ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971
Seria: ELEKTRYKA z. 30 Nr kol. 298

MAREK BRODZKI
Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Ogólnej

PEWNE ZAGADNIENIA TEORETYCZNE ZWIĄZANE Z TRANSPORTEM CIECZY ZA POMOCĄ POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO CZĘŚĆ I. RÓWNANIA MAGNETOHYDRODYNAMIKI

Streszczenie. Praca ta zawiera kowariantne (względem współrzędnych przestrzennych dla przestrzeni metryczno-euklidesowej) sformułowanie równań pola elektromagnetycznego, powolnego ruchu cieczy przewodzącej prąd elektryczny i transportu ciepła w ośrodku jednorodnym i izotropowym - czyli równań magnetohydrodynamiki.

Jako przygotowanie do konkretnych obliczeń wprowadzone są składowe fizyczne pewnych wektorów i tensorów oraz wyrażone z ich pomocą podstawowe operacje różniczkowe i algebraiczne występujące w ww. równaniach. Nie są tu natomiast rozpatrywane warunki początkowe i brzegowe.

1. Wstęp

Praca ta (łącznie z następnym artykułem), powstała w związku z pojawieniem się problemu transportu płynnego metalu (surówki) podczas procesu jego odżużlania. Posiada ona charakter czysto teoretyczny i w związku z tym jej wyniki nie będą na ogół nadawały się od razu do wykonania konkretnych obliczeń.

Na skutek poczynionych uproszczeń (problem jest matematycznie zawiły), pod względem ilościowym można oczekiwać jedynie dokładności szacunkowej; natomiast wskazana została droga rozwiązywania problemu i skomentowane ww. uproszczenia. Dodatkową korzyścią tego ujęcia jest możliwość rozpatrywania nie tylko płynnych metali lecz na ogół dowolnej cieczy przewodzącej prąd elektryczny. Jak można się domyślać istotny będzie problem znalezienia rozkładu pola elektromagnetycznego w jednorodnej i izotropowej (pod względem rozpatrywanych własności) cieczy, będącej w ruchu, który należy również wyznaczyć. Jest to więc zagadnienie należące do magnetohydrodynamiki.

Najpierw podamy jej równania w postaci kowariantnej słusznej dla krzywoliniowych układów współrzędnych przestrzennych. (Będziemy bowiem posługiwać się układem walcowym).

2. Równania pola

Są to naturalnie równania Maxwella. Wypiszemy je w inercjalnym układzie odniesienia, względem którego ośrodek posiada w punkcie P prędkość $\overline{v}$.

$$\text{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial(\mu\bar{H})}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\text{div}(\varepsilon\bar{E}) = \varrho_{\text{ład}}, \tag{2}$$

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}_{\bullet} + \frac{\partial(\varepsilon\bar{E})}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\text{div}(\mu\bar{H}) = 0. \tag{4}$$

(Oznaczenia zastosowane tu są ogólnie przyjęte i nie wymagają objaśnień). Ponieważ prędkość v jest rzędu metrów na sekundę, więc zachodzi związek

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1.$$

Skutkiem tego z bardzo dobrym przybliżeniem mamy:

$$\varrho_{\text{ład}} = 0, \tag{5}$$

$$\bar{J} = \gamma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \tag{6}$$

(Dla stanów przejściowych, w układzie odniesienia, w którym ładunek spoczywa, podobnie gdy powoli porusza się, zanika on bardzo szybko; a dla sinusoidalnych w ogóle nie występuje, patrz: [4], str. 229, 230). W dalszym ciągu zakładamy, że spełnione są związki:

$$\varepsilon(P),\ \ \mu(P),\ \gamma(P)\ \in C(P), \tag{7}$$

gdzie "C(P)" oznacza zbiór funkcji stałych względem punktu P o trzech współrzędnych, przestrzennych i czasowej (jednorodność ośrodka).

Równania Maxwella wypisane zostały w notacji dotyczącej współrzędnych kartezjańskich. Nadamy teraz tej notacji sens rozszerzony, taki, by dotyczyła również układów krzywoliniowych (przestrzennie). (Warunki regularności przekształceń układów współrzędnych oraz przynależności ich do tzw. pseudogrupy przekształceń omówione są w [5], R. I). W tym celu zdefiniujemy operatory rotacji i dywergencji we współrzędnych krzywoliniowych patrz: [5], R. IX).

