

**Deutsche  
Werkmeister-Bücherei  
Gruppe I**

**Band 3**

**Graphisches Rechnen**  
**(Nomographie)**

# Deutsche Werkmeister-Bücherei

Herausgegeben von  
Ingenieur Heinz Gramm

## Graphisches Rechnen (Nomographie)

2. Auflage

Von  
Dipl.-Ing. Dr. phil. Hanns Körwien



141 189

219114

## Vorwort zur zweiten Auflage

Der Band „Graphisches Rechnen“ hat großen Anklang gefunden, daß schon nach kaum  $1\frac{1}{2}$  Jahren die Herausgabe einer zweiten Auflage erforderlich wurde.

Im Vorwort zur ersten Auflage wurde gesagt:

Der Verfasser, der seit Jahren über „Nomographie“ in A. W. F.- und DAF.-Lehrgängen unterrichtet und jetzt Lehrer an einer bekannten höheren technischen Lehranstalt ist, schöpft aus dem reichen Quell seiner Betriebs- und Lehrerfahrungen.

Dieses Buch entstand aus einer Reihe von Aufsätzen, die der Verfasser für die von der Deutschen Arbeitsfront herausgegebene Zeitschrift „Der Deutsche Techniker“ schrieb. Damit wird einem langgehegten Wunsche vieler Leser dieses Blattes entsprochen, die immer wieder erklärten, daß sie jene Aufsätze gern erweitert und abgerundet in Buchform besitzen möchten. In kurzer, knapper Form, ohne viel Mathematik, wird in diesem Buche, das ebenso für Facharbeiter wie für Techniker geschrieben ist, die Selbstanfertigung von Rechentafeln und Sonderrechenstäben dargestellt. Die einzelnen Vorgänge beim Entwurf derartiger Rechenhilfen sind meist in Arbeitsgänge gegliedert. Einige Formeln wurden auf verschiedenartige Weise dargestellt, um die Mannigfaltigkeit der Darstellungsformen zu zeigen. Dem Leserkreis entsprechend wurde auf Netztafeln, die durch projektive Verzerrung entstehen, nicht eingegangen. Will sich der eine oder andere Leser nach gründlicher Durcharbeit des gebotenen Stoffes weiterbilden, dann findet er im Schrifttumsverzeichnis auch einige weiter führende Werke. Ohne gründliche Beherrschung jedoch der analytischen und darstellenden Geometrie ist ein Eindringen in Sondergebiete sehr schwierig. Zum Weiterstudium ist das geradezu klassische Werk „Das Lehrbuch der Nomographie auf abbildungs-geometrischer Grundlage“ von Stud.-Rat M. Schwerdt, dem verdienten Obmann des Ausschusses Rechentechnik beim A. W. F. (Aus-

schuß für wirtschaftliche Fertigung) zu empfehlen. An dieser Stelle sei auch auf die A. W. F.-Mitteilungen hingewiesen, die über alle Neuerscheinungen auf dem Gebiete der Rechentechnik berichten. Ein besonderer Abschnitt ist den mechanisierten Rechentafeln, den Rechenmaschinen und Rechengetrieben gewidmet. Das Rechnen mit der Rechenmaschine ist ein noch wenig bearbeitetes Gebiet innerhalb der Rechentechnik. Abschließend wurden die Rechengetriebe behandelt, die die Anwendung rechentechnischer Methoden im Getriebebau zeigen.

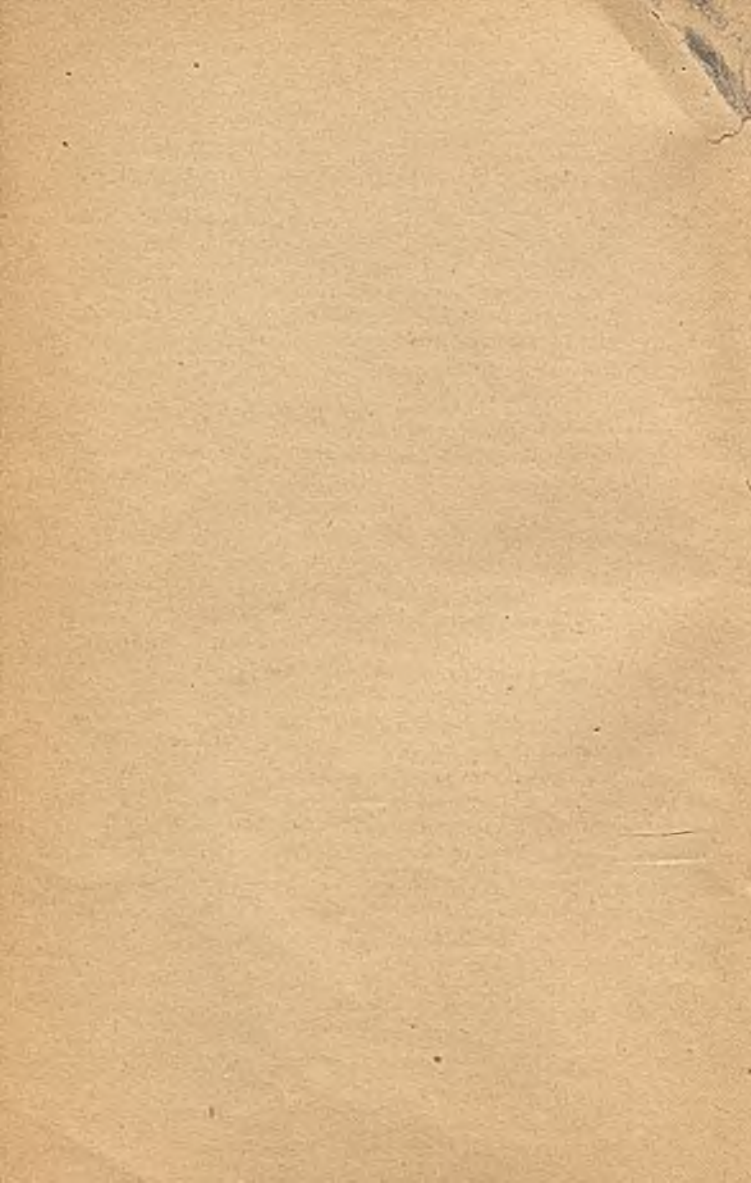
In dieser Auflage sind eine Anzahl Bilder durch neue, besser verständliche ersetzt worden. Das Buch dürfte jetzt voll und ganz den Zweck erfüllen, auch dem nicht über Kenntnisse der höheren Mathematik verfügenden Werkmeister, Kalkulator und Facharbeiter ein brauchbares Lehrbuch zu sein.

Wittenberg, im Herbst 1942.

**Herausgeber, Verfasser und Verlag.**

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Elemente der graphischen Darstellung .....	1
II. Die Darstellung im gleichförmig geteilten Netz ...	21
III. Eigenarten der Darstellung im gleichförmig geteilten Netz .....	45
IV. Darstellung im ungleichförmig geteilten Netz ...	66
V. Konstruktion von Leitertafeln .....	96
VI. Verbindung von Leiter- und Netztafeln .....	121
VII. Andere aus geraden Leitern zusammengesetzte Leitertafeln .....	136
VIII. Leitertafeln mit nichtgeradlinigen Leitern .....	160
IX. Darstellungen der trigonometrischen Funktionen	181
X. Das Dreiecks- und Kreisnetz .....	204
XI. Methoden aus durch Beobachtung ermittelter Wertepaare das Gesetz in algebraischer Form zu ermitteln .....	221
XII. Darstellung einiger Formeln aus dem Gebiete der Kalkulation, Festigkeitslehre und Werkstatttechnik	239
XIII. Bewegliche Rechensysteme (Rechenschieber und Schiebblätter) .....	270
XIV. Mechanisierte Rechentafeln, Rechenmaschinen, Rechengetriebe .....	297
Literaturnachweis .....	326
Sachverzeichnis .....	329



# I. Elemente der graphischen Darstellung

Die Methoden der graphischen Rechentechnik wurden entwickelt, um sich die zahlenmäßige Ausrechnung immer wieder vorkommender Rechenoperationen zu ersparen oder doch wenigstens zu erleichtern. Eins der Ziele der modernen Rechentechnik ist die Darstellung einer Folge gesetzmäßig verbundener Zahlenpaare im Bild. Solche Zahlenpaare finden sich in Tabellenform in jedem Tabellenbändchen, in jedem Taschenbuch. Jeder kennt und benutzt die Tabellen der Quadrat- und Kubikzahlen z. B. oder der Quadrat- und Kubikwurzeln. Hier entspricht eine einfache Zahl einer Quadratzahl, einer Kubikzahl, einer Quadratwurzel, einer Kubikwurzel usw. Es gehören also folgende Zahlen als Zahlenpaare zusammen:

$x$	$x^2$	$x$	$x^3$	$x$	$\sqrt{x}$	$x$	$\sqrt[3]{x}$
3	9	3	27	4	$\frac{\sqrt{x}}{2}$	8	$\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$

Da die einfache Zahl  $x$  allen „höheren“ Zahlen gemeinsam ist, wird sie im Kopf der Tabelle an den Anfang gestellt. In Tabellenkopf stehen also die verschiedenen Zahlengesetze in algebraischer Form, allerdings nicht in Form einer Gleichung. Als Gleichung geschrieben würden diese Gesetze folgendermaßen lauten:

$$y = x^2 \quad y = x^3 \quad y = \sqrt{x} \quad y = \sqrt[3]{x}$$










Durch die Gleichungsform soll angedeutet werden, daß es sich hier um die gesetzmäßige Verknüpfung zweier Zahlen handelt. Außer der tabellarischen Darstellung von Gesetzen, die als Formel vorliegen, gibt es noch eine andre Art von Tabelle. In ihr werden alle irgendwie wichtigen Größen übersichtlich eingeordnet. Eine solche tabellarische Zusammenstellung vereinigt beispielsweise Volumina und Mantelflächen regelmäßiger Körper. Wir wollen einmal eine derartige Tabelle aufbauen.

Der regelmäßigste und zugleich einfachste Körper ist die Kugel. Alle anderen in die Tabelle aufzunehmenden Körper sollen auf die Kugel bzw. die Halbkugel bezogen werden. Wir betrachten z. B. einen Doppelkegel, dessen Grundkreisdurchmesser und Höhe gleich dem Kugeldurchmesser  $d = 2r$  ist. Ein anderer regelmäßiger Körper ist ein Zylinder, dessen Grundkreisdurchmesser und Höhe ebenfalls gleich dem Kugeldurchmesser ist.



Weiter ordnen wir in diese Zusammenstellung jene regelmäßigen Körper ein, die sich aus Halbkugel, Kegel und Zylinder zusammensetzen. Der Kopf der Tabelle enthält die Angabe der Kennworte, in diesem Falle also „Volumen“ und „Oberfläche“. Die erste Reihe dieser Übersicht enthält die Sinnbilder der regelmäßigen Körper. Die Reihenfolge wurde so gewählt, daß mit dem Körper kleinsten Volumens angefangen wurde. Tabelle 1 zeigt jene Zusammenstellung:

Tabelle 1.

Sinnbild	Volumen	Oberfläche
	$\frac{4}{3} r^3 \pi$	$4 r^2 \pi$
	$\frac{2}{3} r^3 \pi$	$2,83 r^2 \pi$
	$\frac{2}{3} r^3 \pi$	$3 r^2 \pi$
	$\frac{1}{3} r^3 \pi$	$4 r^2 \pi$
	$\frac{4}{3} r^3 \pi$	$4,48 r^2 \pi$
	$\frac{4}{3} r^3 \pi$	$4 r^2 \pi$
	$\frac{4}{3} r^3 \pi$	$4,48 r^2 \pi$
	$\frac{5}{3} r^3 \pi$	$5 r^2 \pi$
	$\frac{6}{3} r^3 \pi$	$6 r^2 \pi$

Wird nun die Aufgabe gestellt, diese Übersicht im Bilde festzuhalten, dann ist die Reihe der unter dem Kennwort „Volumen“ stehenden Zahlenwerte in  $r^3 \pi =$  Einheiten in ein Netz einzutragen, das, wie Bild 1 zeigt, durch zwei Achsen begrenzt ist. Auf der senkrechten Achse sind die Werte  $\frac{1}{3} r^3 \pi$  bis  $\frac{6}{3} r^3 \pi$  eingetragen, auf der waagerechten Achse sind die Sinnbilder der entsprechenden Körper dargestellt. Aus der Tabelle und klarer noch aus der bildlichen Darstellung ist zu erkennen, daß einigen regelmäßigen Körpern ganz verschiedener Gestalt ein- und die-

selbe Volumenformel zukommt. Jeder dieser Körper besitzt jedoch noch ein Unterscheidungsmerkmal: die Kennziffer seiner Oberfläche. Die vollständige Beschreibung eines regelmäßigen Körpers liefern also jene beiden Kennziffern. Um auf diese Tatsache auch im Bild hinzuweisen, wurden die betreffenden Flächenwerte in dem unteren Teil des Netzes eingetragen. Zu diesem

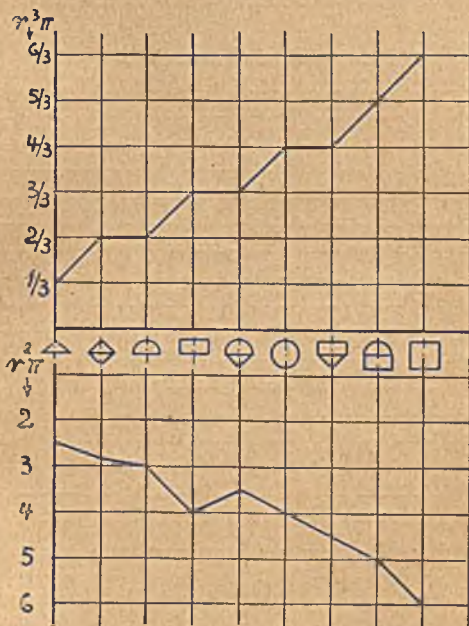


Bild 1. Schaubild der Kennziffern der Volumen und Oberflächen einiger auf die Kugel bezogener Körper.

