

JADWIGA RUMATOWSKA  
Katedra Podstaw Elektrotechniki  
Politechniki Poznańskiej

### PRZEBIEGI POSIADAJĄCE OBWIEDNIĘ

Streszczenie. W pracy rozważane jest zagadnienie badania dowolnych przebiegów metodą obwiedni. Metodę tę przeanalizowano z punktu widzenia jej przydatności do przebiegów wąskopasmowych z modulacją amplitudy i fazy. Do określenia obwiedni przebiegu wykorzystano pojęcie sygnału analitycznego (funkcji symbolicznej). Zastosowanie metody obwiedni zilustrowano na przykładzie analizy obwodu LC.

#### 1. Uwagi wstępne

Efektywne metody badania przebiegów spotykanych w elektrotechnice zależą od charakteru tych przebiegów. W odniesieniu do przebiegów sinusoidalnych powszechnie stosowaną metodą jest metoda symboliczna [1].

W przypadku przebiegów odkształconych i okresowych stosuje się metody wykorzystujące możliwość rozkładu badanego przebiegu w szereg Fouriera [1].

Wiadomo, że jeżeli przebieg  $x(t)$  spełnia w przedziale  $0 \leq t \leq T$  warunki Dirichleta, to można ten przebieg rozłożyć w szereg Fouriera, czyli przedstawić w postaci sumy przebiegów sinusoidalnych, co zapisuje się

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \quad (1)$$

przy czym

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt \quad (2)$$

Jeżeli  $x(t)$  jest przebiegiem nieokresowym i spełnia warunek bezwzględnej całkowalności

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3)$$

to można go przedstawić za pomocą całki Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

Wyrażenie (4) bardzo często zapisuje się w postaci dwóch następujących przekształceń całkowych

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6)$$

zwanych prostym i odwrotnym przekształceniem Fouriera.

Gdy przebieg  $x(t) = 0$  dla  $t < 0$ , to proste przekształcenie Fouriera (5) przyjmie postać

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7)$$

Inna metoda analizy przebiegów odkształconych, zwana uogólnioną metodą symboliczną przedstawiona w pracy [4] opiera się na pojęciu funkcji symbolicznej (sygnału analitycznego). Funkcję symboliczną określa się za pomocą przekształcenia Hilberta.

W niniejszej pracy wykorzystano funkcję symboliczną do badania dowolnych przebiegów metodą obwiedni.

## 2. Metoda obwiedni

Funkcję

$$\hat{x}(t) = x(t) - jH\{x(t)\} \quad (8)$$

nazywa się funkcją symboliczną (sygnałem analitycznym) stowarzyszoną z funkcją rzeczywistą  $x(t)$  [2][4], przy czym część urojona  $H\{x(t)\}$  oznacza transformatę Hilberta funkcji  $x(t)$ .

Transformata Hilberta funkcji  $x(t)$  jest określona zależnością

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (9)$$

Korzystając z określenia spłotu dwóch funkcji, transformatę Hilberta (9) można zapisać w postaci

$$H\{x(t)\} = -\frac{1}{\pi t} * x(t) \quad (10)$$

Z zależności (10) wynika, że transformatę Hilberta  $H\{x(t)\}$  można traktować jako przebieg na wyjściu czwórnika o odpowiedzi impulsowej

$$g(t) = -\frac{1}{\pi t} \quad \text{dla} \quad -\infty < t < +\infty \quad (11)$$

Charakterystyka częstotliwościowa czwórnika o odpowiedzi impulsowej (11) wyraża się zależnością

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt = j \operatorname{sgn} \omega \quad (12)$$

Powyższy rezultat można także otrzymać wyznaczając widmo transformaty Hilberta  $H\{x(t)\}$ . Mianowicie

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H\{x(t)\} e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{1}{\pi t} * x(t) \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= F \left\{ -\frac{1}{\pi t} \right\} F\{x(t)\} = j \operatorname{sgn} \omega X(\omega) \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie  $X(\omega)$  oznacza widmo przebiegu na wejściu czwórnika o charakterystyce częstotliwościowej  $j \operatorname{sgn} \omega$ .

