

FRANCISZEK KUCZERA
Katedra Fizyki A

O PEWNYM PRZYPADKU ELEKTRYCZNEGO MODELOWANIA
MECHANICZNYCH WŁAŚCIWOŚCI CIAŁ

Streszczenie. Właściwości reologiczne rzeczywistych substancji są wciąż jeszcze właściwościami mało zbadanymi, mimo że praktyka przemysłowa z niecierpliwością oczekuje postępów w tej dziedzinie.

W pracy poniższej zwraca się uwagę na możliwość obiektywizacji pewnych subiektywnych metod kontroli produkcji w oparciu o elektryczny model relaksacyjnych właściwości lepkości objętościowej, wprowadzony przez Frenkla.

Wstęp

Przyjmuje się często, że właściwości mechaniczne ciał (twardość, zwięzłość, podatność itp.) są właściwościami łatwo zrozumiałymi, oczywistymi i dostępnymi intuicji obserwatora. Przypuszcza się więc, że winny one dać się łatwo fizykalnie zdefiniować. Inaczej przedstawia się sprawa - sądzi się na ogół - z właściwościami optycznymi, magnetycznymi, elektrycznymi substancji. Właściwości te rozumiały się stają dopiero w wyniku specjalnego przygotowania, w którym zastosowanie mniej lub więcej złożonego aparatu matematycznego - gra zasadniczą rolę. Poglądowe przedstawienie tych zjawisk polega na tym, że porównuje się je ze znanymi "oczywistymi" zjawiskami mechanicznymi. Jeśli sięgnąć do elementarnego przykładu, to wystarczy przypomnieć wprowadzaną często analogię pomiędzy elektrycznym obwodem drgającym a mechanicznym układem drgającym. Bliższe

zbadań sprawę pokazuje, że pogląd taki ma nader ograniczoną słuszość.

Jest niewątpliwym, że właściwości sprężyste ciał stosujących się do prawa Hooke'a określone są w sposób prosty przez podanie odpowiednich, łatwych do zdefiniowania, modułów sprężystości. W podobnie jednoznaczny sposób zdefiniować można ruchliwość względnie lepkość cieczy stosujących się do prawa Newtona. Ciała Hooke'a i Newtona stanowią jednak wyidealizowane modele, które opisują z pewnym przybliżeniem właściwości niektórych substancji, lecz nie mają oczywiście jakiegoś uniwersalnego znaczenia. Wiele substancji rzeczywistych wykazuje jednocześnie właściwości cieczy lepkich jako też i ciał sprężystych. Właściwości ciał sprężysto-lepkich nie można opisać po prostu przez podanie parametrów wchodzących w skład prawa Hooke'a i Newtona.

Praktyka życia codziennego a także potrzeby techniki (kontrola toku produkcji, kontrola jakości produktu) wymagają możliwości oceny właściwości mechanicznych substancji sprężysto-lepkich. Tymczasem problem ten jest problemem bardzo złożonym, zaś zasadnicze trudności to przede wszystkim trudności w zdefiniowaniu odpowiednich wielkości, nie zaś trudności pomiarowe.

Celem wyjaśnienia warto tu może podkreślić, że stosowane czasami pojęcie "twardości" jest pojęciem fizykalnie niezdefiniowanym. Pojęcie to wprowadzone z konieczności - w niektórych jednostkach kontroli technicznej - związane jest z przybliżoną oceną jakości i stanowi zbiorową nazwę bardzo wielu złożonych czynników. Istnieją wprawdzie różne sposoby oceny twardości jednak cecha ta nie jest związana w sposób racjonalny żadną zależnością z innymi wielkościami fizykalnymi i wskutek tego sama nie jest wielkością fizykalną.

Problematyka automatyzacji wielu procesów produkcyjnych, w czasie trwania których zmieniają się właściwości mechaniczne substancji podobnie jak właściwości ciał bezpostaciowych w zakresie rozmiękczenia, związana jest nieodłącznie z możliwością ilościowego śledzenia zmian zachodzących.

Wobec tego, że metody obiektywne nie mogą znaleźć zastosowania zastępuje się czasem metody te metodami organoleptycznymi. Istnieje wobec tego zadziwiający kontrast dwudziestego wieku: obok złożonych układów automatyzacji niezbędny jest doświadczony ekspert, który przez dotknięcie

palcem w sposób uczulony określa jakość badanej substancji.

