

MODELOWANIE WPŁYWU TŁUMIENIA WEWNĘTRZNEGO NA CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE CERAMICZNYCH PRZETWORNIKÓW PZT

Marek Płaczek

Instytut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania ,
Wydział Mechaniczny Technologiczny, Politechnika Śląska
e-mail: marek.placzek@polsl.pl

Streszczenie

W pracy zaproponowano proces modelowania pojedynczej płytki przetwornika piezoelektrycznego typu PZT z podkreśleniem wpływu tłumienia wewnętrznego na charakterystyki dynamiczne przetwornika. Stosując równania konstytutywne tworzyw piezoelektrycznych oraz równanie ruchu drgającej wzdłużnie płytki piezoelektrycznej o ciągłym rozkładzie masy, otrzymano macierz charakterystyk badanego układu. Poprzez szukane charakterystyki rozumie się zarówno zależności zachodzące pomiędzy parametrami mechanicznymi (siłami i przemieszczeniami), jak i pomiędzy wielkościami mechanicznymi oraz elektrycznymi (napięcie i natężenie przepływu prądu elektrycznego) [8,11,12]. Przyjmując parametry geometryczne oraz tworzywowe, a także uwzględniając własności reologiczne badanego przetwornika, wyznaczono przebieg jego podatności dynamicznej. Modelując badany układ, zastosowano model reologiczny Kelvina-Voigta [5,10]. Otrzymany przebieg podatności dynamicznej porównano z charakterystyką przetwornika opisanego modelem matematycznym, w którym pominięto tłumienie wewnętrzne tworzywa.

MODELLING OF STRUCTURAL DAMPING INFLUENCE ON CHARACTERISTICS OF PZT TRANSDUCERS

Summary

Paper presents a process of single piezoelectric transducer plate modelling including influence of structural damping on its characteristics. Constitutive equations of piezoelectric material and equation of motion of the plate's longitudinal vibration were used to obtain a matrix of characteristics. Both characteristics that describe relations between mechanical parameters (forces and displacements) and between mechanical and electrical parameters (electric voltage and current) were considered [8,11,12]. Geometrical and material parameters of the considered plate were assumed and its rheological properties were being taken into consideration in order to draw the plate's dynamic flexibility. A Kelvin-Voigt model of material was used in the system's mathematical model [5,10]. Obtained results were juxtaposed with dynamic flexibility of a PZT plate modelled without structural damping.

1. WSTĘP

Komponenty o określonych charakterystykach dynamicznych są nieodłącznym elementem nowoczesnych środków technicznych, od których wymaga się między innymi coraz większej trwałości, niezawodności, precyzji działania czy też mniejszej

energochłonności. Należy również podkreślić dążenia konstruktorów do miniaturyzacji projektowanych układów. Poszukując układów spełniających te wymagania, coraz częściej zwracają się oni w kierunku aplikacji przetworników piezoelektrycznych, które ze

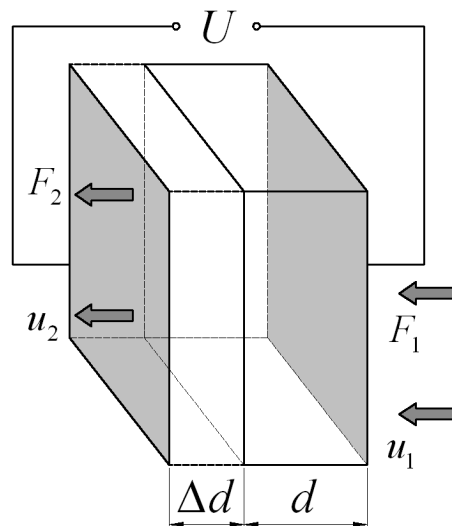
względem na charakter zjawiska piezoelektrycznego mogą być stosowane zarówno w roli aktorów, jak i sensorów. W obu przypadkach, stosując materiały piezoelektryczne, możliwa jest prosta realizacja zamiany energii mechanicznej w elektryczną, czy też elektrycznej w mechaniczną. Zaletami przetworników piezoelektrycznych jest również szerokopasmowość przenoszenia sygnałów oraz duża sprawność zamiany energii. Nie bez znaczenia jest wysoka szybkość i precyzja działania, a także możliwość zaprojektowania i wykonania elementów piezoelektrycznych o dowolnym kształcie, odpowiednim do danej aplikacji. Ponadto mogą być one zarówno naklejane na powierzchni innych elementów i stanowić ich integralną część, jak ma to przykładowo miejsce w elementach laminowanych [3-6].

