

TERESA SZADKOWSKA, BRUNON SZADKOWSKI  
Katedra Miernictwa Elektrycznego

ANALIZA CZUŁOŚCI MOSTKA FLEMINGA-DYKE'A  
W ZALEŻNOŚCI OD ZMIAN CZĘSTOTLIWOŚCI  
NAPIĘCIA ZASILANIA

**Streszczenie.** W oparciu o ogólne równanie czułości zrównoważonego mostka typu Wheatstone'a o elementach liniowych, sporządzono częstotliwościowe charakterystyki czułości mostka F-D.

Podano praktyczne kryteria optymalnego doboru gałęzi stosunkowych mostka F-D oraz wskaźnika równowagi dla uzyskania możliwie największej czułości przy częstotliwości zmieniającej się od 0,001 do 30,0 Hz.

### 1. Względna czułość zrównoważonego układu mostkowego

Względna czułość zrównoważonego układu mostkowego definiowana jest następującym równaniem:

$$\hat{S}_w = \frac{d\alpha}{\frac{d\hat{Z}}{\hat{Z}}} = \frac{d\alpha}{d\hat{Z}} \hat{Z} \quad (1)$$

gdzie:

$\alpha$  - odchylenie wskaźnika równowagi od położenia zerowego pod wpływem względnej zmiany impedancji  $\hat{Z}$  którejkolwiek gałęzi mostka.

Względna czułość całego układu mostkowego składa się właściwie z dwóch oddzielnych części; względnej czułości (np. prądowej) samego mostka  $\hat{S}_{wm}$  oraz bezwzględnej czułości (prądowej) wskaźnika równowagi  $\hat{S}_g$ :

$$\hat{S}_w = \hat{S}_{wm} \cdot \hat{S}_g = \hat{Z} \cdot \frac{d\hat{I}_g}{d\hat{Z}} \cdot \frac{d\alpha}{d\hat{I}_g} \quad (2)$$

Czułość  $\hat{S}_g$  zależy wyłącznie od własności wskaźnika równowagi, zaś czułość  $\hat{S}_{wm}$  charakteryzuje mostek i zależy od doboru impedancji poszczególnych gałęzi mostka.

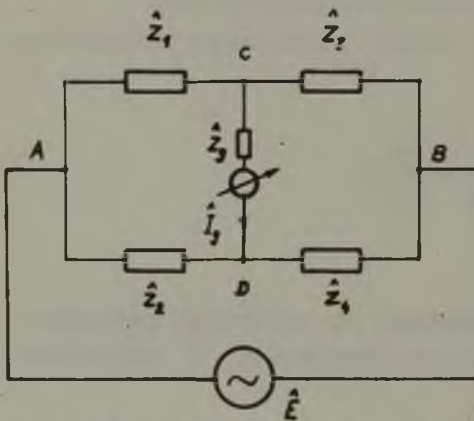
Względna czułość prądowa samego mostka jest zatem określona następującą zależnością:

$$\hat{S}_{wm} = \frac{d\hat{I}_g}{d\hat{Z}} \hat{Z} \quad (3)$$

Dla ogólnego schematu mostka (rys. 1) prąd  $\hat{I}_g$  w gałęzi wskaźnika równowagi wyrażony jest wzorem:

$$\hat{I}_g = \hat{E} \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_4 - \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Q}} \quad (4)$$

gdzie:  $\hat{Q} = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 (\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4) + \hat{Z}_3 \hat{Z}_4 (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) + \hat{Z}_g (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3) (\hat{Z}_2 + \hat{Z}_4)$



Rys. 1. Ogólny schemat mostka

Zależność określająca wartość mianownika  $\hat{Q}$ , podana we wzorze (4), odnosi się do przypadku gdy impedancja wewnętrzna źródła zasilania mostka jest równa zero<sup>x</sup>). Praktyczna realizacja tego przypadku może być przeprowadzona np. przez zastosowanie źródła zasilania o płynnej regulacji napięcia wyjściowego.

