

SYNTEZA CZYNNA DRGAJĄCYCH UKŁADÓW UTWIERDZONYCH

ANDRZEJ DYMAREK ,TOMASZ DZITKOWSKI

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,
Politechnika Śląska
e-mail: tomasz.dzitkowski@posl.pl, andrzej.dymarek@polsl.pl*

Streszczenie. W pracy sformułowano i sformalizowano metodę syntezy czynnej systemów mechanicznych ze względu na żądane widmo częstości. Dokonano syntezy czynnej systemu regulacji proporcjonalnej zgodnie z sformułowaną metodą oraz przeprowadzono sprawdzenie poprawność otrzymanych wyników.

1. WSTĘP

Szkodliwy wpływ drgań podczas pracy maszyny, a przede wszystkim w strefie częstości rezonansowych, może doprowadzić do utraty jej stabilności bądź zniszczenia. Aby temu zapobiec, korzystne jest zaprojektowanie maszyny, tak aby działała w zakresie żądanych częstości, które nie pokrywają się z częstościami sił wymuszających. Prawidłowy model maszyny [13,20] pozwala na właściwą optymalizację jej sterowania, dzięki czemu możliwe jest zastosowanie odpowiedniego, w świetle przyjętych kryteriów, sterowania. Przyjęcie właściwego modelu maszyny poddanej optymalnemu sterowaniu [15,18] zależy od doświadczenia i intuicji projektanta. Przyjęty model może okazać się jednak niepoprawny ze względu na częstości rezonansowe, które mają istotny wpływ na sterowany obiekt. Konieczne jest sprecyzowanie kryterium identyfikacji struktury i parametrów modelu [1,4,9÷11,14] oraz sterowania tym modelem, które będzie spełniało własności dynamiczne maszyny poddanej optymalnemu sterowaniu [6,12,19]. Jednym z warunków przyjęcia takiego modelu maszyny jest synteza układów mechanicznych o żądanych własnościach dynamicznych [1÷11,16,17,20]. Prezentowana praca rozszerza zadanie syntezy o nowe metody, a w szczególności skupia się na metodzie syntezy czynnej drgających układów mechanicznych. Synteza czynna jest rozumiana jako poszukiwanie parametrów i struktury układów dynamicznych wraz z wartością siły nastawczej na podstawie przyjętych wymagań. Wymagania te dotyczą uzyskania założonych własności dynamicznych układów ze sterowaniem w postaci funkcji charakterystycznych (powolności, ruchliwości).

Praca ma na celu sformułowanie i sformalizowanie bezpośredniej metody syntezy czynnej oraz ukazanie jej zastosowania w połączeniu z różnymi metodami syntezy biernej. W artykule zaprezentowano zastosowanie syntezy czynnej w przypadku różnych warunków brzegowych struktur, otrzymywanych układów, spełniających takie same własności dynamiczne.

2. KLASA ROZPATRYWANYCH UKŁADÓW

Synteza czynna prezentowana w pracy jest połączeniem metod syntezy biernej z bezpośrednią metodą wyznaczenia wartości siły aktywnej na podstawie przyjętej charakterystyki dynamicznej. W wyniku rozkładu funkcji charakterystycznej w postaci powolności lub ruchliwości otrzymywana jest struktura dyskretnego układu mechanicznego oraz wartości parametrów inercyjnych i sprężystych wraz z siłą sterującą. Poszukiwany system powinien spełniać żądane własności dynamiczne. Na podstawie przyjętych własności dynamicznych (1) w postaci ciągu częstości rezonansowych i antyrezonansowych oraz przyjętej wartości spadku częstości rezonansowej nazywanej również w literaturze [6,12,19] rezerwą stabilności budowana jest funkcja charakterystyczna. Otrzymana charakterystyka jest rzeczywistą funkcją wymierną, a różnica między stopniem wielomianu mianownika i licznika powinna wynosić 1.

