ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: ELEKTRYKA z. 27 Nr kol. 274

MAREK BRODZKI

Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Ogólnej

O NIESTABILNOŚCI UKŁADU n, $(n > 1)$, PUNKTOWYCH ŁADUNKÓW ELEKTRYCZNYCH BEZ WIĘZÓW

Streszczenie. W artykule niniejszym przeprowadzony jest częściowo dowód niestabilności układu swobodnych ładunków punktowych (co najmniej dwóch) w oparciu o pierwszą zasadę Lapunowa i badanie pochodnych cząstkowych energii potencjalnej układu do drugiego rzędu włącznie. W równaniach ruchu cząstek zostały odrzucone wyrazy rzędów wyższych lub równych $\frac{v^2}{c^2}$. Trudności związane z opisem swobodnego układu cząstki - pole zostały jedynie zaznaczone fragmentarycznie. Od strony matematycznej stosowane są pewne twierdzenia dotyczące przekształceń ortogonalnych układów współrzędnych, teorii form kwadratowych, ekstremów funkcji wielu zmiennych oraz funkcji harmonicznych.

Twierdzenie o niestabilności punktowych ładunków elektrycznych bez więzów, a zatem bez sił o charakterze nieelektrostatycznym, występujących w stanie równowagi, jest od dawna znane, mimo to pełny jego dowód nastręcza trudności. I.E. Tamm w podręczniku "Podstawy teorii elektryczności" str. 74 nazywa go twierdzeniem Earnshawa.

Punktem wyjścia jego dowodu powinny być oczywiście równania ruchu układu ładunków i pola elektromagnetycznego związanego z nimi. Równania te mogą odnosić się bądź do płaskiej 3-wymiarowej przestrzeni opisywanej przy pomocy prostokątnych współrzędnych kartezjańskich, bądź do 3 n-wymiarowej, płaskiej przestrzeni tzw. konfiguracyjnej (gdzie zmienna n określa ilość ładunków) opisywanej także przy pomocy kartezjańskich współrzędnych [4], R. II). Każdemu punktowi takiej przestrzeni o współrzędnych x_k, $k\in(1,\dots,3n)$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie n punktów przestrzeni 3-wymiarowej o współrzędnych x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}, $i\in(1,\dots,n)$.

(Uwaga: nie został tu wymieniony wymiar czasowy. Czas jest opisywany tą samą zmienną t w obu przypadkach).

Wspomniane równania opisują ruch ładunków w zadanym polu oraz ruch pola przy zadanych położeniach ładunków.

Zajmiemy się teraz tymi pierwszymi w postaci Lagrange'owskiej:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad k\in(1,\dots,3n), \tag{1}$$

gdzie:

$$L = \sum_{i=1}^{n} - \underset{(i)}{m} c^2 \sqrt{1 - \frac{\underset{(i)}{v}^2}{c^2}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \underset{(i)}{e}\,\underset{(i)}{\varphi} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \underset{(i)}{e}\,\underset{(i)}{\bar{A}} \cdot \underset{(i)}{\bar{v}} \tag{2}$$

Do wzoru (2) należy podstawić teraz funkcje $\underset{(i)}{\bar{A}}$, $\underset{(i)}{\varphi}$ obliczone z równań pola.

Ponieważ rozpatrujemy ruch ładunków w pobliżu położenia równowagi, a więc skorzystamy z "elektrostatycznego" przybliżenia funkcji Lagrange'a odrzucając wyrazy rzędów wyższych lub równych $\frac{\underset{(i)}{v}^2}{c^2}$ oraz wyrazy stałe $-\underset{(i)}{m} c^2$.

Mamy wówczas:

$$L = T - W, \tag{3}$$

gdzie:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{(i)} v_{(i)}^2}{2}, \tag{4}$$

$$W = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{2} \frac{e_{(i)} e_{(j)}}{4\pi\varepsilon_o r_{(ij)}} \tag{5}$$

We wzorze (5) sumowanie nie obejmuje wskaźników $i = j$, ponieważ doprowadziłoby to do nieskończenie wielkiej energii własnej cząstki pochodzenia elektromagnetycznego.

