

ANALIZA WŁASNOŚCI ZASTĘPCZYCH MATERIAŁÓW MAGNETOELEKTROSPRĘŻYSTYCH ZAWIERAJĄCYCH PUSTKI

GRZEGORZ DZIATKIEWICZ

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska
e-mail: grzegorz.dziatkiewicz@polsl.pl*

Streszczenie. W niniejszej pracy rozważano rozszerzony model Eshelby'ego dla przypadku sprzężonych pól mechanicznych i elektromagnetycznych. Wyznaczono tzw. magnetoelektrospężysty tensor Eshelby'ego, którego składowe obliczono numerycznie z wykorzystaniem kwadratur Gaussa. Rozpatrywano model materiału transwersalnie izotropowego oraz liniowo piezoelektrycznego i liniowo piezomagnetycznego. Następnie, korzystając z podejścia Mori-Tanaki, wyznaczono własności zastępcze materiałów magnetoelektrospężystych zawierających mikropustki. Pustki są traktowane jako elipsoidalne inkluzje o zerowych wartościach modułów sprężystości.

1. WSTĘP

Prawdopodobnie najważniejszy rezultat analityczny mikromechaniki został podany przez Eshelby'ego [4]. Jest on ważny w obszarze nieograniczonym, który zawiera elipsoidalną inkluzję. W teorii sprężystości relacja między stałymi odkształceniami własnymi w inkluzji a odkształceniami całkowitymi jest dana przez tensor Eshelby'ego IV rzędu [4]. Wynik Eshelby'ego jest ważny również dla materiałów anizotropowych, ale jedynie w przypadku izotropii lub transwersalnej izotropii składowe tensora Eshelby'ego można wyrazić w formie zamkniętej [3,4,8]. Dodatkowo zakłada się, że własności materiałowe inkluzji i osnowy są takie same, w przeciwnym wypadku obszar inkluzji nazywa się niejednorodnością, wtedy koncepcja równoważnych odkształceń własnych może być zastosowana przez powtórne wykorzystanie wyniku Eshelby'ego [4].

Opisywane podejście może być rozszerzone w przypadku pól sprzężonych. Zakłada się, że materiał poddano odkształceniom własnym oraz własnym polom elektrycznym lub magnetycznym wewnątrz inkluzji [2,3,8]. Gdy pola własne w inkluzji są jednorodne, indukowane odkształcenia i pola elektromagnetyczne na zewnątrz inkluzji mogą być wyrażone przez tzw. magnetoelektrospężysty tensor Eshelby'ego [2,8]. W przypadku złożonych równań konstytutywnych wyniki analityczne są bardzo złożone, dlatego składowe tensora Eshelby'ego mogą być obliczane numerycznie za pomocą kwadratur Gaussa [2,9].

W prezentowanym sformułowaniu materiał magnetoelektrospężysty modelowano jako transwersalnie izotropowy oraz liniowo piezoelektryczny i liniowo piezomagnetyczny [2,8].

Zgodnie z przedstawionymi założeniami można stosować podejście Mori-Tanaki [4]. Metoda Mori-Tanaki to jedna z metod mikromechaniki określania tensora koncentracji odkształceń. Inkluzja zanurzona w nieograniczonej osnowie jest tutaj poddana jednorodnym

$$E_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3, \\ e_{ijn}, & J = 1, 2, 3, M = 4, \\ q_{ijn}, & J = 1, 2, 3, M = 5, \\ e_{imn}, & J = 4, M = 1, 2, 3 \\ -\kappa_{in}, & J = 4, M = 4, \\ -a_{in}, & J = 4, M = 5, \\ q_{imn}, & J = 5, M = 1, 2, 3, \\ -a_{in}, & J = 5, M = 4, \\ -\mu_{in}, & J = 5, M = 5, \end{cases} \quad (5)$$

W równaniach (2) – (5) zastosowano uogólnioną notację wskaźnikową, gdzie wskaźniki wyrażane dużymi literami przebiegają zbiór 1-5, a oznaczone małymi literami 1-3. Obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina.