$$(\text{rot}\,\bar{v})^k = e^{klm}\,\nabla_l\, v_m = e^{klm}\,\nabla_l\, g_{mn} v^n, \tag{8}$$

gdzie "$\nabla_l\, v_m$", ("$\nabla_l\, v^n$") oznacza współrzędne pochodnej kowariantnej pola wektorowego o współrzędnych v_m, (v^n):

$$\nabla_l\, v_m = \partial_l\, v_m - \Gamma^n_{lm}\, v_n, \tag{9}$$

$$\nabla_l\, v^n = \partial_l\, v^n + \Gamma^n_{lm}\, v^m. \tag{9a}$$

(Obowiązuje umowa sumacyjna dla dwu podobnych wskaźników na różnych poziomach). "Γ^n_{lm}" oznacza pole obiektów równoległego przeniesienia powiązane z polem tensora metrycznego o współrzędnych g_{lm} w sposób następujący:

$$\Gamma^n_{lm} = \frac{1}{2} g^{np} (\partial_l g_{mp} + \partial_m g_{pl} - \partial_p g_{lm}), \tag{10}$$

(patrz: [5], R. V, R. VII lub: |6|, R. II).

Symbol e^{klm} oznacza współrzędne n-wektora Ricciego (n = 3), (patrz: [5], R. III):

$$e^{klm} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{klm}, \tag{11}$$

$$g = \det \| g_{lm} \|, \tag{12}$$

"ε^{klm}" oznacza z kolei współrzędną tzw. symbolu Ricciego zdefiniowanego tamże. Wzór (8) określa więc pole wektorów kontrawariantnych pokrywające się, jak łatwo sprawdzić, w układzie kratezjańskim ($g_{lm} = \delta_{lm}$) ze zwykłą definicją rotacji. Uogólniona definicja dywergencji pola wektorów kontrawariantnych o współrzędnych v^l jest następująca:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \nabla_l v^l. \tag{13}$$

Wzór (13) określa pole skalarów i także pokrywa się ze zwykłą definicją dywergencji gdy zachodzi: ($g_{lm} = \delta_{lm}$).
W ten sposób równania (1-4) uzyskały rozszerzony sens, o którym była mowa, (patrz: [6], R. VI). Ich słuszność we współrzędnych krzywoliniowych można bowiem motywować wektorowym charakterem wielkości $\bar{E}$, $\bar{H}$, $\bar{J}$, skalarnym "$\varrho_{\text{ład}}$", "ε", "μ", współzmienniczością wymienionych równań i ich spełnieniem w kartezjańskich układach współrzędnych.
Uwaga: "$\bar{E}$" oznacza tzw. wektor biegunowy, "$\bar{H}$" - osiowy, różnica polega na tym, że w regule transformacyjnej dla "$\bar{H}$" występuje człon sgn J, gdzie "J" oznacza jakobian przekształcenia układu współrzędnych. Następnie przekształcimy równania (1-4) eliminując z nich zmienną $\bar{E}$, nieistotną w wyznaczaniu ruchu cieczy przy braku gęstości objętościowej ładunku. Wykorzystamy tu tożsamości:

$$e^{hij} \nabla_i g_{jk} e^{klm} \nabla_l g_{mn} v^n = g^{hi} \nabla_i \nabla_j v^j - g^{ij} \nabla_i \nabla_j v^h, \tag{14}$$

czyli w zapisie tradycyjnym:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{v}) - \Delta \bar{v}, \tag{14a}$$

Tożsamość ta zachodzi, gdy tensor krzywizny jest równy zeru oraz: (sgn g>0)
W naszym przypadku ma to miejsce, bowiem mamy do czynienia z tzw. przestrzenią metryczno-euklidesową (patrz: [5], R. VIII).
Oraz tożsamość:

$$e^{hij}\,\nabla_i\, g_{jk}\, e^{klm}\, g_{ln}\, g_{mp}\, u^n\, v^p =$$

$$= v^p\,\nabla_p\, u^h - u^p\,\nabla_p\, v^h + u^h\,\nabla_p\, v^p - v^h\,\nabla_p\, u^p, \qquad (15)$$

czyli:

$$\mathrm{rot}(\bar{u}\times\bar{v}) = (\bar{v}.\nabla)\,\bar{u} - (u.\nabla)\bar{v} + \bar{u}\,\mathrm{div}\,\bar{v} - \bar{v}\,\mathrm{div}\,\bar{u}, \qquad (15a)$$

gdzie: (sgn g > 0).
Dla uniknięcia dwuznaczności zapis tradycyjny dotyczy tu wektorów kontrawiariantnych.
Na obie strony równania (3) działamy operatorem rotacji, wykorzystując tożsamość (14a):

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{H} - \Delta\bar{H} = \mathrm{rot}\,\bar{J} + \mathrm{rot}\,\frac{\partial(\varepsilon\bar{E})}{\partial t}. \qquad (16)$$