Uwzględnienie wyrazów odrzuconych w elektrostatycznym przybliżeniu funkcji Lagrange'a doprowadza również do równań ruchu cząstek osobliwych, którym obok nieskończenie wielkiej masy pochodzenia polowego przypisujemy taką nieskończoną masę ujemną "niepolową", że wypadkowa jest zgodna z obserwowaną eksperymentalnie. Proces ten nazywa się renormalizacją masy. Następnie w wymienionych równaniach występują człony proporcjonalne do trzeciej pochodnej położenia cząstki względem czasu, reprezentujące tzw. siłę samooddziaływania.

W przypadku pojedynczego ładunku siła ta powoduje nieograniczone przyspieszenie cząstki we własnym polu, co jest oczywiście sprzeczne z zasadą zachowania energii. Pojedynczy ładunek punktowy nie może być więc opisywany równaniami elektrodynamiki. W przypadku większej ilości ładunków warunkiem poprawnego ich opisu jest mała wartość siły samooddziaływania danego ładunku w porównaniu z siłą pochodzącą od pola zewnętrznego, tzn. w tym przypadku od ładunków pozostałych.

To z kolei doprowadza do żądania, by długość fali λ padającej na dowolny z ładunków była znacznie większa od "promienia" ładunku obliczonego przez porównanie jego energii spoczynkowej i polowej:

$$\lambda \gg r_{(i)} = \frac{e^2_{(i)}}{4\pi\varepsilon_o m_{(i)} c^2}, \tag{6}$$

oraz by gęstość energii pola $w_{(i)em}$ pochodzącego od pozostałych ładunków, w miejscu, w którym znajduje się rozpatrywany ładunek, była mała w porównaniu z jego gęstością energii spoczynkowej:

$$w_{(i)em} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2_{(i)} + \frac{1}{2}\mu_o H^2_{(i)} \ll \varrho_{(i)} c^2, \tag{7}$$

" $\varrho_{(i)}$ " - oznacza tu gęstość masy spoczynkowej ładunku.

Z warunków (6) i (7) można wyprowadzić zależność ograniczającą odległości $r_{(ij)}$ pomiędzy ładunkami do znacznie większych od ich "promieni" $r_{(ii)}$:

$$r_{(ij)} \gg r_{(ii)}. \tag{8}$$

Dokładniejszą analizę powyższego zagadnienia można znaleźć w książkach: M. Suffczyński "Elektrodynamika", R. XVI lub L. Landau i E. Lifszic "Teoria pola", R. IX.

Warunki (6) i (8) są więc zasadniczym ograniczeniem stosowalności naszych dalszych rozważań.

Ponadto trzeba pamiętać, że będziemy wykazywać niestabilność układu jedynie w przybliżeniu elektrostatycznym. Wobec tego nie analizując bliżej wpływu dokładniejszego przybliżenia, trzeba posiadać

pewną "rezerwę" tej niestabilności, by można stąd wnioskować o niestabilności układu "dokładnego".
Na podstawie wzorów (1), (3), (4), (5) otrzymujemy:

$$\underset{(k)}{m} \frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\frac{\partial W}{\partial x_k}, \quad k \in (1, \ldots, 3n). \tag{9}$$

$$\underset{(3i-2)}{m} = \underset{(3i-1)}{m} = \underset{(3i)}{m}, \quad i \in (1, \ldots, n). \tag{10}$$

Dla każdego punktu równowagi układu (np. o współrzędnych $\underset{(r)}{x}_l$ w przestrzeni konfiguracyjnej) obowiązuje zależność:

$$\frac{\partial W}{\partial x_k}\left(\underset{(r)}{x_l}\right) = 0, \quad k, l \in (1, \ldots, 3n). \tag{11}$$

Załóżmy dla uproszczenia rozważań formalnych (nie będzie to posiadało decydującego dla dalszego dowodu znaczenia fizycznego), że zachodzi:

$$\underset{(k)}{m} = \underset{(l)}{m} \overset{df}{=} m, \quad k, l \in (1, \ldots, 3n). \tag{12}$$

Wówczas mamy z dokładnością do wyrazów 1 rzędu rozwinięcia na szereg Taylora funkcji $\frac{\partial W}{\partial x_k}$ w otoczeniu punktu równowagi $\underset{(r)}{x_l}$:

$$\frac{d^2 \varepsilon_k}{dt^2} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_l}(o)\ \varepsilon_l, \tag{13}$$

gdzie:

$$x_k = x_{k(r)} + \varepsilon_k, \quad k,l \in (1,\ldots,3n). \tag{14}$$

Uwaga: obowiązuje tu umowa sumacyjna dla wskaźników powtarzających się w iloczynie.