Dla materiałów niejednorodnych efektywne moduły magnetoelktrosprężyste E_{iJMn}^* można zdefiniować, wykorzystując koncepcję reprezentatywnych elementów objętościowych [2,4,8], co wyraża założenie o statystycznej jednorodności:

$$RVE : \langle \Sigma_{iJ} \rangle = E_{iJMn}^* \langle Z_{Mn} \rangle, \quad (6)$$

gdzie $\langle \cdot \rangle = 1/|\Omega| \int_V (\cdot) d\Omega$ oznacza wielkość uśrednioną po obszarze reprezentatywnego elementu objętościowego Ω . Wyznaczanie efektywnych (zastępczych) własności fizycznych materiałów niejednorodnych stanowi ważne teoretycznie i praktycznie zadanie mikromechaniki. W niniejszej pracy wykorzystano koncepcję Mori-Tanaki [4] do wyznaczenia własności zastępczych materiałów magnetoelktrosprężystych zawierających pustki.

3. PROBLEM INKLUZJI MAGNETOELEKTROSPRĘŻYSTEJ

Zakładając istnienie inkluzji o danym kształcie w nieograniczonym ośrodku magnetoelktrosprężystym o własnościach opisanych modułem E_{iJAb}^0 , poddanej działaniu uogólnionych własnych pól odkształceń Z_{Ab}^* , można uogólnione pole odkształceń Z_{Mn} wyrazić jako [4]:

$$Z_{Mn}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} E_{iJAb}^0 Z_{Ab}^*(\mathbf{x}') G_{MJ,in}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}'), \quad (7)$$

gdzie G_{MJ} to rozwiązanie fundamentalne dla operatora różniczkowego magnetoelktrosprężystości a Ω oznacza obszar inkluzji [2,8]. Rozwiązanie takie można uzyskać, stosując uogólniony formalizm Stroha [1].

Gdy inkluzja jest elipsoidalna, a pola własne są jednorodne, można zapisać rezultat teorii Eshelby'ego, mówiącej o tym, że pola magnetoelktrosprężyste wewnątrz inkluzji są również jednorodne [4]:

$$Z_{Mn} = S_{MnAb} Z_{Ab}^*, \quad (8)$$

gdzie tzw. magnetoelktrosprężysty tensor Eshelby'ego S_{MnAb} jest dany zależnością [2,8]:

$$S_{MnAb} = - \int_{\Omega} E_{iJAb}^0 G_{MJ,in}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') . \quad (9)$$

Podstawowe relacje symetrii dla tego tensora w przypadku materiału transwersalnie izotropowego wyrażają równania (10) [8]:

$$S_{MnAb} = \begin{cases} S_{mnab} = S_{nmab} = S_{nmba} = S_{mnba}, M, A \leq 3 \\ S_{mn4b} = S_{nm4b}, M \leq 3, A = 4 \\ S_{mn5b} = S_{nm5b}, M \leq 3, A = 5 \\ S_{4nab} = S_{4nba}, M = 4, A \leq 3 \\ S_{5nab} = S_{5nba}, M = 5, A \leq 3 \end{cases} . \quad (10)$$

W pracach [2,8] wykazano, że tensor Eshelby'ego można wyrazić przez całki powierzchniowe po sferze jednostkowej:

$$S_{MnAb} = \frac{E_{iJAb}^0}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [J_{mJin}(\mathbf{z}) + J_{nJim}(\mathbf{z})] d\theta d\xi_3, M = 1, 2, 3 \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J_{4Jin}(\mathbf{z}) d\theta d\xi_3, M = 4 \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J_{5Jin}(\mathbf{z}) d\theta d\xi_3, M = 5 \end{cases} , \quad (11)$$

gdzie pozostałe współrzędne sferyczne są dane przez:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{1 - \xi_3^2} \cos \theta \\ \xi_2 &= \sqrt{1 - \xi_3^2} \sin \theta \end{aligned} \quad (12)$$

A tensor J_{MJin} jest dany przez:

$$J_{MJin} = z_i z_n K_{MJ}^{-1} . \quad (13)$$

Odwracany w równaniu (13) tensor K_{MJ} można przedstawić jako:

$$K_{JR} = z_i z_n E_{iJRn}^0 , \quad (14)$$

gdzie $z_i = \xi_i / a_i$ i a_i oznacza długości półosi elipsoidalnej inkluzji; w równaniu definiującym z_i nie stosuje się konwencji sumacyjnej Einsteina.