Następnie stosujemy wzory (1), (4), (6), (7):

$$\Delta\bar{H} = \mu\gamma\,\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\bar{H}}{\partial t^2} - \mu\gamma\,\mathrm{rot}\,(\bar{v}\times\bar{H}). \qquad (17)$$

Ponieważ będziemy zajmowali się polami sinusoidalnie zależnymi od czasu o frekwencji 50Hz, więc dla ośrodka o przewodności właściwej γ rzędu $10^6\,\Omega^{-1}\,m^{-1}$ i ($\varepsilon\approx\varepsilon_0$) mamy: ($\frac{\varepsilon\omega}{\gamma}\sim 10^{-15}$), czyli drugi składnik prawej strony wzoru (17) można pominąć w porównaniu z pierwszym (pole prawie stacjonarne). W dalszym ciągu stosujemy tożsamość (15) i wzory (4),(7), otrzymując:

$$\frac{1}{\mu\gamma}\,\Delta H^h + H^i\,\nabla_i\, v^h = v^i\,\nabla_i\, H^h + H^h\,\nabla_i\, v^i + \frac{\partial H^h}{\partial t}. \qquad (18)$$

Równanie to wraz z uogólnionym równaniem (4):

$$\nabla_i\, H^i = 0, \qquad (19)$$

służy do określenia pola magnetycznego przy zadanym ruchu ośrodka.

3. Równania ruchu cieczy

Są nimi równania Naviera-Stokesa i ciągłości. W kartezjańskich układach współrzędnych (w inercjalnych układach odniesienia) mają one postać ([1], R. VIII):

$$\frac{\partial v^h}{\partial t} + v^i \partial_i v^h = -\frac{1}{\varrho}\delta^{hi}\partial_i p +$$

$$+ \nu\delta^{ij}\partial_i\partial_j v^h + \left(\frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\nu}{3}\right)\delta^{hi}\partial_i\partial_j v^j + \frac{1}{\varrho} f^h, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \partial_i(\varrho v^i) = 0, \qquad (21)$$

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}. \qquad (22)$$

Oznaczenia:

"f^h" – gęstość objętościowa sił zewnętrznych,

"p" – ciśnienie,

"ϱ" – gęstość właściwa,

"η" – dynamiczny współczynnik lepkości,

"ζ" – współczynnik lepkości dylatacyjnej,

"ν" – kinematyczny współczynnik lepkości,

"δ^{hi}" – delta Kroneckera ([5], R. I).

W kartezjańskich układach współrzędnych można w sposób współzmienniczy przyrównać współrzędne k_o i kontrawariantnego wektora prędkości, obecność wskaźników na różnych poziomach oraz delty Kroneckera ma na celu łatwiejsze przejście do równań obowiązujących we współrzędnych krzywoliniowych ([6], R. VI). Oto odpowiedniki równań (20), (21), dla wyżej wymienionych współrzędnych:

$$\frac{\partial v^h}{\partial t} + v^i \nabla_i v^h = -\frac{1}{\varrho} g^{hi}\nabla_i p + \nu\Delta v^h +$$

$$+ \left(\frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\nu}{3}\right) g^{hi}\nabla_i\nabla_j v^j + \frac{1}{\varrho} f^h, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla_i(\varrho v^i) = 0. \qquad (24)$$

Przejście powyższe uzasadniamy, podobnie jak w przypadku równań pola, wektorowym charakterem transformacji "v^h", "f^h", skalarnym (p, ϱ, η, ζ), współzmienniczością równań (23), (24) oraz ich spełnieniem dla współrzędnych kartezjańskich - równania (20), (21).

Składnik występujący po lewej stronie równania (23) oznacza pochodną substancjalną prędkości o współrzędnych v^h, pierwszy składnik po prawej stronie (po pomnożeniu jej przez "ϱ"), oznacza gęstość siły pochodzącą od gradientu ciśnienia w cieczy, ostatni - gęstości sił pochodzenia elektromagnetycznego i grawitacyjnego. Drugi i trzeci występują na skutek tarcia: można ich postać objaśnić w następujący sposób.
Tesnor naprężeń pochodzących od tarcia określony jest wzorem:

$$\sigma_{ik} = \eta(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i - \frac{2}{3} g_{ik} \nabla_l v^l) + \zeta g_{ik} \nabla_l v^l, \tag{25}$$

obejmuje on również tarcie dylatacyjne związane z współczynnikiem ζ.
Są trudności z jego wyznaczeniem eksperymentalnym i niektórzy autorzy przyjmują, że zachodzi relacja: $\zeta = 0$, (np. [3], t. I, cz. 1, B, R. VI). Naprężenia zależą, jak widać, od zmian prędkości cieczy w funkcji położenia oraz są przedstawione tensorem symetrycznym. Gęstość sił tarcia $\underset{(t)}{f^h}$ określona jest wzorem:

$$\underset{(t)}{f^h} = g^{hi} \nabla_j (g^{jk} \sigma_{ik}). \tag{26}$$

Do wzoru (26) podstawiamy teraz wzór (25) i korzystamy z zależności:

$$\nabla_i g_{jk} = 0, \quad \nabla_i g^{jk} = 0, \tag{27}$$

które są spełnione, jeśli obiekt równoległego przeniesienia jest określony wzorem (10), czyli tzw. symbolami Christoffela drugiego rodzaju ([5], R. VII). Następnie stosujemy zależność:

$$\nabla_i \nabla_j v^k = \nabla_j \nabla_i v^k, \tag{28}$$

która jest spełniona w przestrzeni metryczno-euklidesowej oraz związki:

$$v_i = g_{ij} v^j, \tag{29}$$

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k, \tag{30}$$

po czym otrzymujemy:

$$\underset{(t)}{f^h} = \eta \Delta v^h + (\zeta + \frac{\eta}{3}) g^{hi} \nabla_i v_j v^j. \quad (31)$$

W wyprowadzeniu wzoru (31) korzystaliśmy naturalnie z tego, że współczynnik η, ζ w ośrodku jednorodnym nie zależą od zmiennych przestrzennych, założymy również ich niezależność od zmiennej czasowej to samo stwierdzimy odnośnie "ϱ", czyli mamy:

$$\varrho(p), \eta(p), \zeta(p) \in C(p). \quad (32)$$

Założenie jednorodności odnośnie gęstości właściwej ϱ oznacza, wobec rozmaitych ciśnień i temperatur panujących w cieczy w różnych punktach i chwilach czasu, nieściśliwość cieczy (podobna dyskusja dla "η" i "ζ"). Jest to założenie dopuszczalne, gdy prędkość cieczy (względem rury) jest znacznie mniejsza od lokalnej prędkości głosu w niej (słaba zależność gęstości od ciśnienia) oraz zależność gęstości właściwej od temperatury jest niewielka i temperatura w funkcji współrzędnych przestrzennych i czasowej zmienia się niewiele. Liczbowo chodzi tu o oszacowanie wyrażenia $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial T} \frac{dT}{dt} \Delta t$ gdzie, "Δt" oznacza czas procesu, nap. przejścia cząstki przez pewien obszar. Wyrażenie to powinno być znacznie mniejsze od jedności podobnie jak dla "p") ([2], R. I, VI). Założenie to uprości równanie ciągłości do postaci:

$$\nabla_i v^i = 0, \quad (33)$$

co spowoduje z kolei uproszczenie równań Naviera-Stokesa:

$$\frac{\partial v^h}{\partial t} + v^i \nabla_i v^h = -\frac{1}{\varrho} g^{hi} \nabla_i p + \nu \Delta v^h + \frac{1}{\varrho} f^h. \quad (34)$$

Nie występuje w nim teraz współczynnik lepkości dylatacyjnej ζ. Ogólnie należy dołączyć tu jeszcze równanie stanu ośrodka wiążące jego gęstość z ciśnieniem i temperaturą bezwzględną T:

$$\varrho = \varrho(p, T), \quad (35)$$

W przypadku ośrodka nieściśliwego mamy po prostu:

$$\varrho \in C(p, T). \quad (36)$$

Zajmiemy się teraz określeniem gęstości sił zewnętrznych o współrzędnych f^h.

$$f^h = \underset{(em)}{f^h} + \underset{(g)}{f^h}. \quad (37)$$

"$\underset{(em)}{f^h}$" - gęstość objętościowa sił elektromagnetycznych,

"$\underset{(g)}{f^h}$" - gęstość objętościowa sił grawitacyjnych,

$$\underset{(em)}{f^h} = \mu e^{hij}\, g_{ik}\, g_{jl}\, j^k\, H^l, \tag{38}$$

czyli w zapisie tradycyjnym:

$$\underset{(em)}{\vec{f}} = \mu(\vec{J} \times \vec{H}). \tag{38a}$$

Gęstość prądu $\vec{J}$ można obliczyć na podstawie wzoru (3), wyznaczywszy uprzednio rozkład pola. We wzorze tym opuszczamy składnik $\frac{\partial(\varepsilon \vec{E})}{\partial t}$ na mocy komentarza do wzoru (17). Czyli:

$$j^h = e^{hij}\, \nabla_i\, g_{jk}\, H^k. \tag{39}$$

Dla małych prędkości ośrodka: ($\frac{v}{c} \ll 1$) i słabego pola grawitacyjnego powodującego je (pole ziemskie), można założyć newtonowskie oddziaływanie między tym polem i materią, czyli:

$$\underset{(g)}{f^h} = \varrho g^h. \tag{40}$$

"g^h" - natężenie pola grawitacyjnego.

