ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: ELEKTRYKA z. 27 Nr kol. 274

ANDRZEJ MARCYNIUK

Katedra Technologii i Metrologii
Elektrycznej

O PROBABILISTYCZNĄ INTERPRETACJĘ BŁĘDU PRZYRZĄDOWEGO

Streszczenie. Ocenia się krytycznie rozpowszechnioną w miernictwie elektrycznym interpretację błędu przyrządowego jako osobnej kategorii błędów, obok błędów systematycznych i błędów przypadkowych. Uzasadnia się probabilistyczną interpretację. Wniosek: błąd przyrządowy rozpatrywany jako element zbioru i błąd przypadkowy mogą być opisywane za pomocą tego samego modelu matematycznego.

1. Stan obecny

Błąd pomiaru spowodowany błędem przyrządu, tzn. niedokładnością określoną przez wytwórcę przyrządu, jest w miernictwie elektrycznym traktowany odrębnie. Tworzy się osobną kategorię błędów, obok błędów systematycznych i błędów przypadkowych. Proponuje się nawet osobną nazwę: błędy półsystematyczne. Mówi się, gdy jednokrotnie odczytujemy przyrząd, że popełniamy błąd systematyczny o nieznanym znaku lecz o znanej granicy jego wartości bezwzględnej, właściwej danej klasie niedokładności przyrządu.

Rezultat odrębnego traktowania błędu przyrządowego ujawnia się wyraźnie przy obliczaniu błędu pomiaru pośredniego. Jeżeli np. na odpowiednie błędy $\pm\Delta_{OA}\%$, $\pm\Delta_{OB}\%$, $\pm\Delta_{OC}\%$ itd. pomiaru wielkości A, B, C itd. złożyły się wyłącznie błędy odpowiednich przyrządów, a wielkość pośrednio mierzona W jest zdefiniowana jako

$$W = A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \cdot C^{\gamma} \; \ldots . \tag{1}$$

to błąd pomiaru $\Delta_{OW}\%$ wielkości W liczy się za pomocą wzoru

$$\Delta_{OW} = |\alpha \cdot \Delta_{OA}| + |\beta \cdot \Delta_{OB}| + |\gamma \cdot \Delta_{OC}| + \dots \tag{2}$$

Formuła (2) jest rachunkowym wyrazem odrębności, jaką przypisano błędom przyrządowym. Wiadomo dobrze z doświadczenia, że ten model rachunkowy jest bardzo pesymistycznym oszacowaniem granic błędu pomiaru pośredniego: przeciętnie niedokładność jest znacznie mniejsza niż wynikająca z takiego rachunku. Mimo to o formule (2) nie mówi się jako o uproszczonym rachunku, lecz jako o metodzie wynikającej ze specyficznych właściwości błędów przyrządowych.

Okoliczności, przy których ma być stosowany wzór (2), są najczęstszą sytuacją występującą w dziedzinie technicznych pomiarów elektrycznych i dlatego błędy pomiarów pośrednich są najczęściej liczone w ten mało dokładny sposób. Warto więc z powodów czysto praktycznych przeanalizować zagadnienie i poszukać dokładniejszego niż formuła (2) modelu rachunkowego.

Są również inne - teoretyczne - następstwa przyjętego sposobu widzenia błędów przyrządowych.

Po pierwsze - sugeruje się ograniczoność ogólnej teorii błędów, ponieważ nie można jej jakoby stosować do niektórych konkretnych błędów - błędów przyrządowych. W rzeczywistości jednak konieczność odrębnego traktowania błędów przyrządowych jako zbioru - jak będzie wykazane - wynika z pominięcia części informacji o tych błędach: pominięcia informacji o rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa błędów tego zbioru. Właśnie to zawężenie informacji prowadzi do formuły (2).