Można uzyskać wyniki analityczne wg równania (9) lub (11) dla szczególnych typów kształtów inkluzji, ale są one bardzo złożone w przypadku występowania pól sprzężonych [3,8]. W niniejszej pracy zastosowano numeryczne obliczanie całek występujących w równaniu (11) z wykorzystaniem kwadratur Gaussa. Wtedy można napisać przybliżenie (11) jako [2]:

$$S_{MnAb} = \frac{E^0_{iJAb}}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^U \sum_{q=1}^V [J_{mJin}(\mathbf{z}^{pq}) + J_{nJim}(\mathbf{z}^{pq})] W^{pq}, M = 1, 2, 3 \\ \sum_{p=1}^U \sum_{q=1}^V J_{4Jin}(\mathbf{z}^{pq}) W^{pq}, M = 4 \\ \sum_{p=1}^U \sum_{q=1}^V J_{5Jin}(\mathbf{z}^{pq}) W^{pq}, M = 5 \end{array} \right. , \quad (15)$$

gdzie U, V oznaczają liczby punktów Gaussa, a $W^{pq} = W^p_\xi W^q_\theta$ to wagi punktów Gaussa. Należy również przeprowadzić transformację liniową na przedział $[-1; 1]$ dla współrzędnej θ .

Zakłada się że własności materiałowe inkluzji i osnowy są takie same, w przeciwnym wypadku obszar inkluzji nazywa się niejednorodnością, wtedy koncepcja równoważnych odkształceń własnych może być zastosowana przez powtórne wykorzystanie wyniku Eshelby'ego [4].

Znajomość tensora Eshelby'ego umożliwia wyznaczenie zastępczych modułów magnetoelktrospężystych dla materiału niejednorodnego za pomocą metody Mori-Tanaki, co zostało zaproponowane w niniejszej pracy.

4. EFEKTYWNE MODUŁY MAGNETOELEKTROSPRĘŻYSTE

Jeśli dana jest osnowa o własnościach wyrażonych tensorem modułów magnetoelktrospężystych \mathbf{E}^0 zawierająca elipsoidalne niejednorodności o stężeniu objętościowym f i własnościach opisanych tensorem \mathbf{E}^1 , to zgodnie z teorią Mori-Tanaki zastępczy moduł magnetoelktrospężysty dany jest wyrażeniem [4]:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^0 + f(\mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^0) : \mathbf{A}_1^{MT} . \quad (16)$$

W równaniu (16) zastosowano notację absolutną, a tensor koncentracji odkształceń Mori-Tanaki \mathbf{A}_1^{MT} dany jest wyrażeniem [4,8,9]:

$$\mathbf{A}_1^{MT} = \left[\mathbf{1} + f \mathbf{S}_0 : (\mathbf{E}^0)^{-1} : (\mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^0) \right]^{-1} , \quad (17)$$

gdzie \mathbf{S}_0 to tensor Eshelby'ego.

Po wykonaniu pewnych przekształceń i zastosowaniu notacji wskaźnikowej można wyrazić zastępczy tensor modułów magnetoelktrospężystych również jako [2,8]:

$$E^*_{iJMn} = E^0_{iJMn} + f E^0_{iJAb} V^{-1}_{AbqR} (E^1_{qRMn} - E^0_{qRMn}) , \quad (18)$$

gdzie:

$$V_{iJAb} = (1 - f) (E^1_{iJMn} - E^0_{iJMn}) S_{MnAb} + E^0_{iJAb} . \quad (19)$$

Odwracanie tensora IV rzędu V_{iJAb} wykonano, stosując uogólnioną notację Voigta i odwzorowanie proste i odwrotne na reprezentacją macierzową, na której wykonano operację wyznaczenia tensora odwrotnego [8].