Zweck wurde die senkrechte Achse nach unten verlängert und auf ihr die Flächenwerte in  $r^2\pi = \text{Einheiten}$  aufgetragen. Aus dieser Darstellung geht eindeutig hervor, daß durch Angabe des Volumens und der Oberfläche ein regelmäßiger Körper genügend genau bestimmt ist. Der Verlauf des oberen wie des unteren Linienzuges ist nicht stetig, d. h. es ist nicht möglich, die einzelnen Punkte durch eine durchgehende Kurve zu verbinden. Diese Darstellung enthält schon die Bausteine der im folgenden

noch genauer zu behandelnden Rechenhilfen z. B. Koordinatensystem, Netz, Leitern usw. In einem wichtigen Punkte jedoch unterscheidet sich eine derartige tabellarische Zusammenstellung von der Darstellung technisch wichtiger Gesetzmäßigkeiten. Die in Bild 1 dargestellten Werte wurden nicht auf Grund einer alle Werte umfassenden Formel oder eines Gesetzes, sondern ziemlich willkürlich, wenn auch nicht planlos in die Tabelle aufge-

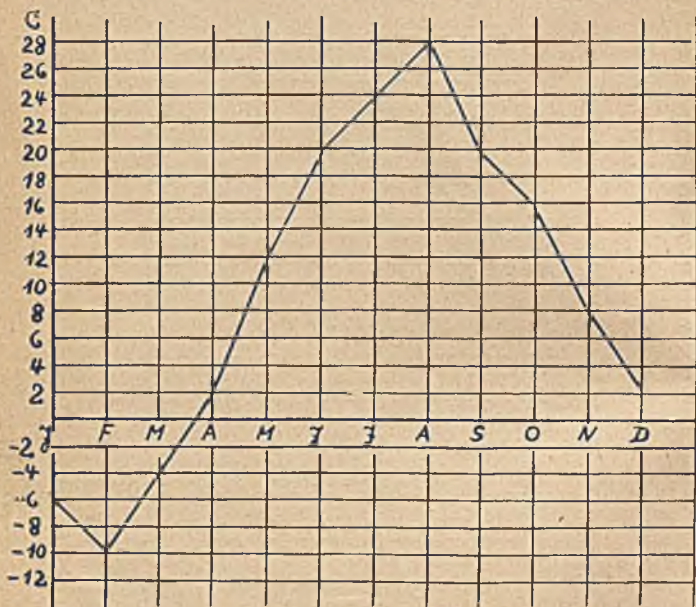


Bild 2. Schaubild der mittleren Jahrestemperatur.

nommen. Die Punkte, die durch die Sinnbilder der einzelnen Körper gekennzeichnet sind, liegen zwar gleich weit auseinander, sind aber nicht als Punkte einer Maßstrecke oder einer Leiter zu bewerten. Der Linienzug im Netz ist mit dem letzten Punkt unweigerlich zu Ende, er bricht ab, ohne daß dies durch eine mathematische Gesetzmäßigkeit begründet werden kann. Eine verwandte Darstellung ist auch das Schaubild der mittleren Jahrestemperaturen (Bild 2). Auf der waagerechten Achse eines rechtwinkligen Systems sind die Monate, auf der senkrechten

Achse die Temperaturgrade in Celsius eingetragen. Auch hier findet sich die Unstetigkeit im Linienzug wieder. In dieser Darstellung könnte man die Monatslinie jedoch schon als Maßlinie ansprechen, d. h. die gleichen Abstände der Teilpunkte geben sinnvoll gleiche Zeiträume wieder. Noch in einem anderen wesentlichen Punkte unterscheiden sich die Darstellungen der Bilder 1 und 2. In Bild 1 wurde der obere Teil der senkrechten Achse in  $r^3\pi$ -Einheiten, der untere Teil in  $r^2\pi$ -Einheiten geteilt. Die in beiden Netzhälften dargestellten Werte sind weder mit dem positiven noch mit dem negativen Vorzeichen zu versehen, es sind sog. Absolutwerte. Ganz anders dagegen verhält es sich mit den Werten des Temperaturschaubildes. In der oberen Hälfte dieses Schaubildes wurden Werte mit positivem Vorzeichen, also Wärmegrade über Null, in der unteren Hälfte dagegen Werte mit negativem Vorzeichen, also Kältegrade unter Null dargestellt. Hier interessieren also nicht die Absolutwerte sondern die Relativwerte.

Während das Ansteigen des Zahlenfaktors  $a = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \dots$  der Volumentabelle nicht formelmäßig erfaßt werden konnte, so ist das Ansteigen des Wertes der Zahlenpaare jedes einzelnen Körpers durch sein Gesetz, durch seine Formel gegeben. Wenn man z. B. den Radius  $r$  in der Formel  $V = \frac{4}{3}r^3\pi$  verschiedene Zahlenwerte durchlaufen läßt, dann erhält man nach Ausrechnung der betreffenden Werte eine Tabelle von stetig wachsenden Wertepaaren. Wollten wir das gesetzmäßige Anwachsen des Volumens aller 6 Körper gleichzeitig verfolgen, so sind zunächst 6 Tabellen aufzustellen und zwar wollen wir uns die Ausrechnung insofern erleichtern als wir zunächst die  $\frac{r^3\pi}{3}$ -Werte festlegen und diese jeweils mit ein und derselben Konstanten multiplizieren. Die ausgerechneten Werte folgen in der Tabelle 2.

Vergleichen wir die Zahlenwerte, indem wir von links nach rechts in derselben Zeile weitergehen, dann erkennen wir, daß sich diese Werte immer um denselben Betrag unterscheiden. Stellen wir diese Werte wieder graphisch dar, dann erhält, wie Abb. 3 zeigt, jeder Kurvenzug eine Kennziffer, die sich auf den veränderlichen Faktor  $a$  bezieht. Eine nach bestimmten Gesetzen aufgebaute Kurvenfolge heißt Kurvenschar. Das Kurvenbild läßt sich kurz folgendermaßen charakterisieren: die Abstände der einzelnen Kurven voneinander werden mit größer werdendem Faktor  $a$  immer kleiner. Die Zahl der den Verlauf der Kurve bestimmenden Punkte wird mit wachsendem Faktor  $a$  immer kleiner. Die Kurve für  $V = \frac{4}{3}r^3\pi$  z. B. wurde durch 11 Punkte, jene für  $V = \frac{6}{3}r^3\pi$  dagegen nur durch 5 Punkte bestimmt. In der Tabelle ist dies durch die Abstufung der Zahl

Tabelle 2.

r	Rauminhalt						
	$\frac{r^3 \pi}{3}$	$1 \cdot \frac{r^3 \pi}{3}$	$2 \cdot \frac{r^3 \pi}{3}$	$3 \cdot \frac{r^3 \pi}{3}$	$4 \cdot \frac{r^3 \pi}{3}$	$5 \cdot \frac{r^3 \pi}{3}$	$6 \cdot \frac{r^3 \pi}{3}$
1	1,05	1,05	2,1	3,15	4,20	5,25	6,30
2	8,38	8,38	16,76	25,14	33,52	41,90	50,28
3	28,3	28,3	56,6	84,9	113,2	141,5	169,8
4	67,1	67,1	134,2	201,3	268,4	335,5	402,6
5	131,2	131,2	262,4	393	524	655	786
6	226,3	226,3	452,6	678,9	905,2	1131,5	1357,8
7	360	360	720	1080	1440	1800	2160
8	536	536	1072	1608	2144	2680	
9	764	764	1528	2292			
10	1050	1050	2100				
11	1395	1395					
12	1810	1810					
13	2300	2300					

der Tabellenwerte zu erkennen. Vergleicht man mit dem Stechzirkel die einzelnen Abstände der entsprechenden Kurvenwerte, indem man auf Geraden parallel zur V-Achse weiterschreitet, dann erkennt man, daß diese Werte untereinander gleich sind. Dieses Bild deckt sich mit dem Zahlenaufbau der Zeilen innerhalb der Tabelle, wie eben erwähnt. Die Eigenart im Aufbau der Kurvenschar des Bildes 3 weist uns Wege, die Gesetze der Volumenveränderung mit wachsenden r-Werten, auch anders darzustellen. Tragen wir nämlich die mit dem Stechzirkel verglichenen Werte in ein System ein, dessen senkrechte Achse ebenfalls die Volumenwerte, dessen waagerechte Achse jetzt aber die Werte der Kennziffern trägt, dann erhalten wir die in Bild 4 gezeigte Darstellung. Die Kurvenschar hat sich in eine Geradenschar verwandelt; die Kennziffern der einzelnen Geraden sind jetzt die r-Werte. Eine derartige Darstellung wäre dann zu wählen, wenn wir die Abhängigkeit des Volumens der einzelnen Körper von ihrer Form bei gleichbleibendem Radius verfolgen wollten. Die Bilder 3 und 4 stimmen rein äußerlich darin überein, daß die Linien bzw. Kurven mit wachsenden Kennziffern sich immer mehr zusammendrängen. Wenn wir die Länge der Linien einmal mit der Zahl der sie bestimmenden Punkte vergleichen wollten, würde sich folgendes ergeben (die Linien werden durch einen Kreis begrenzt):

Radius r	5	6	7	8	9	10	11	12
Zahl der Punkte	5	5	4	3	2	2	1	1

Die Punktzahl nimmt also auch nach dieser Darstellung mit größer werdender Kennziffer ( $r$ ) ab, bei gleicher Länge der einzelnen Linien.

Bild 3 kann jedoch noch zu einer weiteren Darstellung verwendet werden. Ziehen wir nämlich parallel zur  $r$ -Achse durch die Punkte der  $V$ -Werte Parallelen, dann werden die Kurven

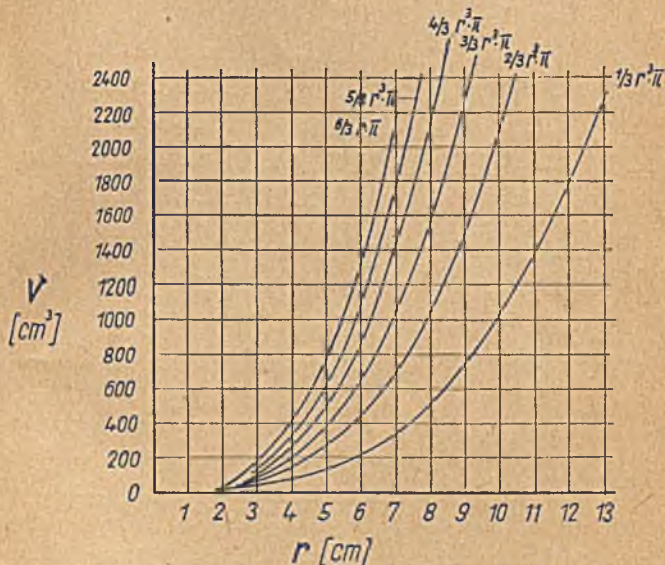


Bild 3. Die Volumina einiger regelmäßiger auf die Kugel bezogener Körper abhängig vom Kugelradius  $r$ .

in verschiedenen jetzt aber nicht berechneten Punkten geschnitten. Tragen wir die  $r$ -Werte abhängig von den verschiedenen  $a$ -Werten unter Beibehaltung des Volumens in ein System ein, erhalten wir Bild 5. Hier kann das Anwachsen des Radius  $r$  für die einzelnen Körper bei gleichbleibendem Volumen verfolgt werden.

Welche Vorteile bietet nun dieses Verfahren aus einer Grundtafel durch Parallelenziehung zwei neue zu schaffen? Wenn wir uns noch einmal die der Bilder 3 zugrunde liegende Formel

betrachten, dann schreibt man sie zweckmäßigerweise in der Form

$$V = a r^3 \quad \text{wo } a = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{6}{3}\pi.$$

Diese Formel enthält also drei Veränderliche, wobei allerdings die Veränderliche  $a$  nur 6 Werte annehmen kann. Die

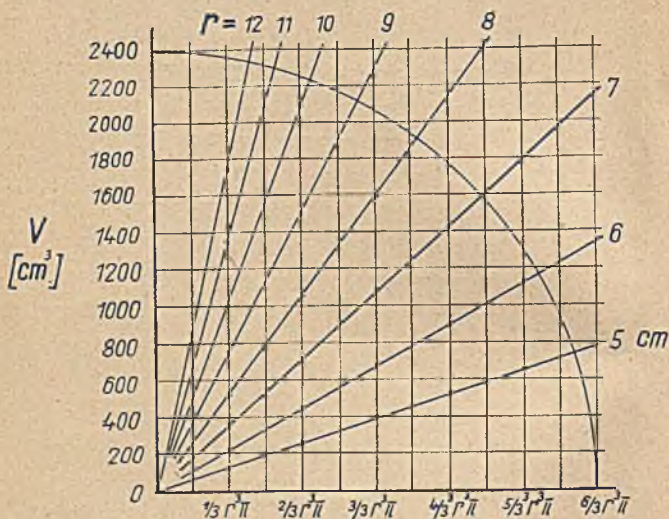


Bild 4. Die Volumina einiger regelmäßiger auf die Kugel bezogener Körper abhängig von den Kennziffern dieser Körper.

Zahl der Veränderlichen bestimmt also die Darstellungsmöglichkeiten, die man bei Betrachtung der Bilder 3, 4, 5 folgendermaßen beschreiben kann:

	Abb. 3	Abb. 4	Abb. 5
Variabel	$V$ und $r$	$V$ und $a$	$a$ und $r$
Konstant	$a$	$r$	$V$

Der Darstellungsform entspricht eine Formelform. Je nachdem man die eine oder andere Darstellungsart wählt, wird man auch zwecks Aufstellung entsprechender Tabellen die Grundformel verändern. In Bild 3 dient die Volumenformel in der Form  $V = a r^3$  zum Aufbau. Bild 4 kann unter Benutzung der

Formelform  $V = a r^3$  oder  $a = \frac{V}{r^3}$  Punkt für Punkt entstehen, je nachdem man als Tabellenwerte die  $a$ - oder die  $V$ -Werte für die Konstruktion zugrunde legt. Im ersten Falle werden die  $V$ -Werte, im zweiten die  $a$ -Werte errechnet. Da hier jedoch die

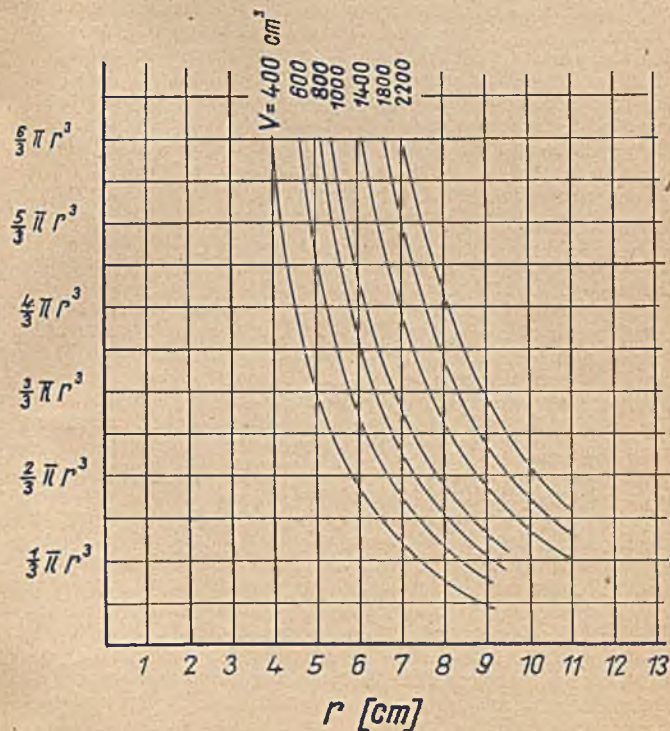


Bild 5. Die Kugelradien  $r$  abhängig von den Kennziffern der auf die Kugel bezogenen Körper.

