

BERNARD BARON

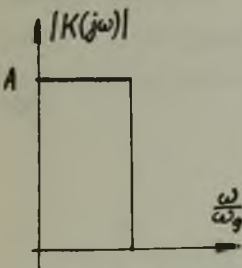
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Ogólnej

SYNTEZA STRUKTURALNA FILTRU PASMOWEGO
Z JEDNYM ŹRÓDŁEM STEROWANYM

Streszczenie. Wykorzystując twierdzenie Rungego, przeprowadzono analizę funkcji aproksymującej charakterystykę amplitudową filtru pasmowego. W drugiej części podano algorytm pozwalający uprawiać syntezę strukturalną wraz z doбором elementów RC. Zwrócono uwagę na możliwość realizacji minimum współczynników funkcji przejścia ze względu na współczynnik wzmocnienia źródła sterowanego syntetyzowanego układu. Pracę podsumowano twierdzeniami określającymi klasę struktur, w których jest możliwa synteza filtru pasmowego o aproksymacji Czebyszewa.

1. Analiza funkcji aproksymującej

Rozważmy na wstępie charakterystykę amplitudową rys. 1 filtru dolnoprzepustowego.



Rys. 1

Ze względu na to, że syntezę będziemy przeprowadzać przy użyciu elementów skupionych, należy zadaną charakterystykę amplitudową aproksymować funkcją wymierną. O tym czy taka aproksymacja jest możliwa orzeka następujące twierdzenie Rungego [1]:

Jeśli $K(p)$ jest funkcją analityczną jednoznaczna w zbiorze otwartym G , to dla każdego zbioru domkniętego $F \subset G$ i każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja wymierna $R(p)$ o biegunach zawartych w dopełnieniu CG zbioru G spełniająca warunek

$$|K(p) - R(p)| < \varepsilon \text{ dla } p \in F. \quad (1)$$

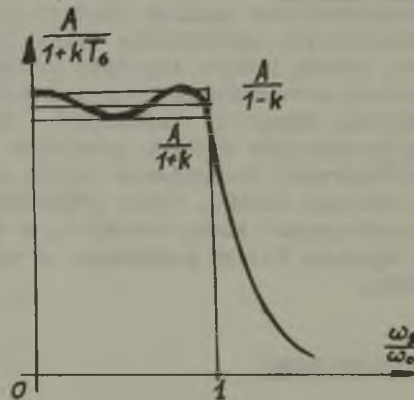
wartych w dopełnieniu CG zbioru G spełniająca warunek

Zakładając w powyższym twierdzeniu, że zbiór G jest osią urojoną oraz uwzględniając, że

$$|K(p) - R(p)| < \varepsilon \rightarrow |K(p)| - |R(p)| < \varepsilon$$

można $R(j\omega)$ uważać jako przybliżenie charakterystyki amplitudowej $K(j\omega)$.

Będziemy teraz poszukiwać funkcji wymiernej $R(p)$ spełniającej warunek (1). Wykorzystamy w tym celu wielomiany Czebyszewa $T_n(x)$



Rys. 2

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

.....

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Przedstawmy na osi urojonej funkcję aproksymującą w postaci

$$\left| R_n(j\omega) \right|^2 = \frac{A}{1+kT_{2n}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (3)$$

Przy zadanej granicy górnej odchyłki ε wartość współczynnika k można wyznaczyć wg równania

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Lambda}{1-k}} - \sqrt{\Lambda} \quad (4)$$

Dolną granicę odchyłek wyznaczamy z wyrażenia

$$\sqrt{\Lambda} - \sqrt{\frac{\Lambda}{1+k}} < \varepsilon \quad (5)$$

Dla dowolnego ε istnieje więc takie k , że zachodzi warunek (1). Z konstrukcji funkcji $R_n(p)$ wynika, że bieguny funkcji $R_n(p)$ nie leżą na osi urojonej. Wyznamy teraz funkcję $R_n(p)$ w postaci

$$R(p) = \frac{\Lambda}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (6)$$

Zachodzi

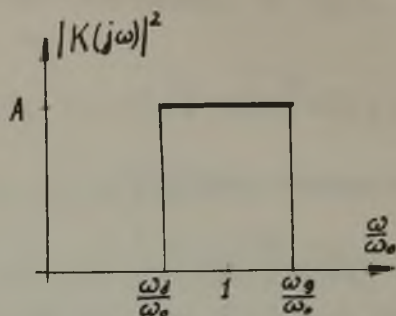
$$\left| R_n(j\omega) \right|^2 = R_n(p) R_n(-p) \Big|_{p=j\omega} \quad (7)$$

Z porównania wyrażeń (7) i (3) wyznaczamy współczynniki funkcji wymiernej (6). W ten sposób wyznaczona funkcja wymierna $R_n(p)$ może być punktem wyjścia syntezy filtrów dolnoprzepustowych. Wyznamy teraz funkcję wymierną $R(p)$ realizującą z dowolną dokładnością ε transmi-tancję filtra pasmowego o charakterystyce podanej na rys. 3.

