ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ELEKTRYKA z. 29 Nr kol. 297

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Ogólnej

OBWIEDNIE PRZEBIEGÓW RZECZYWISTYCH, CZĘŚĆ I

Streszczenie. W pracy, w oparciu o znaną definicję praobwiedni przebiegów modulowanych wyprowadzono nowe relacje dla klasy funkcji o dużym znaczeniu w elektrotechnice. Pokazano sposób konstrukcji obwiedni dla przebiegów transformowalnych według Fouriera.

Niech $f(t)$ będzie funkcją rzeczywistą przedstawialną w postaci:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \cos(\omega_n t - \gamma_n) \tag{1}$$

Funkcja taka posiada transformatę Hilberta:

$$H\left\{f(t)\right\} = -\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \sin(\omega_n t - \gamma_n) \tag{2}$$

gdzie:

$$H\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t} \tag{3}$$

(Symbol $\int$ oznacza wartość główną całki w sensie Cauchy'ego). Praobwiednię (sygnał zespolony, funkcję symboliczną) dowolnego przebiegu $f(t)$ transformowalnego według Hilberta definiujemy przy pomocy relacji:

$$\hat{F}(t) = f(t) - j\, H\left\{f(t)\right\} \tag{4}$$

Na podstawie (4) dla funkcji (1), otrzymamy:

$$\hat{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn}\, e^{j(\omega_n t - \gamma_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_{mn}\, e^{j\omega_n t} \tag{5}$$

gdzie:

$$\hat{F}_{mn} = F_{mn}\, e^{-j\gamma_n} \tag{6}$$

Niech ω_o będzie dowolną pulsacją. Wyrażenie (5) możemy napisać w postaci:

$$\hat{F}(t) = e^{j\omega_o t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_{mn}\, e^{j(\omega_n - \omega_o)t} =$$

$$= (F_c + jF_s)e^{j\omega_o t} \tag{7}$$

gdzie:

$$F_c = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \cos(\omega_n t - \omega_o t - \gamma_n)$$

$$F_s = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \sin(\omega_n t - \omega_o t - \gamma_n) \tag{8}$$

Dla dowolnego przebiegu $f(t)$ wielkość:

$$N_f(t) = \pm \left|\hat{F}(t)\right| \tag{9}$$

nazywamy obwiednią przebiegu $f(t)$.

W rozważanym przypadku szczególnym (1) na podstawie (7) otrzymamy:

$$N_f(t) = \pm\sqrt{F_c^2 + F_s^2} \tag{10}$$

Oczywiście, ponieważ praobwiednia (7) jest niezależna od pulsacji ω_o dlatego także obwiednia $N_f(t)$ (9) jest niezależna od ω_o.

Definicja (9) obwiedni przebiegu rzeczywistego $f(t)$ jest uogólnieniem pojęcia obwiedni wprowadzonego do rozważań przy rozpatrywaniu przebiegów modulowanych. Dla przykładu niech:

$$f(t) = (1 + m\cos\omega t)\cos\omega_o t$$

Otrzymamy:

$$f(t) = \cos\omega_o t + \frac{m}{2}\cos(\omega_o - \omega)t + \frac{m}{2}\cos(\omega_o + \omega)t$$

$$\hat{F}(t) = e^{j\omega_o t} + \frac{m}{2}e^{j(\omega_o - \omega)t} + \frac{m}{2}e^{j(\omega_o + \omega)t}$$

$$= e^{j\omega_o t}(1 + m\cos\omega t)$$

Czyli:

$$N_f(t) = \pm(1 + m\cos\omega t)$$

Jeżeli obwiednia jest funkcją okresową o okresie T, tak jak to ma miejsce w powyższym przykładzie, to można obliczyć wartość skuteczną przy pomocy wzoru (por. [1]):

$$F = \sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T \left|\hat{F}(t)\right|^2 dt} \tag{11}$$

W rozpatrywanym przykładzie:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{m^2}{2}}$$

Niech $f(t)$ będzie przebiegiem rzeczywistym, transformowalnym według Fouriera, którego transformata F wynosi $F(\omega)$.
Zachodzi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H\left\{f(t)\right\} e^{-j\omega t}\, dt = j\ s\ g\ n\omega F(\omega) \tag{12}$$

Stąd, transformata Fouriera pracbwiedni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(t) e^{-j\omega t}\, dt = (1 + s\ g\ n\ \omega) F(\omega) \tag{13}$$

Z drugiej strony łatwo wykazać, że:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \hat{F}(t) \tag{14}$$

Mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{F}(t)\right|^2 e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(t)\check{F}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\Omega)\, \check{F}(\Omega - \omega)\, d\Omega$$

(Symbol $\check{F}(\ldots)$ oznacza wielkość sprzężoną z wielkością $\check{F}(\ldots)$.)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1 + \operatorname{sgn}\Omega)F(\Omega)\left[1 + \operatorname{sgn}(\Omega - \omega)\right] F^{*}(\Omega-\omega)d\Omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\omega}^{\infty} F(\Omega)\, F^{*}(\Omega - \omega)d\,\Omega$$

Czyli:

$$F\left\{\left|\hat{f}(t)\right|^{2}\right\} = \frac{2}{\pi}\int_{\omega}^{\infty} F(\Omega)\, F^{*}(\Omega - \omega)d\Omega \qquad (15)$$

LITERATURA

[1] Nowomiejski Z.; Uogólniona metoda symboliczna. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 20/1966.

Przyjęto do druku w październiku 1970 r.

ОГИБАЮЩИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ХОДОВ, ЧАСТЬ I

Р е з ю м е

Опираясь на знакомую дефиницию первичной огибающей модулированных ходов, выведены новые соотношения для класса функции большой значительности в электротехнике. Указан способ конструкции огибающих для ходов способных трансформироваться по Фурмеру.

ENVELOPES OF REAL PROCESSES. PART I

S u m m a r y

Based on the known definition of envelopes of modulated processes there are educed in this work new relations for a class of functions of great importance in electronics. There is presented a way of designing the envelope curves for Fourier transformable processes.