$a$ -Werte sich nur in ganz bestimmten Grenzen ändern dürfen, wird man auch die Linienschar des Bild. 4 mittels der Formelform  $V = a r^3$  punktweise festlegen. Bild 5 endlich wird durch Formelform  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{a}}$  aufgebaut. Die hier angewendete Methode des



„Querschnitts“ spart uns die Ausrechnung von Tabellen, insofern man nur durch Konstruktion aus einer durch Tabellenwerte festgelegten Abbildung zwei andere Abbildungen herstellen kann. Der Umbau eines Nomogramms braucht also nicht unbedingt durch Rechnung zu erfolgen. Die Methode des Querschnitts wird auch dann angewendet, wenn es sich darum handelt, experimentell aufgenommene Werte auf Streuwerte zu untersuchen. Liegen nämlich jene Werte in ihrer Gesamtheit im Kurvenbilde fest, dann ist es in vielen Fällen leicht, derartige Bilder durch Anwendung von bestimmten noch zu besprechenden Methoden in algebraische Formeln überzuführen. Die Formel  $a r^3$  enthält die unechte Variable  $a$ , d. h. eine Variable, die sich nicht unbeschränkt verändern läßt, nicht alle möglichen Zahlenwerte annehmen kann. In vorliegendem Falle beträgt z. B. die Zahl der möglichen Werte für  $a$  nur sechs. Aus diesem Grunde sind auch in den Bildern 4 und 5 nur eine beschränkte Anzahl Vergleichswerte abzulesen, da einmal auf der waagerechten Achse und dann auf der senkrechten Achse die  $a$ -Werte eingetragen sind. Für jeden Linienzug in diesen Darstellungen können nur 6 Werte für  $V$  bzw. für  $r$  abgelesen werden. Da Bild 4 z. B. 8 Linien enthält, sind also nur  $8 \times 6 = 48$  Werte für  $V$  zu ermitteln. Auch diese Zahl ist noch zu beschränken, da manche Linien ziemlich steil verlaufen. Das einzige Nomogramm, das alle möglichen Werte abzulesen gestattet, ist das des Bildes 3. In der nomographischen Praxis stelle man jedoch nur solche Rechentafeln her, die die fortlaufende Ablesung aller möglichen Werte gestatten. Eine Formel mit 3 echten Variablen kann durch eine Schar von Linien oder Kurven dargestellt werden, deren Zahl nach Maßgabe des benötigten Bereiches beliebig erweitert werden kann. Bild 3 zeigt, daß die Kurvenschar nur aus 6 Kurven besteht und auch nicht erweitert werden kann. Eine Erweiterung der Kurvenzahl durch Kurven mit den Kennziffern  $\frac{7}{3} r^3 \pi$ ,  $\frac{8}{3} r^3 \pi$  usw. ist hier nicht statthaft. Eine Formel  $V = \frac{7}{3} r^3 \pi$  könnte wohl das Volumen eines aus Zylinder und Kegel zusammengesetzten Körpers bedeuten und zwar eines Zylinders mit der Grundfläche  $r^2 \pi$  und der Höhe  $2r$  und eines Kegels mit der Höhe  $r$  und der Grundfläche  $r^2 \pi$ . Dieser Körper ist jedoch nicht mehr an die Kugel gebunden. Die bildlichen Darstellungen, die uns in den Bildern 3, 4 und 5 begegneten, zeigten recht mannigfache Gestalt. Die Kurven vom Bild 3 z. B. waren kubische Parabeln. Die in Bild 4 dargestellten Gesetzmäßigkeiten prägten sich als gerade Linien aus. Gerade Linien entstehen immer dann, wenn die Zahlen der Tabellenwerte sich immer um denselben Betrag unterscheiden, was ja in diesem Falle auch nachgewiesen wurde. Ist die Differenz der Beträge der aufeinanderfolgenden Tabellenwerte nicht gleich,

sondern größer oder kleiner, dann erhält man bei der Darstellung dieser Werte Kurven. Wir wollen das, was wir bisher von den Methoden der graphischen Darstellung kennen gelernt haben, noch einmal zusammenfassen:

1. Im allgemeinen unterscheidet man Schaubilder oder Schaufeln und Darstellungen von Gesetzen, die als Formeln vorliegen. Die in Schaubildern dargestellten Größen brauchen nicht durch Gesetz miteinander verbunden zu sein, ihre Aufeinanderfolge ist in vielen Fällen vom Zufall abhängig. Die Punkte eines Schaubildes können nicht durch einen stetig verlaufenden Kurvenzug verbunden werden, man verbindet Punkt mit Punkt durch kurze gerade Linien. Sowohl ein Schaubild als auch die Darstellung eines Gesetzes entsteht durch Eintragung von zusammengehörigen Zahlenpaaren in ein sog. Koordinatensystem, das aus rechtwinklich einander zugeordneten parallelen Linien-scharen besteht. Rein äußerlich sieht ein derartiges Gebilde einem Netz ähnlich, daher spricht man auch von einem Koordinatennetz. Jeder Punkt im Netz ist also von den Begrenzungslinien des Netzes aus festgelegt und umgekehrt stellt jeder Punkt im Netz zwei Zahlenwerte dar, die den Zahlen entsprechen, die auf den Begrenzungslinien des Systems, den Achsen, aufgetragen sind.

2. Die Wertepaare, die als Baustoff der Linien und Kurven anzuspochen sind, entstehen aus einer bekannten Formel, deren eine veränderliche Größe durch eine Zahl ersetzt wird, so daß die andre Veränderliche ebenfalls als Zahl angegeben werden kann. Diese Zahlenpaare werden übersichtlich in Tabellen zusammengefaßt. Die auf den Achsen eingetragenen Maßzahlen verwandeln diese in (zunächst) gleichförmig geteilte Maßstäbe.

3. In der Praxis der graphischen Rechentechnik begegnen wir meist immer wieder denselben Kurvenbildern. Diese bezeichnet man als Parabeln, Hyperbeln, Exponentialkurven usw.

In den folgenden Kapiteln wollen wir uns mit den Gesetzmäßigkeiten derartiger Kurven genau vertraut machen.

Ein wesentlicher Grundzug der bisher beschriebenen Methoden der Darstellung in einem Koordinatensystem war die Bezugnahme auf einen Ruhepunkt, auf den Nullpunkt des Systems. Jetzt sei auch auf die Möglichkeiten der Darstellung eingegangen, die eines derartigen Bezugspunktes nicht bedürfen. Der Formel  $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$  z. B. entspricht ein Kegel mit der Grundfläche  $r^2 \pi$  und der Höhe  $h$ . Diese Formel beschreibt die wesentlichste Eigenschaft eines Kegels, nämlich sein Volumen, ist also ein Symbol für den Kegel und umgekehrt. Auch das Bild des Körpers selbst kann als Darstellung der entsprechenden Formel gelten. Wir haben uns einer derartigen bildlichen Darstellung beim Entwurf des Schaubildes Bild 1 schon bedient.

Die bei technischen Berechnungen vorkommenden Formeln und Beziehungen lassen sich in vielen Fällen auch als geometrische Figuren deuten. Auch dieser Darstellungsmöglichkeit bedient sich die graphische Rechentechnik in manchen Fällen. Allerdings sind einer derartigen symbolischen Form der Darstellung Grenzen gesetzt. Unter dem Ausdruck  $x^4$  z. B. wird man sich nicht mehr ein geometrisches Gebilde vorstellen können.

Wir wollen einmal ganz kurz einige Ausdrücke auf ihre geometrische Darstellungsmöglichkeit hin untersuchen:

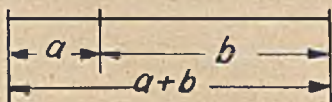


Bild 6. Die Summe zweier Zahlen dargestellt durch Strecken.

1.  $a + b$  Eine Summe zweier Zahlen  $a$  und  $b$  läßt sich durch zwei Strecken darstellen (Bild 6).

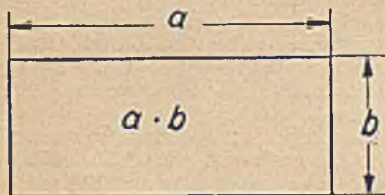


Bild 7. Das Produkt zweier Zahlen dargestellt durch eine Fläche.

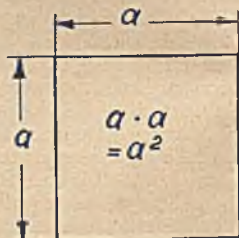


Bild 8. Das Produkt zweier gleicher Zahlen als Fläche dargestellt.

2.  $a \times b$  Ein Produkt zweier Zahlen läßt sich als Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$  erläutern (Bild 7).

3.  $a^2$  Ein Produkt aus zwei gleichen Zahlen ist als Quadrat darzustellen mit der Seitenlänge  $a$  (Bild 8).

4.  $\frac{a \times b}{2}$  kann ein rechtwinkliges Dreieck sein mit der Grundlinie  $a$  und der Höhe  $b$  (Bild 9).

5.  $\sqrt{a \times b}$  Diese Beziehung wird als geometrisches Mittel bezeichnet und läßt sich in einem rechtwinkligen Dreieck darstellen (Bild 10).

6.  $(a + b)^2$  Dieser Ausdruck entsteht durch Quadrierung der Summe  $(a + b)$  und wird als Quadrat mit der Seite  $(a + b)$  dargestellt. Zieht man verschiedene Hilfslinien im Quadrat, dann zerfällt (siehe Bild 11) das Quadrat in 4 Teile  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $ab$  und nochmals  $ab$ . Diese Darstellung deckt sich mit der algebraischen Formulierung, wonach  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  ist. In gleicher Weise lassen sich verwandte Ausdrücke z. B.  $(a - b)^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$  usw. darstellen.

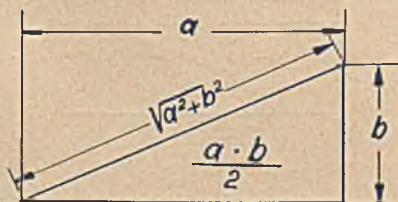


Bild 9. Das halbe Produkt zweier Zahlen als Fläche dargestellt.

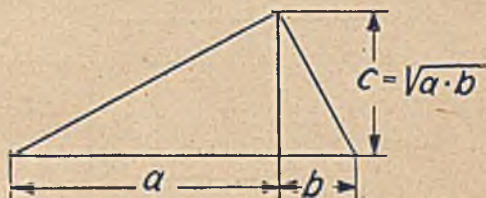


Bild 10. Das geometrische Mittel dargestellt im rechtwinkligen Dreieck.

7.  $\frac{a + b}{2}$  Diese Formel wird als arithmetisches Mittel bezeichnet und kann als Mittellinie eines Trapezes gedeutet werden (Bild 12).

Diese Beispiele mögen genügen, jedoch möge sich der Leser auch noch die Darstellung von  $a^2b$ ,  $r^2\pi$ ,  $d\pi$  überlegen. Nicht mehr geometrisch deutbar sind Ausdrücke wie  $a^4$ ,  $a^5$ ,  $a^2b^2$  usw. Die rein geometrische Darstellung algebraischer Ausdrücke muß notwendigerweise auf die Dimensionen des Raumes beschränkt bleiben. Gehen wir einen Schritt weiter und beziehen Quadrat- oder Kreisflächen auf lineare Maßstäbe. Man ersetzt zu diesem Zweck die Zahlen eines Zentimetermaßstabes z. B. durch Quadratzahlen. Der an eine Quadratseite angelegte Maßstab gibt

jetzt nicht mehr ihre Länge, sondern den Flächeninhalt des Quadrates an. Zwecks Ermittlung des Flächeninhaltes von Kreisscheiben wäre dann die Zentimeterteilung durch eine Kreisflächenteilung nach der Formel  $F = \frac{d^2 \pi}{4}$  zu ersetzen. Eine der-

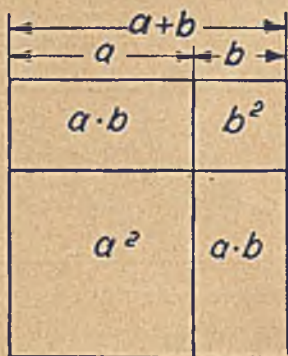


Bild 11. Geometrische Deutung der algebraischen Grundformel  $(a + b)^2$ .

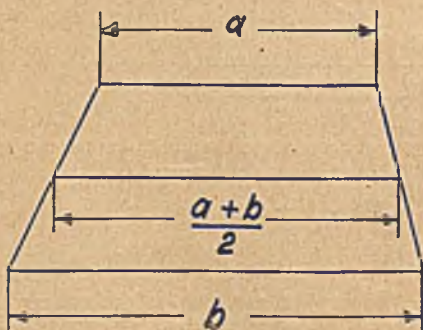


Bild 12 Arithmetisches Mittel als Mittellinie eines Trapezes gedeutet.

artige Teilung ist aber nicht mehr gleichförmig (linear), sondern ungleichförmig (quadratisch). Bild 13 zeigt die quadratischen Maßstäbe. Bild 6 ließ erkennen, wie sich eine Summe zweier Zahlen durch Aneinanderfügen entsprechender Strecken dar-

stellen ließ. Wollen wir aber in ähnlicher Weise die Summe der Flächeninhalte mehrerer Kreisbleche dadurch ermitteln, daß wir die Durchmesser aneinanderfügen und am quadratischen Maßstab das Resultat ablesen, dann merken wir bald, daß der so ermittelte Flächeninhalt nicht richtig sein kann (Bild 14a). Der Flächeninhalt jedes Kreisbleches ist vielmehr, wie Bild 14b



Bild 13. Flächen von Quadraten (oben) und Kreisen (unten) bezogen auf lineare Maßstäbe.

zeigt, für sich allein durch Anlegen am quadratischen Maßstab zu ermitteln. Die abgelesenen Zahlen sind zueinander zu addieren: das Resultat ist die Summe der Flächeninhalte der Kreisbleche.

Dieses Verfahren versagt bei der Bestimmung des Flächeninhaltes von rechteckigen Blechen. Hier muß man sich anders helfen. Man zeichne zu diesem Zweck auf einem großen Stück Millimeterpapier einen Winkel ein, dessen Schenkel nach Maß-



Bild 14a.

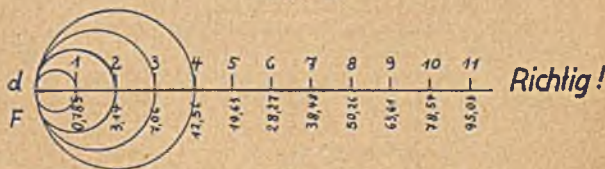


Bild 14b.

Ermitteln des Flächeninhaltes von Kreisflächen falsch und richtig.

gabe des vorgedruckten Maßstabes beziffert werden und zwar wie Bild 15 verrät vom Nullpunkt links oben angefangen. An jeden Knotenpunkt des so begrenzten Netzes schreibe man den Flächeninhalt des betreffenden Rechtecks. Legt man nun ein rechteckiges Blech so in das bezifferte System hinein, daß zwei

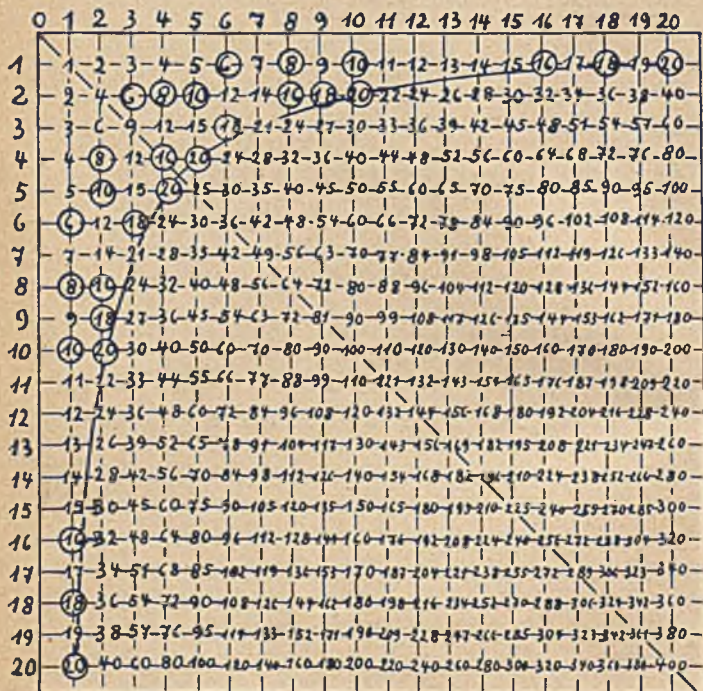


Bild 15. Ermitteln des Flächeninhaltes von Rechtecken.