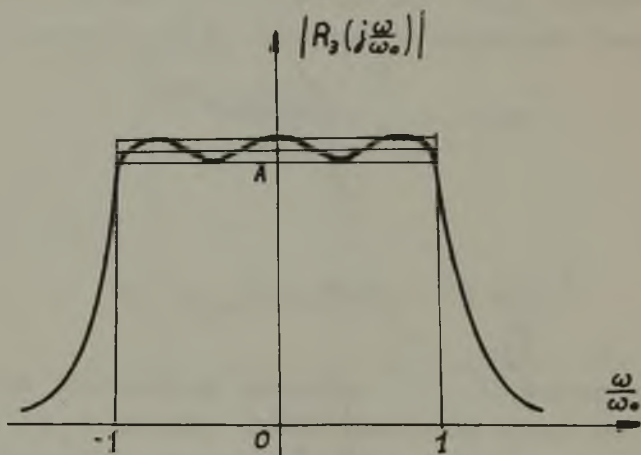
Rozpatrzmy w tym celu funkcję (3)

$$\left| R_n(jy) \right|^2 = \frac{\Lambda}{1+kT_{2n}(y)}$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie tego problemu związane jest z odpowiednim przesunięciem charakterystyki przedstawionej na rys. 4. Przesunięcie to powinno być dokonane poprzez odwzorowanie $f(p)$ płaszczyzny zespolonej "p", które przede wszystkim odwzorowuje oś urojoną w oś urojoną.



Rys. 3



Rys. 4

Żądanie spełnienia takiego warunku jest konieczne, gdyż moduł funkcji $R_n[f(p)]$ na osi urojonej ma aproksymować charakterystykę amplitudową filtra pasmowego. Z drugiej strony należy żądać, aby funkcja $R_n[f(p)]$ była funkcją wymierną w ciele liczb rzeczywistych, gdyż tylko wówczas można ją będzie realizować przy pomocy elementów RLC, jako transmitancję filtra pasmowego.

Warunki te spełnia następujące odwzorowanie:

$$f(p) = \alpha \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) \quad (8)$$

Przy odwzorowaniu (8) okręgi $p = re^{j\varphi}$ przechodzą w elipsy

$$\frac{x^2}{\alpha^2 \left(\frac{r}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{r} \right)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 \left(\frac{r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{r} \right)^2} = 1 \quad (9)$$

Funkcja (8) odwzorowuje konforealnie koło $|p| < r$ o promieniu $r < \omega_0$ na zewnętrzne elipsy (9), a koło $|p| < \omega_0$ na całą płaszczyznę domkniętą, z której odrzucono odcinek $-2\alpha \leq x \leq 2\alpha$. Środek koła przechodzi w punkt w nieskończoności. Funkcja (8) odwzorowuje również zewnętrzne koła $|p| < r$ o promieniu $r = \omega_0$ na całą płaszczyznę rozciętą wzdłuż odcinka $-2\alpha \leq x \leq 2\alpha$

Przy odwzorowaniu (8) półproste $\arg(p) = \varphi$ przechodzą w elipsy

$$\frac{x^2}{4^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{4^2 \sin^2 \varphi} = 1 \quad (10)$$

przy czym

półprosta $\arg(p) = 0$ przechodzi w część osi x :