W celu prawidłowego zaprojektowania układu zawierającego przetworniki piezoelektryczne konieczny jest właściwy dobór zarówno rodzaju tworzywa o właściwościach piezoelektrycznych, jak i wymiarów przetworników. Dzięki doborowi tych parametrów możliwe jest otrzymanie żądanych charakterystyk dynamicznych przetwornika, a tym samym zapewnienie jego prawidłowego działania i maksymalnej efektywności systemu. Warunkiem właściwego doboru parametrów układu jest jego precyzyjny opis w postaci modelu matematycznego już w fazie projektowania danego środka technicznego.

Prezentowana w pracy metoda analizy przetworników piezoelektrycznych jest propozycją algorytmu matematycznego. Jego zastosowanie umożliwia wyznaczenie charakterystyk przetworników piezoelektrycznych z uwzględnieniem wszystkich parametrów geometrycznych i tworzywowych, w tym także tłumienia wewnętrznego tworzywa, z którego wykonano przetwornik. Otrzymane charakterystyki mogą być z powodzeniem stosowane do doboru przetworników przy projektowaniu środków technicznych, w których mają być one stosowane zarówno w roli aktorów, jak i sensorów. W pracy ograniczono rozważania do analizy pojedynczej, swobodnej płytki piezoelektrycznej typu PZT i przedstawiono podstawowe założenia i zależności matematyczne. Zaprezentowana metoda może być jednak z powodzeniem stosowana do analizy płytek piezoelektrycznych o dowolnym sposobie utwierdzenia oraz rozwinięta w celu analizy stosów przetworników piezoelektrycznych [8].

2. PRZYJĘTY MODEL MATEMATYCZNY POJEDYNCZEJ PŁYTKI PZT WYZNACZENIE PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ

Rozpatrywaną, swobodną płytkę piezoelektryczną PZT przedstawiono na rys. 1. Założono, że jest ona obciążona siłami F_1 oraz F_2 , jak na rysunku. W wyniku działania sił następuje odkształcenie przetwornika piezoelektrycznego i, zgodnie z prostym zjawiskiem piezoelektrycznym, generowanie ładunku elektrycznego – napięcia prądu elektrycznego U na elektrodach przetwornika.



Rys.1. Rozpatrywany przetwornik piezoelektryczny PZT

Symbolami a i b oznaczono wymiary przekroju poprzecznego płytki piezoelektrycznej, symbolem d jej grubość, zaś Δd zmianę grubości płytki pod wpływem działania sił zewnętrznych, natomiast symbolami i oraz U odpowiednio natężenie i napięcie prądu elektrycznego generowanego w wyniku odkształcenia przetwornika.

Warunki brzegowe nałożone na analizowany, swobodny przetwornik piezoelektryczny można zapisać w postaci układu równań:

$$\begin{cases} u = u_1 & x = x_1 \\ u = u_2 & x = x_2 \\ F = -F_1 & x = x_1 \\ F = -F_2 & x = x_2 \end{cases} \text{gdy} \quad (1)$$