Przyjmijmy:

$$a_{kl} \underset{df}{=} -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_k \partial\varepsilon_l}\bigg|_{(o)}. \tag{15}$$

Stąd:

$$\frac{d^2\varepsilon_k}{dt^2} = a_{kl}\,\varepsilon_l. \tag{16}$$

Przewidując rozwiązanie:

$$\varepsilon_k = \alpha_k\, e^{rt}, \tag{17}$$

mamy:

$$(a_{kl} - \lambda\delta_{kl})\alpha_l = 0, \tag{18}$$

gdzie:

$$\lambda \underset{df}{=} r^2. \tag{19}$$

Równania (18) posiadają rozwiązania nietrywialne dla zmiennych α_1 jeśli zachodzi:

$$w(\lambda) = \det\left[a_{kl} - \lambda\delta_{kl}\right] = 0. \tag{20}$$

Wielomian charakterystyczny $w(\lambda)$ posiada pierwiastki rzeczywiste ponieważ wyrazy a_{kl} są rzeczywiste oraz zachodzi (na mocy wzoru (15)):

$$a_{kl} = a_{lk}, \tag{21}$$

([3], R. XII).

Badanie stabilności układu przeprowadzamy teraz przy pomocy pierwszego liniowego przybliżenia równań ruchu ładunków w otoczeniu punktu równowagi (13), stosując pierwszą zasadę Lapunowa:
Jeśli pierwsze przybliżenie (liniowe) dla danego punktu równowagi jest asymptotycznie stabilne (niestabilne), to równania dokładne posiadają rozwiązanie stabilne (niestabilne) w pewnym otoczeniu tego punktu, ([1], R. XI, gdzie można też znaleźć definicję stabilności lokalnej).
O stabilności układu znajdującego się pod wpływem sił zachowawczych decyduje również jego energia potencjalna w otoczeniu punktu równowagi. (Jeśli w punkcie tym osiąga ona minimum właściwe, układ jest stabilny - [4], R. II).
Wobec warunków (11) należy więc zająć się formą kwadratową:

$$\Delta \underset{df}{=} a_{kl}\,\varepsilon_k\varepsilon_l. \tag{22}$$

Jeśli forma ta byłaby określona ujemnie - funkcja energii potencjalnej osiągałaby minimum, jeśli dodatnio - maksimum, jeśli byłaby nieokreślona - nie posiadałaby ekstremum, jeśli zaś byłaby na pół określona - trzeba wówczas badać formy wyższego rzędu.

Sprowadzimy teraz formę Δ do postaci kanonicznej za pomocą przekształcenia ortogonalnego współrzędnych ε_k w przestrzeni konfiguracyjnej, ([3], R. XII).

$$\eta_k = A_{kl}\,\varepsilon_l, \tag{23}$$

gdzie:

$$A_{km}\,A_{lm} = \delta_{kl}. \tag{24}$$

Mamy teraz:

$$\Delta = b_{kk}\,\eta_k^2, \tag{25}$$

gdzie:

$$b_{kk} = -\frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 W}{\partial \eta_k^2(o)}, \tag{26}$$

ponieważ forma Δ jest skalarem i to nie tylko względem przekształceń ortogonalnych, lecz względem przekształceń klasy C_1.

Zachodzi:

$$b_{kk} = \lambda_k, \tag{27}$$

ponieważ przekształcenie ortogonalne nie zmienia pierwiastków wielomianu charakterystycznego formy Δ ([3], R. XII).