Kanten des Bleches sich mit den bezifferten Systemachsen decken, dann zeigt die Spitze des Bleches rechts unten auf eine Zahl, die den Flächeninhalt des durch das Blech bedeckten Papierstückes angibt. Diese so bezifferte Meßfläche wollen wir etwas genauer betrachten. Geht man die einzelnen Zahlenreihen von links nach rechts einmal durch, dann findet man, daß einzelne Zahlen immer wiederkehren. Die Zahl 12 z. B. kommt

in der 1., 2., 3., 4., 5. und 12. Reihe vor. Die Zahl 14 erscheint in der 1., 2., 7. und 14. Reihe. Die Zahl 16 in der 1., 2., 4., 8. und 16. Reihe. Die Zahl 24 endlich ist vertreten in der 1., 2., 3., 4., 6. und 8. Reihe usw. Verbinden wir jetzt die Punkte der Zahl 12 oder 24, dann erhalten wir einen Kurvenzug, der eine ganz typische Form hat. Dieser Kurventyp ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Gesetz durch die Formel des Rechteckinhaltes  $F = x y$  bezeichnet wird. Hier in vorliegendem Falle ist also  $F$  immer eine sich gleichbleibende Zahl z. B. 12 oder 24. Allgemeiner wird dieses Gesetz in der Form  $x y = \text{const}$  geschrieben, wo das Wort const. (constans) auf die Gleichheit der durch das Produkt von  $x$  und  $y$  bezeichneten Fläche hinweist.

Wir wollen jetzt die Zahlenreihen des Meßblattes noch ein wenig auf ihre Gesetzmäßigkeit hin untersuchen. Die erste Reihe stellt die natürliche Zahlenreihe dar und stimmt mit der Bezifferung der Achse überein, nur daß die Zahlen auf der Fläche  $\text{cm}^2$  bedeuten. Die natürliche Zahlenreihe kommt so zustande, daß zu einer gegebenen Zahl ständig eine Einheit hinzugezählt wird. Die zweite Reihe umfaßt die geraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe; diese Reihe entsteht durch Addition der Zahl 2 zu einer geraden Zahl. Gehen wir dann weiter zur 3., 4., 5., . . . Reihe, dann erkennen wir, daß hier sozusagen die Zahlen des Einmaleins in einer Tabelle vereinigt sind. Die Zahlen der Längsreihen stimmen mit den Zahlen der Querreihen vollkommen überein. Verbinden wir noch die Quadratzahlen, dann ist diese Linie die Diagonale im Zahlenquadrat. Die Teilungseinheiten der Diagonalen sind jetzt größer, als die Teilungseinheiten der Achsen und zwar sind sie, wie leicht einzusehen, voneinander durch den Faktor  $\sqrt{2}$  unterschieden. Ist uns jetzt die Aufgabe gestellt, die auf der Diagonalen des Meßblattes aufgetragenen Zahlen zu einer fortlaufenden Zahlenreihe zu vervollständigen, dann zeichnen wir noch einmal diese Diagonale mit den bezifferten Systemachsen heraus. Abb. 16 zeigt, wie diese Vervollständigung erreicht wurde. Man sucht auf der  $x$ -Achse die Wurzelwerte der Zahlen 2, 3, 4 . . . auf und geht parallel zur  $y$ -Achse bis zur Diagonalen und von da senkrecht nach unten zur  $y$ -Achse.  $\sqrt{2}$  z. B. ist = 1,41. Diesem Wert 1,41 auf der  $x$ -Achse entspricht der Wert 2 auf der  $y$ -Achse. Die Teilung der Diagonalen ist also als Quadratwurzelteilung anzusprechen. Gleichzeitig zeigt Bild 16, wie durch die Schlüsselgeraden die gleichförmige Teilung der  $x$ -Achse in die ungleichförmige der  $y$ -Achse verwandelt wird. Hier begegnet uns insofern etwas Neues, als in diesem System zwei verschiedene Koordinatenscharen nach Maßgabe der gleichförmigen und ungleichförmigen Achsenteilung vereinigt sind. Ein Vergleich der



Darstellungen von Gesetzen in einem nach beiden Richtungen gleichförmig und in einem teils gleichförmig teils ungleichförmig geteilten Netz läßt erkennen, welche Beziehungen zwischen Schlüsselkurve und Netzteilung bestehen. In einem späteren Kapitel kommen wir auf jene Beziehungen noch zurück.

Derartige Abbilder sind aber nicht nur Darstellungen irgend welcher technisch wichtiger Vorgänge, sondern man kann

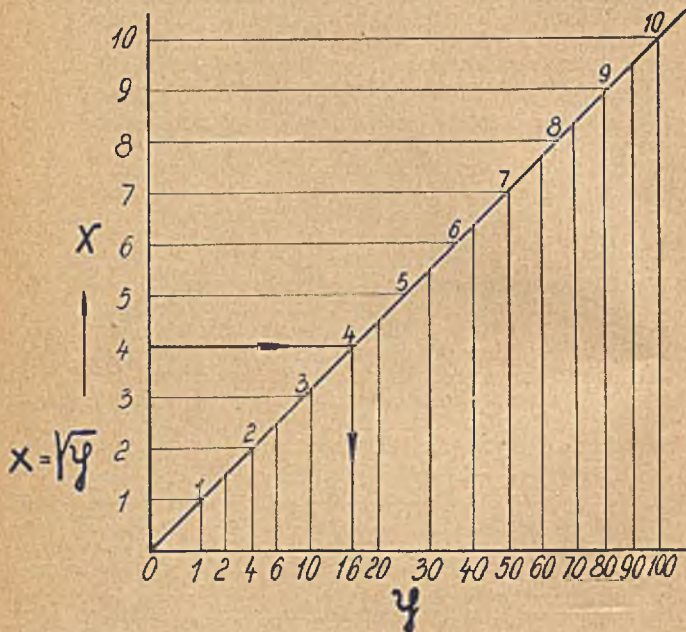


Bild 16. Konstruktion der Wurzelteilung.

sie bei Naturvorgängen auch wirklich beobachten. Ein Geschöß z. B. fliegt in einer durch Naturgesetz vorgeschriebenen Kurvenbahn. Jeder Punkt der Geschößbahn kann bei bekanntem Geschützneigungswinkel und Beachtung einiger Erfahrungskonstanten vorher genau bestimmt werden und zwar mit Hilfe einer Formel, die ein Naturgesetz beschreibt. Wie kommt nun eine solche Kurvenbahn zustande? In horizontaler Richtung, d. h. also parallel der Erdoberfläche ist der in der Zeit-

einheit zurückgelegte Weg in bestimmten Grenzen immer der gleiche, man spricht von der Geschwindigkeit eines Wagens z. B. Bewegt sich dagegen ein Körper auf den Erdmittelpunkt zu, dann zwingen die Erdanziehungskräfte den Körper Strecken zurückzulegen, die in der Sekunde um ein bestimmtes Maß wachsen. Diese Bewegung in vertikaler Richtung erfolgt also beschleunigt. Die Geschosßbahn setzt sich aus einer gleichförmigen Geschwindigkeits- und ungleichförmigen Beschleunigungs-Bewegung zusammen.

Betrachten wir noch einmal die Fallbewegung für sich allein. Die Bahn eines frei fallenden Körpers ist eine gerade Linie und die von ihm zurückgelegten Wege wachsen mit dem Quadrate der verstrichenen Zeit ( $h = \frac{g}{2} t^2$ ). Das Gesetz des freien Falles

läßt sich so darstellen, daß auf einer geraden Linie die in den verschiedenen Zeiträumen zurückgelegten Strecken markiert und beziffert werden (Bild 17). Diese Darstellung ist zwar der Wirklichkeit angepaßt, läßt aber nicht klar erkennen, welche Gesamtstrecke nach einer bestimmten Zeit wirklich zurückgelegt wurde. Man stellt daher die nach Ablauf der verschiedenen Zeiten zurückgelegten Strecken als Linien dar und kennzeichnet sie durch die Fallzeiten. Die Anfangspunkte der Fallstrecken werden durch eine gerade Linie verbunden (Bild 18). Die Verbindungslinie der Endpunkte der einzelnen Fallstrecken ergibt eine Parabel. Diese Darstellung bezweckt durch die Zerlegung der Fallstrecke, die Gesetzmäßigkeit der Bewegung dem Verständnis des Betrachters näher zu bringen, ihm die Bewegung sozusagen mit der Zeitlupe aufgenommen vorzuführen. Viele physikalisch-technische Vorgänge werden in ähnlicher Weise auch auf dem Wege des Versuches verdeutlicht. Hierher gehört die Methode der Aufzeichnung schneller Bewegungsvorgänge, von Schwingungen z. B. Auch hier ist die Bewegung in den meisten Fällen geradlinig. Die Form der Schwingung kann aber erst dann richtig erkannt und ausgewertet werden, wenn die Bewegung in der Fläche dargestellt wird. Man läßt zu diesem Zweck den schwingenden Körper auf einem schnell vorbeigezogenen Band, einem berußten Glasfenster u. a. seine Bewegungen aufzeichnen. Die Darstellung dieser Bewegung erfolgt in einem Netz, dessen eine Achse in Zeit-, dessen andre in Weg-Einheiten geteilt ist. Diese Bewegungsbilder sind keine Schaubilder, sondern verdeutlichen klar erfaßbare Gesetzmäßigkeiten. Die Abhängigkeit der beobachteten Größen voneinander ist hier nicht zufällig, sondern gehorcht den Naturgesetzen. Derartige Gesetzmäßigkeiten werden in der technischen Ausdrucksweise als „Funktion“ bezeichnet. Genau so wie in einem Getriebe ein Rad ins andre greift und zuletzt eine

bestimmte Bewegung erzielt wird, genau so programmäßig „funktionieren“ alle technisch wichtigen Vorgänge. Der Begriff der Funktion deckt sich also mit dem der Zwangsläufigkeit bzw. der Gesetzmäßigkeit. Es ist daher einleuchtend, daß die Abbilder jener Vorgänge ebenfalls diese strenge Gesetzmäßigkeit aufweisen, die bei einiger Übung sofort in der richtigen Weise

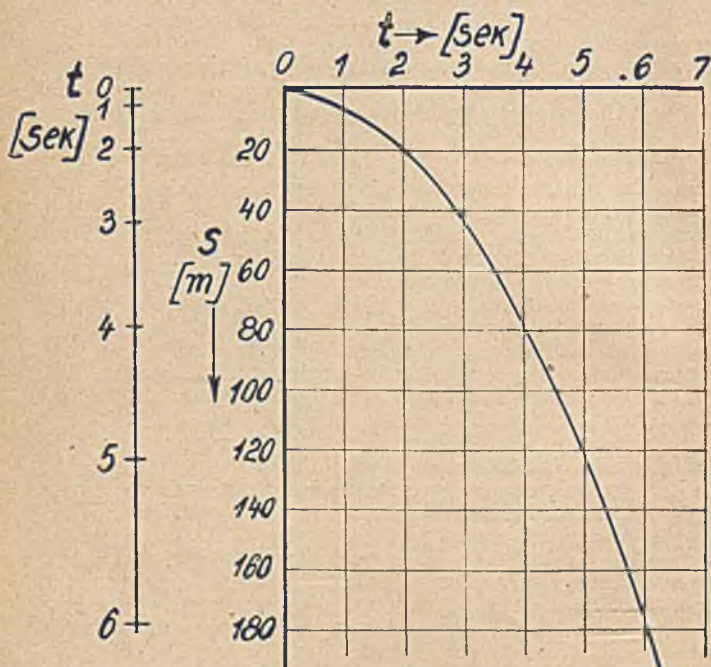


Bild 17. Fallgesetz als Linie dargestellt.

Bild 18. Fallgesetz in der Fläche dargestellt.

ausgedeutet werden kann. Die Gesetzmäßigkeit kommt rein äußerlich in der Stetigkeit des Kurvenzuges bzw. in den stetig oder gleichmäßig zu- oder abnehmenden Beträgen der Wertepaare zum Ausdruck. Eine Unstetigkeit innerhalb der Kurve deutet auf falsche Berechnung der betreffenden Wertepaare, auf eine falsche Ablesung verursacht durch eine zufällige Störung des registrierenden Instrumentes usw.

Während in diesem Kapitel eine Übersicht über die Merkmale der graphischen Rechentechnik, ihren Elementen und theoretischen Grundlagen gegeben wurde, wollen wir in dem nun folgenden Kapitel an praktischen Beispielen die Darstellungsmöglichkeiten im gleichförmig geteilten Netz weiter untersuchen und zusammenfassen.

## II. Die Darstellung im gleichförmig geteilten Netz

Zunächst sollen einmal die Eigenarten der geraden Linie untersucht werden, einer Darstellungsform, die wir beim Umbau des Bildes 3 in das Bild 4 erhielten. Eine derartige Untersuchung kann aber erst dann ein richtiges Bild liefern, wenn auch negative Werte berücksichtigt werden, was bisher noch nicht geschah. Wir erweitern darum die Darstellungsebene und vervollständigen den bisher zur Darstellung benutzten Achsenwinkel zum Achsenkreuz. Die Verlängerung der waagerechten und senkrechten Achse nach links bzw. nach unten trägt negative Teilungseinheiten. Die allgemeinste Form der geraden Linie kann durch die Formel  $y = mx + n$  beschrieben werden, wo  $x$  und  $y$  veränderliche und  $m$  und  $n$  unveränderliche Zahlenwerte vorstellen. Eine Formel dieses Typs begegnet uns auch bei den Bewegungsgesetzen. Die Beziehung für den in  $t$ -Sekunden mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit  $v$  zurückgelegten Weg  $s$  lautet:  $s = vt + c$ , wobei  $c$  die schon vor der Zählung zurückgelegte bekannte Wegstrecke ist. Setzen wir in der Gleichung  $y = mx + n$  für  $n$  den Wert Null, so erhalten wir eine vereinfachte Form der Beziehung der geraden Linie:  $y = mx$ . Für  $m$  setzen wir nacheinander die Werte  $\frac{1}{2}$ ,  $1$ ,  $1,5$ ,  $2$  ein und schreiben diese Formel als Tabelle. Es entstehen also folgende Zahlenpaare.

Tabelle 3.