Taka próba organoleptyczna jest zjawiskiem bardzo złożonym, gdyż zarówno obiektywne właściwości materii są - jak to krótko wyżej przedstawiliśmy - mało zbadane prócz tego zaś psychologiczne wrażenie "twardości w wyniku dotyku" mało jest zbadane. Pozostawiając analizę psychologiczną poza kręgiem naszych rozważań pokażemy, że obiektywny opis zjawiska krótkotrwałego odkształcenia (uderzenie palcem o powierzchnię badanego ciała) może być opisane przy pomocy rozważań z zakresu teorii relaksacji mechanicznej.

Teoria ta powstała w związku z potrzebą wyjaśnienia pewnych anomalii akustycznych. Później okazało się, że ma ona o wiele szersze zastosowanie, niż pierwotnie przypuszczano.

O mechanicznej relaksacji strukturalnej [1]

Rozważmy szybką zmianę objętościową. Niech objętość rozpatrywanego ciała przy ciśnieniu $p = 0$ wynosi V_0 , zaś przy ciśnieniu $p = p$ odpowiednio V . Mamy wtedy

$$-p = K_1 \frac{V - V_0}{V_0} = K_1 s \quad (1)$$

przy czym K_1 oznacza moduł ściśliwości objętościowej, izotermiczny względnie abiatyczny w zależności od charakteru przemiany.

Równanie (1) słuszne jest tylko wtedy, gdy przemiana określona tym równaniem odpowiada kolejnym stanom równowagi termodynamicznej. Jeśli struktura wewnętrzna rozpatrywanego ciała zmienia się wraz z objętością wtedy warunek (1) może nie być spełnionym, gdy bowiem dwom różnym objętościom V_1 i V_2 odpowiadają dwie różne struktury, to może się zdarzyć, że w pewnej chwili wywołamy zmianę objętości z V_1 na V_2 , lecz struktura wewnętrzna nie osiągnie jeszcze wartości odpowiadającej objętości V_2 . Pochodzi to stąd, że wskutek skończonego czasu przegrupowanie się cząstek - struktury odpowiadające nowym stanom równowagi nie są osiągnięte natychmiast.

Niech charakter struktury określony będzie przez podanie parametru η . Z poprzedniego równania wynika, że należy odróżnić chwilową wartość η od wartości $\bar{\eta}$, odpowiadającej temu samemu zgęszczeniu w warunkach równowagi termodynamicznej. Różnice tych wartości nie są zbyt duże tak, że można na ogół założyć

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\tau} \xi \quad (2)$$

przy czym $\xi = \eta - \bar{\eta}$, zaś $\frac{1}{\tau}$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

Równanie (2) jest równaniem procesu relaksacyjnego, przy czym τ oznacza czas relaksacji. Równanie to jest słuszne dla stałego, określonego zgęszczenia s . Gdy s jest także funkcją czasu, wtedy można pokazać, że zachodzi

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\tau} \xi + a \frac{ds}{dt} \quad (3)$$

Przy czym a jest dodatnim współczynnikiem. Fakt, że w czasie zgęszczenia kolejnym wartościom s nie towarzyszą wartości ciśnienia odpowiadające równowadze termodynamicznej oznacza, że chwilowe wartości przyrostu ciśnienia Δp różnią się nieco od wartości $\bar{\Delta p}$ odpowiadających stanowi równowagi termodynamicznej. Można pokazać (porównaj np. [1]), że

$$\Delta p = \bar{\Delta p} - ab\xi \quad (4)$$

przy czym a i b są stałymi współczynnikami. W myśl równania (1) jest oczywiście

$$\bar{\Delta p} = -K_1 s = 4p_1 \quad (5)$$

Odchylenie od stanu równowagi określone jest więc przez wyrażenie

$$- ab\dot{z} = \Delta p_2 \quad (6)$$

Po wstawieniu (6) do (3) otrzymamy

$$-\frac{ds}{dt} = \frac{1}{a^2 b} \frac{d(\Delta p_2)}{dt} + \frac{1}{a^2 b \tau} (\Delta p_2) \quad (7)$$

Równanie (7) jest formalnie podobne do maxwellowskiego równania relaksacyjnego. Celem uwypuklenia tej analogii przepisujemy je w postaci

$$-\frac{ds}{dt} = \frac{1}{K_2} \frac{d}{dt} (\Delta p_2) + \frac{1}{\mu_2} (\Delta p_2) \quad (7a)$$

przy czym $K_2 = a^2 b$ nazywamy dewiacyjnym modułem ściśliwości zaś $\mu_2 = K_2 \cdot \tau$ dewiacyjnym współczynnikiem lepkości objętościowej.