Materiały o właściwościach piezoelektrycznych opisywane są za pomocą pary równań konstytutywnych, w których ujęto relacje pomiędzy mechanicznymi i elektrycznymi własnościami

przetworników. Równania te można zapisać w postaci [8,10]:

$$\begin{cases} T = c_{11}^E \frac{\partial u}{\partial x} - eE \\ D = \varepsilon^S E + e \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie symbolem c_{11}^E oznaczono moduł sprężystości wzdłużnej przetwornika, zaś ε^S przenikalność dielektryczną. Indeksy górne E oraz S oznaczają, że wielkości te wyznaczono przy stałej/zerowej wartości pola elektrycznego przyłożonego do zacisków przetwornika oraz przy stałym/zerowym jego odkształceniu. Symbolami T , E oraz D oznaczono odpowiednio naprężenie, natężenie pola elektrycznego oraz przesunięcie elektryczne. Sztywność piezoelektryczna definiowana jest jako iloczyn stałej piezoelektrycznej przetwornika oraz jego modułu sprężystości wzdłużnej i może być zapisana w postaci:

$$e = d_{11} \cdot c_{11}^E. \quad (3)$$

Przekształcając drugie z równań konstytutywnych oraz podstawiając wyznaczoną wartość natężenia pola elektrycznego w równaniu pierwszym, otrzymano zależność naprężenia przetwornika w postaci:

$$T = \bar{c} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{e}{\varepsilon^S} D, \quad (4)$$

gdzie:

$$\bar{c} = c^E + \frac{e^2}{\varepsilon^S}, \quad (5)$$

oznacza usztywnioną stałą elastyczną przetwornika. Równanie ruchu rozważanej płytki można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

gdzie symbolem V oznaczono prędkość rozchodzenia się fali, równą:

$$V = \sqrt{\frac{\bar{c}}{\rho}}. \quad (7)$$

Uwzględniając równanie ruchu rozważanej płytki piezoelektrycznej (6) oraz warunki brzegowe (1), po przekształceniach otrzymano układ równań, którym opisano zależności pomiędzy parametrami mechanicznymi oraz elektrycznymi badanej płytki. Układ ten zapisano w postaci macierzowej [7]:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ U \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_p \rho V \omega}{\text{tg}[kd]} & \frac{h}{\omega} & -\frac{A_p \rho V \omega}{j \sin[kd]} \\ \frac{h}{\omega} & \frac{1}{\omega C_0} & -\frac{h}{\omega} \\ \frac{A_p \rho V \omega}{\sin[kd]} & \frac{h}{\omega} & -\frac{A_p \rho V \omega}{\text{tg}[kd]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

gdzie:

$$k = \frac{\omega}{V}, \quad (9)$$

$$h = \frac{e}{\varepsilon^S}. \quad (10)$$

Symbolem ω oznaczono częstość sił wymuszających, ρ gęstość płytki piezoelektrycznej, zaś C_0 pojemność elektryczną przetwornika.

Szukana macierz charakterystyk analizowanej płytki piezoelektrycznej może być zapisana jako:

$$Y = \frac{1}{\det Z} \left[(Z^M)^D \right]^T, \quad (11)$$

gdzie:

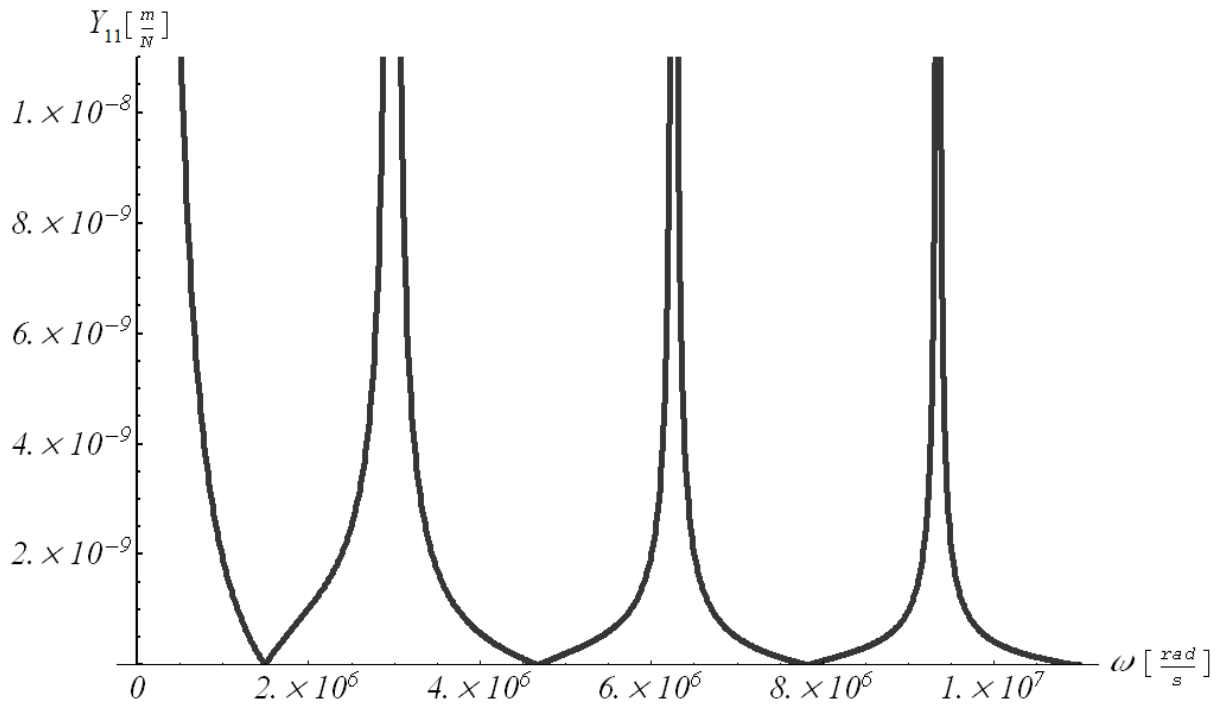
$$Z = \begin{bmatrix} \frac{A_p \rho V \omega}{\text{tg}[kd]} & \frac{h}{\omega} & -\frac{A_p \rho V \omega}{j \sin[kd]} \\ \frac{h}{\omega} & \frac{1}{\omega C_c} & -\frac{h}{\omega} \\ \frac{A_p \rho V \omega}{\sin[kd]} & \frac{h}{\omega} & -\frac{A_p \rho V \omega}{\text{tg}[kd]} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Przyjmując parametry geometryczne oraz tworzywowe przetwornika piezoelektrycznego zestawione w tablicy 1, wyznaczono przebiegi szukanych charakterystyk.

Tabela 1. Parametry przetwornika piezoelektrycznego PZT

$a = 0,004[m]$	$c^E = 5,9 \cdot 10^{10} [Pa]$
$b = 0,0035[m]$	$d_{11} = -240 \cdot 10^{-12} \left[\frac{m}{V} \right]$
$d = 0,003[m]$	$\varepsilon^S = 2900 \cdot \varepsilon_0 \left[\frac{F}{m} \right]$
$\rho = 7450 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	

Na rys. 2 przedstawiono przebieg szukanej podatności dynamicznej Y_{11} . Jest to zależność odkształcenia płytki piezoelektrycznej od wartości i częstotliwości zewnętrznych sił obciążających przetwornik.



Rys.2. Podatność dynamiczna swobodnej płytki piezoelektrycznej PZT

Na rys. 2 przedstawiono przebieg modułu podatności dynamicznej rozpatrywanej płytki swobodnej PZT. Nieograniczone wartości modułu podatności dynamicznej w zakresie stref rezonansowych są wynikiem nieuwzględnienia tłumienia w przeprowadzonej analizie układu.