Z równań (18) i (19) wynika, że znajomość własności materiału osnowy i niejednorodności (wraz ze ich stężeniem) oraz tensora Eshelby'ego wyznacza poszukiwane własności zastępcze ośrodka. W niniejszej pracy rozważano jako niejednorodności pustki, które są traktowane

jako elipsoidalne inkluzje o zerowych wartościach modułów sprężystości i niezerowych własnościach elektromagnetycznych opisanych stałymi przenikalności.

5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Rozważano materiał magnetoelektrospężysty osnowy o własnościach podanych w tab. 1 [7]. Własności pustek przyjęto jak dla próżni.

Tabela 1. Własności fizyczne osnowy

C_{11} [GPa]	C_{12} [GPa]	C_{13} [GPa]	C_{33} [GPa]	C_{44} [GPa]	a_{11} [Ns/VC]
286.0	173.0	170.0	269.5	45.3	$0.005 \cdot 10^{-9}$
e_{15} [C/m ²]	e_{31} [C/m ²]	e_{33} [C/m ²]	κ_{11} [nF/m]	κ_{33} [nF/m]	a_{33} [Ns/VC]
11.6	-4.4	18.6	0.080	0.093	$0.003 \cdot 10^{-9}$
q_{15} [N/Am]	q_{31} [N/Am]	q_{33} [N/Am]	μ_{11} [μH/m]	μ_{33} [μH/m]	
550.0	580.3	699.7	-590	157	

W celu sprawdzenia poprawności rozwiązania porównano wybrane wartości składowych Eshelby'ego obliczonych numerycznie z wynikami obliczeń analitycznych [8]. Zastosowano kwadratury z 64 punktami Gaussa dla każdej współrzędnej.

Wyniki obliczeń dla wtrącenia cylindrycznego o półosiach równych $a_1 = a_2 = 1; a_3 = 10^6$ prezentuje tab. 2.

Tabela 2. Wyniki obliczeń dla wtrącenia cylindrycznego

	S_{1111}	S_{1122}	S_{1133}	$2S_{2323},$ $S_{4141},$ S_{5151}	S_{1212}	S_{1143}	S_{1153}
Numerycznie	0.70061	0.10184	0.29799	0.50000	0.59878	-0.76923	0.10145
Analitycznie	0.70061	0.10184	0.29808	0.50000	0.59878	-0.76923	0.10145

Z wyników obliczeń można zauważyć, że zastosowana metoda całkowania numerycznego daje dokładne wyniki.

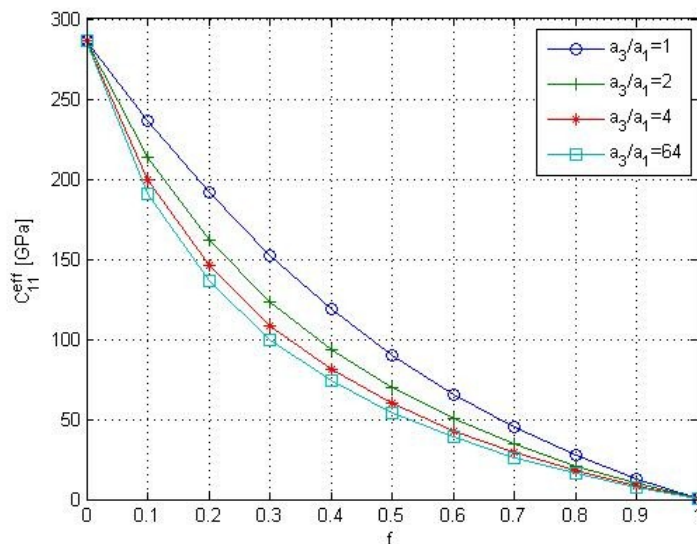
Wyniki obliczeń dla wtrącenia w postaci cienkiego dysku o półosiach równych $a_1 = a_2 = 1; a_3 = 10^{-6}$ prezentuje tab. 3.