Elektryczna interpretacja właściwości mechanicznych

W ustępie poprzednim pokazaliśmy, że prześledzenie dynamiki procesu odkształcenia objętościowego wymaga na ogół uwzględnienia skutków wynikających z relaksacji strukturalnej. Złożoność zależności, które zachodzą w omawianym wyżej przypadku zilustrować można przy pomocy odpowiednich modeli elektrycznych.

Pokażemy w tym celu - za Frenklem - że związki pomiędzy ciśnieniem Δp a zgęszczeniem s w omawianym przez nas, prostym, przypadku jednego tylko procesu relaksacyjnego (jednego czasu relaksacji) analogiczne są do zależności między napięciem V a ilością elektryczności q słusznej dla obwodu przedstawionego na rysunku 1.

Całkowity spadek napięcia równy jest sumie spadków $V_{AB} = V_1$ i $V_{BC} = V_2$, $V = V_1 + V_2$.

Przy czym jest oczywiście

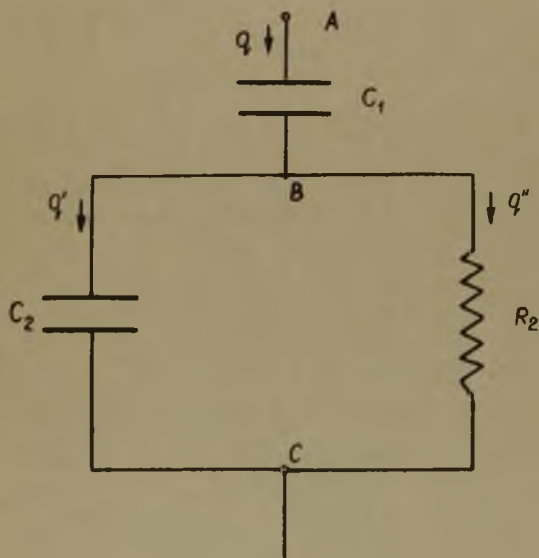
$$V_1 = \frac{1}{C} q \quad (8a)$$

i

$$V_2 = \frac{1}{C_2} q' = R_2 \frac{dq}{dt} \quad (8b)$$

wynika stąd

$$\frac{dq}{dt} = C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{V_2}{R} \quad (9)$$



Rys. 1. Elektryczny analog właściwości mechanicznych odpowiadających jednemu czasowi relaksacji

Jeśli wzory (8a) oraz (9) porównać z wyrażeniami (5) i (7a) to widać, że przypadek mechanicznej kompresji z uwzględnieniem relaksacji strukturalnej opisać można formalnie przy pomocy równań (9) i (8a) z tym, że pojemności grają tu rolę współczynników ścisłości, zaś oporność rolę współczynnika lepkości objętościowej.

Jeśli rozważyć harmonicznie zmienne q i V , to łatwo dość do wyrażenia

$$V = V_1 + V_2 = q \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 \left(1 + \frac{1}{\omega \tau_2} \right)} \right] \quad (10)$$

przy czym

$$\tau_2 = R_2 C_2$$

Wnioskujemy stąd, że w granicznych przypadkach $\omega = 0$ oraz $\omega = \infty$ znika lepkość objętościowa, zaś moduł ściśliwości w przypadku statycznym K_0 równy jest K_1 . Dla szybkich zmian mamy oczywiście $K = K_1 + K_2$.