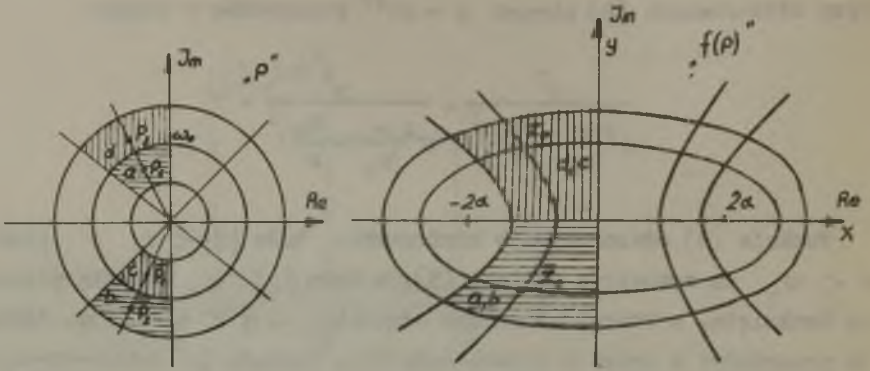
$$x \geq 2\alpha$$

półprosta $\arg p = \pi$ przechodzi w część osi x ,

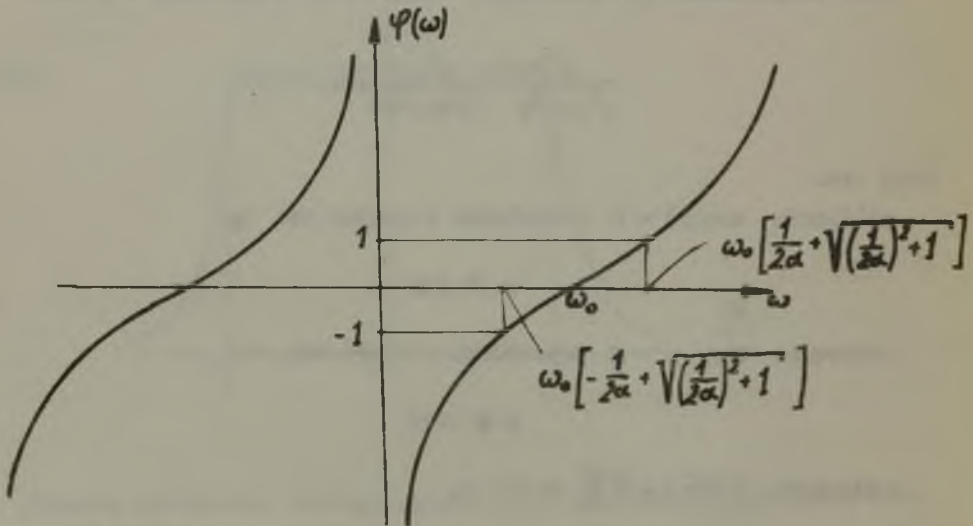
$$x \leq -2\alpha$$

półprosta $\arg(p) = \pm \frac{\pi}{2}$ w oś y .

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja (8) jest dwukrotna, gdyż każdą swą wartość $f(p)$ osiąga w dwóch punktach. Niech z_0 będzie dowolnym biegunem funkcji R_n . Ponieważ funkcja R_n jest określona w ciełe liczb rzeczywistych wystąpi również biegun w punkcie \bar{z}_0 . Funkcja $f(p)$ osiąga wartość z_0 i \bar{z}_0 w punktach p_2 i \bar{p}_1 oraz p_1 i \bar{p}_2 . Zbadamy teraz funkcję $R_n[f(p)]$ na osi urojonej.



Rys. 5



Rys. 6

Zachodzi

$$f(j\omega) = \alpha \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right) = j\alpha \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = j\varphi(\omega) \quad (11)$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$G = \{z = jy\}; \quad F = \{z = jy : -1 \leq y \leq 1\}$$

Na mocy twierdzenia Rungego zachodzi warunek

$$|K(z) - R_n(z)| < \varepsilon \text{ dla } z \in F$$

Znajdziemy teraz zbiór $f^{-1}(F)$ dla elementów którego zachodzi

$$|K(p) - R_n[f(p)]| < \varepsilon \text{ dla } p \in f^{-1}(F) \quad (12)$$

gdzie $K(j\omega)$ przedstawiono na rys. 3.

Ponieważ $f(p)$ odwzorowuje oś urojona w oś urojona wystarczy więc analizować funkcję (11) $\varphi(\omega)$.

Brzegi przedziału $f^{-1}(F)$ wyznaczymy rozwiązując układ równań

$$\varphi(\omega) = 1; \quad \varphi(\omega) = -1.$$

Mamy więc

$$f^{-1}(F) = \{p = j\omega: \\ \omega_0 \left(\frac{-1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1} \right) \leq \omega \leq \omega_0 \left(\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + 1} \right)\}. \quad (13)$$

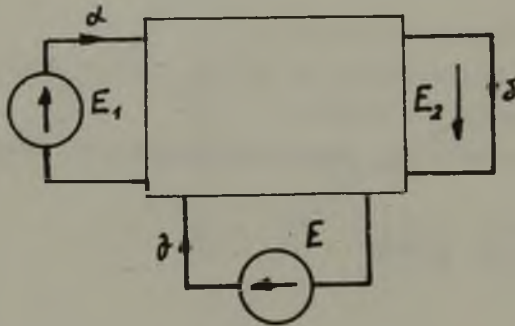
Jak widać, szerokość przedziału $f^{-1}(F)$ uzależniona jest od parametru α . Dla dostatecznie dużych parametrów α , a więc dla filtrów o

dostatecznie wąskiej charakterystyce możemy z wystarczającą dokładnością przyjąć

$$f^{-1}(\overline{p}) = \left\{ p = j\omega : \omega_0 \left(-\frac{1}{2\alpha} + 1 \right) < \omega < \omega_0 \left(\frac{1}{2\alpha} + 1 \right) \right\}. \quad (14)$$