Po drugie - dla przyjętego sposobu widzenia błędów przyrządowych znamienne jest to, że ich granica bezwzględnej wartości jest jednoznacznie i bezwarunkowo zakreślona: jednoznaczny rezultat jakości produkcji i wzorcowania. W rzeczywistości produkcja, wzorcowanie i działanie przyrządu są procesami losowymi, których rezultat jest zdeterminowany statystycznie i tylko w ten sposób może być trafnie i wnikliwie interpretowany. Wyznaczona granica błędu musi być zatem również rozumiana statystycznie, tzn. określa jej wartość pewien warunek - poziom ufności. Rozumiejąc jednak statystycznie granice błędu popełnialibyśmy niekonsekwencję wyznaczając ją z wzoru (2). Niekonsekwencja polega na tym, że prawdopodobieństwo przekroczenia granicy $\pm\Delta_{OW}$ jest zupełnie innego rzędu niż prawdopodobieństwo przekroczenia granicy każdego ze składników $\pm\Delta_{OA}$, $\pm\Delta_{OB}$ itd. (np. p^n, jeżeli każdy z n składników ma prawdopodobieństwo przekroczenia p).

Z ostatniej uwagi wynika praktyczny wniosek. Wyznaczając granice $\pm\Delta_{OW}$ o takim samym poziomie ufności jaki mają składniki Δ_{OA}, Δ_{OB} itd. otrzymamy wartość Δ_{OW} na ogół mniejszą i równocześnie przeciętnie dokładniejszą. Ponieważ o precyzji pomiaru sądzimy na podstawie wartości błędu Δ_{OW}, to tym samym przy mniejszym Δ_{OW} pomiar uznamy za dokładniejszy.

Oczywiście błędy przyrządowe są również analizowane indywidualnie, a nie jako zbiór: oddzielnie dla konkretnego przyrządu i dla konkretnego punktu zakresu pomiarowego. Analizowane indywidualnie błędy przyrządowe nie przedstawiają sobą odrębności z punktu widzenia teorii błędu; ten aspekt zagadnienia będzie pominięty w dalszych rozważaniach.

W dalszej części artykułu uzasadnia się probabilistyczną interpretację błędów przyrządowych rozpatrywanych jako zbiór.

2. Probabilistyczna interpretacja błędu przyrządowego

Błąd przyrządowy dla każdego punktu zakresu pomiarowego przedstawimy w sposób ogólnie przyjęty jako sumę

$$\Delta' = \Delta'_c + \Delta'_v \tag{3}$$

i przypomnimy fizyczne znaczenie tych składników.

Δ'_c przedstawia składową stałą dla danego punktu zakresu pomiarowego i jest w normalnych warunkach użytkowania przyrządu rezultatem przede wszystkim niedokładności produkcji i wzorcowania, a dla złożonych przyrządów pomiarowych zawiera również niekiedy błąd matematycznej aproksymacji rzeczywistych charakterystyk przetworników sygnału. W składowej stałej zawierają się również dodatkowe błędy wywołane procesami starzenia i zmianą warunków użytkowania w stosunku do warunków normalnych.

Składowa Δ'_v przedstawia zmienny błąd przyrządu w danym punkcie zakresu pomiarowego o właściwościach błędu przypadkowego. Fizycznie składowa Δ'_v dla różnych konstrukcji przyrządu jest wypadkową działania wielu przyczyn: luzy mechanizmów, tarcie, histereza, niestabilność, zakłócenia, szumy, zmiany warunków zasilania przyrządu.

Granice $\pm\Delta_v$ składowej Δ'_v wyznaczają przedział niepewności wskazań, najczęściej stały w całym zakresie pomiarowym danego przyrządu.

Klasę niedokładności danego przyrządu wyznacza suma Δ skrajnej wartości Δ_c oraz skrajnej wartości Δ_v. Wówczas, gdy znana jest tylko klasa niedokładności przyrządu znamy tylko sumę skrajnych wartości $\Delta_c + \Delta_v$, zaokrągloną w górę do odpowiedniej wartości znormalizowanej.

Normy nie precyzują żadnych wymagań co do wzajemnej proporcji składowych Δ_c i Δ_v. Z praktyki wiadomo, że dla większości przyrządów Δ_c stanowi główną część sumy $\Delta_c + \Delta_v$.