3. PODATNOŚĆ DYNAMICZNA PŁYTKI PZT Z UWZGLĘDNIENIEM TŁUMIENIA WEWNĘTRZNEGO – MODEL KELVINA-VOIGTA

W celu uszczegółowienia przebiegu wyznaczonej podatności dynamicznej analizowanej płytki i umożliwienia jego porównania z przebiegami otrzymanymi na drodze badań eksperymentalnych, które zamierza się przeprowadzić, w modelu matematycznym przetwornika uwzględniono jego tłumienie wewnętrzne. Własności reologiczne tworzywa przetwornika uwzględniono, stosując model reologiczny Kelvina-Voigta. Przeprowadzono analogiczne, jak w przypadku poprzednim, postępowanie, jednak moduł sprężystości wzdłużnej płytki zastąpiono zależnością:

$$c^{E*}(\omega) = c^E + j\eta\eta\omega \quad (13)$$

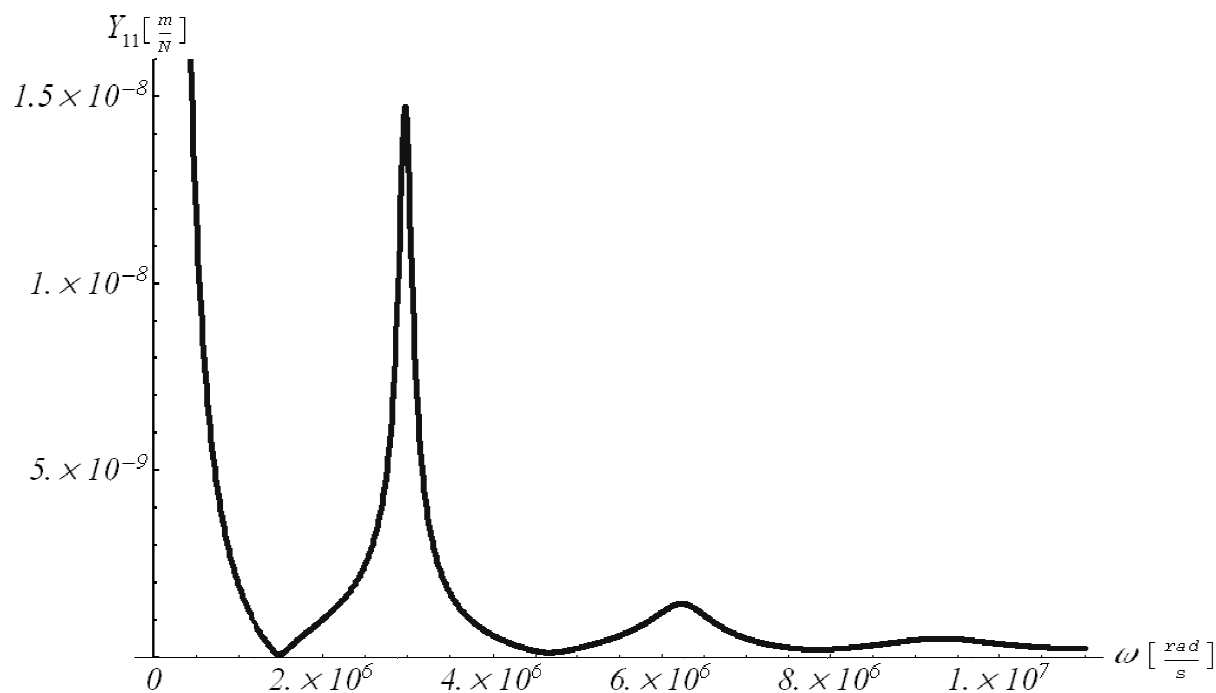
gdzie symbolem η oznaczono współczynnik tłumienia wewnętrznego, j oznacza jednostkę urojoną.