Korzystając z pojęcia sygnału analitycznego (8) można obwiednię  $A(t)$  przebiegu  $x(t)$  definiować następująco

$$A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2(t) + [H\{x(t)\}]^2} \quad (14)$$

Ponadto spotykamy w literaturze także inne definicje obwiedni [6][7].

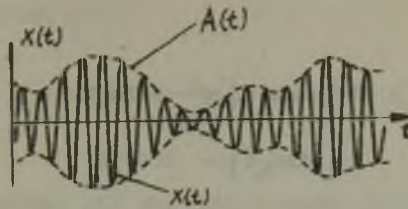
Rozważmy przydatność definicji (14) w odniesieniu do przebiegów o postaci

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (15)$$

gdzie obwiednia (amplituda chwilowa)  $A(t)$  i faza chwilowa  $\varphi(t)$  są funkcjami wolnozmiennymi w porównaniu z funkcją  $\cos \omega_0 t$  (rys. 1).

Przebiegi dające się przedstawić w postaci (15) spotyka się w zagadnieniach z modulacją amplitudy i częstotliwości przebiegu sinusoidalnego. Sygnały tego rodzaju można także zapisać w następującej formie

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \quad (16)$$



Rys. 1

gdzie

$$x_c(t) = A(t) \cos \varphi(t)$$

$$x_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$$

stąd

$$A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \quad (17)$$

Transformata Hilberta przebiegu (16)

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_c(\tau) \cos \omega_0 \tau}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_s(\tau) \sin \omega_0 \tau}{\tau - t} d\tau \quad (18)$$

Rozkładając funkcję  $x_c(\tau)$  i  $x_s(\tau)$  w otoczeniu punktu  $\tau = t$  w szereg Taylora otrzymuje się

$$H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 \tau}{\tau - t} \left[ x_c(\tau) + (\tau - t)x'_c(t) + \frac{1}{2!}(\tau - t)^2 x''_c(t) + \dots \right] d\tau - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau - t} \left[ x_s(\tau) + (\tau - t)x'_s(t) + \frac{1}{2!}(\tau - t)^2 x''_s(t) + \dots \right] d\tau \quad (19)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} H\{\cos\omega_0 t\} &= -\sin\omega_0 t \\ H\{\sin\omega_0 t\} &= \cos\omega_0 t \end{aligned} \quad (20)$$

zatem wyrażenie (19) można zapisać następująco

$$\begin{aligned} H\{x(t)\} &= -x_c(t)\sin\omega_0 t - x_s(t)\cos\omega_0 t + Q(t) = \\ &= -A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + Q(t) \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [x'_c(t)\cos\omega_0 \tau - x'_s(t)\sin\omega_0 \tau + \frac{1}{2!} (\tau - t)x''_c(t)\cos\omega_0 \tau - \\ &\quad - \frac{1}{2!} (\tau - t)x''_s(t)\sin\omega_0 \tau + \dots] d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

Korzystając ze wzorów

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - t)^n \cos\omega_0 \tau d\tau = \frac{2n!}{\omega_0^{n+1}} \begin{cases} j^n \cos\omega_0 t & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ j^{n+1} \sin\omega_0 t & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - t)^n \sin\omega_0 \tau d\tau = \frac{2n!}{\omega_0^{n+1}} \begin{cases} j^n \sin\omega_0 t & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ j^{n-1} \cos\omega_0 t & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

otrzymuje się z zależności (22)

$$\frac{1}{2} Q(t) = \frac{1}{\omega_0} (x'_c \cos \omega_0 t - x'_s \sin \omega_0 t) - \frac{1}{2\omega_0^2} (x''_c \sin \omega_0 t + x''_s \cos \omega_0 t) + \dots \quad (23)$$

Jeżeli sygnały o postaci (16) są wąskopasmowe ( $\Delta \omega$  małe), to

$$Q(t) \approx \frac{\Delta \omega}{\omega_0} A(t) \quad (24)$$

Wobec tego

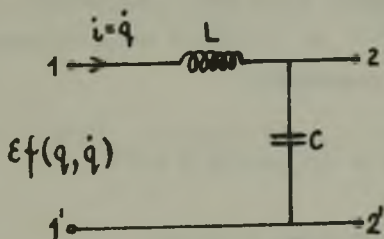
$$H\{x(t)\} = -A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + \frac{\Delta \omega}{\omega_0} A(t) \quad (25)$$