2. Synteza filtru

W ostatnich latach otrzymano olbrzymią ilość informacji o warunkach realizacji i sposobach syntezy układów skupionych, liniowych i skończonych. Poszczególni autorzy podają rozwiązanie wielu problemów syntezy zawiężając ją do szczególnych struktur, ograniczając w ten sposób optymalizację różnych wielkości. Poniżej odpowiemy na pytanie w jakich strukturach można realizować filtry o aproksymacji Czebyszewa z jednym źródłem sterowanym.



Rys. 7

Niech liczba strukturalna Λ jest przeciwobrazem grafu układu przedstawionego na rys. 7, gdzie $E = k z_{\delta} I_{\delta}$. Napięcie E_2 na wyjściu układu wyraża się następującym wzorem [4]

$$E_2 = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \delta} \right)}{z} z_{\delta} E_1 + \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma}, \frac{\partial \Lambda}{\partial \delta} \right)}{z} z_{\delta} I_{\delta} k z_{\delta} \quad (15)$$

Prąd I_δ można z kolei wyrazić wzorem

$$I_\delta = \frac{\text{Sem}(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta})}{z \det A} E_1 + \frac{\text{Sim}(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta})}{z \det A} k z_\delta I_\delta \quad (16)$$

We wzorze (14) prąd I_δ jest wyrażony w postaci uwłkanej. Przekształcając odpowiednio ten wzór otrzymamy

$$I_\delta = \frac{\text{Sim}(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta}) E_1}{z \det A - k z_\delta \frac{\text{Sim}(\frac{\partial A}{\partial \delta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma})}{z}} \quad (17)$$

Podstawiając wzór (17) do wzoru (16) i wykonując proste przekształcenie otrzymamy wzór na transmitancję układu zawierającego jedną SEM sterowaną.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\text{Sim}(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta}) z_\delta}{z \det A - k z_\delta \frac{\text{Sim}(\frac{\partial A}{\partial \delta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma})}{z}} \quad (18)$$

We wszystkich powyższych wzorach A jest liczbą strukturalną, dla której graf Γ badanego układu jest przeciwobrazem.

W pierwszej części pokazano, że transmitancja filtru pasmowego o aproksymacji Czebyszewa ma postać

$$R_n(p) = \frac{K}{b_n p^n + \dots + b_0 + \dots + b_{-n} p^{-n}} = \frac{E_2}{E_1} \quad (19)$$

Ze względu na to, że synteza będzie przeprowadzona przy użyciu elementów R, C doprowadzamy transmitancję (19) do postaci

$$R_n(p) = \frac{K p^{-n}}{b_n + \dots + b_{-n} p^{-2n}} \quad (20)$$

Oznaczamy przez Γ_α i Γ_δ grafy powstałe z grafu Γ przez jednokońcówkowe odłączenie gałęzi α i δ . Niech grafy Γ_α i Γ_δ posiadają dokładnie jedno identyczne przeciwdrzewo.

Przy tym założeniu funkcja $\text{Sim}\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta}\right)$ posiada dokładnie jedno wyrażenie $Z_{i_1} Z_{i_2} \dots Z_{i_{2n-1}}$. Wystarczy więc rozmieścić w n gałęziach pojemności a w pozostałych tylko oporność czynną, aby zrealizować licznik transmitancji (20) z dokładnością do stałej. Założenie odnośnie grafów Γ_α i Γ_δ nie jest konieczne, jednak zapewnia, że czułość pojawienia się współczynników przy potęgach różnych od p^{-n} jest równa zeru, niezależnie od zmiany parametrów R_i , C_i i k .

Przystąpimy teraz do realizacji mianownika transmitancji (20). W tym celu przedstawimy mianownik $R_n(p)$ w postaci różnicy dwóch wyrażeń $A(p)$ i $B(p)$

$$b_n + \dots + b_{-n} p^{-2n} = p^{-2n} A(p) - k B(p) p^{-2n} = p^{-2n} S(p) \quad (21)$$

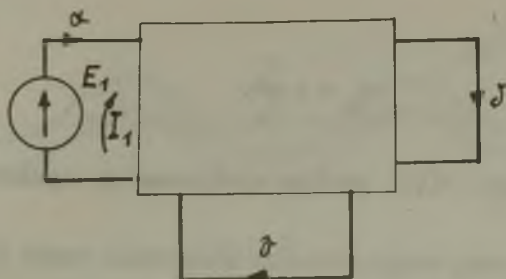
tak, ażeby można je zrealizować przy pomocy elementów skupionych RC.