<sup>x</sup> W przypadku gdy impedancja wewnętrzna źródła zasilania  $\hat{Z}_E$  nie jest równa zero, wówczas wzór (4) pozostaje słuszny przy:

$$Q = \hat{Z}_1 \hat{Z}_2 (\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4) + \hat{Z}_3 \hat{Z}_4 (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) + \hat{Z}_E (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) (\hat{Z}_3 \hat{Z}_4) + \\ + \hat{Z}_g (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3) (\hat{Z}_2 + \hat{Z}_4) + \hat{Z}_g \hat{Z}_E (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_4)$$

Przyjmując, że impedancja porównawcza znajduje się w gałęzi  $\hat{Z}_3$  mostka (impedancja mierzona  $\hat{Z}_1$ ), czułość  $\hat{S}_{wm}$  można obliczyć zgodnie ze wzorem (3):

$$\hat{S}_{wm} = \hat{Z}_3 \frac{d\hat{I}_G}{d\hat{Z}_3} = \hat{Z}_3 \frac{\hat{E} - \hat{Z}_2 \hat{Q} - (\hat{Z}_1 \hat{Z}_4 - \hat{Z}_2 \hat{Z}_3) \frac{d\hat{Q}}{d\hat{Z}_3}}{\hat{Q}^2} \quad (5)$$

Dla stanu równowagi spełniona jest równość:

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_4 - \hat{Z}_2 \hat{Z}_3 = 0 \quad (6)$$

a zatem wzór (5) przyjmuje uproszczoną postać:

$$\hat{S}_{wm} = -\hat{E} \hat{Z}_3 \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Q}} = -\hat{E} \hat{Z}_1 \frac{\hat{Z}_4}{\hat{Q}} \quad (7)$$

Przekształcając wyrażenie  $\frac{\hat{Z}_4}{\hat{Q}}$  otrzymuje się<sup>x)</sup>:

$$\hat{S}_{wm} = -\frac{\hat{E}}{\hat{Z}_1} \cdot \frac{1}{\hat{G}(1+\hat{A}) + 1 + \frac{1}{\hat{B}}(1 + \frac{1}{\hat{A}})} \quad (8)$$

gdzie:  $\hat{A} = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3} = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_4}$ ;  $\hat{B} = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4}$ ;  $G = \frac{Z_G}{Z_1}$

Równanie (8) stanowi ogólny związek między względną czułością mostka i impedancjami mostka. Równanie to było przedmiotem szczegółowej dyskusji w pracy Gąssowskiego [1] z punktu widzenia doboru optymalnych stosunków  $\hat{A}$  oraz  $\hat{B}$  w celu uzyskania

<sup>x)</sup> Dla przypadku  $\hat{Z}_E \neq 0$  będzie:

$$\hat{S}_{wm} = -\frac{\hat{E}}{\hat{Z}_1} \cdot \frac{1}{[\hat{G}(1 + \hat{A}) + 1 + \frac{1}{\hat{B}}][\hat{D}(1 + \hat{B}) + 1 + \frac{1}{\hat{A}}]}$$

gdzie:  $\hat{D} = \frac{\hat{Z}_E}{\hat{Z}_1}$

największej czułości  $\hat{S}_{wm}$  w warunkach niezmiennącej się częstotliwości napięcia zasilania.

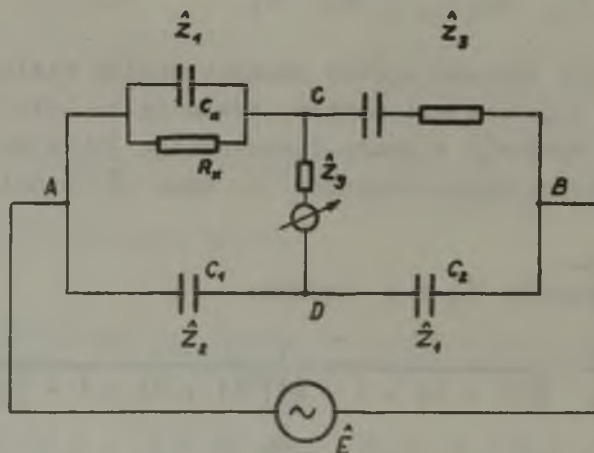
Zmiana częstotliwości napięcia zasilania w najbardziej ogólnym przypadku prowadzi do zmiany ("rozstrojenia") modułów i argumentów wszystkich impedancji mostka. "Rozstrojenie" to może w dodatku przebiegać różnie w poszczególnych impedancjach mostka zależnie od ich elementów składowych (R,L,C) i kombinacji połączeń tych elementów. Z tego powodu ogólna analiza wpływu zmian częstotliwości na czułość mostka jest ogromnie utrudniona.

