

## ZASTOSOWANIE METODY R-FUNKCJI DO WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA

ANDRZEJ WAWRZYNEK<sup>1)</sup>, MARCIN DETKA<sup>2)</sup>, CZESŁAW CICHON<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Śląska  
e-mail: andrzej.wawrzynek@polsl.pl

<sup>2)</sup>Katedra Informatyki Stosowanej, Politechnika Świętokrzyska  
e-mail: marcin.detka@gmail.pl, spicc@tu.kielce.pl

Streszczenie. Bezsiatkowa metoda  $R$ -funkcji (funkcji Rvacheva) może być zastosowana do rozwiązywania odwrotnych zagadnień przewodnictwa ciepła z nieskończoną liczbą parametrów decyzyjnych. W pracy pokazano rozwiązania trzech różnych problemów poszukiwania współczynnika wymiany ciepła na jednym z brzegów kwadratowego obszaru. Pomiary temperatury kamerą termowizyjną, na brzegu obszaru, symulowano poprzez rozwiązanie metodą elementów skończonych odpowiednich zadań bezpośrednich i narzucenie losowego błędu o zadanej maksymalnej wartości.

### 1. WPROWADZENIE

Metoda  $R$ -funkcji ( $MRF$ ) należy do grupy bezsiatkowych metod rozwiązywania problemów brzegowych (termo)mechaniki. Bazując na słabym wariacyjnym sformułowaniu danego zagadnienia, wyznacza się współczynniki wielomianu aproksymującego rozwiązanie w całym analizowanym obszarze. Dwoma podstawowymi elementami  $MRF$  są: 1) ścisły opis analityczny dowolnie złożonego obszaru, uzyskiwany poprzez zastosowanie zupełnego układu  $R$ -funkcji odpowiadających układowi funkcji logicznych: koniunkcji, alternatywy i negacji; 2) ogólna struktura rozwiązania, która jest odpowiednio skonstruowaną funkcją spełniającą w ścisły sposób wszystkie warunki brzegowe. Wadą tej metody jest konieczność wykonywania ogromnej ilości przekształceń analitycznych. W pracy [1] zaproponowano jej modyfikację (tzw. konsekwentna metoda  $R$ -funkcji -  $KMRF$ ), znacznie uproszczającą obliczenia bez szkody dla jej dokładności. Modyfikacja  $MRF$  polega na konstruowaniu struktury rozwiązania spełniającej tylko podstawowe warunki brzegowe. Jest to spójne z wymogami rozwiązania aproksymacyjnego problemu wariacyjnego. Zastosowanie obliczeń symbolicznych do obliczeń  $MRF$  czyni tę metodę ciekawą i użyteczną.

$KMRF$  umożliwia w stosunkowo prosty sposób rozwiązywanie zadań odwrotnych przewodnictwa ciepła, w których na znacznej części brzegu analizowanego obszaru nieznane są warunki brzegowe, ale w zamian znane są pomiary temperatury na tym brzegu. W pracy symulowany jest pomiar dokonywany kamerą termowizyjną. Oznacza to, że założono znaną temperaturę w dużej liczbie punktów pomiarowych z losowym błędem do dwóch stopni (kamery mają dokładność nawet poniżej 0,1 stopnia). Wartości temperatur wyznaczono, rozwiązując odpowiednie zadanie bezpośrednie metodą elementów skończonych, a następnie narzucając w wybranych punktach brzegowych błąd losowy. Z rozwiązania odpowiednio

sformułowanego problemu odwrotnego, za pomocą *KMRF*, uzyskano ciągłą funkcję opisującą pole temperatury w całym obszarze, umożliwiającą wyznaczenie strumienia ciepła na jego brzegu, również tym, na którym nieznane były warunki brzegowe. Wykorzystując wyznaczone strumienie ciepła, łatwo określić wartość współczynnika przejmowania ciepła lub ściślej: funkcji opisującej zmianę tego współczynnika wzdłuż brzegu.