$$\begin{aligned} \omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1} &- \text{częstości rezonansowe,} \\ \omega_0, \omega_2, \dots, \omega_{2n} &- \text{częstości antyrezonansowe,} \\ h_1, h_3, \dots, h_{(2n-1)} &- \text{spadek częstości drgań własnych.} \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia charakterystyki dynamicznej w postaci powolności należy podstawić przyjęte wartości częstości do zależności (1) w formie:

$$\begin{aligned} U(s) &= H \frac{L(s)}{M(s)} = H \frac{\prod_{n=1}^i (s^2 + 2h_{(2n-1)}s + (\omega_{2n-1}^2 + h_{(2n-1)}^2))}{s \prod_{n=0}^j (s^2 + \omega_{2n}^2)} = \\ &= H \frac{\prod_{n=1}^i (s^2 + 2h_{(2n-1)}s + (\omega_{2n-1}^2 + h_{(2n-1)}^2))}{s \prod_{n=0}^j (s^2 + \omega_{2n}^2)} = \\ &= H \frac{\prod_{n=1}^i (s^2 + \omega_{2n-1}^2)}{s \prod_{n=0}^j (s^2 + \omega_{2n}^2)} + H \frac{\prod_{n=1}^i (s^2 + 2h_{(2n-1)}s + (\omega_{2n-1}^2 + h_{(2n-1)}^2))}{s \prod_{n=0}^j (s^2 + \omega_{2n}^2)} - \\ &= H \frac{\prod_{n=1}^i (s^2 + \omega_{2n-1}^2)}{s \prod_{n=0}^j (s^2 + \omega_{2n}^2)} + U_U(s) + U_F(s), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: H - stała proporcjonalności, s - operator Laplace'a, $\omega_{2n-1}, \omega_{2n}$ - wartości liczbowe żądanych częstości rezonansowych i antyrezonansowych, $U_U(s)$ - charakterystyka dynamiczna poszukiwanego układu, $U_F(s)$ - charakterystyka dynamiczna poszukiwanej siły sterującej.

Tak otrzymana funkcja charakterystyczna (1) jest powolnością (impedancją mechaniczną) poszukiwanego systemu. Powolność w postaci sumy dwóch funkcji poddaje się rozkładowi metodami syntezy biernej oraz bezpośredniego wyznaczenia wartości siły aktywnej.

3. METODA WYZNACZANIA SIŁY AKTYWNEJ

Punktem wyjścia dla prezentowanej metody jest układ otrzymany w wyniku zastosowania metod syntezy biernej w przypadku powolności $U_U(s)$ oraz charakterystyka $U_F(s)$.

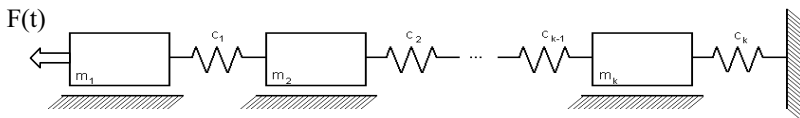
Na podstawie układu otrzymanego w wyniku syntezy biernej wyznacza się funkcje charakterystyczne w postaci sztywności w przypadku, gdy siła aktywna działa na punkt materialny, odpowiadający powolności (1).

$$\frac{F(s)}{X_1(s)} = \frac{L(s)}{M_1(s)}, \frac{F(s)}{X_2(s)} = \frac{L(s)}{M_2(s)}, \dots, \frac{F(s)}{X_k(s)} = \frac{L(s)}{M_k(s)}. \quad (2)$$

Wartości wielomianów $M_1(s), M_2(s), \dots, M_k(s)$ z równania (2) posłużą do wyznaczenia wartości siły w następujący sposób:

$$\begin{aligned} U_F(s) &= \frac{L_1(s)}{M(s)} \\ \frac{L_1(s)}{M_1(s)} &= a_1s + b_1 + \frac{L_2(s)}{M_1(s)}, \\ \frac{L_2(s)}{M_2(s)} &= a_2s + b_2 + \frac{L_3(s)}{M_2(s)}, \\ &\vdots \\ \frac{L_{k-1}(s)}{M_{k-1}(s)} &= a_{k-1}s + b_{k-1} + \frac{L_k(s)}{M_{k-1}(s)}, \\ \frac{L_k(s)}{M_k(s)} &= a_k s + b_k, \\ F(s) &= a_1s + b_1 + a_2s + b_2 + \dots + a_k s + b_k, \\ F(t) &= a_1\dot{x}_1 + b_1x_1 + a_2\dot{x}_2 + b_2x_2 + \dots + a_k\dot{x}_k + b_kx_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Ostatecznie w wyniku przeprowadzonej syntezy czynnej, czyli połączeniu metod syntezy biernej z metodą wyznaczenia wartości siły aktywnej, otrzymuje się system przedstawiony na rys. 1, którego charakterystyka dynamiczna jest zgodna z powolnością (1) poddaną syntezie.



