ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: ELEKTRYKA z. 27 Nr kol. 274

MAGDALENA UMIŃSKA-BORTLICZEK

Katedra Elektrotechniki Teoretycznej

O PEWNEJ OPERACJI W DZIEDZINIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH NIELINIOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono możliwość zastosowania teorii przedłużeń analitycznych w sensie Cauchy'ego dla równania różniczkowego nieliniowego typu:

$$f_1(x,\dot{x},\ddot{x},\dots x^{(k)}) + f_N(x,\dot{x},\ddot{x},\dots x^{(k-1)}) = f(t)$$

Na podstawie przeprowadzonych dowodów twierdzeń I, II, III, IV, V, VI, wykazano, że istnieje reguła transformacyjna przedłużenia analitycznego powyższego równania różniczkowego nieliniowego z przestrzeni rzeczywistej do postaci:

$$F_1(w, \dot{w}, \ddot{w},\dots w^{(k)}) + F_N(w, \dot{w},\dots w^{(k-1)}) = F(\lambda)$$

w przestrzeni zespolonej skończenie k-wymiarowej.

1. Sformułowanie problemu

Rozpatrywane będą układy elektryczne o następujących własnościach strukturalnych [6]:

- zastępcza funkcja wymuszająca $f(t)$ jest typu wykładniczego:

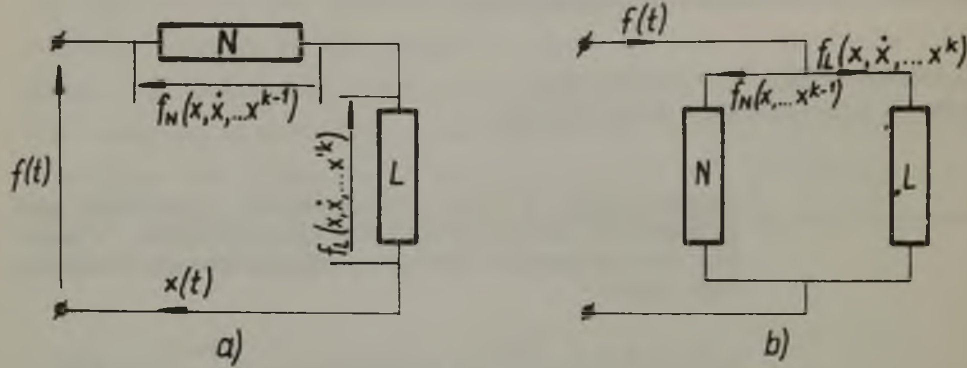
$$1(t) \cdot U(t) \leqslant M e^{qt}$$

$$1(t) \cdot I(t) \leqslant M e^{qt}$$

gdzie

M, q liczby rzeczywiste,

- układ elektryczny daje się sprowadzić przez kombinacje łączeniowe do struktury jednooczkowej rys. 1a lub dwuwęzłowej rys. 1b.



Rys. 1

L - element liniowy zastępczy, N - element nieliniowy zastępczy

- zastępczy element nieliniowy zawiera takie elementy, których charakterystyki prądowo-napięciowe są aproksymowalne z dostateczną dokładnością przez wielomiany potęgowe lub funkcje wykładnicze.

Układy takie można opisać równaniem różniczkowym nieliniowym o postaci:

$$f_1(x, \dot{x}, ... x^{(k)}) + f_N(x, \dot{x}, \ddot{x}, ... x^{(k-1)}) = f(t) \tag{1}$$

gdzie:

$x(t)$ - jest zmienną zależną, zmiennej rzeczywistej t,

$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, ... x^{(k)})$ - jest liniową funkcją $x(t)$ dowolnego rzędu pochodnej,

$f_N(x, \dot{x}, \ddot{x}, ... x^{(k-1)})$ - jest nieliniową częścią równania (1) spełniającą modyfikowany warunek Lipschitza o postaci:

$$\left| f_N\{v(t)\} - f_N\{w(t)\} \right| < M\, e^{-at} \left| v(t) - w(t) \right|$$

oraz

$$f_N\{x_o(t)\} \leqslant M\, e^{-qt}$$

gdzie:

$$x_o(t) = f(t) * y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br} \frac{e^{st}}{z(s)}\, ds = O(e^{\sigma t})$$

dla M, a, q rzeczywistych oraz $t \geqslant 0$

$f(t)$ jest zastępczą funkcją wymuszającą zmiennej rzeczywistej t reprezentującą element aktywny schematu zastępczego rys. 1.