W niniejszym artykule ograniczono się do przeprowadzenia szczegółowej analizy czułości  $\hat{S}_{wm}$  konkretnego układu mostkowego (mostek Fleminga-Dyke'a), znajdującego zastosowanie w badaniach materiałów izolacyjnych.

## 2. Czułość układu mostkowego Fleminga-Dyke'a

Schemat mostka Fleminga-Dyke'a przedstawiony jest na rys. 2.

Przyjęto, że impedancja wskaźnika równowagi ma tylko składową czynną, a więc:  $\hat{Z}_g = \hat{R}_g$ . Założenie to może być słuszne szczególnie w zakresie niskich częstotliwości, nie przekraczających 20-30 Hz. W tym zakresie częstotliwości, istnienie nie-



Rys. 2. Schemat mostka Fleminga-Dyke'a

wielkiej pojemności booznikującej wejście wskaźnika równowagi albo niewielkiej indukcyjności szeregowej, praktycznie nie ma wpływu na wielkość  $\hat{Z}_g$ .

Aby zrównoważyć przedstawiony na rys. 2 mostek, zawierający impedancję mierzoną w gałęzi  $\hat{Z}_1$ , w pozostałych gałęziach mostka należy załączyć następujące impedancje:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Z}_2 &= \frac{1}{j\omega C_1} \\ \hat{Z}_3 &= \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_4}{\hat{Z}_2} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x} \\ \hat{Z}_4 &= \frac{1}{j\omega C_2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wówczas odpowiednie stosunki (wzór (8)) wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_4} = \frac{C_2}{C_1} \\ \hat{B} &= \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{j\omega R_x C_1}{1 + j\omega R_x C_x} \\ \hat{G} &= \frac{\hat{Z}_g}{\hat{Z}_1} = \frac{R_g}{R_x} + j\omega C_x R_g \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Po podstawieniu zależności (10) do wzoru (8) i po odpowiednim przekształceniu otrzymuje się:

$$\frac{\hat{S}_{wm}}{\hat{E}} = \left( \frac{1}{R_x} + j\omega C_x \right) \cdot \frac{a}{b + j(\omega T' - \frac{1}{\omega T''})} \quad (11)$$

gdzie:  $a = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2}$ ;  $b = \frac{C_1 + C_x}{C_1 + C_2} + \frac{R_g}{R_x}$ ;

$T' = C_x R_g$ ;  $T'' = R_x C_1$



Wzór (11) podaje względną czułość mostka Fleminga-Dyke'a przypadającą na jednostkę napięcia zasilania i stanowi wyjściową zależność do analizy czułości mostka w funkcji częstotliwości. Wzór (11) składa się z dwóch członów:

$$\frac{\hat{S}_{wm}}{\hat{E}} = \hat{Y}_1 \cdot \hat{K} \quad (12)$$

gdzie:  $\hat{Y}_1 = \frac{1}{R_x} + j\omega C_x$ ;  $\hat{K} = \frac{a}{b + j(\omega T' - \frac{1}{\omega T''})}$

Pierwszy człon  $\hat{Y}_1$ , przedstawia admitancję obiektu mierzzonego, a więc stanowi wielkość narzuconą, przy pomocy której nie można wpłynąć na zmianę czułości mostka. Natomiast drugi człon,  $\hat{K}$  - nazywany w dalszym ciągu "współczynnikiem czułości mostka", charakteryzuje mostek i zależy od doboru pojemności stosunkowych  $C_1$  i  $C_2$  oraz oporności wskaźnika równowagi  $R_g$ .