Ponieważ mamy do czynienia z polem grawitacyjnym stałym i interesujemy się obszarem niewielkim w porównaniu z jego źródłem, więc mamy:

$$g^h(p) \in C(p). \tag{41}$$

4. Równanie transportu ciepła

W równaniu tym uwzględnimy przewodzenie i unoszenie ciepła, ponieważ ośrodek jest w ruchu; jest ono po prostu bilansem cieplnym jednostki objętości cieczy ([1], R. VIII). Ponieważ mechanizm otrzymywania postaci tego równania obowiązującej dla współrzędnych krzywoliniowych jest podobny jak w przypadkach poprzednich, więc użyjmy ją od razu:

$$\varrho T \frac{ds}{dt} = g^{jk}\, \sigma_{ik}\, \nabla_j\, v^i + g^{ij}\, \nabla_i(\varkappa \nabla_j\, T) +$$

$$+ \frac{1}{\sigma}\, g_{ij}\, j^i\, j^j. \tag{42}$$

"s" - entropia jednostki masy cieczy,
"$\varkappa$" - współczynnik przewodzenia ciepła,
"γ" - elektryczna przewodność właściwa.

Z termodynamiki wiadomo, że ([3], t. 1, cz. 2, F):

$$\varrho T\, ds = dQ = \varrho C_p\, dT + \varrho \Lambda_p\, dp. \tag{43}$$

"C_p" - ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem (na jednostkę masy),
"Λ_p" - ciepło utajone przy zmianie ciśnienia (na jednostkę masy)

oraz:

$$\Lambda_p = -T \frac{\partial(\frac{1}{\varrho})}{\partial T} \tag{44}$$

Wyrażenie po lewej stronie wzoru (42) przedstawia ilość ciepła wydzielonego w jednostce objętości poruszającej się cieczy w jednostce czasu; pierwszy składnik po prawej stronie - energię rozproszoną (w powyższych warunkach) na skutek lepkości, drugi zyskaną na skutek przewodnictwa cieplnego, trzeci ciepło Joule'a. Do wzoru (42) podstawiamy teraz wzory (43), (25), korzystając z przekształceniach z zależności (30), z definicji pochodnej substancjalnej, definicji laplasjanu skalara:

$$\Delta T = g^{ij}\, \nabla_i\, \nabla_j\, T \tag{45}$$

oraz zakładamy:

$$\varkappa(p),\ C_p(p), \Lambda_p(p) \in C(p), \tag{46}$$

to znaczy jednorodność cieczy pod względem termicznym. Tym samym uznajemy wielkości te za niezależne od temperatury i ciśnienia. Wówczas otrzymujemy:

$$\varrho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i\, \nabla_i\, T\right) + \varrho\Lambda_p\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v^i\, \nabla_i p\right) =$$

$$= 2\eta\left[v_{ij}\, v^{ij} - \frac{1}{3}(\nabla_i\, v^i)^2\right] + \zeta\,(\nabla_i\, v^i)^2 +$$

$$+ \varkappa\Delta T + \frac{1}{\gamma}\, g_{ij}\, j^i\, j^j. \tag{47}$$

Pochodne kowariantne skalarów T, p są oczywiście równe odpowiednim pochodnym cząstkowym. We wzorze (47) przyjmujemy z definicji:

$$v_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad v^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^i v^j + \nabla^j v^i), \tag{48}$$

$$\nabla^i v^j = g^{ik} \nabla_k v^j. \tag{49}$$

(We wzorze (49) chodzi wyłącznie o skrócenie pisowni - stąd definicja "$\nabla^i v^j$").

Jeśli ciecz jest nieściśliwa, to na mocy wzoru (44) mamy: ($\varkappa_p = 0$) oraz korzystając ze wzoru (33) otrzymujemy uproszczenie równania (47):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \nabla_i T = \frac{2\nu}{C_p} v_{ij} v^{ij} + \frac{\chi}{\varrho C_p} \Delta T +$$

$$+ \frac{1}{\varrho C_p \gamma} g_{ij} j^i j^j. \tag{50}$$

(Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu C_p jest równe teraz ciepłu właściwemu przy stałej objętości C_v).