Pokażemy, że w pewnych warunkach:

1) istnieje skończenie k-wymiarowa przestrzeń urojona do której to równanie można przedłużyć w sensie Cauchy'ego,

2) reguła transformacyjna przedłużenia jest następująca:

$$\underbrace{f_1(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots x^{(k)}) + f_N(x, \dot{x}, \ldots x^{(k-1)}) = f(t)}\qquad (2)$$

$$\underbrace{F_1(w, \dot{w}, \ldots w^{(k)}) + F_N(w, \dot{w}, \ddot{w}, \ldots w^{(k-1)}) = F(\lambda)},\qquad (3)$$

$$x(t) \rightleftarrows w(\lambda)$$

przy czym (2) $\hat{\equiv}$ (3).

2. Warunki przedłużalności analitycznej równania różniczkowego nieliniowego w sensie Cauchy'ego

Dla równania różniczkowego nieliniowego (1) pokazano [6], że rozwiązanie istnieje, jest jednoznaczne oraz jest analityczną funkcją zmiennej rzeczywistej t. Możemy zatem poszukiwać rozwiązania w zwartej postaci szeregu potęgowego Taylora, Dirichleta itp.

Według Frobeniusa [2][7] zakłada się rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \tag{4}$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli (4) podstawić do równania (5)

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} a_m D^m\left[x(t)\right] + \sum_{k=0}^{N} f_k\left[x(t)\right]^k = b(t) \tag{5}$$

w którym:

$M_1 \neq M_2$ - liczby rzeczywiste, naturalne,

a_m - stałe współczynniki części liniowej równania różniczkowego nieliniowego,

D^m - m-ty operator różniczkowo-całkowy Heaviside'a,

f_k - stałe współczynniki części nieliniowej równania różniczkowego nieliniowego,

$b(t)$ - funkcja wymuszająca jednej zmiennej, ciągła n-krotnie różniczkowalna,

$N \geqslant 2$

to po rozwinięciu $b(t)$ w szereg potęgowy Taylora otrzymuje się dla współczynników rozwiązania następującą zależność rekurencyjną:

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} a_m\, c_{n+m} \frac{(n+m)!}{n!\, m!}\, n! + \sum_{k=0}^{N} f_k\, c_n^k = b_n \tag{6}$$

gdzie:

n - dodatni indeks bieżący

$$c_n^k = \sum_{r_k=0}^{n} \sum_{r_{k-1}=0}^{r_k} \cdots \sum_{r_1=0}^{r_2} c_{r_1} \cdot c_{r_2-r_1} \cdots c_{n-r_{k-1}}$$

- oznacza sumy splotowe otrzymane w naszym przypadku z następującej relacji tożsamościowej:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right]^k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k\, t^n$$

Wyraźnie widać, że jeżeli $M_1 < 0$ lub $k < 0$ to otrzymana relacja rekurencyjna jest relacją wsteczną rzędu co najmniej pierwszego. Takiej relacji nie można poszukiwać dla rozwiązania założonego w postaci jednostajnie zbieżnego szeregu Taylora, gdyż nie obejmuje ona wszystkich współczynników założonego rozwinięcia.