Otrzymany przebieg podatności dynamicznej analizowanej płytki przedstawiono na rys. 3. Wartość współczynnika tłumienia wewnętrznego tworzywa przetwornika piezoelektrycznego przyjęto jako:

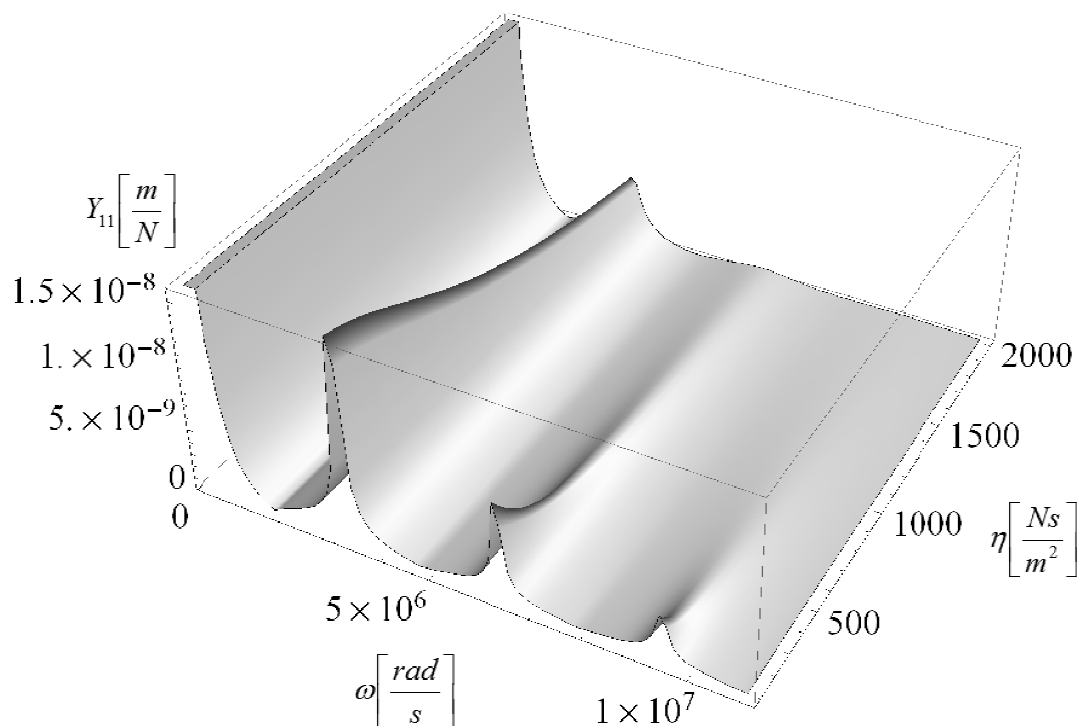
$$\eta = 1000 \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \right]. \quad (14)$$

Na rys. 4 przedstawiono natomiast zależność przebiegu wyznaczonej podatności dynamicznej badanej płytki piezoelektrycznej od przyjętej wartości współczynnika tłumienia wewnętrznego płytki w zakresie od 100 do 2000 $[\text{Ns}\cdot\text{m}^{-2}]$. Na wykresie zaobserwować można spadek wartości modułu wyznaczonej podatności dynamicznej wraz ze wzrostem przyjętego współczynnika tłumienia wewnętrznego.

Rzeczywista wartość współczynnika tłumienia wewnętrznego analizowanej płytki piezoelektrycznej PZT wyznaczona zostanie na drodze badań eksperymentalnych i przedstawiona w przyszłych opracowaniach.



Rys.3. Podatność dynamiczna swobodnej płytki piezoelektrycznej PZT z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego



Rys.4. Przebieg podatności dynamicznej swobodnej płytki piezoelektrycznej PZT ze względu na wartość współczynnika tłumienia wewnętrznego

4. PODSUMOWANIE

Ze względu na dużą złożoność zjawisk zachodzących w przetwornikach piezoelektrycznych projektowanie środków technicznych je zawierających jest zadaniem trudnym i wymagającym prawidłowego

opisu zachodzących zjawisk w postaci modelu matematycznego stosowanych elementów piezoelektrycznych. Prawidłowy dobór tych elementów, z uwzględnieniem ich charakterystyk, jest bowiem warunkiem prawidłowego i efektywnego działania projektowanego systemu.