5. Podsumowanie otrzymanych równań

Równania (18), (19), (23), (24), (35), (37), (38), (39),(40),(47) wraz z zastrzeżeniami dotyczącymi jednorodności (7), (32) (ewentualnie bez funkcji $\varrho(p)$), (46) oraz pola grawitacyjnego (41) stanowią podstawę magnetohydrodynamiki ośrodków jednorodnych i izotropowych. W przypadku ośrodków nieściśliwych równania (23), (24), (35), (47) należy kolejno zastąpić równaniami (34), (33), (36), (50); upraszcza się również równanie (18) na skutek spełnienia równania (33).

Dla jednoznacznego ich rozwiązania niezbędne jest poprawne postawienie warunków początkowych i brzegowych. Zagadnieniem tym w całej rozciągłości nie będziemy się zajmować. Przewidywanie tych warunków na drodze fizykalnej intuicji nie byłoby prawdopodobnie zbyt trudne,ale wówczas ścisły dowód jednoznaczności rozwiązania wymienionego układu równań różniczkowych mógłby być bardzo uciążliwy. Poza tym konkretny model, który rozwiążemy, będzie w porównaniu z ogólnym problemem bardzo uproszczony i tam będą też sformułowane niezbędne warunki początkowe i brzegowe.

6. Składowe fizyczne

Podczas rozwiązywania konkretnych problemów przy użyciu współrzędnych ortogonalnych, często wygodnie jest wprowadzić tzw. składowe fizyczne wektorów lub tensorów ([6], R. V).

W przestrzeni o formie metrycznej:

$$(dl)^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

$$g_{ij} = g_{|ii|}\, \delta_{ij},\ g_{ii} > 0, \tag{51}$$

wprowadzamy wektory kontrawariantne o współrzędnych $\underset{(k)}{\lambda}^i$ styczne kolejno do k-tej linii parametrycznej układu współrzędnych:

$$\underset{(k)}{\lambda}^i = \underset{(k)}{e}^i \frac{dx^k}{\underset{(k)}{dl}},\quad \underset{(k)}{e}^i \stackrel{*}{=} \underset{(k)}{\delta}^i. \tag{52}$$

(Uwaga: ujęcie wskaźnika w dwie pionowe kreski lub nawiasy, oznacza zakaz sumowania względem niego). Znak $\stackrel{*}{=}$ dotyczy równości wyłącznie w rozpatrywanym układzie współrzędnych. Tensor metryczny o współrzędnych g_{ij} odnosi się do przestrzeni metryczno-euklidesowej, dotyczy tylko współrzędnych przestrzennych i nie ma na niego wpływu słabe pole grawitacyjne o natężeniu $\bar{g}$. Następnie żądamy, by wektory te były jednostkowe, czyli:

$$g_{ij}\, \underset{(k)}{\lambda}^i\, \underset{(l)}{\lambda}^j = \underset{(kl)}{\delta}. \tag{53}$$

(Zachodzi dodatkowo ortogonalność wprowadzonych wektorów dla różnych linii parametrycznych). Stąd otrzymujemy:

$$\underset{(k)}{\lambda}^i = \underset{(k)}{e}^i \frac{1}{\underset{(k)}{h}},\quad \underset{(k)}{h} = \sqrt{g_{kk}}. \tag{54}$$

Tworzymy jednostkowy wektor kowariantny o współrzędnych $\underset{(k)}{\lambda}_i$:

$$\underset{(k)}{\lambda}_i = g_{ij}\, \underset{(k)}{\lambda}^j = \underset{(k)}{e}_i\, \underset{(k)}{h},\quad \underset{(k)}{e}_i \stackrel{*}{=} \underset{(k)}{\delta}_i. \tag{55}$$

(Uwaga: wektory $\underset{(k)}{e}^i$ oraz $\underset{(k)}{e}_i$ nie są powiązane przy pomocy nasuwania tensora metrycznego; ich współrzędne są równe deltom Kroneckera w rozpatrywanym układzie współrzędnych). Teraz na dowolny tensor mieszany o współrzędnych $T^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_1 \ldots \nu_s}$ nasuwamy zdefiniowane wektory otrzymując składowe fizyczne tensora mieszanego:

$$(k_1 \ldots k_r^T; l_1 \ldots l_s) = T^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \underset{(k_1)}{\lambda}{}_{\mu_1} \ldots \underset{(k_r)}{\lambda}{}_{\mu_r} \underset{(l_1)}{\lambda}{}^{\nu_1} \ldots \underset{(l_s)}{\lambda}{}^{\nu_s} \equiv$$

$$\equiv T^{k_1 \ldots k_r}{}_{l_1 \ldots l_s} \underset{(k_1)}{h} \ldots \underset{(k_r)}{h} \frac{1}{\underset{(l_1)}{h}} \ldots \frac{1}{\underset{(l_s)}{h}} . \tag{56}$$

Zaletą takiej operacji jest możność identyfikacji składowych fizycznych w lokalnych układach kartezjańskich ze współrzędnymi ko lub kontrawariantnymi ww. obiektów, które wówczas nie różnią się między sobą; stąd dodatkowo wszystkie składowe fizyczne tego samego obiektu mają ten sam wymiar (jeśli naturalnie w układzie kartezjańskim współrzędne obiektu spełniają ten warunek - co zawsze zachodzi).