Według teorii Ku i Wolfa [3] możemy dokonać następującego podziału równania różniczkowego nieliniowego (1):

$$f_1(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) = f(t) - f_N(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) \tag{7}$$

Na podstawie założeń przyjętych dla równania różniczkowego nieliniowego (1) możemy przewidzieć, że funkcja

$$A(t) = f(t) - f_N(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots) \tag{8}$$

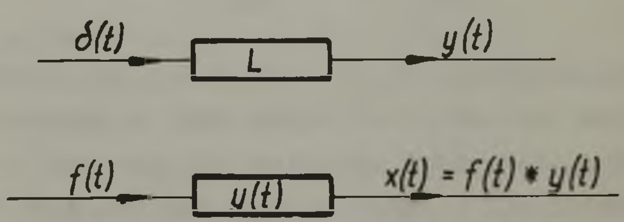
jest funkcją analityczną, a zatem jest funkcją rozwijalną w szereg Taylora:

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \tag{9}$$

W celu określenia własności rozwiązania x(t) równania różniczkowego nieliniowego (1) przyjmiemy podane niżej założenie i udowodnimy kolejno cztery twierdzenia:

Założenie: Dla każdego układu liniowego zachodzi:

$$x(t) = f(t) * y(t) \tag{10}$$



Rys. 2

gdzie:

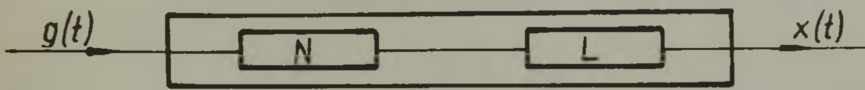
$\delta(t)$ - jest jednokrotną dystrybucją Diraca,

y(t) - jest odpowiedzią impulsową części liniowej układu,

f(t) - jest dowolną, całkowalną funkcją wymuszającą.

Twierdzenie I

Dla układu liniowego, opisanego równaniem (1), przedstawionego na rys. 3 istnieje układ równoważny o strukturze pokazanej na rys. 4.



Rys. 3

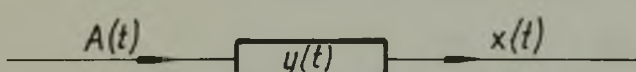
Rys. 4

Dowód

Ponieważ zostało udowodnione [6], że $x(t)$ istnieje i dla każdego równania różniczkowego nieliniowego (1) jest rozwiązaniem jedynym analitycznym, więc znając tylko odpowiedź układu $x(t)$ możemy powiedzieć, że istnieje fizyczny układ liniowy i wymuszenie, które ją wywołało, a zatem:

$$x(t) = A(t) * y(t)$$

Odpowiednim modelem będzie układ przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5

Na podstawie twierdzenia I możemy powiedzieć, że:

$$x(t) = A(t) * y(t) = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n y(t-\tau)d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^t \tau^n y(t-\tau)d\tau \tag{11}$$

gdzie:

$$\int_0^t \tau^n y(t-\tau)d\tau$$

- jest n-tym momentem odpowiedzi impulsowej liniowej części równania różniczkowego nieliniowego (1) w przedziale $[0,t)$,

c_n - będzie posiadało postać rekurencyjno-splotową zależną od specyfiki części nieliniowej równania różniczkowego nieliniowego (1).

Należy zwrócić uwagę, że funkcja $A(t)$ pozostanie funkcją analityczną także wtedy, gdy dołączymy do niej pewne człony liniowe równania różniczkowego nieliniowego (1); dowolność podziału jest jednak ograniczona; o czym mówi twierdzenie 2.

Twierdzenie II

Warunkiem koniecznym, aby zależność rekurencyjna dla rozwiązania

$$x(t) = A(t) * y(t)$$

nie zawierała elementów wstecznych jest pozostawienie po lewej stronie równania najwyższej pochodnej liniowej.