Z punktu widzenia użytkownika przyrządu składowa Δ'_c jest błędem systematycznym przyrządu w danym punkcie zakresu pomiarowego.

Z punktu widzenia wytwórcy przyrządu składowa Δ'_c jest przede wszystkim przypadkowym błędem produkcji, a jej skrajna wartość Δ_c jest miarą rozrzutu błędów danej produkcji. Dla dowolnego punktu zakresu pomiarowego i dla dowolnego przyrządu danej klasy i danej serii błąd ten może przyjąć dowolną wartość z przedziału $\pm\Delta_c$, jeżeli każdy z przyrządów spełnia wymagania danej klasy. Zatem systematyczny błąd Δ_c' w danym punkcie zakresu pomiarowego możemy traktować jako konkretną wartość zmiennej losowej, a błędy Δ_c' danego przyrządu jako próbkę przypadkowych wartości tej zmiennej losowej.

Między błędem systematycznym Δ_c' rozpatrywanym jako zmienna losowa a błędem przypadkowym różnica jest nieistotna i polega jedynie na okolicznościach, w których może ujawnić się każdy z nich. Każdemu z tych błędów odpowiada ten sam model matematyczny.

Obecność błędu przypadkowego - jak wiadomo - ujawnia się przy wielokrotnym powtarzaniu pomiaru, gdy podstawowy układ warunków, w którym przeprowadzamy pomiar, jest niezmienny. Ponieważ o pojedynczej wartości błędu przypadkowego nie wiemy nic, powtarzamy pomiar wielokrotnie i otrzymujemy próbkę wielu wartości, o której zakładamy, że jest reprezentatywna dla nieznanej zmiennej losowej zdeterminowanej tym podstawowym układem warunków. Następnie w oparciu o dane z próbki wyznaczamy interesujące nas cechy (oczywiście przybliżone) tej nieznanej zmiennej losowej, jaką jest błąd przypadkowy.

Obecność błędu systematycznego Δ_c' ujawniłaby się, gdyby do pomiaru tego samego obiektu użyć równocześnie wielu przyrządów tej samej klasy i przyjąć, że składowa zmienna Δ_v' jest pomijalna. Otrzymalibyśmy wówczas również próbkę wartości tym razem zmiennej losowej Δ_c' i moglibyśmy w oparciu o nią również określić przybliżone cechy zmiennej losowej Δ_c'. W rzeczywistości zmienna losowa Δ_c' jest całkowicie określona, ponieważ znamy metrologiczne właściwości przyrządu, a wytwórca przeprowadził odpowiednie badania i określił klasę niedokładności. Z tego powodu możemy więc ograniczyć się tylko do jednokrotnego wykonania pomiaru i tylko jednym przyrządem o znanej klasie, a o błędzie Δ_c' będziemy wiedzieli nie mniej niż o błędzie przypadkowym z wielokrotnie powtarzanego pomiaru.

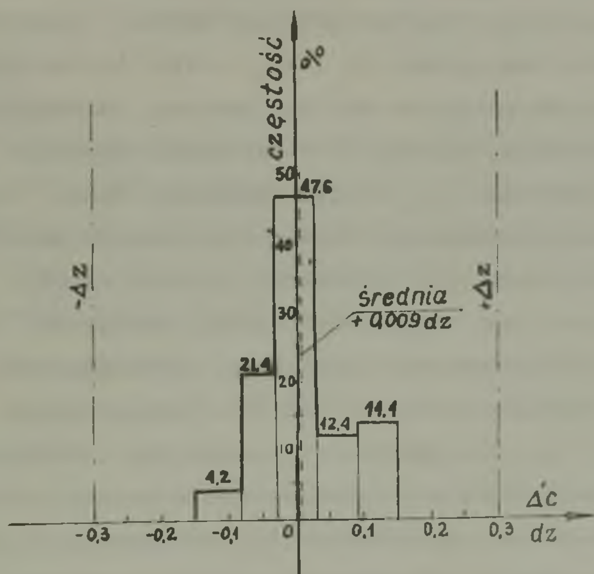
Konkretnie o zmiennej losowej Δ_c' wiemy wszystko: znamy rozkład gęstości prawdopodobieństwa (dokładny lub przybliżony), znamy parametry tego rozkładu - wartość oczekiwaną i parametr określający rozproszenie. Mamy więc o błędzie Δ_c' wszystkie te statystyczne informacje, które dla błędu przypadkowego musimy normalnie zdobywać przez wielokrotne powtarzanie pomiaru.