## 2. METODA *R-FUNKCJI* (*MRF*)

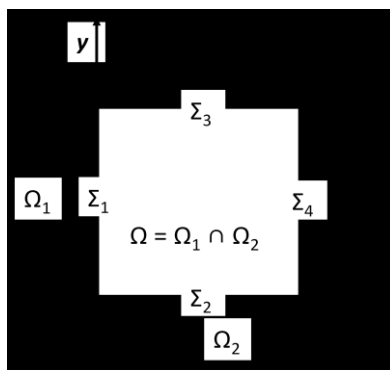
### 2.1. Analityczne równanie obszaru i jego brzegu

W pierwszym kroku bezsiatkowej metody *R-funkcji* tworzone są równania analizowanego obszaru dowolnie złożonego oraz części jego brzegu. W tym celu wykorzystuje się tzw. zupełny układ *R-funkcji*, analogiczny do układu funkcji logicznych: koniunkcji, dysjunkcji i negacji. Układ taki opisują równania (1) – patrz np. [2 - 4]:

$$\begin{aligned} f_{kon}(x_1, x_2) &= x_1 \wedge_0 x_2 = x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ f_{dys}(x_1, x_2) &= x_1 \vee_0 x_2 = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ f_{neg}(x_1, x_2) &= \bar{x}_1 = -x \end{aligned} \quad (1)$$

Przykładowo, kwadratowy obszar  $\Omega$  ( $\omega = \omega(x, y)$ ) o jednostkowym boku (rys. 1), który powstaje jako część wspólna pasów: poziomego -  $\omega_1$  i pionowego -  $\omega_2$ , opisany jest równaniem:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) = [y(1-y)] \wedge_0 [x(1-x)] = \\ &= y(1-y) + x(1-x) - \sqrt{y^2(1-y)^2 + x^2(1-x)^2} \end{aligned} \quad (2)$$



Rys. 1. Przykładowy obszar i części jego brzegu

Funkcja (2) ma następujące własności:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \partial\Omega \\ \omega(x, y) &> 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \text{wnętrza obszaru} \\ \omega(x, y) &< 0 \Leftrightarrow (x, y) \notin \Omega \cup \partial\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

W celu określenia warunków brzegowych konieczne jest określenie odpowiednich równań poszczególnych części brzegu. Przykładowo, równanie górnej krawędzi kwadratu  $\Sigma_3$  ma postać (z prostej  $y = 1$ , pasmo  $\omega_2$  wycina jednostkowy odcinek  $\Sigma_3$  - szczegóły, np. w [3], [4]):

$$s_3(x, y) = \sqrt{(1-y)^2 \vee_0 \bar{\omega}_2} = \left( (1-y)^2 + x(x-1) + \sqrt{(1-y)^4 + x^2(x-1)^2} \right)^{1/2} \quad (4)$$

przy czym  $s_3 = 0$  tylko i wyłącznie dla punktów należących do tej krawędzi, czyli dla  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  i  $y = 1$ . Równania pozostałych części brzegu –  $s_1, s_2, s_4$  – tworzone są z zastosowaniem analogicznie zależności.

## 2.2. Struktura rozwiązania

Drugim etapem metody *R-funkcji* jest stworzenie tzw. struktury rozwiązania, która jest funkcją spełniającą w ścisły sposób wszystkie warunki brzegowe (nie zależy od postaci równania różniczkowego analizowanego problemu). Wewnątrz obszaru poszukiwana funkcja opisana jest poprzez funkcje bazowe (np. funkcje Czebyszewa) z nieznanymi współczynnikami. Sposób tworzenia struktury zostanie pokazany na prostym przykładzie.

Niech na czterech częściach brzegu obszaru  $\partial\Omega_i = \Sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) zadane będą np. warunki brzegowe I rodzaju (warunek Dirichleta – znana temperatura  $T$ ):

$$T(x, y)|_{\Sigma_i} = \theta_i(x, y); \quad i = 1, \dots, 4; \quad (5)$$

wówczas łatwo sprawdzić, że funkcja postaci

$$\theta_0(x, y) = \frac{\theta_1 s_1^{-1} + \dots + \theta_4 s_4^{-1}}{s_1^{-1} + \dots + s_4^{-1}} \quad (6)$$

gdzie  $s_1(x, y), s_2(x, y), \dots, s_4(x, y)$ , to równania analityczne poszczególnych części brzegu (analogiczne do wzoru(4)), spełnia warunki (5), tj.

$$\theta_0|_{\Sigma_i} = \theta_i \quad (\text{bo } s_i = s_i(x, y)|_{(x, y) \in \Sigma_i} = 0)$$

Struktura rozwiązania odpowiadająca warunkom (5) ma postać

$$T(x, y) = \omega(x, y) \Phi(x, y) + \theta_0(x, y) = \omega \Phi + \theta_0 \quad (7)$$