Dowód

Zastosujemy następujący sposób podziału:

$$\sum_{k=1}^{K} a_k\, x^{(k)} + F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(K-2)}) = b(t) \quad K \geqslant 2$$

$$a_{K-1}\, x^{(K-1)} = b(t) - f_N(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(K-2)}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{K-2} a_k\, x^{(k)} - a_K\, x^{(K)}$$

Zmodyfikowana funkcja wymuszająca będzie zatem określona w sposób następujący:

$$A(t) = b(t) - f_N(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(K-2)}) - \sum_{k=1}^{K-2} a_k\, x^{(k)} - a_K\, x^{(K)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n^{(K)})\, t^n$$

Z drugiej strony:

$$x(t) = A(t) * y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, q_n(t)$$

gdzie:

$$q_n(t) = \int_0^t \tau^n \, y(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau^n \frac{(t-\tau)^{K-2}}{(K-2)!} d\tau =$$

$$= \frac{1}{(K-2)!} \int_0^t \tau^n \sum_{m=0}^{K-2} (-1)^m \binom{K-2}{m} t^{(K-2)-m} \tau^m d\tau =$$

$$= \sum_{m=0}^{K-2} \left[\frac{(-1)^m \binom{K-2}{m} \frac{1}{n+m+1}}{(K-2)!} \right] t^{n+K-1}$$

więc:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{K-2} (-1)^m \binom{K-2}{m} \frac{1}{n+m+1} \, t^{n+(K-1)} \tag{12}$$

jest rozwiązaniem zawierającym co najmniej jeden wyraz nie do wyznaczenia, a więc zaprzeczyliśmy możliwości takiego podziału.

Twierdzenie III

Warunkiem koniecznym otrzymania rozwiązania równania różniczkowego nieliniowego (1) w postaci związków rekurencyjnych prostych (niewstecznych) jest występowania pochodnej najwyższej równania różniczkowego nieliniowego (1) w jego części liniowej.

Wnioski

Podział równania różniczkowego nieliniowego (1) przy najwyższej pochodnej pozwala uzyskać rozwiązanie zawsze w postaci szeregu potęgowego, którego współczynniki rekurencyjne nie zawierają członów wstecznych i są same przez się uporządkowane.

Przykład:

Dla typowego układu R, L, C z nieliniową rezystancją mamy:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^2 = f(t)$$

podział przy najwyższej pochodnej liniowej prowadzi do:

$$\ddot{x} = f(t) - cx^2 - bx - a\dot{x}$$

$$A(t) = f(t) - cx^2 - bx - a\dot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

$$x(t) = A(t) * y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q_n(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br} \frac{e^{st}}{s^2} ds = t \cdot 1(t)$$

$$q_n(t) = \int_0^t \tau^n y(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau^n (t-\tau) d\tau = \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

W przypadku tak dokonanego podziału, funkcja momentu jest funkcją potęgową, zatem rozwiązanie równania otrzymamy w postaci szeregu potęgowego.

3. Dowód przedłużalności analitycznej równania różniczkowego nieliniowego (2)

Spróbujemy z kolei pokazać, że postępowanie wg reguły (13) jest w pewnych warunkach dopuszczalne.

Twierdzenie IV

$$\underbrace{f(x\ldots x^{(k)}) + f_N(x\ldots x^{(K-1)}) = f(t)}_{x(t)} \;\hat{\equiv}\; \underbrace{F(w,\ldots w^{(k)})+F_N(w,\ldots w^{(K-1)}=F(\lambda)}_{w(\lambda)} \tag{13}$$

$$x(t) \rightleftarrows w(\lambda)$$

Dowód twierdzenia IV przeprowadzimy, pokazując przed tym, że:

- jeżeli rozwiązanie jest szeregiem potęgowym zmiennej rzeczywistej takim, że $|a_n \, t_i^n| < M = \text{const}$; $\forall\ n \in N$ oraz $\forall\ |t| < |t_i|$, to szereg ten jest bezwzględnie zbieżny wewnątrz koła o promieniu r, który zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego o zbieżności szeregów potęgowych jest równy:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n t^n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\, t^n}}$$

- szeregi bezwzględnie zbieżne posiadają pewne szczególne własności:

  a) dodawanie takich szeregów jest przemienne,

  b) suma różnica dwóch lub więcej szeregów bezwzględnie zbieżnych jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym,

c) jeżeli dwa szeregi są bezwzględnie zbieżne, to iloczyn Cauchy'ego

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

tych szeregów jest zbieżny bezwzględnie,

d) ponieważ szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale domkniętym zawartym w przedziale zbieżności tego szeregu, to całkując wyrazy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ w przedziale $[0, \tau)$ otrzymamy szereg potęgowy o tym samym promieniu zbieżności; sumą powstałego szeregu jest $\int_0^t f(\tau)d\tau$,

e) różniczkując wyrazy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ otrzymujemy szereg potęgowy o tym samym promieniu zbieżności; suma powstałego szeregu jest pochodną $f(t)$ [7].