$y = \frac{1}{2} x$		$y = 1 x$		$y = 1,5 x$		$y = 2 x$	
$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$
0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1	1,5	1	2	1
1	2	2	2	3	2	4	2
$\frac{3}{2}$	3	3	3	4,5	3	6	3
$-\frac{1}{2}$	-1	-1	-1	-1,5	-1	-2	-1

Die in Bild 19 dargestellten Tabellenwerte ergeben gerade Linien, die sämtlich durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehen. Betrachten wir die Linie mit der Kennziffer  $m = \frac{1}{2}$  z. B. und messen den Winkel, den diese Linie mit der x-Achse bildet. Die Messung ergibt einen Winkel von 26,5 Grad. Diesem Winkelwert entspricht nach der tang-Tabelle ein Zahlenwert von rund 0,5, der also mit dem Faktor  $m = \frac{1}{2}$  übereinstimmt. Der Wert  $m$  in der Gleichung  $y = mx$  bezeichnet also

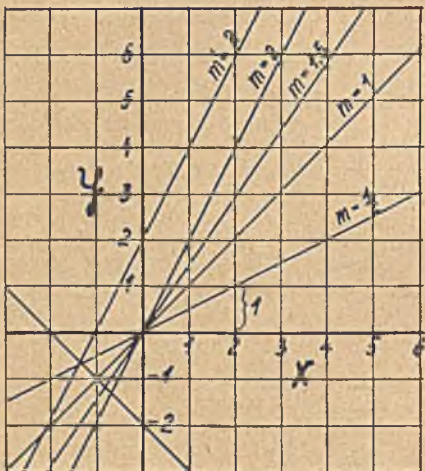


Bild 19. Eine Schar gerader Linien dargestellt unter Benutzung der Formel  $y = m x$  ( $m = \frac{1}{2}, 1, 1 \frac{1}{2}, 2$ ).

den sog. Steigungswinkel der Linie; er ist leicht abzuleiten, denn eine kleine Umformung der eben erwähnten Beziehung ergibt  $\frac{y}{x} = m = \text{tga}$ . Die Linie mit der Steigung  $m = 1$  ist insofern von den anderen Linien ausgezeichnet, als sie den Achsenwinkel von  $90^\circ$  halbiert, d. h.  $\text{tga} = m = 1$  entspricht ein Steigungswinkel von  $45^\circ$ . Fügen wir nun der einfachsten Form  $y = mx$  noch einen Zahlenfaktor  $n$  hinzu, dann wird für  $m = 2$  und  $n = 2$  diese Beziehung zu  $y = 2x + 2$ . In dem Bild 19 erhielt diese Linie die Kennziffer  $m' = 2$ . Diese Linie ist parallel derjenigen mit der Kennziffer  $m = 2$  d. h. also der Linie

$y = 2x$ . Die Linie  $y = 2x + 2$  schneidet jedoch jetzt die  $y$ -Achse im Punkte  $y = 2$ ,  $x = 0$ . Der Wert  $n$  gibt also an, wo die betreffende Linie die  $y$ -Achse schneidet.  $m$  und  $n$  können aber auch negative Werte annehmen. Wird z. B.  $m = -1$  und  $n = -2$ , so erhält man jetzt  $y = -x - 2$ . Die Darstellung ergibt eine Linie mit „negativer Steigung“, denn dem Faktor  $m = -1$  entspricht ein Winkel von  $135^\circ$  ( $\text{tg } 135^\circ = -1$ ). Diese Linie schneidet zudem die  $y =$  Achse im Punkte  $y = -2$ ,  $x = 0$ . Die Systemachsen können ebenfalls als gerade Linien angesehen werden, die durch den Nullpunkt gehen und ordnen sich als Grenzfälle der Schaar der Geraden ein. Die Steigung der  $x$ -Achse ist  $\text{tg } 0 = 0 = m_0$ , die der  $y$ -Achse dagegen  $\text{tg } 90 = \infty = m_\infty$ . Die Achsengleichungen lauten also  $y = 0x$  und  $y = \infty x$ . Die Steigung wächst also von 0 bis  $\infty$  ( $\infty =$  sehr große Zahl), die Steigungswinkel wachsen entsprechend von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ . Die Gerade bewegt sich durch Drehung um den Nullpunkt aus der Lage der  $x$ -Achse in die Lage der  $y$ -Achse, ihre Bewegung ist also entgegengesetzt der des Uhrzeigers.

Bei der Darstellung der oben erwähnten Formel  $s = vt + c$  bestimmt die Geschwindigkeit  $v$  die Steigung der geraden Linien. Bei gleichen Zeiten (Bild 20) erhält man also für verschiedene Geschwindigkeiten verschiedene Wege.

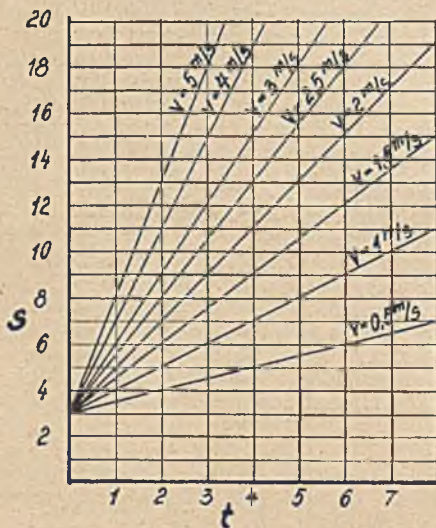
Betrachten wir jetzt einmal die kubische Parabel, einen Kurventyp, der schon in Bild 3 zur Darstellung gelangte. Die dieser Kurve zugrunde liegende Formel kann allgemein  $y = ax^3$  geschrieben werden. Für  $a$  werden auch hier die Werte  $a = 0,5$ ;  $1$ ;  $1,5$ ;  $2$  eingesetzt. Wir erhalten bei Berücksichtigung auch negativer Werte folgende Tabelle zusammengehöriger Wertepaare:

Tabelle 4.

$y = 0,5 x^3$		$y = x^3$		$y = 1,5 x^3$		$y = 2 x^3$	
$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	1	1	1	1,5	1	2	1
4	2	8	2	12	2	16	2
13,5	3	27	3	40,5	3	54	3
- 0,5	-1	- 1	-1	- 1,5	-1	- 2	-1
- 4	-2	- 8	-2	-12	-2	-16	-2
-13,5	-3	-27	-3	-40,5	-3	-54	-3

Die Darstellung dieser Kurvenschar zeigt Bild 21. Die Kennziffer  $a$  bezeichnet jetzt nicht mehr die Steigung, denn diese ist für jeden Kurvenpunkt verschieden, sie ist vielmehr ein

Ausdruck für die Gestalt der Kurve, die durch den Faktor  $a$  entscheidend beeinflusst wird. Ein Vergleich der Darstellung der Kubischen Parabeln der Bildes 3 mit der des Bildes 21 läßt erkennen, daß eine vollständige Charakteristik einer Kurve erst bei Berücksichtigung negativer Werte möglich ist. Die vollständige kubische Parabel besteht aus zwei Ästen, einem positiven und einem negativen Ast. Der Verlauf der kubischen Parabel ist dann etwa so zu charakterisieren: die kubische Parabel ist ein Kurvenzug, dessen einer Ast mehr oder weniger steil nach oben geht, ohne auf seinem Wege noch einmal umzubiegen und



Blid 20. Darstellung der Weg — Zeit-Formel für verschiedene Geschwindigkeiten.

nach unten zurückzukehren, und dessen anderer Ast in derselben Weise nach unten geht ohne umzubiegen und nach oben zurückzukehren. Nach oben verschwindet der positive Ast im Gebiet des „positiv Unendlichen“, der negative Ast entsprechend im „negativ Unendlichen“. Auch der Kurvenzug der quadratischen Parabel (Bild 18) kommt aus dem Gebiet des positiv Unendlichen (Darstellung nach der Formel  $y = x^2$ ), geht durch den Nullpunkt, wendet hier um und verschwindet

im Gebiet des positiv Unendlichen (Bild 22). Der Begriff der positiven Unendlichkeit entspricht sehr großen Werten jenseits der x-Achse, der Begriff der negativen Unendlichkeit entspricht sehr großen Werten diesseits der x-Achse. Man unterscheidet offene und geschlossene, zweiteilige und einteilige Kurvenzüge.

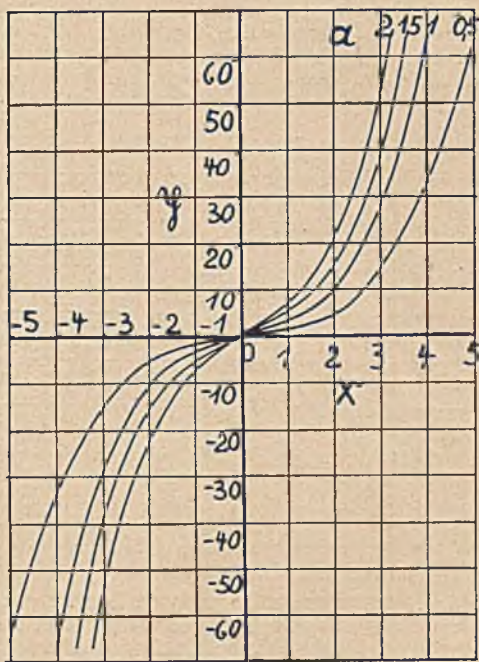


Bild 21. Eine Schar kubischer Parabeln dargestellt unter Benutzung der Formel  $y = ax^3$  ( $a = 0,5, 1, 1,5, 2$ ).

Die Kurvenzüge des Kreises und der Ellipse z. B. sind geschlossen, die der quadratischen und kubischen Parabel offen. Die gleichseitige Hyperbel, die wir durch Verbindung gleicher Werte in der Zahlenebene (Bild 15) erhielten, ist ebenfalls ein offener Kurvenzug, besteht aber zudem aus zwei getrennten Kurvenzügen, von denen in dem erwähnten Bilde allerdings nur einer dargestellt wurde. Der andere (negative) Ast liegt



dem dargestellten positiven Ast spiegelbildlich gegenüber und entsteht bei Berücksichtigung negativer  $x$ - bzw.  $y$ -Werte. Die Hyperbel liefert nur für ein kleines Gebiet in der Nähe des Koordinatenmittelpunktes gut ablesbare Werte. Für große  $x$ - und  $y$ -Werte gehen die Kurvenäste in die Systemachsen über, bzw. schmiegen sich diesen sehr eng an, ohne sie zu schneiden. Eine Kurve kann als Weg aufgefaßt werden, der von irgendwoher kommt und irgendwohin führt. Bei der Beschreibung eines solchen Weges sind in der Hauptsache seine Eigenarten zu berücksichtigen. Der Kurvenzug gibt die Eigenarten der

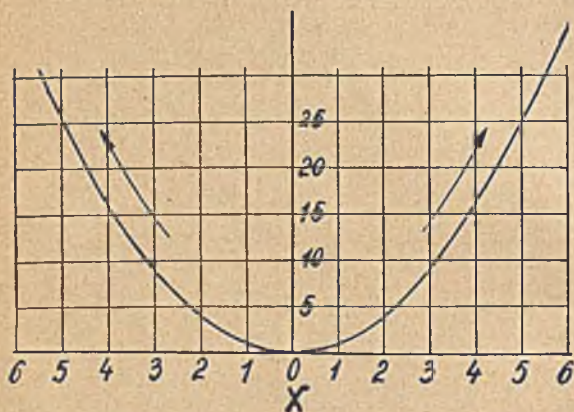


Bild 22. Gestalt einer quadratischen Parabel.

dargestellten Formel augenfällig wieder. Diese Eigenarten sind an der Formel selbst erkennbar und zwar durch die Methode der sog. Formeldiskussion. Man diskutiert die Werte der Formel, die sich dann ergeben, wenn die Variablen durch positive oder negative, durch sehr große oder sehr kleine Werte, durch  $\infty$  oder 0 ersetzt werden. Für die vereinfachte Gleichung der Geraden  $y = m x$  wurde diese Methode schon einmal angewendet, um die Gleichungen der Systemachsen aufzustellen.

Die allgemeine Geradengleichung  $y = m x + n$  ergibt für den Wert  $m = x = 0$  die Gleichung der Parallelen zur  $x$ -Achse:  $y = n$ . Für  $x = \pm \infty$  erhalten wir  $y = \pm \infty m (+ n)$ , wobei zu bemerken ist, daß bei sehr großen Werten für  $x$  und  $y$  der Faktor  $n$  relativ klein wird, so daß er praktisch zu vernachlässigen ist. Auch für die allgemeinen Formeln der quadratischen

und kubischen Parabeln wollen wir die betreffenden Werte zusammenstellen.

$$y = a x^2 + b$$

$$x = 0; y = b$$

$$x = -\infty; y = +\infty a (+ b)$$

$$x = +\infty; y = +\infty a (+ b)$$

$$y = a x^3 + b$$

$$x = 0; y = b$$

$$x = -\infty; y = -\infty a (+ b)$$

$$x = +\infty; y = +\infty a (+ b)$$

Diese Zusammenstellung zeigt, daß auch die Formeln das aussagen, was auch aus den Kurvenbildern entnommen werden kann. Oft allerdings ist für eine erfolgreiche Diskussion die Formel etwas umzuwandeln. So wird man zweckmäßigerweise die Formel der gleichseitigen Hyperbel  $xy = \text{const}$  zur Dis-

kussion verwandeln in  $y = \frac{\text{const}}{x}$ . Man erhält dann:

$$x = 0$$

$$x = \pm \infty$$

$$y = \pm \infty$$

$$y = 0$$

Auch diese Angaben stimmen mit den Kurvenbildern überein. Auch andere Kurvenbilder sollen in der Folge in dieser Weise untersucht und mit den Formeln verglichen werden.

Um einige Methoden der Darstellung von Gesetzen im gleichförmig geteilten Netz kennen zu lernen, wenden wir uns dem Gebiet der Eichung von Gefäßen zu. Unter Eichung wollen wir hier die Anbringung von Eichmarken an einem Flüssigkeitsstandmesser verstehen. Hierbei wird also in Beziehung gesetzt: Höhe des Flüssigkeitsspiegels in dem zu eichenden Gefäß und in ihm enthaltene Flüssigkeit in Volumeneinheiten. Sehr einfach gestaltet sich die Eichung eines zylindrischen Gefäßes, da hier die Höhe des Flüssigkeitsstandes im gleichen Verhältnis wächst wie die eingefüllten Volumeneinheiten. Die Darstellung des Eichgesetzes eines zylindrischen Gefäßes ist eine gerade Linie. Ist z. B. ein zylindrisches Gefäß der lichten Weite  $d = 200 \text{ mm}$  und der Höhe  $h = 1000 \text{ mm}$  zu eichen, so ist zu-

nächst einmal aus der Volumenformel  $V = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot h$  der Inhalt

des Gefäßes zu ermitteln. Er beträgt für das angegebene Gefäß

$$V = \frac{2^2 \pi}{4} \cdot 10 = 31,415 \text{ dm}^3. \text{ Wir eichen das Gefäß also nach}$$

Liter-Einheiten, indem wir nach Bild 23 auf der waagerechten Achse  $\text{dm}^3$ -Einheiten, auf der senkrechten Achse  $\text{cm}$ -Einheiten auftragen. Der Wert  $31,4 \text{ dm}^3$  wird mit dem Wert  $1000 \text{ cm}$  durch eine gerade Linie verbunden. Unter Benutzung dieser Eichlinie kann in der angegebenen Weise die Höhe in Liter-Einheiten geteilt werden. Füllen wir jedoch ein kegelförmiges Gefäß, so ist leicht einzusehen, daß gleichmäßige Zunahme der

Volumeneinheiten nicht gleiches Wachsen der Flüssigkeitshöhe zur Folge hat. Bei der Darstellung des Eichgesetzes für ein kegelförmiges Gefäß gehen wir ebenfalls auf die Volumenformel zurück, die bekanntlich  $V = \frac{d^2 \pi}{12} \cdot h$  lautet ( $V =$  Volumen,  $d =$  Grundkreisdurchmesser,  $h =$  Höhe). Diese Beziehung enthält 3 Variable, nämlich  $V$ ,  $d$  und  $h$ . Während sich bei der Eichung des Zylinders die lichte Weite  $d$  nicht änderte, muß jetzt beachtet werden, daß mit jeder Volumeneinheit Flüssigkeit, die im kegelförmigen Gefäß neu hinzukommt, sich sowohl

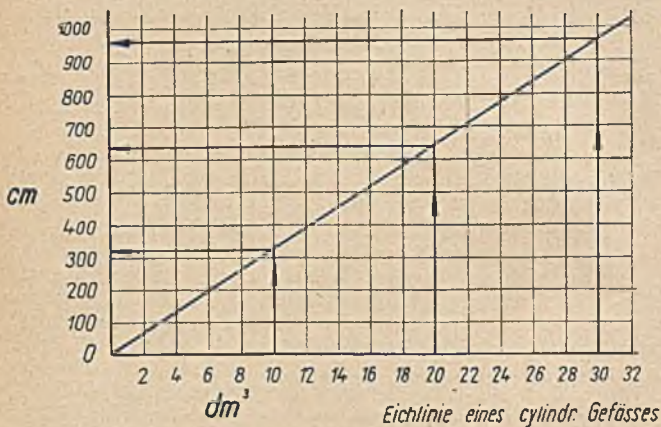


Bild 23. Volumen abhängig von der Höhe in einem zylindrischen Gefäß.