Rys. 1. Układ otrzymany wyniku syntezy

4. PRZYKŁAD LICZBOWY

W przypadku sformalizowanej metody syntezy czynnej przeprowadzone zostaną obliczenia liczbowe. Na podstawie zaprezentowanych przykładów ukazana będzie niejednoznaczność zadania syntezy. Niejednoznaczność ta polega na otrzymaniu różnych układów spełniających

takie same własności dynamiczne. Warunki nałożone na poszukiwany układ przedstawione są w postaci ciągu częstości rezonansowych, antyrezonansowych oraz spadku częstości drgań własnych:

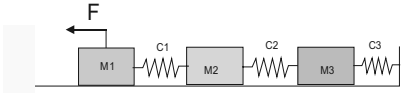
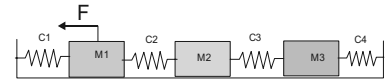
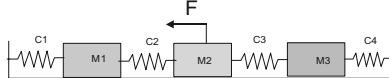
$$\begin{aligned}\omega_1 &= 15 \frac{\text{rad}}{s}, \omega_3 = 85 \frac{\text{rad}}{s}, \omega_5 = 100 \frac{\text{rad}}{s} - \text{częstości rezonansowe,} \\ \omega_0 &= 0 \frac{\text{rad}}{s}, \omega_2 = 30 \frac{\text{rad}}{s}, \omega_4 = 90 \frac{\text{rad}}{s} - \text{częstości antyrezonansowe,} \\ h_1 &= 0.75 \frac{\text{rad}}{s}, h_3 = 1 \frac{\text{rad}}{s} - \text{wartość przesunięcia strefy rezonansowej.}\end{aligned}$$

Na podstawie tak przyjętych własności dynamicznych projektowanego układu buduje się charakterystykę dynamiczną. Otrzymana funkcja jest powolnością drgających układów utwierdzonych o trzech stopniach swobody z aktywną siłą sterującą. Rozpatrywana powolność przyjmuje formę rzeczywistej funkcji wymiernej, zgodną z klasą poszukiwanych układów mechanicznych (2).

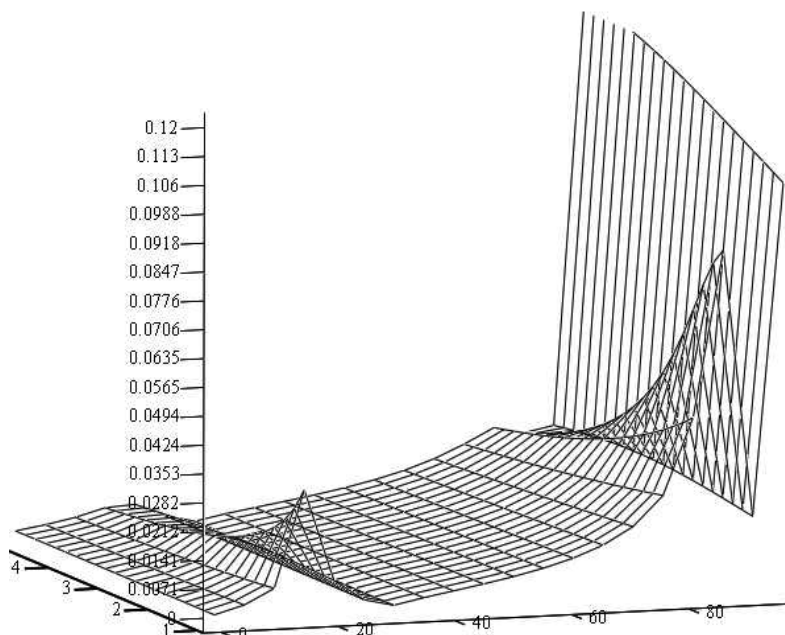
$$\begin{aligned}U(s) &= H \frac{(s^2 + 15^2)(s^2 + 85^2)(s^2 + 100^2)}{s(s^2 + 30^2)(s^2 + 90^2)} \\ &+ H \frac{(2 \cdot 0.75s + 0.75^2)(s^2 + 100^2)(s^2 + 85^2)}{s(s^2 + 30^2)(s^2 + 90^2)} + \\ &+ H \frac{(2 \cdot 1s + 1^2)(s^2 + 100^2)(s^2 + 15^2)}{s(s^2 + 30^2)(s^2 + 90^2)} + \\ &+ H \frac{(2 \cdot 0.75s + 0.75^2)(s^2 + 100^2)(2 \cdot 1s + 2 \cdot 85 \cdot 1 + 1^2)}{s(s^2 + 30^2)(s^2 + 90^2)} = \\ &= H \frac{(s^2 + 15^2)(s^2 + 85^2)(s^2 + 100^2)}{s(s^2 + 30^2)(s^2 + 90^2)} + U_F(s) = U_U(s) + U_F(s).\end{aligned}\tag{4}$$