Jeśli rozważyć nagle przyłożenie ciśnienia, to w przypadku analogonu elektrycznego otrzymuje się

$$\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_1 R_2} = \frac{v}{R_2} \quad (11)$$

Rozwiązanie ostatniego równania przedstawia się w postaci

$$q = C_1 v \left[1 - \frac{C_1}{C_1 R_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \quad (12)$$

przy czym

$$\tau_2' = \tau_2 \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)$$

Można więc q przedstawić jako sumę naboju odpowiadającego chwili przyłożenia napięcia

$$q_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} v$$

oraz ładunku relaksacyjnego

$$q' = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2'}}\right)$$

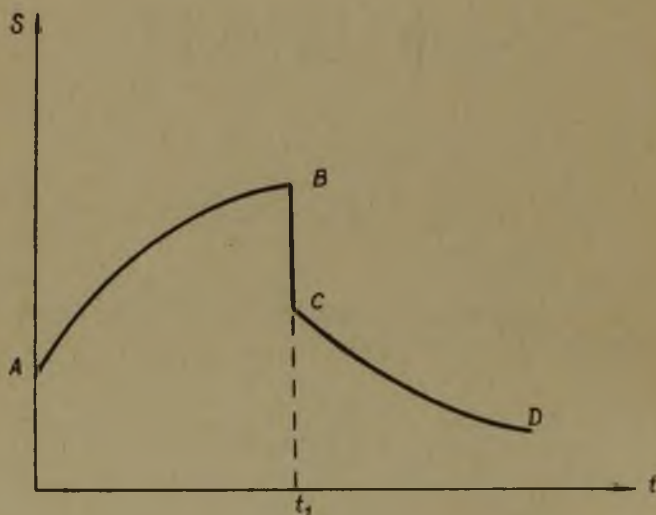
Rozważone analogie elektryczne pozwalają nam wyciągnąć następujący wniosek:

W przypadku nagłego przyłożenia Δp kompresja ciała s składa się z kompresji natychmiastowej

$$s_0 = - \frac{\Delta p}{K_1 + K_2}$$

oraz kompresji relaksacyjnej

$$s' = - \frac{\Delta p}{K_1 \left(1 + \frac{K_1}{K_2}\right)} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$



Rys. 2. Przebieg czasowy odkształcenia objętości wywołanego nagłymi zmianami ciśnienia

Przebieg czasowy odkształcenia odpowiadającego nagle przyłożonemu ciśnieniu w chwili $t = 0$ i nagle usunię-

ciu ciśnienia w chwili $t = t_1$ przedstawia rys. 2. Na rysunku tym dobrano podziałkę czasową tak, by wyraźnie widoczne było rozwijające się relaksacyjne odkształcenia. Gdy czas eksperymentu (pomiaru) nie jest właściwie dobrany np. gdy czasy relaksacji są zbyt krótkie, aby je przedstawić na podziałce, wtedy łatwo identyfikować punkty A i B rys. 2. Trafi się w taki sposób wgląd w rzeczywisty przebieg wywołanego odkształcenia.

Jeśli jeszcze powrócić do związku zachodzącego między obiektywnymi właściwościami mechanicznymi a subiektywnymi wrażeniami "twardości" to widać, że zignorowanie dynamiki przebiegu ustalania się równowagi - jak to się jeszcze spotyka w niektórych pracach psychoreologicznych [2] - prowadzić musi do nierozsądnych wyników.

Rękopis złożono w Redakcji w styczniu 1966 r.

LITERATURA

- [1] Френкель Я.И.: Кинетическая теория жидкостей Изд АН СССР Москва 1945 Ленинград.
- [2] Scott Blair G.W.: Foodstuffs thier plasticity, fluidity and consistency. Novlh - Holland Publishing Company 1953.

О НЕКОТОРОМ СЛУЧАЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТЕЛ

Р е з ю м е

Реологические свойства реальных веществ являются все время мало исследованными, хотя промышленная практика нетерпеливо ожидает прогресса в этой области. В этой работе обращается внимание на возможность объективизации некоторых субъективных методов контроля производства на базе электрической модели релаксационных свойств емкостной вязкости, введенной Френкелем.

ABOUT A WAY OF ELECTRICAL MODELING MECHANICAL PROPERTIES
OF SOLIDS

S u m m a r y

Rheological properties of the real substances are yet little examined in spite of looking impatiently for progress by the industrial practice in this field. In this work the particular note is taken of the possibility of making more objective of some subjective methods of production control based on the electrical model of the relaxation properties of the volume viscosity, introduced by Frenkel.