Do tej pory analizowaliśmy równania ruchu ładunków, zajmijmy się teraz równaniami ruchu pola, aby osiągnąć przy ich pomocy pewne związki decydujące o znakach współczynników λ_k i o formie Δ. Ponieważ:

$$\underset{(i)}{\varphi} = \sum_{\substack{j=1\\ i \neq j}}^{n} \frac{\underset{(j)}{e}}{4\pi\varepsilon_0 \underset{(ij)}{r}}, \tag{28}$$

gdzie:

$$\underset{(ij)}{r} = \sqrt{(x_{3i-2} - x_{3j-2})^2 + (x_{3i-1} - x_{3j-1})^2 + (x_{3i} - x_{3j})^2}, \tag{29}$$

$i, j \in (1, \ldots, n)$;

więc na mocy przybliżenia elektrostatycznego równań pola (takiego samego jak i równań ładunków) mamy:

$$\frac{\partial^2 \underset{(i)}{\varphi}}{\partial \varepsilon^2_{3h-2}} + \frac{\partial^2 \underset{(i)}{\varphi}}{\partial \varepsilon^2_{3h-1}} + \frac{\partial^2 \underset{(i)}{\varphi}}{\partial \varepsilon^2_{3h}} = 0, \tag{30}$$

$i, h \in (1, \ldots, n)$.

Ponieważ:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \underset{(i)}{e} \underset{(i)}{\varphi}, \tag{31}$$

więc na mocy wzoru (30) mamy:

$$\sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_l^2} = 0. \tag{32}$$

Laplasjan (tu względem 3n współrzędnych) jest niezmiennikiem względem przekształceń ortogonalnych (również względem 3n współrzędnych), więc

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta_k^2} = 0. \tag{33}$$

Następnie korzystając ze związku (26) mamy dla układu współrzędnych, dla którego forma Δ przyjmuje postać kanoniczną:

$$\sum_{k=1}^{3n} b_{kk} = 0. \tag{34}$$

Stąd na mocy wzoru (27):

$$\sum_{k=1}^{3n} \lambda_k = 0. \tag{35}$$

Na podstawie wzorów (34), (35) można wnioskować, że forma Δ jest albo nieokreślona (różne znaki "λ_k"), albo na pół określona ($\lambda_k = 0$, $k \in (1,\dots,3n)$).

W pierwszym przypadku funkcja energii potencjalnej W układu ładunków nie osiąga minimum, więc układ opisywany jest równaniami o rozwiązaniach niestabilnych. Widać to również analizując bezpośrednio rozwiązania równań ruchu ładunków (17) i (19), bowiem wówczas przynajmniej dla jednego z pierwiastków λ_{k_1} zachodzi $(\lambda_{k_1} > 0)$ i wobec tego $(r_{k_{1_1}} > 0)$.

Z twierdzenia Lapunowa wynika wówczas niestabilność układu opisywanego równaniami (5), (9).

W przypadku drugim nie wiadomo czy funkcja energii potencjalnej W osiąga minimum; nie można również wnioskować o niestabilności układu na mocy twierdzenia Lapunowa, bowiem pierwiastki pierwszego liniowego przybliżenia równań układu posiadają część rzeczywistą równą zeru. W tym przypadku należałoby badać formy wyższego rzędu funkcji W.

Przypuszczenie, że w pewnych przypadkach mogłaby wówczas wystąpić stabilność układu jest mało prawdopodobne, bowiem w najlepszym razie oznaczałoby to przyrównanie do zera w punkcie równowagi pochodnych pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu oraz żądanie, by forma czwartego rzędu funkcji W była dodatnio określona. Narzucałoby to na 3n zmiennych określających położenie układu w przestrzeni konfiguracyjnej znacznie większą od 3n liczbę warunków (ilość związków (11), dotyczących tylko pochodnych rzędu pierwszego, wynosi właśnie 3n).

Tak więc widać, że układ ładunków swobodnych, nie może być układem stabilnym w stanie równowagi statycznej. Poza tym stosowalność naszych rozważań jest ograniczona warunkami (6) i (8), ustalającymi w ogóle zakres stosowalności elektrodynamiki klasycznej. Twierdzenie powyższe można by z pewnością uogólnić na przypadek naładowanych ciał o rozmiarach skończonych. Wobec tego jedyną alternatywą równowagi statycznej układu ładunków jest zastosowanie odpowiednich więzów tzn. sił o charakterze nieelektrostatycznym, jakie stwarza np.: powierzchnia przewodnika czy siły mechaniczne unieruchamiające te przewodniki. Na zakończenie trzeba zaznaczyć, że podany dowód niestabilności opisywanego układu nie jest pełny.