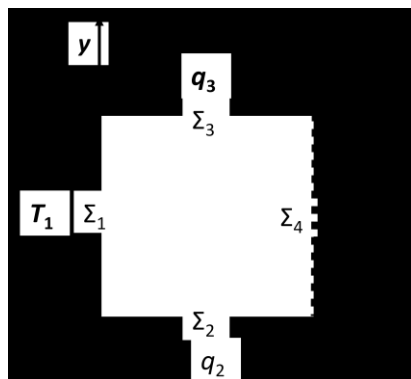
gdzie nieznana funkcja  $\Phi = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \varphi_{ij}(x, y)$  zawiera poszukiwane współczynniki  $a_{ij}$  oraz znane

funkcje bazowe, np. wielomiany Czebyszewa. Współczynniki  $a_{ij}$  najczęściej wyznacza się, wykorzystując wariacyjne sformułowanie problemu przewodnictwa ciepła. W bardziej ogólnym przypadku struktura rozwiązania może spełniać również warunki brzegowe II i/lub III rodzaju (zadane strumienie i/lub konwekcyjna wymiana ciepła).

W pracy [1] pokazano pewną modyfikację klasycznej *MRF* znacząco upraszczającą bardzo czasochłonne obliczenia (patrz: Wprowadzenie), a także opisano własny pakiet oprogramowania wykonującego złożone obliczenia analityczne, który został wykorzystany do uzyskania niżej omówionych rozwiązań.

## 3. ZAGADNIENIE ODWROTNE - SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W tej pracy rozpatrywane są ustalone przypadki przewodzenia ciepła (równanie Poissona). Niech na poszczególnych częściach brzegu obszaru  $\Omega$  zadane będą następujące warunki brzegowe – odpowiednio na krawędziach kwadratu: lewej, dolnej, górnej i prawej (rys. 2):



Rys. 2. Schematyczny opis warunków brzegowych

$$\begin{aligned}
 T|_{\Sigma_1} &= T_1 = \text{const} \\
 q|_{\Sigma_2} &= q_2 = -\lambda \frac{dT}{dn}\bigg|_{\Sigma_2} = \text{const}; \quad q|_{\Sigma_3} = q_3 = -\lambda \frac{dT}{dn}\bigg|_{\Sigma_3} = \text{const} \\
 q|_{\Sigma_4} &= -\lambda \frac{dT}{dn}\bigg|_{\Sigma_4} = \alpha_4(y) (T|_{\Sigma_4} - T_{otocz})
 \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie:  $q_2, q_3, T_1$ , - znane dwa strumienie ciepła oraz temperatura;  $T_{otocz}$  - znana, stała temperatura otoczenia. W ogólnie sformułowanym problemie wielkości te nie muszą być stałe - mogą być opisane znaną funkcją. Poszukiwana jest funkcja opisująca współczynnik wymiany ciepła  $\alpha_4(y)$ . Założono dodatkowo, że na brzegu  $\Sigma_4$  znane są pomiary temperatury wykonane kamerą termowizyjną, co oznacza, że dysponuje się znaczną liczbą danych (teoretycznie równą liczbie pikseli na obrazie brzegu), czyli

$$T_a^{(pom)} = T(1, y_a), \quad a = 1, \dots, N_{pom} \tag{9}$$

Przy tworzeniu struktury *MRF* wygodniej jest przekształcić warunki (8) do innej postaci, stosując nowe oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 T|_{\Sigma_1} &= T_1 = f_1 \\
 \frac{dT}{dn}\bigg|_{\Sigma_2} &= -\frac{q_2}{\lambda} = f_2; \quad \frac{dT}{dn}\bigg|_{\Sigma_3} = -\frac{q_3}{\lambda} = f_3 \\
 \frac{dT}{dn}\bigg|_{\Sigma_4} &= \frac{\alpha_4}{\lambda} T_{otocz} - \frac{\alpha_4}{\lambda} T|_{\Sigma_4} = f_4 - h_4 T|_{\Sigma_4}
 \end{aligned} \tag{10}$$

W poniższych przykładach pomiary zostały zasymulowane poprzez rozwiązanie metodą elementów skończonych zagadnienia bezpośredniego ze znaną funkcją  $\alpha_4$ , a następnie narzucenie na wyznaczone temperatury brzegowe losowego błędu pomiarowego

o maksymalnej wartościach  $\pm 1$  lub  $\pm 2$  stopnie. Taki błąd znacznie przekracza dokładność pomiarową kamer termowizyjnych.

Dla tak postawionego problemu, ogólna struktura rozwiązania *KMRF* ma postać – por. równanie (7):

$$T(x, y) = T_1 + s_1(x, y) \Phi(x, y) \quad (11)$$

gdzie  $s_1(x, y)$  jest równaniem brzegu (lewa krawędź kwadratu), na którym zadana jest temperatura  $T_1$ .