Charakterystyka częstotliwościowa współczynnika  $K$ , przy stałych parametrach:  $a, b, T', T''$ , - przedstawia na płaszczyźnie Gaussa okrąg (rys. 3) o równaniu:

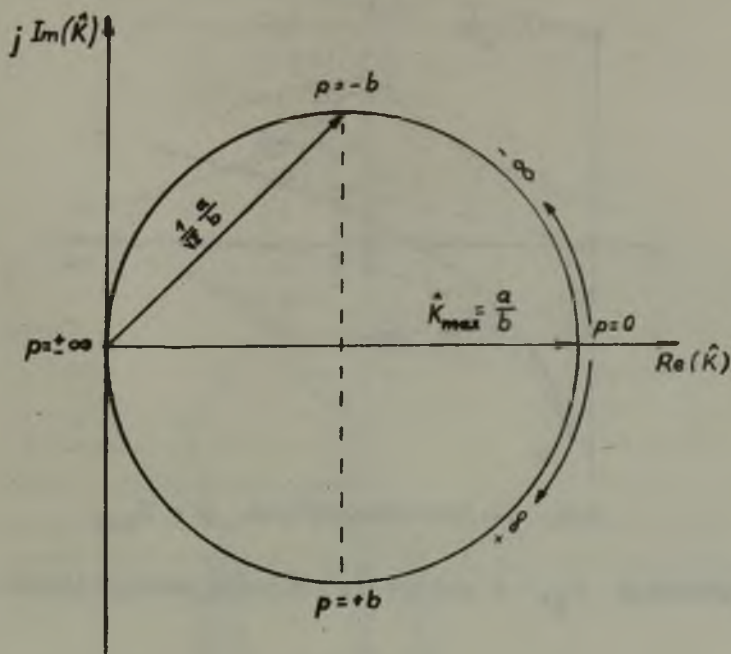
$$\hat{K} = \frac{a}{b + jp} \quad (13)$$

gdzie:  $p = \omega T' - \frac{1}{\omega T''}$  zmienna rzeczywista równania okręgu.

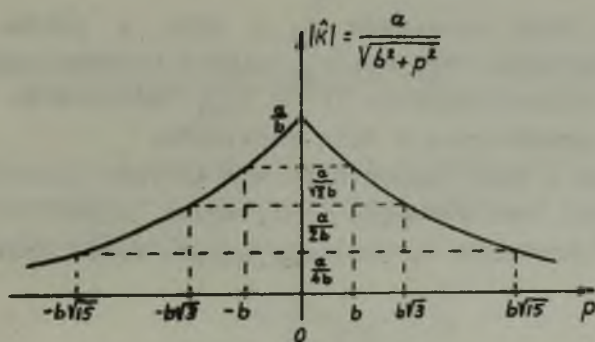
Na rys. 4 przedstawiono wykres zależności modułu współczynnika czułości  $\hat{K}$  od zmiennej  $p$ :

Znając zależność zmiennej  $p$  w funkcji  $\omega$  (rys. 5) można konstrukcyjnie wykreślić charakterystykę częstotliwościową modułu współczynnika czułości  $\hat{K}$ . Konstrukcja przedstawiona jest na rys. 6.

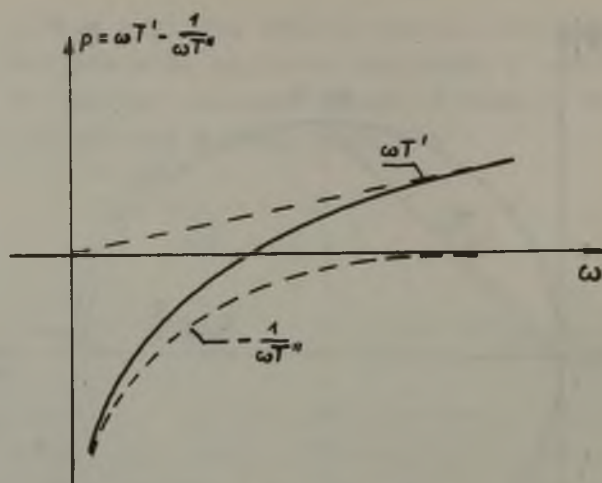
Charakterystyki częstotliwościowe współczynnika czułości mostka  $\hat{K}$  przedstawione na rys. 3 i rys. 6 pozwalają na wyodrębnienie pewnych wniosków praktycznych odnośnie optymalnego doboru parametrów  $a, b, T'$  i  $T''$ . Parametry te bezpośrednio zależą od przyjętych pojemności  $C_1$  i  $C_2$  oraz oporności wskaź-