Wnioskujemy:

1. Funkcja przedstawiona przez szereg potęgowy w przedziale jego zbieżności ma wewnątrz tego przedziału pochodne, całki i iloczyny wszystkich rzędów. Sam szereg w stosunku do tej funkcji jest niczym innym, jak jej szeregiem Taylora o współczynnikach

$$a_k = \left.\frac{f^{(k)}(t)}{k!}\right|_{t=t_1 \in K_r}$$

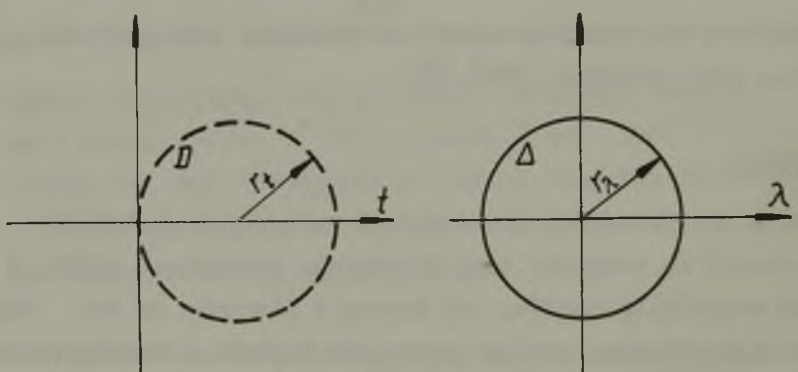
leżących na osi rzeczywistej w przedziale zbieżności.

2. Rozwiązanie równania różniczkowego nieliniowego (1) otrzymane w postaci szeregu potęgowego przez podział przy najwyższej pochodnej posiada wszystkie wymienione wyżej własności.

3. Na podstawie wniosku drugiego możemy powiedzieć, że rozwiązanie to jest funkcją analityczną zmiennej rzeczywistej i jako takie można je przedłużyć na płaszczyznę zmiennej zespolonej o promieniu zbieżności

$$r_\lambda = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \lambda^n|}}$$

4. Na podstawie wniosku trzeciego powiemy, że otrzymaliśmy szereg Taylora zmiennej zespolonej, który spełnia warunki przedłużenia analitycznego wzdłuż półosi rzeczywistej układu współrzędnych rzeczywistych rys. 6.



Rys. 6

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mathrel{\hat{=}} w(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \lambda^n$$

Twierdzenie V (pomocnicze)

Jeżeli w części wspólnej każdych dwóch obszarów (w naszym przypadku półoś rzeczywista) funkcje $f(t)$, $W(\lambda)$ są identyczne, wówczas funkcje te określają w obszarze $D \cup \Delta$ jedną funkcję analityczną [7]. Możemy więc zapisać prawdziwość:

$$\begin{aligned} t &\mathrel{\hat{=}} \lambda \\ f(t) &\mathrel{\hat{=}} W(\lambda) \end{aligned} \tag{13}$$

Wnioskujemy dalej:

5. Współczynniki zespolonego szeregu Taylora są jednoznacznie określone przez relację:

$$W_k = \frac{w^{(k)}(\lambda)}{k!}\Bigg|_{\lambda=\lambda_1 \in K_r}$$

i znajdują się wewnątrz koła określonego przez promień zbieżności r_λ.

6. Ponieważ

$$w^{(k)}(\lambda) = \frac{k!}{2\pi j}\oint_C \frac{w(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda$$

więc możemy stwierdzić, że szereg $W(\lambda)$ posiada wszystkie wymienione wyżej własności (a, b, c, d, e) - jest więc przedłużeniem rozwiązania równania różniczkowego do dziedziny zmiennej zespolonej λ. cbdo.