W celu zobrazowania ogromnej różnicy pomiędzy klasyczną metodą *R-funkcji* a *KMRF*, przytacza się, bez szczegółowego omówienia, postać ogólnej struktury w przypadku *MRF*:

$$\begin{aligned} T(x, y) = & f_1 s_{234} - \omega D_1 \left( \frac{f_1 s_{234}}{M_{1-4}} \right) + \omega \frac{f_2 s_{23} + f_3 s_{24} + f_4 s_{23}}{M_{1-4}} - \\ & - \omega D_1 \left( \Phi \frac{s_2 s_{34} + s_3 s_{24} + s_4 s_{23}}{M_{1-4}} \right) + \Phi \frac{s_2 s_{34} + s_3 s_{24} + s_4 s_{23}}{M_{1-4}} - \\ & - \omega \Phi \frac{h_4 s_{23}}{M_{2-4}} \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:  $D_1$  oznacza następujący operator  $D_1(\cdot) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial (\cdot)}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial (\cdot)}{\partial y}$ , o własności:  $D_1(\omega)|_{\partial \Omega} = 1$ .

Dla skrócenia zapisu w równaniu (12) wprowadzono uproszczony zapis, oznaczając kolejno przez:

$$s_{234} = s_2 s_3 s_4, \text{ itd.}; \quad M_{1-4} = s_{234} + s_{134} + s_{124} + s_{123}; \quad M_{2-4} = s_{34} + s_{24} + s_{23}.$$

Wykorzystując warunek stacjonarności funkcjonału problemu ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku jednorodnym, izotropowym, który w przypadku tutaj analizowanego zadania (ale bez uwzględnienia warunku konwekcji na prawym brzegu) ma postać (por. np. [4], [6]):

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2Tq_v \right) d\Omega + \left( \int_{\partial \Omega_2} T f_2 d\partial \Omega_2 \right) + \left( \int_{\partial \Omega_3} T f_3 d\partial \Omega_3 \right) \quad (13)$$

oraz wstawiając (9) do równania (11), otrzymano nadokreślony algebraiczny układ równań ze względu na nieznane współczynniki  $a_{ij}$  ( $i, j = N$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial J[a_{ij}]}{\partial a_{kl}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, N \\ T_{\alpha}^{(pom)} = T(1, y_{\alpha}) = s_1 \Phi + T_1, \quad \alpha = 1, \dots, N_{pom} \\ \quad \quad \quad = \sum a_{ij} \varphi_{ij} \end{cases} \quad (14)$$

Układ (14) można rozwiązać, stosując standardowe procedury całkowania numerycznego i rozwiązywania układów nadokreślonych, np. metoda najmniejszych kwadratów. Należy zaznaczyć, że funkcjonał  $J[a_{ij}]$ , jak i struktura rozwiązania (11) nie uwzględniają warunku na brzegu  $\Sigma_4$ . Autorzy szeroko wykorzystywali program umożliwiający wykonywanie obliczeń z zastosowaniem algebry komputerowej

## 4. PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

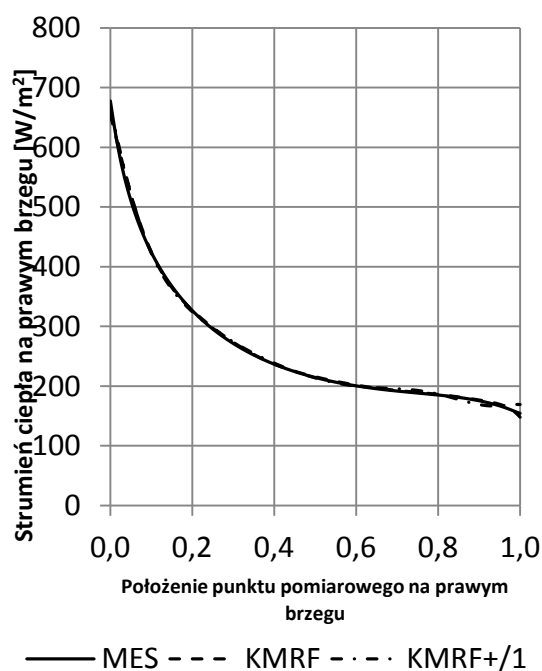
## 4.1. Przykład 1. - liniowo zmienny współczynnik przejmowania ciepła