W przypadku, gdy  $\Delta \omega \ll \omega$  (wartości  $Q(t)$  są pomijalne) mamy

$$H\{x(t)\} = -A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (26)$$

### 3. Przykład

Rozważmy fragment pewnego obwodu elektrycznego przedstawiony na rys. 2 zakładając, że napięcie na zaciskach 1 - 1' jest równe  $\mathcal{E}f(q, \dot{q})$ , gdzie  $q$  oznacza ładunek elektryczny,  $\mathcal{E}$  - mały parametr.



Rys. 2

Równanie równowagi elektrycznej powyższego obwodu ma postać

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt = \mathcal{E} f(q, \dot{q}) \quad (27)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \mu f(q, \dot{q}) \quad (28)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\mu = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Przyjmujemy rozwiązanie równania (28) w postaci

$$q(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (29)$$

przy czym

$$A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{q^2(t) + [H\{q(t)\}]^2}$$

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} - \arctg \frac{H\{q(t)\}}{q(t)}$$

Ze względu na występowanie w równaniu (28) małego parametru  $\mu$ , odpowiednia  $A(t)$  i faza  $\varphi(t)$  są funkcjami wolnozmiennymi w porównaniu z funkcją  $\cos \omega_0 t$ . Wobec powyższego

$$\dot{q} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (30)$$

Z zależności (29) i (30) można otrzymać

$$A^2 = q^2 + \frac{\dot{q}^2}{\omega_0^2} \quad (31)$$

$$\varphi = - \arctg \frac{\dot{q}}{\omega_0 q} - \omega_0 t \quad (32)$$



Różniczkując równanie (31) względem czasu otrzymuje się

$$2A\ddot{A} = 2q\dot{q} + \frac{2q\dot{q}}{\omega_0^2} \quad (33)$$

stąd

$$\dot{A} = \frac{\dot{q}}{\omega_0^2 A} (\dot{q} + \omega_0^2 q) \quad (34)$$

$$\dot{A} = \frac{\dot{q}}{\omega_0^2 A} \mu f(q, \dot{q}) \quad (35)$$

Podobnie różniczkując względem czasu relację (32) otrzymuje się

$$\dot{\psi} = - \frac{\omega_0 q (\dot{q} + \omega_0^2 q)}{\omega_0 q^2 + \dot{q}^2} \quad (36)$$

$$\dot{\psi} = - \frac{q}{\omega_0 A^2} \mu f(q, \dot{q}) \quad (37)$$

Uwzględniając zależności (29) i (30) w równaniach (35) i (37) otrzymamy

$$\dot{A} = \frac{\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0^2 A} \mu f [A \cos(\omega_0 t + \varphi), -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)] \quad (38)$$

$$\dot{\psi} = \frac{A \cos(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0 A^2} \mu f [-A \cos(\omega_0 t + \varphi), -A \sin(\omega_0 t + \varphi)] \quad (39)$$

Podstawmy

$$\psi = \omega_0 t + \varphi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{T_0}{2\pi\Lambda}\mu f(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi)\sin\psi \\ \dot{\varphi} &= \frac{T_0}{2\pi\Lambda}\mu f(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi)\cos\psi\end{aligned}\quad (40)$$

Rozwijając funkcje  $f(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi)\sin\psi$  oraz  $f(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi)\cos\psi$  w szeregi Fouriera otrzymamy

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{T_0}{2\pi}\mu\left(\frac{a_0}{2} + a_{1s}\sin\psi + a_{1c}\cos\psi + a_{2s}\sin 2\psi + a_{2c}\cos 2\psi + \dots\right) \\ \dot{\varphi} &= \frac{T_0}{2\pi\Lambda}\mu\left(\frac{b_0}{2} + b_{1s}\sin\psi + b_{1c}\cos\psi + b_{2s}\sin 2\psi + b_{2c}\cos 2\psi + \dots\right)\end{aligned}\quad (41)$$