Oznaczmy przez $E_k(p)$, $I_k(p)$ napięcie i prąd oczkowy k -tego oczka ($k = 1, 2, \dots, 1$) w układzie przedstawionym na rys. 8. Ponieważ tylko oczko pierwsze zawiera źródło napięcia otrzymamy więc [2]

$$\begin{aligned} \bar{I}_1(p) E_1(p) &= \sum_j^1 \sum_{k=1}^1 \bar{I}_j R_{jk} I_k + \\ &+ \frac{1}{p} \sum_{j,k=1}^1 \bar{I}_j S_{jk} I_k = F_0 + \frac{1}{p} V_0 \end{aligned} \quad (22)$$

Po podstawieniu

$$E_1(p) = Z_1(p) I_1(p)$$



Rys. B

i prostym przekształceniu otrzymamy

$$Z_1(p) = \frac{1}{|I_1(p)|^2} (F_0 + \frac{1}{p} V_0) \quad (23)$$

gdzie F_0 i V_0 są formami hermitowskimi.

Z teorii układów biernych [3] wiadomo, że macierze odpowiadające formom hermitowskim F_0 i V_0 są półokreślone dodatnio, formy te są zatem zawsze nieujemne.

Impedancję wejściową $Z_1(p)$ przedstawimy w postaci

$$Z_1(p) = \frac{\det A}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}} \quad (24)$$

Ponieważ

$$Z_1 = 0$$

dla

$$p_k = -\frac{V_0}{F_0}$$

więc

$$\det A = 0$$

dla

$$P_k = -\frac{V_0}{F_0}$$

Wynika z tego, że zera $A(p)$ powinny występować na ujemnej półosi rzeczywistej.

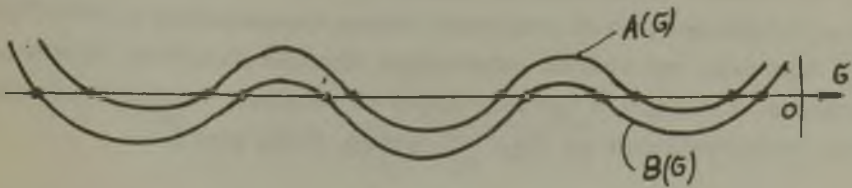
Weźmy teraz pod uwagę drugi składnik mianownika wzoru (18). Dla 3-parobiegownika z rys. 6 zachodzi

$$y_{\gamma\delta} = \frac{\text{Sim}(\frac{\partial A}{\partial \delta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma})}{\det A} \quad (25)$$

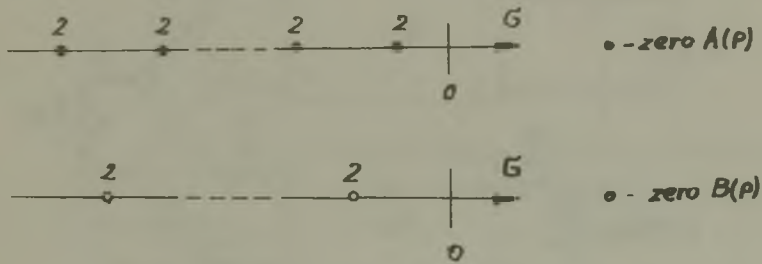
Warunki konieczne i wystarczające dla elementu $y_{\gamma\delta}$ układu RC ograniczają się do tego [2], aby funkcja ta miała tylko pojedyncze bieguny na ujemnej półosi rzeczywistej z rzeczywistymi residuami. Residua w tych biegunach są rzeczywiste, ponieważ współczynniki funkcji wymiernej są rzeczywiste. Zera $y_{\gamma\delta}$ mogą więc znajdować się w dowolnym punkcie płaszczyzny "p", jeśli wszystkie zera zespolone występują w postaci par sprzężonych. Wynika z tego, że funkcja

$$\frac{\text{Sim}(\frac{\partial A}{\partial \delta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma})}{z}$$

w układzie RC może realizować zera bez większych ograniczeń. Ponieważ $S(p)$ nie ma zer rzeczywistych a $S(\delta) > 0$, to kolejność zer $A(p)$ i $B(p)$ powinna być taka jak na rys. 9. W zagadnieniach syntezy układów ze źródłami sterowanymi należy uwzględnić, że najbardziej zmiennymi parametrami są współczynniki wzmocnienia. Z powyższego wynika, że czułość reakcji układów tego typu należy badać ze względu na współczynnik wzmocnienia k źródła sterowanego. W rozpatrywanym przypadku problem ten rozwiązuje rozkład Horowitza [5] wielomian $S(p)$. Jeżeli położenie zer $A(p)$ i $B(p)$ dla rozkładu $S(p)$ jest takie jak na rys. 10, przy czym, każde zero oznaczone symbolem 2 jest zerem podwójnym,



Rys. 9



Rys. 10

to czułość współczynników ze względu na współczynnik wzmocnienia jest minimalna.