Niech w symulacji pomiarów poszukiwana funkcja  $\alpha_4 = \alpha_4(y)$  zmienia się liniowo: od wartości  $50[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$  dla  $y = 0$ , do wartości  $10[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$  dla  $y = 1$ . Wartości pozostałych wielkości przyjętych w obliczeniach to: strumień na krawędziach dolnej i górnej, odpowiednio:  $q_2 = 500[\text{W}/\text{m}^2]$ ,  $q_3 = 100[\text{W}/\text{m}^2]$ ; współczynnik przewodzenia ciepła ogrzewanego materiału  $\lambda = 2[\text{W}/\text{m K}]$ ,  $T_1 = 30[\text{C}]$  oraz temperatura otoczenia  $T_{\text{otocz}} = 100[\text{C}]$ . Dodatkowo założono, że wewnątrz obszaru występują jednorodne źródła ciepła o wydajności  $q_V = 800[\text{W}/\text{m}^3]$ . Wówczas rozwiązanie układu (14) pozwala określić rozkład temperatury w całym obszarze  $\Omega$  (równanie (11)) oraz na jego brzegu.

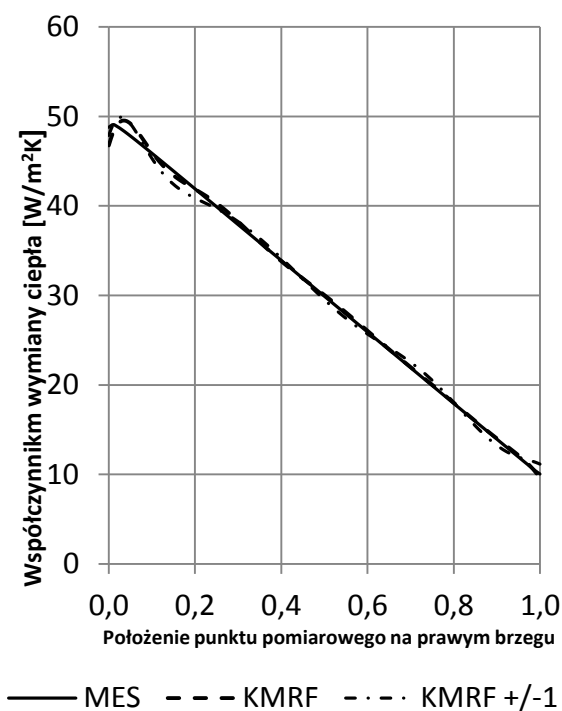
Korzystając z zależności określającej strumień ciepła na brzegu obszaru:

$$q_4(1, y) = -\lambda \frac{\partial T(1, y)}{\partial n} = \alpha_4(y)(T(1, y) - T_{\text{otocz}}) \quad (15)$$

można, poprzez różniczkowanie struktury (11), wyznaczyć najpierw strumień  $q_4$ , a następnie współczynnik wymiany ciepła  $\alpha_4$ .



Rys. 3. Wykres wyznaczonego strumienia ciepła na brzegu  $\Sigma_4$  – przykład 1.



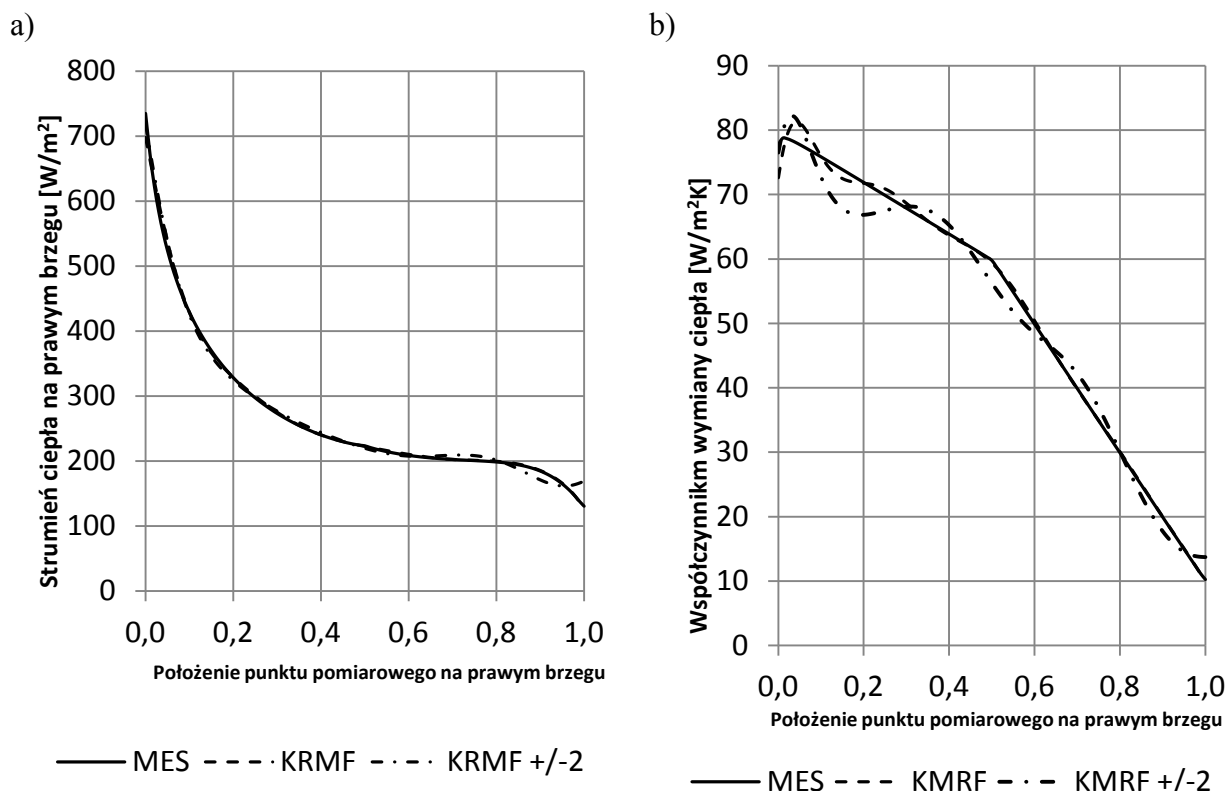
Rys. 4. Wykres wyznaczonego współczynnika przejmowania ciepła na brzegu  $\Sigma_4$  – przykład 1.