Rys. 3. Charakterystyka częstotliwościowa współczynnika ozułości  $\hat{K}$



Rys. 4. Zależność modułu współczynnika ozułości  $\hat{K}$  od zmiennej  $p$

Rys. 5. Charakterystyka  $p = f(\omega)$ 

nika równowagi  $R_g$ , a ściślej od doboru następujących stosunków:

$$n = \frac{C_1}{C_2}; \quad x = \frac{C}{C_2}; \quad g = \frac{R_g}{R_x} \quad (14)$$

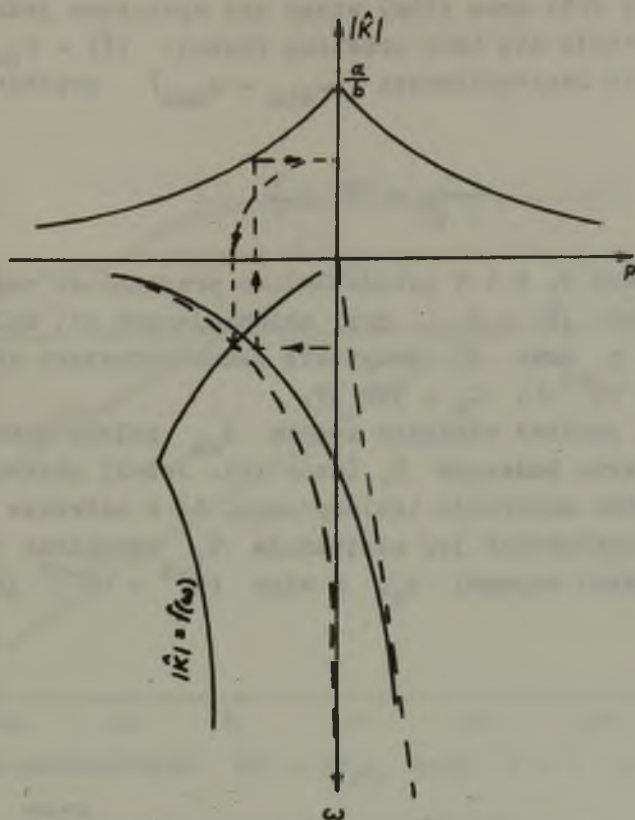
Optymalny dobór stosunków  $n$ ,  $x$  oraz  $g$  polega na przyjęciu takich wartości  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_g$ , aby w zadanym zakresie częstotliwości charakterystyka  $|\hat{K}| = f(\omega)$  odznaczała się możliwie płaskim przebiegiem i dużą amplitudą.

Analizując z tego punktu widzenia wykresy przedstawione na rys. 3, 4 i 6 oraz równanie (13), można określić następujące, praktyczne<sup>x)</sup> kryteria optymalnego doboru wyżej wymienionych stosunków:

$$g < x \ll n = 1 \quad (15)$$

<sup>x)</sup> Warunek (15) wystarcza, aby  $|\hat{K}| = f(\omega)$  osiągała wartości bliskie  $\frac{1}{2}$ ; teoretycznie istnieje możliwość osiągnięcia wartości bliskiej 1 przy spełnieniu warunku:  $g < x \ll n \rightarrow 0$ , którego realizacja jest praktycznie niemożliwa.





Rys. 6. Konstrukcja charakterystyki częstotliwościowej modułu współczynnika czułości mostka  $|K| = f(\omega)$

Stosunki  $x$  i  $g$  należy, oprócz warunku (15), dobrać odpowiednio do zadanego zakresu częstotliwości ( $\omega_{\min} - \omega_{\max}$ ) według zależności (15a):