Zachodzi następujące

Twierdzenie 1

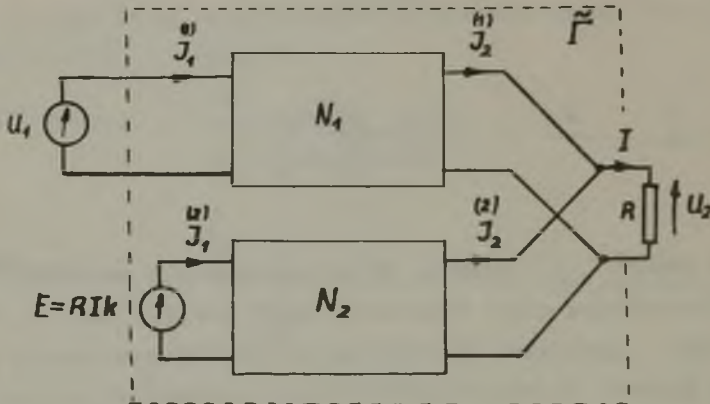
Warunkiem koniecznym na to aby w grafie Γ można realizować układ rys. 7 o transmitancji określonej wzorem (20) jest aby liczba cyklomatyczna grafu Γ , $\eta_{\Gamma} \geq 2n$.

Dowód:

Z porównania mianowników funkcji (18) i (20) wynika, że jest to możliwe, gdyż liczba strukturalna A , której graf Γ jest przeciwobrazem posiada $2n$ elementowe kolumny.

Twierdzenie 1 podaje warunek konieczny na to, aby dana struktura realizowała zadaną transmitancję filtru o aproksymacji Czebyszewa. Chcąc dowieść, że pewien warunek jest wystarczający należałoby poka-

zać, że istnieje rozmieszczenie elementów R , C i źródła sterowanego w danej strukturze, które realizuje zadaną transmitancję filtru. Wykazanie tego przy tak słabych założeniach odnośnie struktury filtru jest utrudnione. W związku z tym przyjmijmy do dalszych rozważań strukturę filtru przedstawionego na rys. 11, opisaną przez graf $\tilde{\Gamma}$.



Rys. 11

Zależności między wielkościami elektrycznymi czwórników N_1 i N_2 podają równania

$$\begin{matrix} (1) & (1) & (1) & (1) & (1) & (2) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ J_1 & = & y_{11} & U_1 & + & y_{12} & U_2 & ; & J_1 & = & y_{11} & U_1 & + & y_{12} & U_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (1) & (1) & (1) & (1) & (1) & (2) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ J_2 & = & y_{21} & U_1 & + & y_{22} & U_2 & ; & J_2 & = & y_{21} & U_1 & + & y_{22} & U_2 \end{matrix} \quad (26)$$

Podstawiając

$$\begin{matrix} (1) & & & & (1) & (2) \\ U_1 & = & U_1 & ; & U_2 & = & IR & ; & I & = & J_2^{(1)} & + & J_2^{(2)} & ; \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (2) \\ U_1 & = & k R I \end{matrix}$$

otrzymany

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{(1) y_{21}^R}{1 + (1) y_{22}^R + (2) y_{21}^R + (2) y_{22}^R} \quad (27)$$

Admitancje $y_{ij}^{(1)}$ i $y_{ij}^{(2)}$ mogą być określone w następujący sposób:

$$y_{22}^{(1)} = -y_{22}^{(1)} = \frac{(1) -J_2}{U_2} \left| \begin{matrix} (1) \\ U_1 = 0 \end{matrix} \right.$$

- admitancje wejściowe od strony zacisków 2 przy zwartych zaciskach 1;

$$y_{22}^{(2)} = -y_{22}^{(2)} = \frac{(2) -J_2}{U_2} \left| \begin{matrix} (2) \\ U_1 = 0 \end{matrix} \right.$$

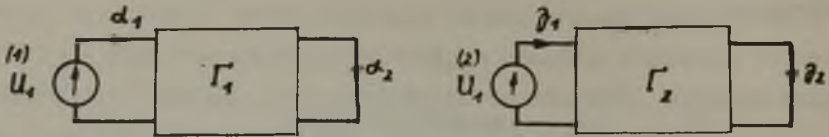
$$y_{21}^{(1)} = -y_{21}^{(1)} = \frac{(1) -J_2}{U_1} \left| \begin{matrix} (1) \\ U_2 = 0 \end{matrix} \right.$$