Uwzględniając, że funkcje  $A(t)$  i  $\varphi(t)$  są wolnozmiennie, wobec tego ich pochodne  $\dot{A}, \dot{\varphi}$  można traktować jako stałe w okresie  $T_0$ . Będzie więc

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{T_0}{2\pi}\mu\frac{a_0}{2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{T_0}{2\pi\Lambda}\mu\frac{b_0}{2}\end{aligned}$$

przy czym

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi)\sin\psi d\psi \\ \frac{b_0}{2} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(A\cos\psi, -\omega_0 A\sin\psi)\cos\psi d\psi\end{aligned}$$

Ostatecznie więc prędkość zmian obwiedni oraz prędkość zmian fazy wyrażają się następująco

$$\dot{A} = \frac{1}{2\pi} \mu \int_0^{T_0} f(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2\pi A} \mu \int_0^{T_0} f(A \cos \psi, -\omega_0 A \sin \psi) \cos \psi \, d\psi$$

#### 4. Wnioski końcowe

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że metoda analizy obwodów elektrycznych polegająca na badaniu obwiedni  $A(t)$  dowolnych przebiegów jest szczególnie przydatna dla przebiegów wąskopasmowych dających się wyrazić w postaci

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Wyznaczanie obwiedni  $A(t)$  i fazy  $\varphi(t)$  zilustrowano na przykładzie analizy układu LC opisanego równaniem (28).

Wydaje się, że przedstawienie przebiegów w postaci (15) można wykorzystać w zagadnieniach analizy obwodów elektrycznych o zmiennych parametrach.

Jeżeli parametry obwodu zmieniają się w sposób przypadkowy, to obwiednia  $A(t)$  i faza  $\varphi(t)$  są wielkościami przypadkowymi, a przebieg  $x(t)$  jest realizacją procesu stochastycznego.

Badanie takich przebiegów polega na określeniu własności statystycznych obwiedni  $A(t)$  i fazy  $\varphi(t)$  [6].

Obwiednię  $A(t)$  można otrzymać za pomocą układu analogowego wykonującego działania wynikające bezpośrednio z definicji (14) lub (17).

Do wyznaczania obwiedni przebiegów wąskopasmowych wygodnie jest skorzystać z definicji (17) [5].

W przypadku korzystania z definicji obwiedni (14) zasadniczą trudność stanowi wykonanie operacji obliczenia transformaty Hilberta  $H\{x(t)\}$ .

#### LITERATURA

- [1] Atabekow G.I., Teoria liniowych obwodów elektrycznych, WNT, Warszawa 1964.
- [2] Bracewell R., Przekształcenie Fouriera i jego zastosowanie, WNT, Warszawa 1968.
- [3] Heyashi Ch., Drgania nieliniowe w układach fizycznych, WNT, Warszawa 1968.
- [4] Nowomiejski Z., Uogólniona metoda symboliczna, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 20, str. 29-48, Gliwice 1966.
- [5] Seidler J., Statystyczna metoda odbioru sygnałów, PWN 1963.
- [6] Swiesznikow A.A., Podstawowe metody funkcji losowych, PWN, Warszawa 1965.
- [7] Tichonow W.J., Statisticheskaja radiotekhnika, Izdatielstwo Sowietskogo Radio, Moskwa 1966.

Przyjęto do druku w maju 1970 r.

#### СИГНАЛЫ С ОГИБАЮЩЕЙ

#### Резюме

Рассматривается проблема исследования сигналов методом огибающей. Метод был проанализирован с точки зрения его пригодности к узкополосным сигналам с фазовой и амплитудной модуляцией. Для определения огибающей сигнала использовано понятие аналитического сигнала (символической функции). Применение метода огибающей представлено на примере анализа контура LC.

## PROCESSES WITH ENVELOPES

## S u m m a r y

The problem of analysing arbitrary processes using the envelope method is discussed in this paper. In particular narrow-band phase- and amplitude-modulated processes were analysed by the aid of this method. The notion "analytic signal" (symbolic function) is used in the process illustrated by an example including an LC circuit analysis.