7. Na podstawie własności (a, b, c, d, e) porównując d i wniosek 5 możemy zapisać prawdziwość:

$$\frac{d^k f(t)}{dt^k} = \frac{d^k W(\lambda)}{d\lambda^k} \tag{14}$$

Podsumowując: W toku wnioskowania 1-7 udowodniono twierdzenie V w następującej formie:

$$\underbrace{f(x\ldots x^{(k)})+f_N(x\ldots x^{(K-1)}) = f(t)}_{\downarrow\; x(t)} \rightleftarrows \underbrace{F_1(w\ldots w^{(k)})+F_N(w\ldots w^{(K-1)}) = F(\lambda)}_{\downarrow\; w(\lambda)}$$

$$x(t) \rightleftarrows w(\lambda)$$

Uzasadnione będzie więc stwierdzenie końcowe: dla równania różniczkowego nieliniowego zmiennej rzeczywistej t o pewnych szczególnych wyżej wymienionych własnościach rozwiązania istnieje przedłużenie analityczne wraz ze wszystkimi własnościami do wnętrza koła o promieniu r na płaszczyźnie zespolonej.

Można zatem p e w n e r ó w n a n i e r ó ż n i c z k o w e n i e l i n i o w e p r z e d ł u ż a ć a n a l i t y c z n i e d o p r z e s t r z e n i z m i e n n e j z e s p o l o n e j i rozwiązania poszukiwać w postaci szeregu Taylora zmiennej zespolonej wg reguł pokazanych dla zmiennej rzeczywistej - zyskując jednak większą swobodę działania.

4. Topologiczne własności równania różniczkowego nieliniowego (2)

W celu określenia pewnych topologicznych własności równania różniczkowego nieliniowego 2 wprowadzimy przestrzeń zespoloną Λ, której dotyczyć będzie twierdzenie VI, oparte na następujących przesłankach:

1 - Zbiór A jest ograniczony, gdy jest położony całkowicie wewnątrz kuli:

$$K(a,\ r) \overset{df}{=} \left\{ x : \rho(x,\ a) \leqslant r \right\}$$

2 - Zbiór A nazywamy ciągowo-zwartym, jeżeli z każdego ciągu elementów, można wybrać podciąg zbieżny:

$$\forall a_n \in A \, \exists \, a_{n,k} \to b$$

3 - Zbiór A jest ciągowo-zwarty w sobie, jeżeli

$$\forall a_n \in A \, \exists \, a_{n,k} \to b \in A$$

4 - Na podstawie odpowiedniego podziału równania różniczkowego nieliniowego przy najwyższej pochodnej liniowej zmiennej rzeczywistej, możemy otrzymać rozwiązanie w postaci jednostajnie zbieżnego szeregu Taylora wewnątrz $K_k(a,r_t)$.

5 - Zachodzi: $K_k(a,r_t) \subset K_k(a,r_\lambda)$ oraz $o \leqslant r_\lambda < 1$.

6 - Przez liniową operację całkowania wewnątrz $K_k(a,r_\lambda)$ otrzymujemy $\left\{K_{k-i}(a,r_{\lambda_i})\right\}$ wewnątrz których istnieją zbieżne szeregi Taylora do elementów $b_i \in \Lambda_i$ oraz $o \leqslant r_{\lambda_i} < 1$.

Twierdzenie VI

Określona w toku rozumowania $(1 \div 6)$ przestrzeń zespolona skończenie k-wymiarowa Λ^k jest kontynuacją przestrzeni rzeczywistej X.

Podstawą przeprowadzonego wyżej rozumowania jest następujące twierdzenie Sokolnikowa [4] [8]:

Na to aby przestrzeń liniowa unormowana była skończenie k-wymiarowa potrzeba i wystarczy, aby każdy ograniczony podzbiór był zwarty.