Pracę zrealizowano jako kontynuację długoletnich badań prowadzonych w ośrodku gliwickim, których celem jest realizacja zadań analizy i syntezy prostych i złożonych układów mechanicznych oraz mechatronicznych [1-9,11-13]. Stosując prezentowany algorytm matematyczny, możliwe jest wyznaczenie charakterystyk badanych układów, w tym podatności dynamicznej, z uwzględnieniem wszystkich parametrów geometrycznych i tworzywowych badanego elementu, a także tłumienia wewnętrznego.

W ramach dalszych prac rozwinię się prezentowany aparat matematyczny poprzez

zastosowanie innych modeli reologicznych badanych elementów i zastosuje się go w celu analizy stosów płytek piezoelektrycznych. Otrzymane rezultaty zweryfikuje się, przeprowadzając badania eksperymentalne.

Pracę zrealizowano w ramach projektu nr N501 064440, finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego – Narodowe Centrum Nauki w latach 2011-2013.

Literatura

1. Białas K.: Passive and active elements in reduction of vibrations of torsional systems. "Solid State Phenomena" Trans Tech Publications, 2010, Vol. 164, p. 260-264.
2. Białas K.: Mechanical and electrical elements in reduction of vibrations. "Journal of Vibroengineering" 2012, Vol. 14, Iss. 1, p. 123-128.
3. Buchacz A., Płaczek M.: Development of mathematical model of a mechatronic system. "Solid State Phenomena" Trans Tech Publications, 2010, Vol. 164, p. 319-322 (online at: <http://www.scientific.net>).
4. Buchacz A., Płaczek M.: The approximate Galerkin's method in the vibrating mechatronic system's investigation. In: Proc. of 14th International Conference Modern Technologies, Quality and Innovation ModTech 2010, Romania 2010, p. 147-150.
5. Buchacz A., Płaczek M.: Modelling and investigation of one-dimensional flexural vibrating mechatronic systems with piezoelectric transducers. In: Farzad Ebrahimi (Ed.), "Advances in Piezoelectric Transducers InTech," Rijeka, 2011, p. 27-52.
6. Buchacz A., Płaczek M.: The analysis of a composite beam with piezoelectric actuator based on the approximate method. "Journal of Vibroengineering" 2012, Vol. 14, p. 111-116.
7. Buchacz A., Wróbel A.: Computer-aided analysis of piezoelectric plates. "Solid State Phenomena" Trans Tech Publications, 2010, Vol. 164, p. 239-242.
8. Buchacz A., Wróbel A.: Modelowanie i badanie wpływu zjawiska piezoelektrycznego na charakterystyki układu mechatronicznego. Gliwice: Wyd. Pol. Śl., 2010.
9. Dymarek A., Dzitkowski T.: Modelling and synthesis of discrete-continuous subsystems of machines with damping. "Journal of Materials Processing Technology" 2005, Vol. 164-165, p. 1317-1326.
10. Soluch W.: Wstęp do piezoelektroniki. Warszawa: WKiŁ, 1980.
11. Wróbel A.: Kelvin Voigt's model of single piezoelectric plate. "Journal of Vibroengineering" 2012, Vol. 14, Iss. 2, p. 534-537.
12. Wróbel A.: Model of piezoelectric including material damping. In: Proc. of 16th International Conference ModTech 2012, Romania, p.1061-1064.
13. Zolkiewski, S.: Attenuation-frequency characteristics of beam systems in spatial motion. "Solid State Phenomena" Trans Tech Publications, Switzerland, 2010, Vol. 164, p. 349-354.

Proszę cytować ten artykuł jako:

Płaczek M.: Modelowanie wpływu tłumienia wewnętrznego na charakterystyki dynamiczne ceramicznych przetworników PZT. „Modelowanie Inżynierskie” 2013, nr 46, t. 15, s. 88 – 93.