$$x < \frac{1}{2} \omega_{\min} \cdot T_x \tag{15a}$$

$$g < \frac{1}{2 \omega_{\max} \cdot T_x}$$

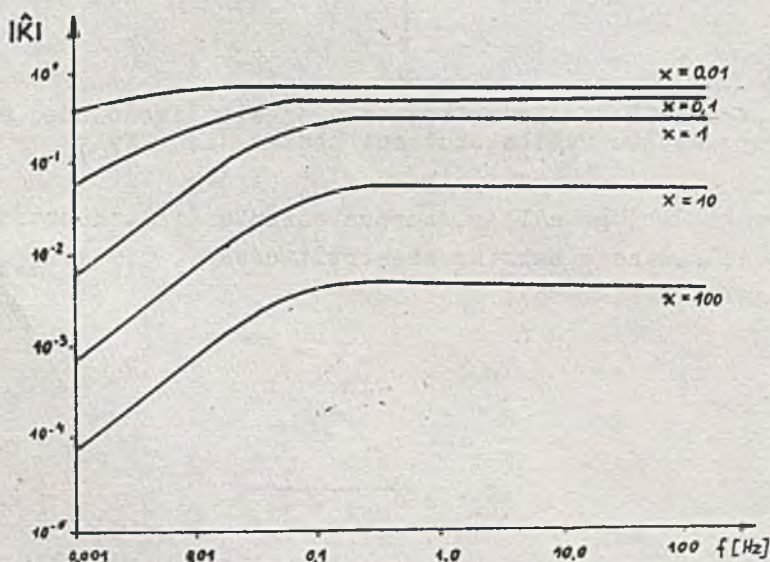
gdzie:  $T_x = R_x \cdot C_x$

Zależności (15) oraz (15a) winny być spełnione jednocześnie przez co uzyskuje się taki przebieg funkcji  $|\hat{K}| = f(\omega)$ , że w całym zakresie częstotliwości ( $\omega_{\min} - \omega_{\max}$ ) przybiera ona wartości:

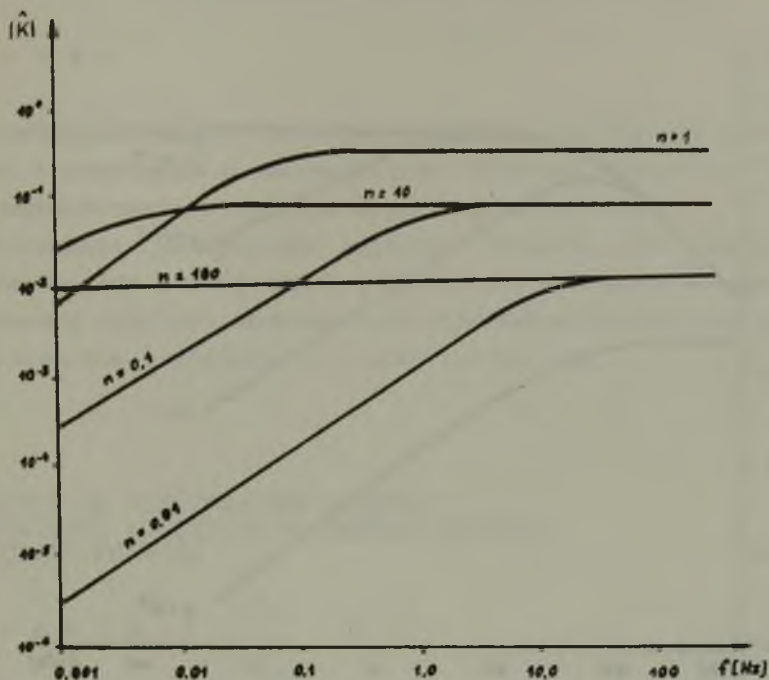
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < |\hat{K}| < \frac{1}{2}$$

Na rysunkach 7, 8 i 9 przedstawiono przykładowo rodziny charakterystyk  $|\hat{K}| = F(f)$  przy zmieniających się kolejno stosunkach  $x$ ,  $n$  oraz  $g$ . Wszystkie charakterystyki sporządzono dla  $R_x = 10^{10} \Omega$  i  $C_x = 500 \text{ pF}$ .

Całkowita ozułość względna mostka  $\hat{S}_{\text{wm}}$  zależy także od admitancji obiektu badanego  $\hat{Y}_1$  (wzór 12). Jeżeli obiektem badanym jest próbka materiału izolacyjnego, to w zakresie bardzo niskich częstotliwości jej admitancja  $\hat{Y}_1$  określona jest wartością składowej czynnej  $G_x$ , a więc  $10^{-8} - 10^{-12} \text{ [S]}$  a nawet mniej.