- transmitancje prądowo-napięciowe przy zwartych zaciskach 2.

$$y_{21}^{(2)} = -y_{21}^{(2)} = \frac{(2) -J_2}{U_1} \left| \begin{matrix} (2) \\ U_2 = 0 \end{matrix} \right.$$

Wzór (27) przyjmie postać

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{(1) -Y_{21}^R}{1 + (1) Y_{22}^R + (2) Y_{21}^R + (2) Y_{22}^R} \quad (28)$$



Rys. 12

Oznaczmy przez Γ_1 i Γ_2 grafy czwórników N_1 i N_2 , które są przeciwobrazem liczb strukturalnych A_1 i A_2 oraz przez $\Gamma_{1\alpha_1}$, $\Gamma_{1\alpha_2}$, $\Gamma_{2\gamma_1}$, $\Gamma_{2\gamma_2}$ grafy powstałe z grafów Γ_1 i Γ_2 w wyniku jednokońcówkowego odłączenia gałęzi α_1 , α_2 i γ_1 , γ_2 . Zachodzi następujące

Twierdzenie 2

Warunkiem wystarczającym na to, aby w strukturze (rys. 11) określonej grafem $\tilde{\Gamma}$ można było realizować transmitancję filtru o aproksymacji Czebyszewa jest, aby grafy $\Gamma_{1\alpha_1}$, $\Gamma_{1\alpha_2}$ miały dokładnie jedno wspólne przeciwdrzewo oraz aby grafy $\Gamma_{2\gamma_1}$, $\Gamma_{2\gamma_2}$ miały wszystkie przeciwdrzewa wspólne.

Dowód:

Jak wiadomo [4] transmitancje prądowo-napięciowe występujące we wzorze (28) mają postać

$$(1) \quad Y_{ij} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_j} \right)}{\det A_1}, \quad (2) \quad Y_{ij} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \gamma_i}, \frac{\partial A_2}{\partial \gamma_j} \right)}{\det A_2} \quad (29)$$

Ponieważ grafy $\Gamma_{2\gamma_1}$, $\Gamma_{2\gamma_2}$ mają wszystkie przeciwdrzewa identyczne więc liczby strukturalne $\frac{\partial A_2}{\partial \gamma_1}$, $\frac{\partial A_2}{\partial \gamma_2}$ są równe.

Z definicji funkcji Sim wynika, że

$$(2) \quad Y_{22} = -Y_{21} = \frac{\det \frac{\partial A_2}{\partial \gamma_2}}{\det A_2} \quad (30)$$

Wzór (28) otrzyma teraz postać

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\overset{(1)}{-Y_{21}} R}{\underset{(1)}{1+Y_{22}} R + \underset{(2)}{Y_{22}} R(1-k)}$$

Dla filtru o aproksymacji Czebyszewa powinno zachodzić

$$\frac{U_2}{U_1} = R_n(p) = \frac{K p^n}{b_n p^{2n} + \dots + b_{-n}} = K \frac{T(p)}{S(p)} \quad (31)$$

Wyberzmy dowolny wielomian $s(p)$ zawierający jedynie ujemne i rzeczywiste zera, którego stopień jest o jedność mniejszy od wielomianu $S(p)$ tj. $2n-1$. Otrzymujemy wówczas

$$\overset{(1)}{-Y_{21}} = K \frac{T(p)}{s(p)} = \frac{K p^n}{(p+p_1) \dots (p+p_{2n-1})} \quad (32)$$

$$1 + \overset{(1)}{Y_{22}} R + \overset{(2)}{Y_{22}} R(1-k) = \frac{S(p)}{s(p)} \quad (33)$$

Weźmy następnie rozwinięcie Fostera ilorazu $\frac{S(p)}{s(p)}$ w postaci

$$\frac{S(p)}{s(p)} = d_0 + d_{\infty} p + \sum_i \frac{d_i p}{p+p_i} - \sum_j \frac{h_j p}{p+p_j}, \quad (34)$$

przy czym każde d_i lub h_j jest dodatnie, d_{∞} nigdy nie jest ujemne, a d_0 może być, albo dodatnie albo ujemne.

Niech zachodzi

$$\overset{(2)}{Y_{22}} = -\overset{(2)}{Y_{21}} = G + \sum_j \frac{g_j p}{p+p_j} \quad (35)$$

Równanie (33) przyjmie teraz postać

$$\begin{aligned}
 {}^{(1)}Y_{22} R = R(k-1)G + d_0 - 1 + d_{\infty} p + \sum_1 \frac{d_1 p}{p+p_1} + \\
 + \sum_j \frac{[(k-1)Rg_j - h_j] p}{p+p_j}, \quad (36)
 \end{aligned}$$

która określa admitancję RC, jeśli

$$R(k-1)G + d_0 - 1 \geq 0 \quad (37)$$

oraz

$$R(k-1)g_j - h_j > 0 \quad (38)$$

dla każdego j , co jest zawsze możliwe.