Zmienna losowa Δ_c' ma z zasady rozkład normalny (lub w przybliżeniu normalny), ponieważ jest przede wszystkim rezultatem błędów produkcji, przypadkowych trwałych zmian właściwości elementów konstrukcyjnych przyrządu itd. Δ_c' może nie mieć rozkładu normalnego dla szczególnych przyrządów jednakowego rodzaju i jednego typu danej klasy. Rozpatrując jednak dostatecznie duży zbiór przyrządów różnego rodzaju i różnego typu danej klasy otrzymamy zbiorowość błędów o rozkładzie granicznie normalnym. Ten fakt ma istotne praktyczne znaczenie przy obliczaniu błędu pomiaru pośredniego, ponieważ możemy przyjąć, że wskazania wielu różnych przyrządów są obarczone błędami Δ_c' pochodzącymi ze zbiorowości o rozkładzie normalnym i możemy składać te błędy zgodnie z odpowiednimi regułami.

Wartość oczekiwana zmiennej Δ_c' równa się zeru, ponieważ wytwórca dąży do minimalizacji błędu przyrządu, a zmiany spowodowane starzeniem i zmianą warunków pracy dla różnych przyrządów są przypadkowe.

Naturalnym parametrem charakteryzującym rozproszenie zmiennej Δ_c' jest rozstęp: $\pm\Delta_c$. Zakładając rozkład normalny dla zmiennej Δ_c' możemy wyznaczyć błąd standardowy $\sigma_{\Delta_c'}$ o ile granicom $\pm\Delta_c$ przyporządkujemy określony poziom ufności. Możemy również nie dochodzić wartości $\sigma_{\Delta_c'}$ i wykonywać wszystkie rachunki na Δ_c, które obowiązują dla $\sigma_{\Delta_c'}$, a wyniki obliczeń będą różniły się tylko poziomem ufności. Zakładamy bowiem, że dla wszystkich przyrządów $\pm\Delta_c$ ma ten sam poziom ufności, a równocześnie wiadomo, że dla rozkładu normalnego $\frac{\Delta_c}{\sigma_{\Delta_c'}} = \text{const.}$

Przedstawioną probabilistyczną właściwość składowej Δ_c' ilustruje i potwierdza materiał empiryczny przedstawiony za pomocą histogramu na rys. 1. Jest to histogram rozkładu częstości dla 195 wartości błędu Δ_c' wybranych punktów podziałki (zawsze tych samych) 13 mierników kl. 0,2 wziętych przypadkowo i badanych w warunkach normalnych. Na osi rzędnych odłożono częstość występowania błędów o wartości z danego przedziału, a na osi odciętych wartość błędu Δ_c' w działkach. Linią przerywaną zaznaczono wartość średnią 195 błędów, a liniami geometrycznymi - granice błędu zakresowego tych mierników.



Rys. 1. Histogram rozkładu częstości 195 wartości błędu Δ_c'. Inne objaśnienia w tekście

Składowa Δ_v' jest również zmienną losową, która w dowolnym lecz tym samym punkcie zakresu pomiarowego tego samego przyrządu może przyjmować każdą wartość z przedziału $\pm\Delta_v$, gdy zachowany będzie bez zmiany podstawowy układ warunków. Rozkład Δ_v' jest rozkładem normalnym, ponieważ ta zmienna jest rezultatem równoczesnego działania bardzo wielu przyczyn. Wartość oczekiwana Δ'_v równa się zeru, a miarą rozproszenia może być rozstęp $\pm\Delta_v$ charakterystyczny dla danego typu przyrządu pomiarowego i najczęściej stały w całym zakresie pomiarowym.