Tabela 3. Wyniki obliczeń dla wtrącenia w postaci cienkiego dysku

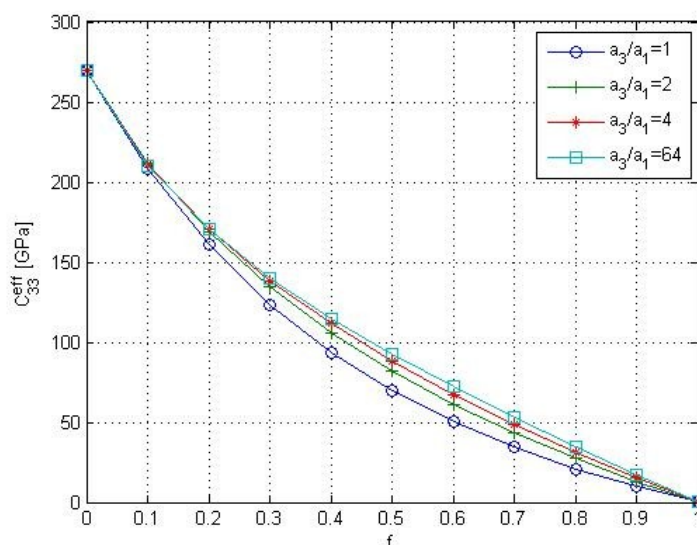
	S_{3311}	$2S_{2323},$ $S_{3333},$ $S_{4343},$ S_{5353}	S_{2342}	S_{2352}	S_{4311}	S_{5311}
Numerycznie	-0.17705	1.00000	0.25607	0.12141	0.11877	-0.44860
Analitycznie	-0.17706	1.00000	0.25607	0.12141	0.11910	-0.44855

Również z wyników obliczeń prezentowanych w tab. 3 widać, że zastosowana metoda całkowania numerycznego daje dokładne wyniki.

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń własności zastępczych dla wybranych stałych fizycznych oraz różnych kształtów pustek wyrażonych stosunkiem a_3/a_1 . Przyjęto dodatkowo, że $a_1 = a_2 = 1$.



Rys. 1. Efektywna stała sprężystości C_{11}^{eff}

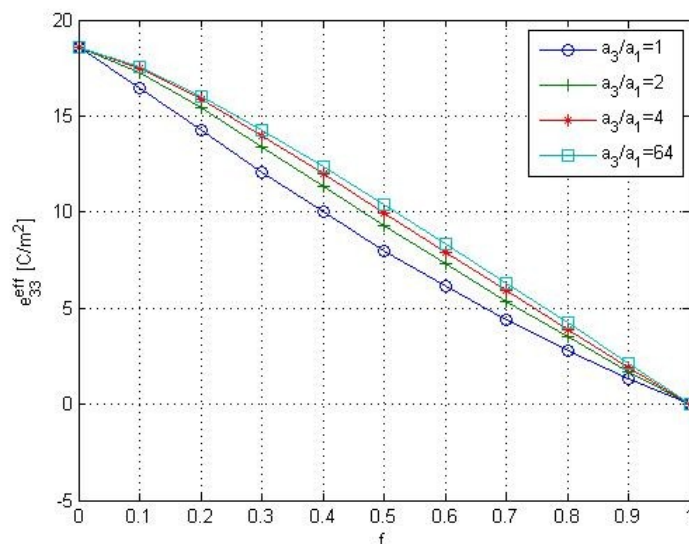


Rys. 2. Efektywna stała sprężystości C_{33}^{eff}

Z rys. 1 można zauważyć, że wraz ze wzrostem stosunku długości półosi a_3/a_1 , przy ustalonym stężeniu pustek maleją wartości stałej sprężystości C_{11}^{eff} , natomiast rosną wartości stałej C_{33}^{eff} wg rys. 2. Oznacza to wzrost sztywności w kierunku polaryzacji przy występowaniu pustek o wydłużonej osi w kierunku polaryzacji w stosunku do pustek

sferycznych, ze względu na zwiększenie jednorodności uogólnionych pól naprężeń w osnowie, przy wzroście stosunku a_3/a_1 .