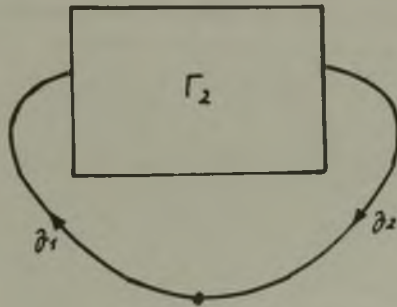
Wykażemy teraz że istnieje takie rozmieszczenie elementów C_1 i R_1 w gałęziach grafu $\tilde{\Gamma}$ a więc Γ_1 i Γ_2 aby można było realizować transmitancje filtru o aproksymacji Czebyszewa. Pokażemy najpierw, że w grafie Γ_1 można syntetyzować równocześnie admitancje ${}^{(1)}Y_{22}$ i ${}^{(1)}Y_{21}$.

Weźmy w tym celu admitancję

$${}^{(1)}Y_{21} = \frac{\text{Sim}\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_1}\right)}{\det \Lambda_1} \quad (39)$$

Ponieważ grafy $\Gamma_{1\alpha_1}$, $\Gamma_{1\alpha_2}$ mają dokładnie jedno identyczne przeciwdrzewo więc istnieje dokładnie jedna kolumna wspólna dla liczb strukturalnych $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_2}$, $\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_1}$. Funkcja jednoczesności $\text{Sim}\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \alpha_1}\right)$ ma więc dokładnie jedno wyrażenie $Z_{11} Z_{12} \dots Z_{12n-2}$. Ażeby zrealizować licznik wzoru (39) wystarczy żądać, aby w wyrażeniu tym n impedancji miało postać $Z_{1k} = \frac{1}{C_1 p}$ oraz pozostałe pozycji R_{1t} .

Liczba cyklotomiczna grafu Γ_1 wynosi $\chi_{\Gamma_1} = 2n - 1$. Aby obliczyć mianownik (39) musimy rozmieścić impedancje postaci $Z_k = R_k + \frac{1}{C_k p}$ przynajmniej w jednym przeciwdrzewie grafu Γ_1 . Elementy układu H_1 można obliczyć na maszynie cyfrowej, korzystając z algorytmów liczb strukturalnych lub bez pomocy maszyny za pomocą rozwinięcia $Y_{22}^{(1)}$ wg wzoru (36). Ze względu na to, że struktura układu H_2 ma postać (rys. 13) można go łatwo syntetyzować korzystając z rozwinięcia $Y_{22}^{(2)} = -Y_{21}^{(2)}$ wg wzoru (35).



Rys. 13

LITERATURA

- [1] Leja F.; Teoria funkcji analitycznych. Warszawa 1957.
- [2] Kendall L.Su.; Teoria układów aktywnych. Warszawa 1969.
- [3] Guillemin E.A.; Synthesis of Passive Networks. New York 1957.
- [4] Bellert S., Woźniacki H.; Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Warszawa 1969.
- [5] Horowitz I.M.; Optimization of Negative-impedance Conversion Methods of Active RC Synthesis. IRE Trans. Circuit Theory, Vol. CTC, September 1959, pp. 269-303.

Przyjęto do druku w marcu 1970 r.

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ ПОЛОСОВОГО ФИЛЬТРА С ОДНИМ УПРАВЛЯЕМЫМ ИСТОЧНИКОМ

Р е з ю м е

Используя теорему Рунге проведено анализ функции, аппроксимирующей амплитудную характеристику полосового фильтра. Во второй части указан алгоритм, разрешающий провести структурный синтез с подбором элементов RC. Обращено внимание на возможность реализации минимум чувствительности коэффициентов функции перехода учитывая коэффициент усиления управляемого источника синтезированной системы.

Исследования были подытожены теоремами, определяющими класс структур, в которых можно провести синтез полосового фильтра с аппроксимацией Чебышева.

A STRUCTURAL SYNTHESIS OF A BAND FILTER WITH ONE CONTROLLED SOURCE

S u m m a r y

Applying the Runge theorem there has been carried out an analysis of the function which approximates the amplitude characteristic of a band filter. In the second part there is given an algorithm which enables to carry out a structural analysis with choice of the RC elements.

Attention was paid to the realisation possibility of the minimum sensitivity of the transition function indices in view of the amplification source factor of the synthetic system. This work has been summed up by theorems which define the structure's class in which there is possible a band filter synthesis with the Czebyszew approximation.