Powyżej pokazano kolejno: strumień ciepła (rys. 3) i przebieg funkcji  $\alpha_4(y)$  - (rys. 4). Każdy z wykresów zawiera odpowiednio wyniki rozwiązań: a) zadania bezpośredniego *MES* –  $400 \times 400$  kwadratowych, czterowęzłowych elementów skończonych – służącego do symulacji pomiarów temperatury brzegowej; b) zagadnienia odwrotnego metodą *KMRF* z symulowanymi pomiarami bez losowego błędu; c) zagadnienia odwrotnego *KMRF* z pomiarami obciążonymi maksymalnie jednostopniowym losowym błędem. W przypadku brzegowego strumienia ciepła wszystkie rozwiązania nie różnią się w zasadniczy sposób. Ze

względem na zakładaną wielomianową aproksymację poszukiwanej temperatury (patrz wzór (7)), rozwiązanie *KMRF* charakteryzuje się oscylacyjnym przebiegiem otrzymywanych wyników wewnątrz i na brzegu obszaru. Jednakże nawet nieskomplikowana aproksymacja (np. liniowa lub wielomianowa niskiego stopnia) strumienia lub współczynnika wymiany ciepła pozwala wygładzić przebieg wyznaczanego parametru, uzyskując wynik zbliżony do dokładnego (*MES*). Zauważono, że w tym przykładzie oraz innych tutaj nie opisywanych, współczynnik przejmowania, wyznaczony z przekształcenia wzoru (15), obciążony jest kilkuprocentowym błędem i mocniej oscyluje w tej części rozwiązania, w której wartość brzegowego strumienia ciepła nieznacznie różni się (tj. o kilkanaście procent) od wartości strumienia  $q_V$  generowanego w całym obszarze.

#### 4.2. Przykład 2. - dwuliniowo zmienny współczynnik przejmowania ciepła

W drugim przykładzie, w rozwiązaniu *MES* służącemu symulacji pomiarów, wprowadzono złożony warunek brzegowy: założony współczynnik przejmowania ciepła  $\alpha_4 = \alpha_4(y)$  opisuje funkcja złożona z dwóch odcinków prostej wyznaczonych następującymi danymi:  $\alpha_4 = 50; 60$  i  $80[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$ , odpowiednio dla  $y = 0,0; 0,5$  i  $1,0$ . Wartości pozostały wielkości przyjęto jak w pierwszym przykładzie.



Rys. 5. Wykresy wyznaczonego: a) strumienia ciepła na brzegu  $\Sigma_4$ ; b) współczynnika  $\alpha_4$  – przykład 2.