$d$  als auch  $h$  ändert. Wenn wir also den Volumenwert als bekannt voraussetzen, ist jetzt zur Darstellung der Eichgleichung noch eine weitere Beziehung notwendig, nämlich das Verhältnis Höhe zu Grundkreisdurchmesser. Ist dieses Verhältnis bekannt, dann ist  $d$  als Funktion von  $h$  zu errechnen und dieser Wert in die Volumengleichung des Kegels einzusetzen. Verhält sich z. B.  $\frac{h}{d} = \frac{10}{2}$ , dann ist  $d = \frac{2}{10} h$  und

$$V = \left(\frac{2}{10}\right)^2 \frac{h^2 \pi}{12} \cdot h = \frac{h^3 \pi}{300} \quad \text{bzw.} \quad h = \sqrt[3]{\frac{300 V}{\pi}}$$

Hat man einmal diese Eichgleichung errechnet, dann kann leicht die sog. Schlüsselkurve für die Höhe  $h$  des Kegels durch

Berechnung paarweise zusammengehöriger Werte für  $V$  und  $h$  gefunden werden. Die Eichung der Höhe  $h$  mittels der Eich- oder Schlüsselkurve ist aus Bild 24 leicht ersichtlich. Tabelle 5 enthält die zur Konstruktion der Kurve notwendigen Werte:

Tabelle 5.

$V[\text{cm}^3]$	100	200	300	400	500	600	700
$h[\text{cm}]$	21,21	26,73	30,60	33,67	36,28	38,55	40,58

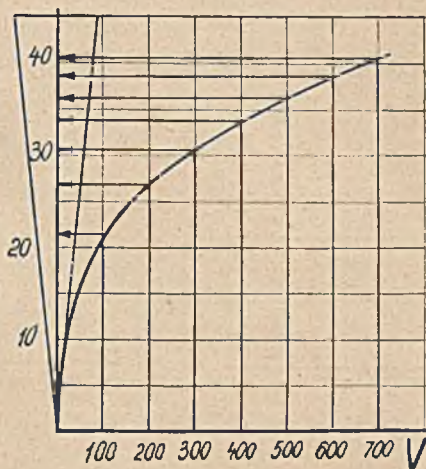


Bild 24. Die Eichung eines Kegels durch Eich- oder Schlüsselkurve.

Die eben besprochene Eichmethode kann insofern verallgemeinert werden, als man Eichkurven für verschiedene Verhältnisse  $\frac{h}{d}$  aufstellt. Diese Methode hat jedoch den Nachteil, daß nur Gefäße mit bestimmter Verhältniszahl  $\frac{h}{d}$  geeicht werden können. Besser ist es, wenn die Darstellung erlaubt (durch geschickte Anordnung von Eichkurven z. B.) Gefäße aller möglichen Verhältnisse  $\frac{h}{d}$  sofort zu eichen. Eine brauchbare Methode ist folgende. Man überlegt zunächst, wie groß

das Fassungsvermögen des in Frage kommenden größten Gefäßes ist und setzt hiernach die Eichvolumina fest. Faßt z. B. das größte Kegelgefäß 1600 cm<sup>3</sup>, dann ist in Volumeneinheiten von 200, 400, 600 . . . . cm<sup>3</sup> zu eichen. Hat man die Eichteilung derart festgelegt, setzt man die betreffende Volumeneinheit als konstante Zahl in die Volumenformel des Kegels ein und erhält bei  $V = 200 \text{ cm}^3$  z. B. die einfache Beziehung zwischen  $h$  und  $d$ :

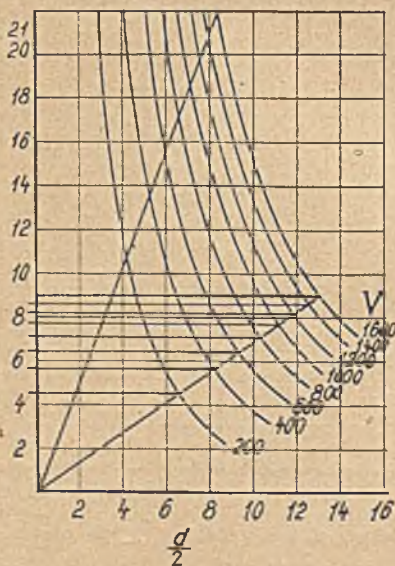


Bild 25. Die Eichung einer Anzahl von Kegeln mit verschiedenen Höhen und Grundkreisdurchmessern.

$$h = \frac{200 \cdot 12}{d^2 \cdot \pi}$$

Diese Beziehung läßt sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem leicht darstellen. Wenn wir die Reihe der Eichvolumina fortsetzen, erhalten wir nach Maßgabe der angenommenen Eichteilung eine Kurvenschar mit 8 Kurven, deren Kennziffern die Volumenzahlen angeben. Tabelle 6 enthält die Werte für  $d/2$  und  $h$  in cm für die Volumina  $V = 200 - 1600 \text{ cm}^3$ .

Tabelle 6.

V cm <sup>3</sup>	d/2 cm	3	4	5	6	7	8
200	h	21,23	11,91	7,64	5,30	3,89	2,98
400	d/2	4	5	6	7	8	9
	h	23,86	15,27	10,61	7,79	5,93	4,71
600	d/2	5	6	7	8	9	10
	h	22,91	15,91	11,69	8,95	7,07	5,72
800	d/2	6	7	8	9	10	11
	h	21,22	15,59	11,93	9,43	7,64	6,31
1000	d/2	6	7	8	9	10	11
	h	26,52	19,49	14,92	11,79	9,55	7,89
1200	d/2	7	8	9	10	11	12
	h	23,38	17,90	14,14	11,46	9,47	7,96
1400	d/2	7	8	9	10	11	12
	h	27,28	20,89	16,50	13,37	11,05	9,28
1600	d/2	8	9	10	11	12	13
	h	23,87	18,86	15,28	12,62	10,61	9,04

Ist die Höhe des Kegels bekannt, beträgt sie z. B. 9 cm, so zieht man im Abstand  $h = 9$  cm eine Parallele zur  $x = \frac{d}{2}$  Achse (Bild 25), die die äußerste rechte Kurve  $V = 1600$  in einem bestimmten Punkte schneidet. Verbindet man diesen Punkt mit dem Nullpunkt, dann schneidet die Verbindungslinie, die gleichzeitig die Seitenkante des Kegels ist, die Kurvenschar in verschiedenen Punkten. Jene Schnittpunkte sind die Eichmarken für die jeweiligen Volumeneinheiten. Ist nicht die Höhe des Kegels, sondern wie bei der zuerst besprochenen Eichmethode, nur das Verhältnis Höhe: Grunddurchmesser bekannt (es betrage z. B.  $h:d/2 = 11:4$ ) so wird diese Beziehung  $h = \frac{11}{8} d$  im Koordinatensystem als gerade Linie dargestellt, die durch den Nullpunkt des Systems geht und deren Steigung  $m = \frac{11}{8}$  beträgt. Der Nullpunkt ist ein Punkt der Geraden und es braucht nur noch ein Punkt nach obiger Beziehung berechnet zu werden. Die Verbindung dieses Punktes mit dem Nullpunkt ergibt ebenfalls die Seitenkante des Kegels. Diese schneidet

ebenfalls die Kurvenschar. Obgleich also Höhe und Grunddurchmesser ihrem Verhältniswert nach bekannt waren, treten sie doch bei dieser Darstellungsart sofort als Höhe und Grunddurchmesser in Erscheinung. Diese Methoden dienen im Apparatebau auch zur Bestimmung der Lage der Überlaufstutzen. Die beschriebene Darstellungsart löst die Eichaufgabe unter Zurückführung auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Rein algebraisch pflegt man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten dadurch zu lösen, daß man durch die Einsetzmethode die beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten in eine Gleichung mit einer Unbekannten verwandelt. Ist z. B. gegeben das Kegelvolumen  $V = 200 \text{ cm}^3$  und das Verhältnis der Kegelseiten  $h:d/2 = 11:4$  und es sollen die Werte für  $h$  und  $d/2$  er-

mittelt werden, dann setzt man in die Gleichung  $h = \frac{200 \cdot 3}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi}$

für  $\frac{d}{2}$  den Ausdruck  $\frac{4h}{11}$  ein. Man erhält dann:

$$h = \frac{200 \cdot 3}{\left(\frac{4}{11}\right)^2 \cdot h^2 \pi} \quad \text{bzw.} \quad h = \sqrt[3]{\frac{200 \cdot 3}{\left(\frac{4}{11}\right)^2 \pi}} = 11,3 \text{ cm und}$$

$$d = \frac{4}{11} \cdot 11,3 \cdot 2 = 8,2 \text{ cm.}$$

Als zweites Beispiel wollen wir die Eichung der Halbkugel besprechen, die häufig als Abschluß eines zylindrischen Gefäßes verwendet wird. Hier geht man von der Volumengleichung der Kugelkalotte aus, die bekanntlich lautet:

$$V = \pi h^2 r - \frac{1}{3} \pi h^3$$

wo  $h$  die Höhe der Kugelkalotte und  $r$  der Kugelradius ist. In diesem Fall gelingt es nicht so leicht, die Höhe  $h$  in ein einfaches Verhältnis zum Volumen  $V$  zu setzen, um so die Eichgleichung aufzustellen. Obige Beziehung stellt eine sog. reduzierte oder vereinfachte kubische Gleichung für  $h$  dar, d. h. in dieser Gleichung fehlt das Glied für  $h^1$ . Dagegen kann leicht durch Einsetzen einiger Zahlenwerte für  $h$  das dieser Höhe entsprechende Volumen errechnet werden, so daß man auf diese Weise die Eichkurve erhält. Mit Hilfe der Eichkurve können dann die Werte der Eichmarken für die verschiedenen Volumeneinheiten aus Bild 26 abgelesen werden. Tabelle 7 enthält die aus der Figur abgelesenen  $h$ -Werte in cm, die den  $V$ -Werten in  $\text{cm}^3$  entsprechen.

Tabelle 7.

V	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
h	2,63	3,8	4,77	5,60	6,37	7,10	7,72	8,40	9,09	9,72

Ein recht interessantes Beispiel der rationellen Eichung ist die Bestimmung der Eichmarken für einen liegenden Halbzylinder. Diese Aufgabe läuft in der Hauptsache darauf hinaus, den Halbkreis den Volumeneinheiten entsprechend in einzelne

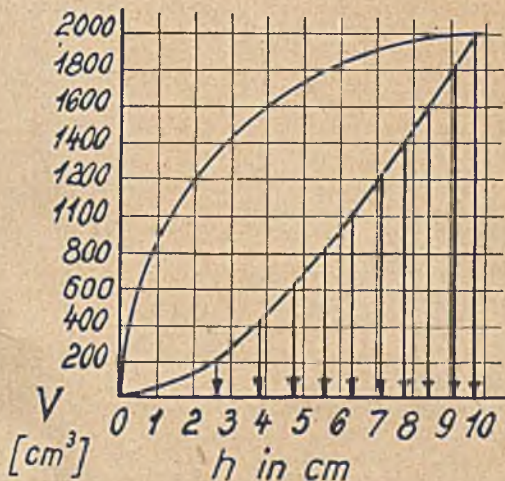


Bild 26. Die Eichung einer Halbkugel durch Eich- oder Schlüsselkurve.

Kreisabschnitte zu zerlegen. Die Flächengleichung des Kreisabschnittes lautet:

$$F = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\varphi \pi}{180} - \sin \varphi \right) \quad (\text{siehe Bild 27}).$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte  $\varphi = 180^\circ$  und  $360^\circ$  ein, dann müssen sich die Flächeninhalte des halben und des ganzen Kreises ergeben:

$$F = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{180 \pi}{180} - 0 \right); \quad F = \frac{1}{2} r^2 \pi$$

$$F = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{360 \pi}{180} - 0 \right); \quad F = r^2 \pi.$$



Als größter  $\varphi$ -Wert würde bei der Eichung eines Halbzylinders  $\varphi = 180^\circ$  zu wählen sein. Da das Volumen des Teilzylinders sich aus dem Produkt von Grundfläche und Höhe ( $V = G \cdot h$ ) errechnet, führt vielleicht die Beziehung

$$V = \left( \frac{r^2 \varphi \pi}{360} - \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi \right) \cdot L$$

zum Ziel. Diese Formel enthält allerdings noch nicht die Meßhöhe, die gerade mit Eichmarken versehen werden soll. Wir wollen daher  $\frac{r^2}{2} \sin \varphi$  durch einen Ausdruck ersetzen, der sich leicht aus Bild 27 ableiten läßt:

$$\frac{r^2}{2} \sin \varphi = \sqrt{r^2 - (r - h)^2} \cdot (r - h).$$

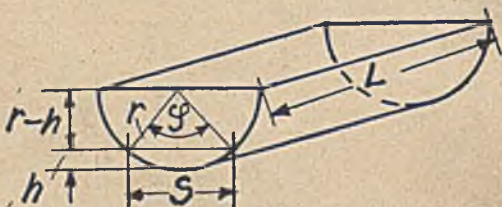


Bild 27. Für die Eichung wichtige Beziehungen am liegenden Halbzylinder.

Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Ausdrücke, die den Inhalt des Dreiecks mit der Grundlinie  $s$  und der Höhe  $(r - h)$  angeben. Wenn wir den zweiten Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks in die oben angegebene Volumenformel einsetzen, dann erhalten wir

$$V = \left( \frac{r^2 \varphi \pi}{360} - b \sqrt{r^2 - b^2} \right) L$$

wo  $b = r - h$  ist. Ist diese Beziehung richtig aufgestellt, dann muß man auch hier durch Einsetzen der Grenzwerte die Volumina des halben, des ganzen Zylinders sowie das Volumen  $V = 0$  erhalten. Wir stellen einmal diese Werte zusammen:

$$h=0; \varphi=0; b=r \quad V = \left( \frac{r^2 0 \pi}{360} - r \sqrt{r^2 - r^2} \right) L = 0$$

$$h=r; \varphi=180; b=0 \quad V = \left( \frac{r^2 180 \pi}{360} - 0 \sqrt{r^2 - 0} \right) L = \frac{1}{2} r^2 \pi \cdot L$$

$$h=0; \varphi=360; b=r \quad V = \left( \frac{r^2 360 \pi}{360} - r \sqrt{r^2 - r^2} \right) L = r^2 \pi \cdot L.$$

Unbekannt ist in dieser Bestimmungsgleichung für  $V$ , wenn der Radius  $r$  des begrenzenden Halbkreises, die Länge  $L$  des Gefäßes und die jeweilig einzusetzende Volumeneinheit bekannt ist, der Winkel  $\varphi$  und die Höhe  $h$ . Wir haben also wieder eine Gleichung mit zwei Unbekannten vor uns, die sich erst dann lösen läßt, wenn noch eine zweite Gleichung mit denselben Unbekannten vorhanden ist. Eine Betrachtung der Bilder 27 läßt leicht diese Beziehung erkennen; sie lautet:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{r - h}{r}.$$

Wir nehmen an, der Radius des Begrenzungshalbkreises sei  $r = 10$  cm, die Länge des Gefäßes 100 cm. Das Volumen des Halbzylinders ist dann:

$$V = \frac{1}{2} r^2 \pi L = 50 \pi \cdot 100 \cong 15700 \text{ cm}^3.$$

Wir eichen dementsprechend in Einheiten von  $2000 \text{ cm}^3$ . Um zu einer einfachen Beziehung zwischen  $\varphi$  und  $h$  zu gelangen, setzen wir für  $V$  einen bestimmten Volumenwert ein z. B.  $V = 2000 \text{ cm}^3$  und erhalten:

$$\varphi = \frac{360}{100 \pi} \left( \frac{2000}{100} + (10 - h) \sqrt{100 - (10 - h)^2} \right).$$

Diese Gleichung läßt sich leicht durch Errechnung paarweise zusammengehöriger Werte als Kurve im Netz darstellen. Setzt man diese Rechnung für eine Reihe von Eichvolumina fort, dann erhält man eine Kurvenschar, die die Beziehungen angibt zwischen  $h$ ,  $\varphi$  und  $V$ . Die Eichmarken erhält man wieder als Schnittpunkte einer zweiten Kurve mit dieser Kurvenschar. Der zweiten Kurve liegt die Gleichung (für  $r = 10$ )

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{10 - h}{10} \quad \text{zugrunde.}$$

Da die einzelnen Punkte der auf Grund der ersten Gleichung hingezeichneten Kurvenschar untereinander immer denselben Abstand haben (siehe Tabelle 8), so ist es nicht nötig, sämtliche Volumenkurven hinzuzeichnen. Die Eichmarken werden in folgender Weise ermittelt. Zwei benachbarte Kurven der Kurvenschar zeichne man sauber auf Millimeterpapier; der Abstand der beiden Kurvenzüge ist somit bekannt. Da sämtliche Kurven unter sich gleich weit entfernt sind, brauchen nur durch zwei Punkte etwa die Stellungen der Kurven markiert zu werden. Auf einem durchsichtigen Deckblatt pause man eine Kurve ab. Als weiteren Schritt trage man unter Benutzung der zweiten Gleichung die betreffenden Tabellenwerte in das Netz ein.