Twierdzenie VI pozwala sformułować następujące własności równania różniczkowego nieliniowego (2), przedłużonego do przestrzeni zespolonej:

$$P_1(w,\dot{w},\ddot{w},\ldots w^{(k)}) + P_N(w,\dot{w},\ddot{w},\ldots w^{(k-1)}) = P(\lambda) \tag{16}$$

gdzie:

$F_l(w,\dot{w},\ddot{w},\ldots w^{(k)})$ – jest obrazem części liniowej równania różniczkowego nieliniowego (2) w przestrzeni zespolonej Λ^k,

$F_N(w,\dot{w},\ddot{w},\ldots w^{(k-1)})$ – jest obrazem części nieliniowej równania różniczkowego nieliniowego (2) w przestrzeni zespolonej Λ^k,

$F(\lambda)$ – jest obrazem funkcji wymuszającej na płaszczyźnie w przestrzeni Λ^k,

$W(\lambda)$ – jest funkcją analityczną zmiennej zespolonej, która jest postacią rozwiązania równania (3) na płaszczyźnie $W(\lambda),\lambda$

k – najwyższy rząd pochodnej liniowej odpowiadający ściśle k-wymiarowej przestrzeni zespolonej.

5. Zakończenie

1. Istnieje reguła transformacyjna przedłużenia równania różniczkowego nieliniowego opisującego dynamikę licznej grupy obwodów elektrycznych w przestrzeni zmiennej rzeczywistej do przestrzeni zespolonej skończenie k-wymiarowej.

2. Przedmiotem dalszych badań będą działania operacyjne na równaniu różniczkowym nieliniowym (2) w przestrzeni Λ^k.

LITERATURA

[1] Bieberbach L.: Analytische Fortsetzung. Springer Verlag Berlin 1955.

[2] Hildebrand F.B.: Advanced Calculus for Engineers. Prentice-Hall Inc, New York 1955.

[3] Ku Y.H.: Transient Circuit Analysis. D. van Nostrand Comp.Inc., Princeton 1961.

[4] Lusternik L.A., Sobolew W.I.: Elementy analizy funkcjonalnej. PWN, Warszawa 1959.

[5] Saaty T.L., Braun J.: Nonlinear Mathematics. Mc Graw Hill Book Comp., New York 1964.

[6] Umińska-Bortliczek M.: O własnościach transformacyjnych pewnego typu równania różniczkowego nieliniowego, cz. I. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej seria "Elektryka" z. 22.

[7] Whittaker E.T., Watson G.N.: Kurs analizy współczesnej, t. I i II. PWN, Warszawa 1967.

[8] Yosida K.: Functional analysis. Springer Verlag, 1965.

О НЕКОТОРОЙ ОПЕРАЦИИ И ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе представлена возможность применения теории аналитических продолжений в смысле Коши для нелинейного дифференциального уравнения типа:

$$\Phi(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots x^{(k)}) + \Phi(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots x^{(k-1)}) = \Phi(\tau)$$

На оснований проведеных доказательств теорем 1,II,III,IV,V,VI показано, что существует трансформационное правило аналитического продолжения выше указанного нелинейного дифференциального уравнения из действительного пространства в вид:

$$\Phi(x,\dot{x},\ddot{x}...x^{(k)}) + \Phi(x,\dot{x},\ddot{x}...x^{(k-1)}) = \Phi(\lambda)$$

во мнимой к-размерном пространстве.

CERTAIN OPERATION IN THE RANGE OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

S u m m a r y

The paper discusses the possibilities of applying the theory of analytical extensions according to Cauch for a non-linear differential equation of the following type:

$$f_1(x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}...x^{(k)}) + f_N(x,\dot{x},\ddot{x}...x^{(k-1)}) = f(t)$$

Basing on the proofs executed for the theorems I, II, III, IV, V and VI, it has been shown that there exists a rule of transforming the analytical extension of the nonlinear differential equation, as presented above, from the real space into the following form:

$$F_1(w,\dot{w},\ddot{w},...w^{(k)}) + F_N(w,\dot{w},...w^{(k-1)}) = F(\lambda)$$

in a complex area of limited k-dimensions.