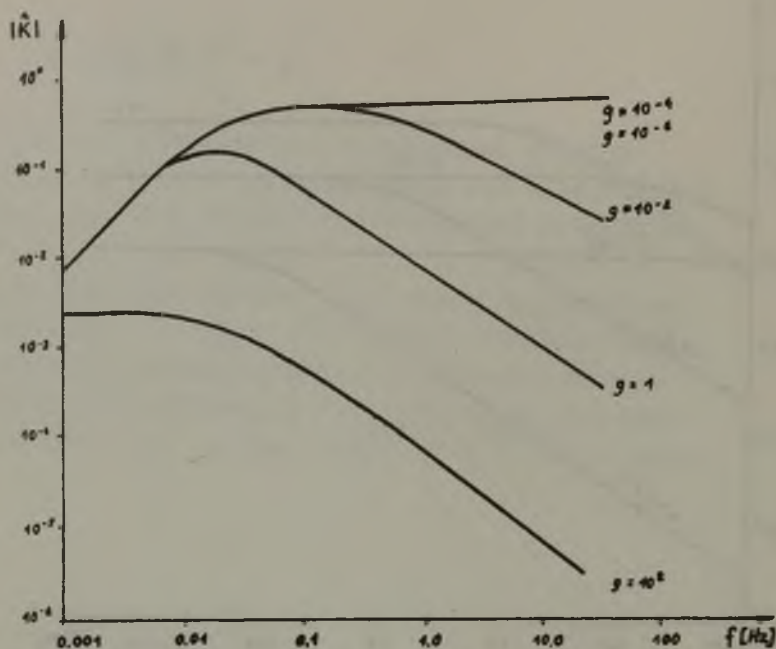
Rys. 7. Charakterystyki  $|\hat{K}| = F(f)$  przy  $n = 1$  i  $g = 10^{-4}$



Rys. 8. Charakterystyka  $|\hat{K}| = F(f)$  przy  $x = 1$  i  $g = 10^{-4}$

Wobec tego czułość  $\hat{S}_{wm}$  mimo optymalnego doboru pojemności gałęzi stosunkowych oraz oporności wskaźnika równowagi będzie stosunkowo niewielka. (Przy niewłaściwym doborze stosunków  $x, g$  oraz  $n$ , czułość  $\hat{S}_{wm}$  zdecydowanie maleje, osiągając wartości o kilka rzędów mniejsze - por. rys. 7, 8, 9). W takim przypadku, zwiększenie czułości całego układu mostkowego  $\hat{S}_w$  (wzór 2) można osiągnąć drogą zwiększenia napięcia zasilania mostka  $\hat{E}$  oraz doboru wskaźnika równowagi o odpowiednio dużej czułości  $\frac{d\alpha}{dI_g}$ .

W zakresie wyższych częstotliwości (powyżej 30 Hz) uzyskanie zadawalającej czułości układu mostkowego jest łatwiejsze, ponieważ ze wzrostem częstotliwości rośnie admitancja obiektu



Rys. 9. Charakterystyki  $|\hat{K}| = F(f)$  przy  $n = 1$  i  $x = 1$

badanego. W tym przypadku nawet niespełnienie warunków optymalnego doboru  $x$ ,  $g$  oraz  $n$  nie musi powodować zmniejszenia ozułości mostka.

Rękopis złożono w redakcji we wrześniu 1967 r.

#### LITERATURA

- [1] Gąsowski W.: Analiza ozułości mostków prądu zmiennego. Praca doktorska, Wydział Elektryczny Politechniki Wrocławskiej, 1965 r. (obszerny spis literatury)



АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОСТА ФЛЕМИНГА - ДЫКЕ'а  
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ЧАСТОТЫ НАПРЯЖЕНИЯ ПИТАНИЯ

Р е з ю м е

На основании общего уравнения чувствительности уравновешенного моста с линейными элементами типа Уитстона составлено частотные характеристики чувствительности моста Ф-Д.

Приведено практические критерии оптимального подбора пропорциональных плечей моста Ф-Д и указателя равновесия с целью получения возможно максимальной чувствительности при частоте, изменяющейся в пределах от 0,001 по 30,0 Гц.

ANALYSIS OF FLEMING-DYKE BRIDGE  
SENSIBILITY ACCORDING TO SUPPLY VOLTAGE  
FREQUENCY CHANGES

S u m m a r y

The frequency characteristics of F.-D. bridge sensibility was made on base of general sensibility equation of balanced Wheatstone bridge of linear elements.

Practical criterions of optimum selection of F.-D. bridge relative branches and balance indicator to obtain the possible greater sensibility at frequency which changes from 0,001 to 30,0 Hz, were given.