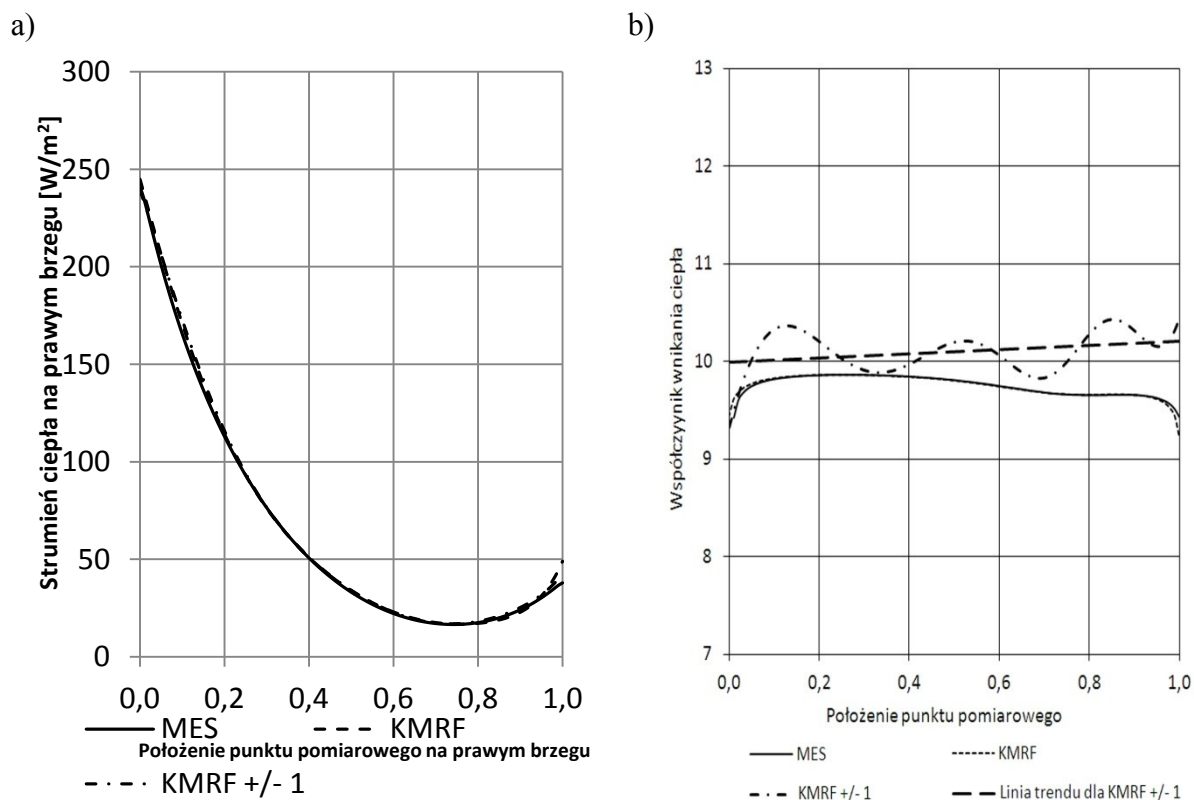
Stosując postępowanie opisane p. 3.1, uzyskano przebiegi funkcji: strumienia ciepła  $q_4 = q_4(y)$  i współczynnika  $\alpha_4 = \alpha_4(y)$  pokazane na rys. 5. Również i w tym przykładzie, rozwiązania *MES* i *KMRF* (bez błędów pomiarowych) są bardzo zbliżone (w przypadku strumienia ciepła niemal identyczne). Rozwiązanie uwzględniające błędy pomiarowe (krzywa oznaczona na rys. 5. jako *KMRF +/-2*) obciążone jest kilkuprocentowym błędem w stosunku

do rozwiązania *MES*, traktowanego jako rozwiązanie dokładne (referencyjne). Również i w tym zadaniu można wyznaczyć linię aproksymującą „falującą” część rozwiązania, uzyskując bardzo dużą zgodność z rozwiązaniem „dokładnym” *MES*.

#### 4.3. Przykład 3. - stały współczynnik przejmowania ciepła

W ostatnim przytaczanym tutaj przykładzie przyjęto, że w symulacji (rozwiązanie *MES* z gęstą siatką kwadratową  $400 \times 400$ ) współczynnik przejmowania ciepła  $\alpha_4$  jest stały o wartości  $\alpha_4 = 10[\text{W}/\text{m}^2 \text{K}]$  dla  $y \in \langle 0,1 \rangle$ . Pozostałe wielkości – jak w przykładzie 3.1.