W wyniku przeprowadzonej syntezy czynnej funkcji charakterystycznej w postaci powolności otrzymuje się strukturę poszukiwanego układu oraz jego wartości inercyjne, sprężyste oraz wartość siły aktywnej. Wyniki syntezy przy zastosowaniu metod syntezy biernej układów utwierdzonych zostały przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1 Wyniki przeprowadzonej syntezy czynnej

Metoda rozkładu na ułamek łańcuchowy	
	$m_1 = 1.00 \text{ kg}, m_2 = 9.9 \text{ kg},$ $m_3 = 3.5 \text{ kg},$ $c_1 = 8450 \frac{\text{N}}{\text{m}}, c_2 = 18418 \frac{\text{N}}{\text{m}},$ $c_3 = 3626 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$ $F(t) = H(-3.5\dot{x}_1 - 197x_1) +$ $H(-17.62\dot{x}_2 - 472.7x_2) +$ $H(1\dot{x}_3 + 420.9x_3).$
Algorytm wyznaczania dwójników typu sprężystego	
	$m_1 = 1.00 \text{ kg}, m_2 = 6.13 \text{ kg},$ $m_3 = 1.67 \text{ kg},$ $c_1 = 1800 \frac{\text{N}}{\text{m}}, c_2 = 6650 \frac{\text{N}}{\text{m}},$ $c_3 = 9990.7 \frac{\text{N}}{\text{m}}, c_4 = 481 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$ $F(t) = H(-3.5\dot{x}_1 - 197x_1) +$ $H(-14.6\dot{x}_2 - 413.23x_2) +$ $H(0.53\dot{x}_3 + 303x_3).$
Metoda proporcjonalnego rozkładu parametrów	
	$m_1 = 0.2315 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg},$ $m_3 = 0.2315 \text{ kg},$ $c_1 = 173.75 \frac{\text{N}}{\text{m}}, c_2 = 1500 \frac{\text{N}}{\text{m}},$ $c_3 = 1500 \frac{\text{N}}{\text{m}}, c_4 = 173.75 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$ $F(t) = H(-3.5\dot{x}_1 - 197x_1) +$ $H(0.6357\dot{x}_1 + 104x_1) +$ $H(0.6357\dot{x}_3 + 104x_3).$

Sprawdzenia poprawności przeprowadzonej syntezy czynnej dokonano, generując trójwymiarowy wykres podatności w przypadku układów uzyskanych w wyniku syntezy powolności. Na podstawie wygenerowanego wykresu można dokonać modyfikacji żądanych własności dynamicznych ze względu na maksymalną amplitudę drgań poszukiwanego układu (jednostkowa amplituda siły wymuszającej). W zależności od żądanej amplitudy postaci drgań projektowanego systemu należy wyznaczyć, na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 2, spadek częstości drgań własnych h i dokonać powtórnej syntezy.



Rys. 2. Wykres podatności układu otrzymanego w wyniku syntezy czynnej

5. WNIOSKI

Przedstawiona praca dotyczy sformułowania i sformalizowania problemu syntezy czynnej układów drgających. W pracy zaproponowano połączenie metody syntezy biernej z metodą wyznaczania siły aktywnej jako metodą syntezy czynnej dyskretnych układów mechanicznych. Przeprowadzona synteza czynna układów utwierdzonych ukazała niejednoznaczność zadania syntezy czynnej. Otrzymane struktury i wyznaczone parametry systemu nie są jedynymi, jakie można uzyskać w przypadku założonych częstości. Dokonana synteza układów utwierdzonych jest etapem syntezy układów ciągłych, a w szczególności układów belkowych. Sformalizowana metoda syntezy czynnej jest propozycją doboru siły aktywnej oraz układu drgającego jako systemu spełniającego żądane własności dynamiczne w postaci ciągu częstości rezonansowych oraz spadku częstości drgań własnych. Zaletą proponowanej metody wyznaczenia siły aktywnej w układzie jest łatwość jej oprogramowania. Zaproponowaną metodę można zaliczyć do metody regulacji proporcjonalnej ze sprzężeniem zwrotnym od stanu [12,19]. Praca jest również próbą wskazania nowych możliwości oraz kierunku badań w projektowaniu podzespołów maszyn o żądanym widmie częstości.