Schiebt man die Deckblattkurve in die den verschiedenen Volumenkurven entsprechenden und durch zwei Punkte markierten Stellungen, dann erhält man, wie Bild 28 zeigt, die einzelnen Schnittpunkte und damit die Eichmarken des liegenden Halbzylinders. Die Errechnung der Tabellenwerte wurde für die Eichvolumina  $V = 2000 - 12000 \text{ cm}^3$  durchgeführt.

Tabelle 8.

V (cm <sup>3</sup> )	2000	4000	6000	8000	10 000	12 000
	$\varphi^0$					
h (cm) 2	77,92	100,84	123,76	146,68	169,60	192,52
4	77,92	100,84	123,76	146,68	169,60	192,52
6	64,93	87,85	110,77	133,69	156,61	179,53
8	45,37	68,29	91,21	114,13	137,05	159,97
10	22,92	45,84	68,76	91,68	114,60	137,52

$\varphi^0$	60	80	100	120	140	160	180
h (cm)	1,34	2,34	3,57	5,00	6,58	8,26	10

Da die Werte für r und L bei der Eichung des liegenden Halbzylinders als bekannt vorausgesetzt wurden, galt die besprochene Darstellung nur für einen Wert für r und L ( $r = 10 \text{ cm}$ ,  $L = 100 \text{ cm}$ ). Jene Art der Kurvenanordnung ist aber leider nicht geeignet, auch Gefäße zu eichen, deren Größenverhältnisse sich ändern (Veränderung von r und L). Wir wollen daher eine andre Methode der Darstellung suchen, die gestattet, auch noch die r-Werte zu verändern. Wir gehen hierbei folgendermaßen vor: Zunächst stellen wir wieder in einem  $\varphi - h$ -Netz unter Zugrundelegung der Beziehung  $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{r-h}{r}$  eine

Schar von Kurven dar. Die Kennziffern der einzelnen Kurvenzüge sind die r-Werte. Mit diesem Netz koppeln wir ein andres und zwar ein  $\varphi - V$ -Netz, das mit dem  $\varphi - h$ -Netz die  $\varphi$ -Achse gemeinsam hat. Die V-Werte werden auf der verlängerten h-Achse (siehe Bild 29) aufgetragen. In dieses Netz zeichnen wir ebenfalls eine Kurvenschar und zwar unter Verwendung der Beziehung  $V = \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\varphi \pi}{180} - \sin \varphi \right) L$ . Jede Kurve auch dieser Schar trägt eine Kennziffer mit einem entsprechenden r-Werte.

Tabelle 9 enthält die zur Darstellung der beiden Kurvenscharen notwendigen Werte.

Wir wollen noch einmal ganz kurz die in den Eichmethoden zur Anwendung gelangten Darstellungsregeln zusammenfassen.

1. Jedes in algebraischer Form geschriebenes Gesetz hat seine Eigenheiten, die einmal die graphische Darstellung, zum andern die Untersuchungen durch Grenzwerte deutlich werden lassen.

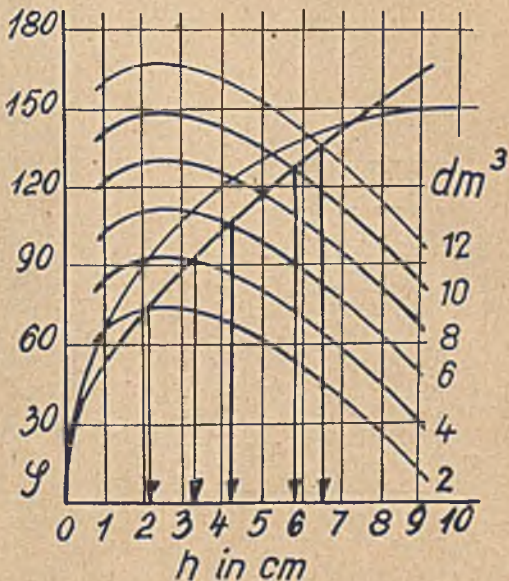


Bild 28. Die Eichung eines liegenden Halbzylinders mit  $r = 10$  cm und  $L = 100$  cm.

2. Zur bequemeren Darstellung bzw. zur leichteren Berechnung der Tabellenwerte ist in den meisten Fällen die algebraische Form des Gesetzes zu verändern.

3. Gleichungen mit zwei Unbekannten werden graphisch durch Darstellung im Netz gelöst und zwar sind die Werte, die sich durch den Schnitt der Linien oder Kurven ergeben, die Lösungswerte.

4. Sind zwei Formeln durch gemeinsame Variable mitein-

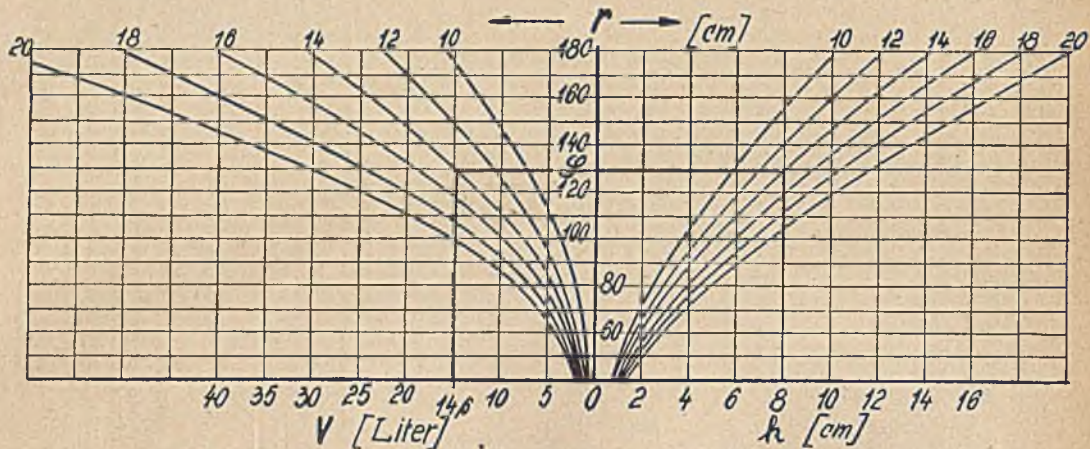


Bild 29. Die Eichung verschiedener liegender Halbzylinder ( $r$  veränderlich).

ander verbunden, so ist dies auch in der Darstellung zu berücksichtigen. Die Netze, in denen jene Formeln zur Darstellung gelangen, sind so zusammenzulegen, daß die die gemeinsamen Variablen tragenden Achsen zusammenfallen.

5. Die Tabellenwerte sind mit dem Rechenschieber auszurechnen, da die Genauigkeit des Rechenschiebers für die Darstellung im Netz genügt. Die Teilwerte der Formeln, die in verschiedenen Tabellenspalten wiederkehren, sind gesondert zu berechnen und als Zahlenkonstante in die Rechnung einzuführen. Sind diese Teilwerte mit einer Reihe von Zahlen nacheinander zu multiplizieren, so kann diese Rechenoperation leicht mit dem Rechenschieber ausgeführt werden, indem man ihn selbst als Tabelle benutzt.

6. Nach Fertigstellung der Kurventafel ist durch Stichprobe die Richtigkeit der Werte zu prüfen. Gleichzeitig ist durch Einzeichnung mindestens eines Beispiels die Benutzung der Tafel zu zeigen.

7. Den in der Kurventafel eingetragenen Werten, Kennziffern sowie Achsenwerten ist immer die Dimension beizufügen, damit jeder, der das Blatt zur Hand nimmt, sofort im Bilde ist. Irgend welche Besonderheiten oder Ablesevorschriften, die nicht ohne weiteres aus dem eingezeichneten Beispiel hervorgehen, sind ebenfalls ganz kurz auf der Tafel anzugeben.

Zum Schluß dieses Kapitels sei auf die eine oder andere Eigentümlichkeit der graphischen Darstellung noch eingegangen.

Bild 30 zeigt eine Linientafel, die die Verdampfungswärme der Erdölfraktion abhängig von der Temperatur angibt. Die Kennziffern der einzelnen Linien bedeuten die spez. Gewichte des Erdöls. Die Steigung der einzelnen Linien ist untereinander verschieden. Die charakteristischen Merkmale dieser Geradenschar lassen sich in verkürzter Form folgendermaßen wiedergeben. Auf der Temperaturachse werden in zwei Punkten (z. B. in  $t = 100^\circ$  und  $t = 300^\circ$ ) Senkrechte errichtet. Darauf werden die Verdampfungswärmen in WE/kg abhängig von den spezifischen Gewichten für diese beiden Temperaturwerte in ein gleichförmig geteiltes Netz eingetragen. Es entstehen, wie Bild 31 zeigt, zwei Kurven mit den Kennziffern  $t = 100^\circ$  und  $t = 300^\circ$ . Diese Kurventafel läßt sich leicht wieder in die ursprüngliche Linientafel zurückverwandeln, vorausgesetzt, daß man sich den Temperaturbereich der Linientafel notiert hat. Diese Art der verkürzten Darstellung ist allerdings nur bei Linientafeln anwendbar.

Ist eine Formel mit drei Unbekannten für einen bestimmten Bereich darzustellen, dann können grundsätzlich im Netz nur zwei Variable so dargestellt werden, daß sich alle nur mög-

Tabelle 9.

r (cm)	$\varphi$	20	40	60	80	100	120	140	160	180
= 10	V	0,0353	0,276	0,614	2,055	3,80	6,15	9,00	12,24	15,70
	h	0,152	0,603	1,340	2,340	3,572	5,000	6,580	8,264	10,000
= 12	V	0,0508	0,398	0,883	2,960	5,47	8,85	12,95	17,6	22,6
	h	0,182	0,722	1,610	2,810	4,280	6,000	7,900	9,910	12,00
= 14	V	0,069	0,542	1,202	4,020	7,45	12,05	17,65	24,0	30,8
	h	0,212	0,844	1,875	3,275	5,000	7,000	9,22	11,58	14,00
= 16	V	0,090	0,708	1,570	5,26	9,74	15,75	23,10	31,41	40,2
	h	0,248	0,965	2,140	3,740	5,72	8,000	10,52	13,20	16,00
= 18	V	0,114	0,896	1,99	6,65	12,30	19,95	29,20	39,7	50,9
	h	0,272	1,086	2,51	4,210	6,43	9,000	11,85	14,90	18,00
= 20	V	0,141	0,110	2,45	8,22	15,20	24,60	36,00	49,00	62,82
	h	0,304	1,206	2,680	4,680	7,144	10,000	13,16	16,52	20,00

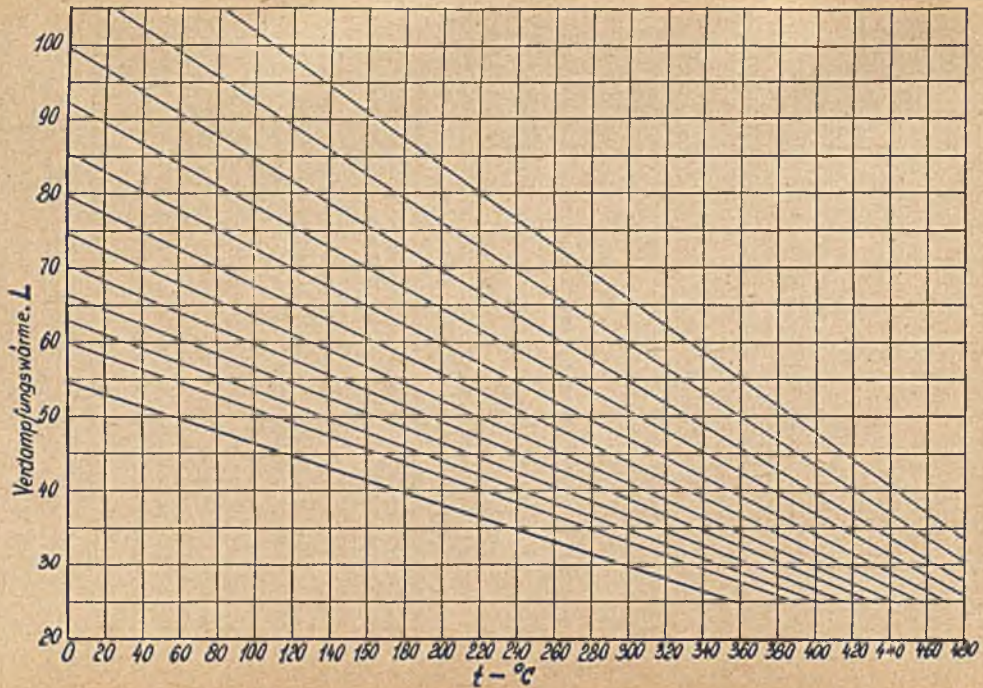


Bild 30. Verdampfungswärme der Erdölfraktion abhängig von der Temperatur.

tt



lichen Werte dieser beiden Variablen ermitteln lassen. Die dritte Variable kann dann nur in gestaffelter Zahlenfolge als Linien- oder Kurvenschar in Erscheinung treten. Bevor also eine Tabelle aufgestellt wird, ist zu überlegen, für welche Variable zweckmäßigerweise eine derartige Staffelung in Frage kommt. Sollen z. B. die Volumina von zylindrischen Körpern nach der Formel  $V = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot l$  dargestellt werden, so wird ab-

zuwägen sein, ob der Durchmesser  $d$  der Grundfläche oder die Länge  $l$  zu stufen sind. In vielen Fällen wird man sich für eine Stufung des Durchmessers  $d$  eher entschließen als für eine solche der Länge  $l$ . Ist jedoch anzunehmen, daß sowohl die Länge als auch der Durchmesser alle möglichen Werte annimmt, dann ist es vielleicht angebracht, beide Darstellungen in einer Tafel zu vereinigen. Auf der Mittelachse eines Koordinatenkreuzes werden die  $V$ -Werte, auf dem rechten waagerechten Ast die  $l$ -, auf dem linken die  $d$ -Werte aufgetragen. Im rechten Quadranten sind dann, wie Bild 32 erkennen läßt, die  $d$ -Werte, im linken dagegen die  $l$ -Werte gestuft dargestellt. Sind die Gewichte zylindrischer Körper aus verschiedenen Metallen nach der Formel  $G = \frac{d^2 \pi}{4} l \cdot s$  ( $s$  = spez. Gewicht) darzustellen,

dann ist für jedes Metall eine besondere Tafel in der angegebenen Weise zu entwerfen, wo für  $s$  jeweils der betreffende Wert als Konstante einzusetzen ist. Bei der Stufung der 3. Variablen ist darauf zu achten, daß die Linien nicht zu dicht zusammenliegen, da sonst die Übersichtlichkeit bzw. die Ablesegenauigkeit in Frage gestellt ist. Man kann sich aber hierbei so helfen, daß man nur einige Geraden der Schar ins Netz einzeichnet, daß man aber durch Anbringung einer Markierung die Lage der Zwischenlinien andeutet. Mit Hilfe dieser Marken kann die eine oder andere Gerade nachträglich noch eingezeichnet werden. In Bild 33 ist eine derartige Tafel zur Berechnung der Gewichte zylindrischer Körper aus Eisen dargestellt. Eine solche Tafel hat allerdings den Nachteil, daß sie einen unvollständigen, unfertigen Eindruck macht und daß man zwecks Einzeichnung von Zwischenlinien Bleistift und Lineal zur Hand haben muß. Andererseits ist eine derartige Tafel leicht zu mechanisieren (siehe Kap. 14).