Na rys. 6 a. linią ciągłą zaznaczono obliczony *MES* strumień ciepła na prawym brzegu oraz rozwiązania odpowiednich zadań odwrotnych: *KMRF* z błędem pomiarowym i bez błędu. Jak widać, trzy krzywe opisujące zmieniający się strumień różnią się bardzo mało na prawie całej długości brzegu. Odtworzony współczynnik przejmowania ciepła, uzyskany na podstawie wyznaczonego metodą elementów skończonych strumienia ciepła pokazano na rys. 6 b. Jego przebieg jest dość daleki od poziomego (założonego wcześniej). Rozwiązanie odwrotne *KMRF* (pomiar bez błędów) bardzo dokładnie odtwarza rozwiązanie *MES*. Z kolei, rozwiązanie *KMRF* z błędami pomiarowymi ( $\pm 1$  stopień) – co prawda znacznie osłupujące – dobrze odtwarza założony współczynnik  $\alpha_4$ , przy czym jego aproksymacja liniowa (ale również kwadratowa) daje wynik bliższy założonemu na początku (stały współczynnik wymiany ciepła wynoszący  $10[\text{kW}/\text{m}^2 \text{K}]$ ) niż referencyjne rozwiązanie bezpośrednie *MES* (linia ciągła).



Rys. 6. Wykresy strumienia ciepła i współczynnika przejmowania ciepła na brzegu  $\Sigma_4$  dla zadania opisanego w przykładzie 3.



## 5. PODSUMOWANIE

Z istoty metody *R-funkcji* wynika, że znajdowane rozwiązania zadań odwrotnych mają postać funkcyjną, a więc stanowią rozwiązanie problemu z nieskończoną liczbą zmiennych decyzyjnych (ZD). Dotychczasowe wyniki analiz zagadnień odwrotnych *konsekwentną metodą R-funkcji* (z konieczności pokazano tylko 3 przykłady) pozwalają na stwierdzenie, że w przypadku stacjonarnych przepływów ciepła metoda ta jest wyjątkowo efektywna. Analogiczne rozwiązanie problemu odwrotnego metodą elementów skończonych wymaga wstępnego założenia („odgadywania”) rozkładu  $\alpha_4$  i wprowadzania odpowiedniej liczby zmiennych decyzyjnych opisujących założony współczynnik – por. np. [5]. Wyznaczanie wartości poszukiwanych ZD jest trudne lub niemożliwe nawet przy błędach pomiarowych poniżej 0,5 stopnia. Równie trudne jest poszukiwanie na brzegu strumienia ciepła. *KMRF* wyjątkowo dobrze odtwarza brzegowy strumień ciepła.

W dalszych badaniach testowane będą zagadnienia odwrotne z geometrycznie złożonymi obszarami, w tym wielospójnymi oraz złożonymi warunkami brzegowymi. Innym problemem wymagającym dalszej analizy jest „falowanie” rozwiązania występujące zarówno w przypadku współczynnika przejmowania ciepła (tutaj omawianym – rys. 4, 5b, 6b), jak i również w odtwarzanym brzegowym strumieniu ciepła, gdy w symulacji pomiarów występuje warunek brzegowy II rodzaju (zagadnienie tutaj nieomawiane).

## LITERATURA

1. Detka M.: Zastosowanie metody R-funkcji do rozwiązywania dwuwymiarowych problemów mechaniki konstrukcji o złożonej geometrii i warunkach brzegowych. Praca doktorska. Politechnika Świętokrzyska, 2011.
2. Rvachev V. L.: Geometric applications of logic algebra. Kiev: Naukova Dumka, 1967.
3. Rvachev V. L., Sheiko V. L., Shapiro V., Tsukanov V.: On completeness of RFM solution structures. „Computational Mechanics” 2000, 25, p. 305-317.
4. Wawrzynek A.: Modelowanie krzepnięcia i stygnięcia metali oraz problemów dyfuzji ciepła za pomocą metody R-funkcji. ZN Pol. Śl. 1994, „Mechanika” z. 119.
5. Wawrzynek A.: Odwrotne zagadnienia przewodnictwa ciepła z dużą liczbą danych pomiarowych. Monografia. Gliwice: Wyd. Pol. Śl., 2005.
6. Pr. zbior. pod redakcją J. Szarguta: Modelowanie numeryczne pól temperatury. Warszawa: WNT, 1992.

## APPLICATION OF THE R-FUNCTION METHODS TO HEAT TRANSFER COEFFICIENT ESTIMATIONS

Summary. The R-Function (meshless) Method makes it possible to solve inverse heat transfer problems with infinite design parameters in a relatively simple way. Solutions of the three different inverse problems with unknown heat transfer coefficients at one part of boundary of the square region are presented. Temperatures are known at that part of boundary. Temperature measurements (by infra-red camera) are simulated by solving an appropriate direct problem with the Finite Element Method and then imposing a random error at selected points.