Błąd przyrządowy $\Delta' = \Delta'_c + \Delta'_v$ jest również zmienną losową której rozkład i parametry rozkładu wynikają z kompozycji zmiennych Δ'_c i Δ'_v. Zmienna losowa Δ' przybiera wszystkie swoje wartości, jeżeli jednokrotnie wykonujemy pomiar coraz to innym przyrządem danej klasy.

Za miarę niedokładności przyrządu przyjmuje się jednak nie parametr bezpośrednio charakteryzujący rozrzut kompozycji zmiennych $\Delta'_c + \Delta'_v$, lecz sumę granic $\Delta_c + \Delta_v$, a więc liczbę odpowiednio większą. Tę liczbę powiększa się raz jeszcze, zaokrąglając ją w górę do znormalizowanej wartości i w ten sposób powstaje miara niedokładności przyrządu: Δ_z = błąd zakresowy. Każda z operacji zwiększania granic nominalnego błędu przyrządowego może być statystycznie interpretowana jako zwiększenie poziomu ufności tego błędu. Poziom ufności jest więc bardzo wysoki, wyższy niż poziom ufności najczęściej przyjmowanego jako miarę niedokładności granicznego błędu dla rozkładu normalnego ($\pm 3\sigma$). Pomimo dużego poziomu ufności granic $\pm\Delta_z$ nie powinno się uważać jako określonych bezwarunkowo, ponieważ chociażby w procesie wzorcowania istnieje jakieś prawdopodobieństwo nie wykrycia błędu większego od Δ_z, tak samo jak istnieje ryzyko stwierdzenia, że błąd istnieje, gdy w rzeczywistości jego nie ma. Ponadto w okresie użytkowania, pomiędzy kolejnymi wzorcowaniami istnieje zawsze jakieś prawdopodobieństwo zajścia zmian właściwości metrologicznych przyrządu, naruszenia jego dokładności i to prawdopodobieństwo powinno być również brane pod uwagę.

W świetle tych wywodów nie jest teoretycznie konsekwentne postępowanie, wg którego zwiększa się bez kontroli granice wartości nominalnej błędu po to, aby uważać go jako absolutnie pewny. Sensowniej jest wyznaczyć błąd o kontrolowanych granicach i być przygotowanym, że mylimy się raz na pewną określoną liczbę razy.

Warto tu dodać, że w dokumentach normatywnych i w praktyce pomiarów elektrycznych błędy $\Delta_c, \Delta_v, \Delta_c + \Delta_v, \Delta_z$ nie są ściśle zdefiniowane i mogą być różnie interpretowane. Dlatego to, co zostało powiedziane wyżej o granicach tych błędów, powinno być traktowane jako próba ujednolicenia, jako głos dyskusyjny.

3. Wnioski

Z probabilistycznej interpretacji błędów przyrządowych wynikają określone, pozytywne następstwa dla teorii i dla praktyki pomiarów elektrycznych:

1. Nie ma potrzeby tworzenia odrębnej kategorii błędów dla błędu przyrządowego rozpatrywanego jako zbiorowość, ponieważ może być on analizowany i przedstawiany za pomocą tych samych środków matematycznych, za pomocą których analizuje się błąd przypadkowy, tzn. za pomocą statystyki matematycznej.

2. Probabilistyczna interpretacja błędu przyrządowego umożliwia racjonalne rozumienie granic tego błędu, nadając im sens statystyczny, tzn. każe rozumieć ich wartość warunkowo, jako obowiązującą przy określonym poziomie ufności, a nie jako liczbę określającą bezwarunkowo granice błędu przyrządowego. Wówczas dodatkowo możliwe jest jednolite połączenie niedokładności przyrządu jako jego cechy metrologicznej z jego niezawodnością, jako cechy istotnej dla każdego urządzenia technicznego, a więc również przyrządu pomiarowego.

