z. 22. 1966 r., s. 111, zł 6, —

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3349 67