Należałoby wykazać, że faktycznie badanie pochodnych oraz form wyższego rzędu funkcji W zaprzecza stabilności. Dla dowolnych n funkcji k zmiennych, gdzie: $(n > k)$, może się przecież zdarzyć, że równania powstające z przyrównania ich (funkcji) do zera mogą być spełnione dla jakichś wartości tych zmiennych. Np.: w interpretacji geometrycznej gdy wykresy 3 funkcji 2 zmiennych przecinają się w jednym punkcie.

Istnieje inna metoda wykazania niestabilności naszego układu, pozbawiona w/w mankamentów. Polega ona na stwierdzeniu, że funkcja W energii potencjalnej spełnia względem $3n$ współrzędnych ε_1 przestrzeni konfiguracyjnej równanie Laplace'a - (32), czyli jest harmoniczna (nie dopuszczamy pokrywania się ładunków). Jako taka, nie może posiadać minimum, bowiem byłoby ono jednocześnie jej kresem dolnym wewnątrz jakiegoś dostatecznie małego obszaru zmiennych ε_1 - co dla funkcji harmonicznej różnej od stałej nie jest możliwe [7], R. III.

Następnie trzeba przypomnieć, że nasze rozważania dotyczyły tylko elektrostatycznego przybliżenia równań ruchu układu.

O niestabilności układu opisywanego równaniami dokładnymi można by wnioskować dopiero na mocy twierdzenia w pewnym sensie analogicznego do twierdzenia Lapunowa, które należałoby wykazać. Różnica polega tu na tym, że twierdzenie Lapunowa pozwala na przejście (z własnością stabilności lub niestabilności) do przybliżenia liniowego - do równań dokładnych, rozwikłanych ze względu na pochodne najwyższego rzędu; a w naszym przypadku trzeba by "przejść" - od jednych równań nieliniowych do drugich dokładniejszych, nierozwikłanych w sposób opisany poprzednio (po ich prawej stronie występuje człon opisujący siłę samooddziaływania, proporcjonalną do trzeciej pochodnej położenia cząstki względem czasu).

LITERATURA

[1] Feldbaum A.A.: Elektriczeskije sistiemy avtomaticzeskovo regulirovanja. Moskva 1957.

[2] Landau L., Lifszic E.: Teoria pola. Warszawa 1958.

[3] Mostowski A., Stark M.: Elementy algebry wyższej.Warszawa 1958.

[4] Rubinowicz W., Królikowski W.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1955.

[5] Suffczyński M.: Elektrodynamika. Warszawa 1965.

[6] Tamm I.E.: Podstawy teorii elektryczności. Warszawa 1967.

[7] Pietrowski I.: Równania różniczkowe cząstkowe, Warszawa 1955.

НЕСТАБИЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ $n, (n>1)$ ТОЧЕЧНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ БЕЗ СВЯЗЕЙ

Р е з ю м е

В настоящей статье проведено частично доказательство нестабильности системы свободных точеных зарядов (не менее двух) по первому принципу Лапунова и исследованию парциальных производных потенциальной энергии системы до второго порядка включительно. В уравнениях движения частиц пропущено члены высшего порядка и равные "$\frac{v^2}{c^2}$".

Затруднения, связанные с описанием свободной системы частицы - поле были только фрагментарно отмечены. С математической точки зрения применяется некоторые теоремы относительно преобразований ортогональных систем координат, теории квадратных форм, экстремумов функции многих переменных и гармонических функции.

INSTABILITY OF THE n, (n > 1) SYSTEM, OF POINT ELECTRIC CHARGES WITHOUT CONSTRAINTS

S u m m a r y

In this report the proof is partly made of the free point chartes (at least two) instability system on the base of the first Lapunow principle and the test of the partial derivatives of potential energy of the system to the second order inclusively. In the equation of particles movement, the terms of higher or equal $\frac{"v^2"}{c^2}$ orders were rejected. The difficulties connected with description of the free system of particle-field where only fragmentarity marked. From the mathematic side the certain theorems are used with regard of orthogonal transformations of coordinate system, square forms theory, extremum of the functions of many variables and harmonical functions.