3. Sposób obliczania błędu pomiaru pośredniego wg formuły (2) powinien być rozumiany jako uproszczone i niedokładne oszacowanie skrajnej granicy błędu, a nie jako wyraz odrębności błędu przyrządowego.

4. Teoretycznie uzasadnione granice błędu pomiaru pośredniego, w którym błędy przyrządowe decydowały o niedokładności, wynikają jako parametry kompozycji rozkładów błędów składowych. Racjonalność tak wyznaczonych granic polega na tym, że zapewniają kontrolowany poziom ufności granicy i np. taki sam jak poziom ufności błędów cząstkowych.

Gdy błędy cząstkowe mają rozkład normalny i jednakowy poziom ufności (a tak jest najczęściej), to granicę błędu pomiaru wielkości W (1) wyznacza się z wzoru

$$\Delta_{OW} = \sqrt{(\alpha \cdot \Delta_{OA})^2 + (\beta \cdot \Delta_{OB})^2 + (\gamma \cdot \Delta_{OC})^2 + \ldots} \qquad (4)$$

Obliczanie teoretycznie uzasadnionych granic błędu pomiaru pośredniego, np. wg wzoru (4), może mieć praktyczne znaczenie, ponieważ liczby otrzymywane z wzoru (4) są statystycznie dokładniejsze i mniejsze niż z wzoru (2), a wnioski o precyzji pomiaru wyciągamy właśnie na podstawie tych liczb.

4. Przykład liczbowy

Porównać błąd pomiaru obliczony wg wzorów (2) i (4) oporu właściwego próbki walcowej, jeżeli błędy przyrządowe pomiaru natężenia prądu, napięcia, średnicy, długości wynosiły odpowiednio po jednym procencie.

Opór właściwy $\varrho = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U}{I} \cdot \frac{d^2}{l}$ więc błąd wg wzoru (2) będzie

$$\Delta_{O\varrho} = |\Delta_{OI}| + |\Delta_{OU}| + |2 \cdot \Delta_{Od}| + |\Delta_{Ol}| = 1 + 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 5\%$$

a wg wzoru (4)

$$\Delta_{0\varrho} = \sqrt{\Delta_{0I}^2 + \Delta_{0U}^2 + 2^2 \cdot \Delta_{0d}^2 + \Delta_{0l}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 \cdot 1^2 + 1^2} = 2{,}66\%$$

Błąd o tym samym poziomie ufności, jaki mają błędy cząstkowe jest prawie dwukrotnie mniejszy niż błąd skrajny. Jeżeli prawdopodobieństwo przekroczenia granicy przez każdy z błędów cząstkowych przyjąć np. równe 10^{-4}, to prawdopodobieństwo przekroczenia granicy obliczonej wg wzoru (2) wyniesie 10^{-16}, a prawdopodobieństwo przekroczenia granicy otrzymanej z wzoru (4) wynosi tyle co składników - 10^{-4}.

Powyższe liczby ilustrują dobitnie sens praktyczny interpretacji probabilistycznej błędu przyrządowego.

ЗА ВЕРОЯТНОСТНУЮ ИНТЕРПРЕТАЦИЮ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Р е з ю м е

123

Критически оценивается распространенную в электрических измерениях интерпретацию инструментальной погрешности как особенной категории погрешностей, рядом с систематическими и случайными погрешностями.

Доказывается вероятностную интерпретацию.

Вывод: инструментальная погрешность рассматриваемая как элемент множества и случайная погрешность могут быть описаны при помощи этой самой математической модели.

FOR THE PROBABILISTIC INTERPRETATION OF THE INSTRUMENTAL ERROR

S u m m a r y

Widespread at the electrical measurements the interpratation of the instrumental error is estimated critically as a category by itself, besides the systematic and accidental errors.

The reasons for the probabilistic interpretation are given.

Conclusion: the instrumental error as an element of series and the accidental error can be described by means of the same mathematical model.