LITERATURA

1. Buchacz A., Dymarek A., Dzitkowski T.: Projektowanie i badanie wrażliwości ciągłych i dyskretno-ciągłych układów mechanicznych o żądanym widmie częstości w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Gliwice: Wyd. Pol. Śl., 2005. Monografia z. 88,

2. Družinskij I. A.: *Mechaničeskie cepi*. Leningrad: Mašinostroenie, 1977.
3. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Gliwice 2000.
4. Dymarek A.: The sensitivity as a criterion of synthesis of discrete vibrating fixed mechanical system. "Journal of Materials Processing Technology" 2004, Vol. 157-158, p.138-143.
5. Dymarek A., Dzitkowski T.: Modelling and synthesis of discrete – continuous subsystems of machines with damping. "Journal of Materials Processing Technology" 2005, Vol. 164-165, p. 1317-1326.
6. Dymarek A., Dzitkowski T.: Projektowanie systemu regulacji ze względu na żądane widmo częstości. „Modelowanie Inżynierskie” 2009, nr 37, t. 6, s.91÷96.
7. Dymarek A.: Dobór częstości antyrezonansowych w syntezie układów belkowych. „Modelowanie Inżynierskie” 2009, nr 37, t. 6, s.83÷90.
8. Dymarek A., Dzitkowski T.: Searching for the values of damping elements with required frequency spectrum. "Acta Mechanica et Automatica" 2010, Vol. 4, No. 4, p. 19-22.
9. Dzitkowski T., Dymarek A.: Synthesis and sensitivity of machine driving systems. "Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering" 2006, Vol. 20, p. 359÷362.
10. Dzitkowski T., Dymarek A. Synthesis and sensitivity of multiaxial drive systems. "Acta Mechanica et Automatica" 2009, Vol. 3, No. 4, p. 28÷31.
11. Dzitkowski T., Dymarek A.: Design and examining sensitivity of multiaxial drive systems with damping. In: 17th International Scientific and Engineering Conference - Machine-Building and Technosphere on the Border of the XXI Century. Vol.4. Donetsk – Sevastopol 2010, p. 59÷62.
12. Heimann B., Gerth W., Popp K.: *Mechatronika: komponenty, metody, przykłady*. Warszawa: Wyd.Nauk.PWN, 2001.
13. Kruszewski J., Wittbrodt E., Walczyk Z.: *Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym. T.2 : Zagadnienia wybrane*. Warszawa: WNT, 1993.
14. Świder J.[red], Kaźmierczak J.[red] i in.: *Wspomaganie komputerowe CAD CAM. Wspomaganie konstruowania układów redukcji drgań i hałasu maszyn*. Warszawa: WNT, 2001.
15. Mężyk A.: *Optymalizacja własności dynamicznych układów napędowych maszyn*. Gliwice 2002. ZN Pol. Śl. s. „Mechanika” z.139.
16. Redfield R. C., Krishnan S.: Dynamic system synthesis with a bond graph approach. Part I: Synthesis of one-port impedances. "Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control" 1993, Vol. 115, No. 3, p. 357-363.
17. Redfield R. C.: Dynamic system synthesis with a bond graph approach. Part II: Conceptual design of an inertial velocity indicator. "Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control" 1993, Vol. 115, No. 3, p. 364-369.
18. Świtoński E. [red]: *Modelowanie mechatronicznych układów napędowych*. Gliwice: Wyd.Pol. Śl., 2004. Monografia z. 70.
19. Węgrzyn S.: *Podstawy automatyki*. Warszawa: Wyd. Nauk. PWN, 1972.
20. Wojnarowski J., Buchacz A., Nowak A., Świder J.: *Modelowanie drgań układów mechanicznych metodami grafów i liczb strukturalnych*. Gliwice: Wyd. Pol.Śl., 1986. Skrypt uczelniany Politechniki Śląskiej nr 1266.

THE ACTIVE SYNTHESIS OF VIBRATING FIXED SYSTEMS

Summary. In this work the method of active synthesis of mechanical systems in accordance with the desired frequency spectrum has been formulated and formalised. Active synthesis of a proportional regulation system has been performed in accordance with the method formulated and a verification of the correctness of the results has been carried out.

Część badań zrealizowano w ramach projektu badawczego N 502 447239 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2010 – 2013.