7. Zastosowanie składowych fizycznych

Pozostaje teraz kwestia zastosowania składowych fizycznych do równań magnetohydrodynamiki. Ponieważ w konkretnych rachunkach stosowany będzie walcowy układ współrzędnych, nie opłaca się podawać wyżej wymienionych równań z użyciem składowych fizycznych dla dowolnego ortogonalnego układu współrzędnych. W równaniach tych powtarza się szereg członów zawierających pochodne kowariantne pól wektorowych. Zajmiemy się wobec tego tymi członami. Walcowy układ współrzędnych posiada następującą metrykę odległościową:

$$(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\alpha)^2 + (dz)^2, \tag{57}$$

czyli:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1,$$

$$g_{ij} = 0, \quad \text{dla: } i \neq j, \tag{58}$$

a z drugiej części wzoru (54) wynika:

$$\underset{(1)}{h} = 1, \qquad \underset{(2)}{h} = r, \qquad \underset{(3)}{h} = 1. \tag{58a}$$

Korzystając ze wzoru (10), stwierdzamy, że następujące współrzędne symboli Christoffela 2-rodzaju są różne od zera:

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}. \tag{59}$$

Na podstawie wzorów (9a), (59), (56), (58a) mamy:

$$
\begin{aligned}
\nabla_r v^r &= \nabla_r v_{(r)} = \partial_r v_{(r)},\\
\nabla_\alpha v^r &= \nabla_\alpha v_{(r)} = \partial_\alpha v_{(r)} - v_{(\alpha)},\\
\nabla_z v^r &= \nabla_z v_{(r)} = \partial_z v_{(r)},\\
\nabla_r v^\alpha &= \nabla_r\left(\frac{v_{(\alpha)}}{r}\right) = \partial_r\left(\frac{v_{(\alpha)}}{r}\right) + \frac{v_{(\alpha)}}{r^2},\\
\nabla_\alpha v^\alpha &= \nabla_\alpha\left(\frac{v_{(\alpha)}}{r}\right) = \frac{1}{r}\partial_\alpha v_{(\alpha)} + \frac{v_{(r)}}{r},\\
\nabla_z v^\alpha &= \nabla_z\left(\frac{v_{(\alpha)}}{r}\right) = \frac{1}{r}\partial_z v_{(\alpha)},\\
\nabla_r v^z &= \nabla_r v_{(z)} = \partial_r v_{(z)},\\
\nabla_\alpha v^z &= \nabla_\alpha v_{(z)} = \partial_\alpha v_{(z)},\\
\nabla_z v^z &= \nabla_z v_{(z)} = \partial_z v_{(z)}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Obliczamy teraz dywergencję pola wektorowego według wzoru (13):

$$\nabla_l v^l = \frac{1}{r}\partial_r(r\, v_{(r)}) + \frac{1}{r}\partial_\alpha v_{(\alpha)} + \partial_z v_{(z)}. \tag{61}$$

Współrzędne rotacji pola wektorowego obliczone z pomocą wzoru (8):

$$(\operatorname{rot}\bar{v})^r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_{(z)}}{\partial\alpha} - \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial z},$$

$$(\mathrm{rot}\ \bar{v})^{\alpha} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_{(r)}}{\partial z} - \frac{\partial v_{(z)}}{\partial r}\right), \tag{62}$$

$$(\mathrm{rot}\ \bar{v})^{z} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\, v_{(\alpha)})}{\partial r} - \frac{\partial v_{(r)}}{\partial \alpha}\right).$$

Laplasjan skalarny, (wzór (45)):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial\alpha^{2}} + \frac{\partial^{2}\varphi}{\partial z^{2}}. \tag{63}$$

Laplasjan wektorowy (z porównania wzorów (14) i (14a)):

$$\Delta v^{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{(r)}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2} v_{(r)}}{\partial\alpha^{2}} + \frac{\partial^{2} v_{(r)}}{\partial z^{2}} - \frac{1}{r^{2}}\left(v_{(r)} + 2\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial\alpha}\right),$$

$$\Delta v^{\alpha} = \left[\frac{1}{r}\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2} v_{(\alpha)}}{\partial^{2}} + \frac{\partial^{2} v_{(\alpha)}}{\partial z^{2}} - \frac{1}{r^{2}}\left(v_{(\alpha)} - 2\frac{\partial v_{(r)}}{\partial\alpha}\right)\right], \tag{64}$$

$$\Delta v^{z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{(z)}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2} v_{(z)}}{\partial\alpha^{2}} + \frac{\partial^{2} v_{(z)}}{\partial z^{2}}.$$