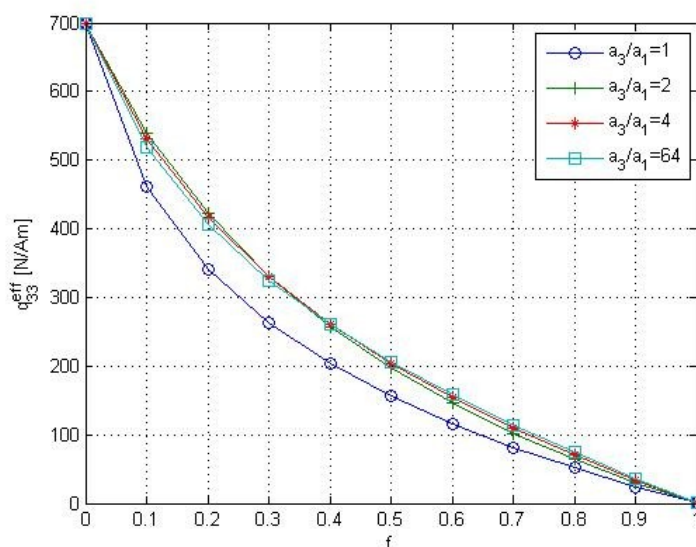
Na rys. 3 przedstawiono przebieg wartości efektywnego modułu piezoelektryczności w kierunku polaryzacji e_{33}^{eff} .



Rys. 3. Efektywny moduł piezoelektryczności e_{33}^{eff}

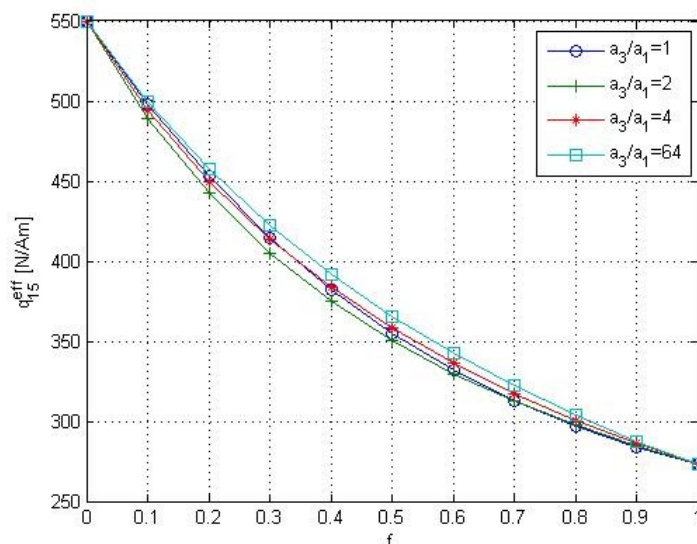
Podobnie jak w przypadku stałej C_{33}^{eff} można zaobserwować wzrost wartości modułu zastępczego, przy zwiększaniu stosunku a_3/a_1 , w kierunku polaryzacji, przy czym przebieg ma charakter niemal liniowy.

Dla stałej q_{33}^{eff} otrzymano wykres pokazany na rys. 4.



Rys. 4. Efektywny moduł piezomagnetyczności q_{33}^{eff}

Można tutaj zaobserwować podobny przebieg jak dla krzywej dla C_{33}^{eff} , z tym że kształt pustki nie wpływa tak znacząco na wartości stałych zastępczych, z wyłączeniem pustek sferycznych, dla których wartości zastępczego modułu q_{33}^{eff} są wyraźnie niższe niż w przypadku wtrąceń o osi wydłużonej w kierunku polaryzacji.