Ze wzorów dotyczących algebry wektorowej potrzebna będzie postać iloczynów sklaranego i wektorowego:

$$\bar{u}.\bar{v} = u_{(r)}v_{(r)} + u_{(\alpha)}v_{(\alpha)} + u_{(z)}v_{(z)}. \tag{65}$$

$$(\bar{u}\mathrm{x}\bar{v})^{r} = u_{(\alpha)}v_{(z)} - u_{(z)}v_{(\alpha)},$$

$$(\bar{u}\mathrm{x}\bar{v})^{\alpha} = \frac{1}{r}\left(u_{(z)}v_{(r)} - u_{(r)}v_{(z)}\right), \tag{66}$$

$$(\bar{u}\mathrm{x}\bar{v})^{z} = u_{(r)}v_{(\alpha)} - u_{(\alpha)}v_{(r)}.$$

8. Zakończenie

Wzory (61)-(64) są zazwyczaj otrzymywane inną drogą. Mianowicie korzysta się z twierdzeń Gaussa i Stokesa jako z definicji operatorów dywergencji i rotacji używając w istocie rzeczy niezdefiniowanego uprzednio pojęcia składowych fizycznych. Można zatem sprawdzić powyższe wzory w wymieniony sposób, (np.: [4], dod. I, II).

Sposób ten ma jednak duże mankamenty gdy chodzi o zastosowanie wyżej wymienionych operatorów do równań określających stan jakiegoś obiektu fizycznego. Wtedy dla każdego układu współrzędnych z osobna trzeba wyprowadzać te równania i żądać ich potwierdzenia eksperymentalnego.

Droga obrana w tym artykule polega jak to było zaznaczone, na fizykalnym uwierzytelnieniu równań w jednym tylko układzie współrzędnych np. w kartezjańskim oraz na stwierdzeniu, że współrzędne występujące w równaniach są odpowiednio współrzędnymi skalarów wektorów, tensorów - skąd wynika słuszność kowariantnej postaci tych równań. Oczywiście w takiej sytuacji reguły transformacyjne podanych obiektów geometrycznych też muszą być sprawdzone eksperymentalnie. Pod względem "mocy" potrzebnych doświadczeń jest to właściwie tyle, co wymaga poprzednia metoda. Jednakże teraz posiadamy równania współzmiennicze, co nie uprzywilejowuje żadnego układu współrzędnych, jest bardzo wygodne praktycznie oraz co najważniejsze w dużej mierze uniezależnia wysłowione własności obiektu fizycznego od użytych środków pomiarowych (tzn, tutaj układów współrzędnych oraz współrzędnych wymienionych obiektów geometrycznych).

LITERATURA

[1] Landau L., Lifszic E.: Elektrodynamika ośrodków ciągłych. Warszawa 1960.

[2] Cole G.H.A.: Dynamika płynów. Warszawa 1964.

[3] Weizel W.: Fizyka teoretyczna. Warszawa 1958.

[4] Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego Warszawa 1964.

[5] Gołąb S.: Rachunek tensorowy. Warszawa 1966.

[6] Synge J.L., Schild A.: Rachunek tensorowy. Warszawa 1964.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ ТРАНСПОРТОМ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. УРАВНЕНИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ

Р е з ю м е

Статья содержит ковариантную (относительно пространственных координат для метрично-эвклидово пространства) формулировку уравнений электромагнитного поля, медленного движения токопроводной жидкости и транспортировки тепла в однородной и изотропной среде - значит уравнении магнитогидродинамики.

Для подготовки конкретных расчетов введено физические составляющие некоторых векторов и тензоров, а также выражены с их помощью основные дифференциальные и алгебраические операции, выступающие в выше указанных уравнениях. Здесь не рассматривались начальные и граничные условия.

SOME THEORETICAL PROBLEMS JOINED WITH FLUID BY AN ELECTROMAGNETIC FIELD MAGNETOHYDRODYNAMIC EQUATIONS

S u m m a r y

This elaboration contains the co-variant (in relation to the spatial co-ordinates for the metric-euklidean spaces) formulation of the electromagnetic field equation of a slow fluid motion which conduct the electric current and transport of heat in a homogeneous and isotropic medium, that means the magnetohydrodynamic equations. As preparation for concrete calculations there are introduced physical factors of certain vectors and tensors and by their aid there are expressed the basic differential and algebraic operations which occur in these equations. There are not considered the initial and boundery conditions.