Rys. 5. Efektywny moduł piezomagnetyczności q_{15}^{eff}

Na rys. 5 przedstawiono przebieg zastępczej stałej piezomagnetyczności q_{15}^{eff} w funkcji stężenia pustek. Dla tej stałej fizycznej można zaobserwować stosunkowo niewielki wpływ kształtu pustki, wyrażonego stosunkiem a_3/a_1 , na uzyskane wartości modułów efektywnych.

6. PODSUMOWANIE

Z przeprowadzonych badań można wysnuć wniosek, że metoda kubatur Gaussa daje dobre przybliżenie numeryczne wartości składowych tensora Eshelby'ego. Zastosowana metoda Mori-Tanaki określania wielkości zastępczych może stanowić punkt wyjścia do stosowania innych, bardziej złożonych i dokładnych metod mikromechaniki, np. metody opartej na estymatorze wewnątrznie zgodnym (ang. *self-consistent method*) [4] lub uogólnionym schemacie Mori-Tanaki [2,4]. Z równań konstytutywnych wynika, że szczególnymi przypadkami materiałów magnetoelktrosprężystych są materiały: piezoelektryczne, anizotropowe dielektryki oraz anizotropowe materiały sprężyste, a opracowane metody i programy obliczeń można wykorzystać również w analizie tego typu ośrodków. W niniejszej pracy rozważano materiały zawierające pustki, traktowane jako niejednorodności o specjalnych własnościach fizycznych, natomiast należy mieć na uwadze, że metoda Mori-Tanaki służy do określania własności zastępczych kompozytów, dlatego opracowane metody i programy mogą służyć jako narzędzia wspomagające proces projektowania kompozytów zawierających takie materiały transdukcyjne jak piezoelektryki i piezomagnetyki.

LITERATURA

1. Fedeliński P., Górski R., Dziatkiewicz G., Ptaszny J.: Computer modeling and analysis of effective properties of composites. "Comp. Methods. Mater. Sci.", 2011, 11, 1, p. 3-8.
2. Li J.Y.: Magnetoelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials. "Int. J. Eng. Sci." 2000, 38, p. 1993-2011.
3. Mikata Y.: Determination of piezoelectric Eshelby tensor in transversely isotropic piezoelectric solids. "Int. J. Eng. Sci." 2000, 38, p. 605-641.
4. Nemat-Nasser S., Hori M.: Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials. Amsterdam: Elsevier, 1999.
5. Qin Q.-H.: Micromechanics-BE solution for properties of piezoelectric materials with defects. "Eng. Anal. Bound. Elem." 2004, 28, p. 809-814.
6. Sze K.Y., Yang X.-M., Fan H.: Electric assumptions for piezoelectric laminate analysis. "Int. J. Solid. Struct." 2004, 41, p. 2363-2382.
7. Topolov V., Bowen Ch. R.: Electromechanical properties in composites based on ferroelectrics. London: Springer, 2009.
8. Wu T.-L., Huang J.H.: Closed-form solutions for the magnetoelastic coupling coefficients in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. "Int. J. Solid. Struct." 1999, 37, p. 2981-3009.
9. Wu T.-L.: Micromechanics determination of electroelastic properties of piezoelectric materials containing voids. "Mat. Sci. Eng. A" 2000, 280, p. 320-327.

ANALYSIS OF EFFECTIVE PROPERTIES OF MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC MATERIALS WITH MICROVOIDS

Summary. In the present work the extended Eshelby's model for coupled mechanical and electromagnetic fields is considered. The magnetoelastic Eshelby's tensor is determined and the components of the Eshelby's tensor are evaluated numerically using the Gauss quadrature method. The transversal isotropic, linear piezoelectric and linear piezomagnetic model of the material is considered. Next, the presented model is further extended to predict the effective magneto-electro-elastic moduli of the magneto-electro-elastic solids that contain voids using the Mori-Tanaka approach. Voids are treated as ellipsoidal inclusions with zero elastic moduli.

Praca została wykonana w ramach projektu N 501 069038 finansowanego przez MNiSW w latach 2010-2012.