Schon diese kleine Auswahl von Darstellungsmethoden im gleichförmig geteilten Netz ließ die Mannigfaltigkeit derartiger Rechenhilfsmittel erkennen. Allerdings wurden auch einige Mängel offenbar und es waren die Grenzen bei der Darstellung von Formeln mit mehr als 3 Variablen zu erkennen. In den nächsten Kapiteln werden daher noch andre Wege der gra-

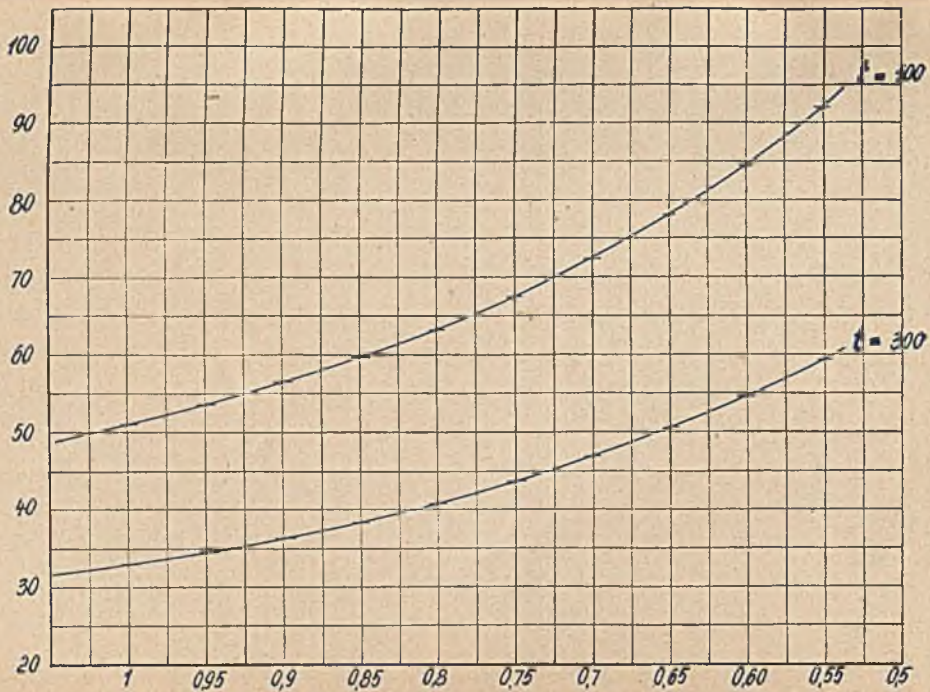


Bild 31. Gekürzte Darstellung der Tafel 30.

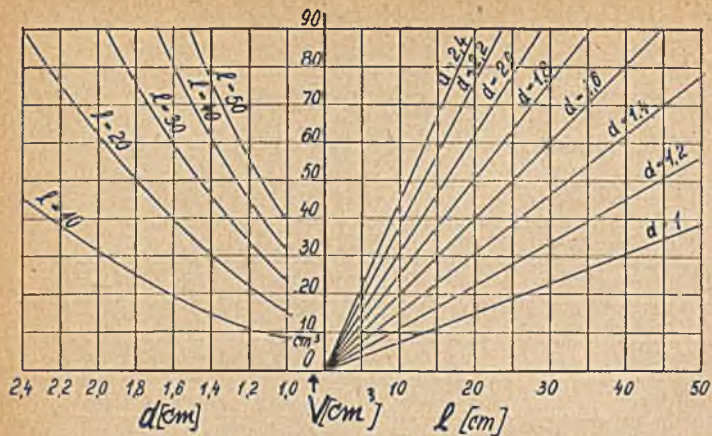


Bild 32. Darstellungsmöglichkeiten der Volumina zylindrischer Körper.

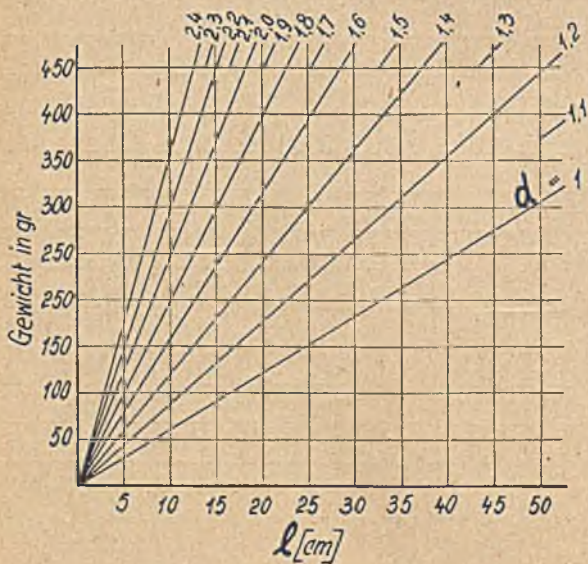


Bild 33. Gewichtstafel eiserner Zylinder.

phischen Rechentechnik zu besprechen sein, wie Gesetze auch verwickelterer Form dargestellt werden können. Im folgenden Kapitel soll jedoch zuvor auf die Gesetzmäßigkeiten der Darstellung im Millimeternetz weiter eingegangen und die Frage der Genauigkeit erläutert werden.

### III. Eigenarten der Darstellung im gleichförmig geteilten Netz

Im vorigen Abschnitt zeigte Bild 19 eine Linienschar von geraden Linien, deren  $m$ -Werte nach halben Einheiten gestaffelt waren. Die Linien gingen durch den Nullpunkt. Die Winkel, die die Geraden mit der  $x$ -Achse bilden, wachsen zwar mit zunehmendem Steigungsfaktor. Der gleichmäßigen Stufung des Steigungsfaktors  $m$  entspricht aber nicht eine gleichmäßige Stufung des Steigungswinkels  $\varphi$ . Wir wollen einmal untersuchen, nach welcher Gesetzmäßigkeit sich die Winkel stufen und betrachten zu diesem Zweck einmal die in Bild 34 dargestellte Linienschar. Diese wurde unter Zugrundelegung der allgemeinen Gleichung  $y = m x$  gezeichnet. Die Linien tragen als Kennziffer den Steigungsfaktor  $m$ , dessen Werte in Tabelle 10 zu finden sind. In dieser Tabelle sind die der Steigung entsprechenden Winkel in Minuten angegeben.

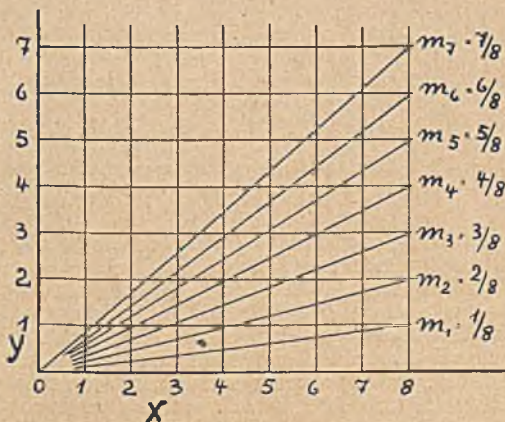


Bild 34. Linientafel entstanden unter Benutzung der Gleichung  $y = m x$ .

Tabelle 10.

Steigungsfaktor $m$	Steigungswinkel $\varphi$	1. D.	2. D.
7/8	2471'	259	
6/8	2212'	292	33
5/8	1920'	326	34
4/8	1594'	361	35
3/8	1233'	391	30
2/8	842'	415	24
1/8	427'		

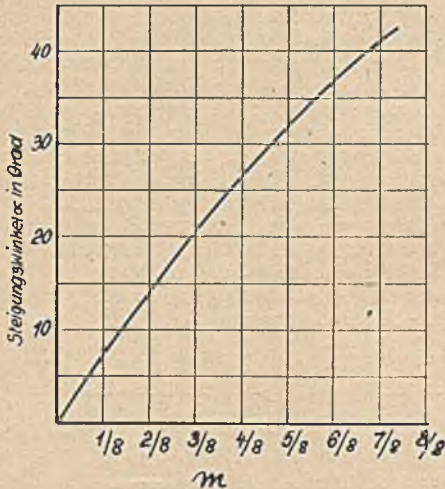


Bild 35. Steigungsfaktor abhängig vom Steigungswinkel der in Bild 34 dargestellten Geraden.

Die Darstellung zeigt (Bild 35), daß die Winkel mit gleichmäßig wachsendem Steigungsfaktor nicht gleichmäßig wachsen. Aus den Winkeldifferenzen der Tabelle 10 läßt sich die gesetzmäßige Zu- und Abnahme der Winkelbeträge erkennen. Auch hier ist das Gesetz der Winkelstufung sowohl durch Tabelle als auch durch zeichnerische Darstellung erklärt. Mit Hilfe der Schlüsselkurve kann auch dieses Gesetz durch die Teilung der  $m$ -Koordinate z. B. sichtbar gemacht werden, genau so wie die gleichförmige Teilung mittels Schlüsselkurve in die quadratische und kubische Teilung übergeführt wurde. Umgekehrt kann also

jede Teilung durch eine Zahlenreihe gekennzeichnet werden. Da Zahlenreihen in der graphischen Rechentechnik eine große Rolle spielen, wollen wir uns mit ihren Gesetzmäßigkeiten einmal etwas näher befassen. Die Reihen werden in algebraische und geometrische Reihen eingeteilt. Die natürliche Zahlenreihe z. B. ist eine algebraische Reihe, ebenfalls auch die Reihe der geraden oder ungeraden Zahlen. Die einzelnen Glieder einer algebraischen Reihe sind untereinander durch ein Differenzglied verbunden. Jede Zahl der Reihe verwandelt sich durch Hinzufügen eines gleichbleibenden Betrages in die folgende. In der Reihe der natürlichen Zahlen entsteht jede Zahl aus der vorhergehenden durch Hinzufügen von 1. Manchmal ist es auch vor-

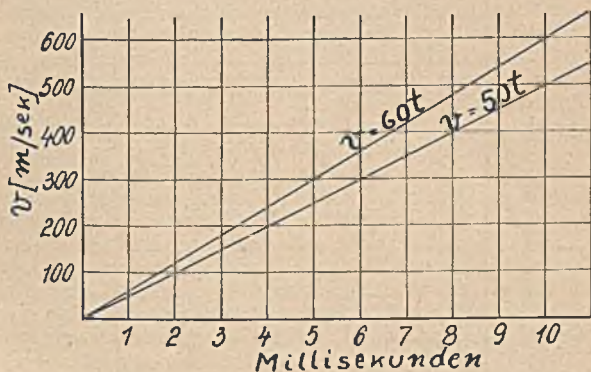


Bild 36. Darstellung linear anwachsender Geschwindigkeiten.

teilhaft zu wissen, wie groß die Summe aller Zahlen einer Zahlenreihe des Anfangsgliedes  $a$  und des Endgliedes  $n = a + (n - 1) d$  ist. Die Summe dieser Zahlen ist durch die Formel

$$s = \frac{n}{2} (2a + (n - 1) d)$$

zu errechnen. Ist z. B. die Summe der ersten 10 Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu berechnen, erhält man nach obiger Formel

$$s = \frac{10}{2} [2 \cdot 1 + 9 \cdot 1] = 55.$$

Man bedient sich dieser Summenformel, um z. B. den in einer bestimmten Zeit  $t$  zurückgelegten Weg  $s$  zu berechnen, wenn die Geschwindigkeit  $v$  nicht gleich bleibt, sondern gleichmäßig anwächst. Durchheilt ein Geschöß ein 3,2 m langes Ge-

schützrohr in der Zeit von 10 Millisekunden und verläßt dieses mit der Endgeschwindigkeit  $v_0 = 600$  m/sek, dann kann durch die Darstellung im Netz bzw. durch die Summenformel der algebraischen Reihe nachgeprüft werden, ob die Annahme einer gleichmäßig (linear) anwachsenden Geschwindigkeit richtig war oder nicht. Aus Bild 36 kann zunächst das Gesetz des Geschwindigkeitsanstieges  $v = 60 t$  ermittelt werden; diese Größe wird in die Summenformel aller bei verschiedenen Geschwindigkeiten zurückgelegten Wege eingesetzt. Man erhält also:

$$s = \sum_{t=0}^{t=10} 0,06 t = 0,06 \cdot 5 (2 + 9) = 3,3 \text{ m.}$$

Dieser Wert stimmt einigermaßen mit der angegebenen Geschützrohrlänge überein. In obiger Beziehung bedeutet der griechische Buchstabe  $\Sigma$  nichts anderes als das Summenzeichen. Die Grenzwerte der Zeit werden, so wie angegeben, unter bzw. über das Summenzeichen gesetzt.

Der Fehler, der z. B. bei Teilungen von Maßstäben, beim Abmessen zusammengesetzter Längen, beim Anreißen von Bohrungen usw. entsteht, kann durch eine algebraische Reihe dargestellt werden. In ein Werkstück werden z. B. mittels Lehre eine ganze Reihe Löcher gebohrt. Die Lehre dient gleichzeitig als Bohrschablone. Ist nun der Lochabstand der Lehre fehlerhaft, dann vermehrt sich der Fehler bei jedem zu bohrenden Loch um einen sich gleichbleibenden Betrag. Bild 37 zeigt die Lochreihe des Werkstückes, deren Lochmittenabstände um  $0,05$  mm zu groß sind. Man kann also sofort mittels der Formel des Endgliedes der algebraischen Reihe  $z = a + (n - 1) d$  den Fehler beim 32. Loch errechnen. Man erhält:

$$z = 0,05 + 31 \cdot 0,05 = 1,6 \text{ mm.}$$

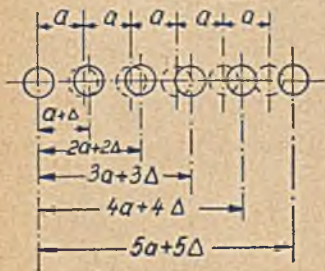


Bild 37. Fehlerhaft gebohrte Lochreihe (arithmetische Reihe).

Es ist also zu verstehen, daß derartige Lehren mit größter Genauigkeit herzustellen sind. Die Summe dieser algebraischen Reihe interessiert hier nicht.

Wir wollen jetzt die Eigenart der geometrischen Reihen betrachten. Die geometrische Reihe ist dadurch gekennzeichnet, daß die einzelnen Glieder der Reihe durch einen Multiplikationsfaktor untereinander verbunden sind. Ist z. B. das An-

fangsglied  $a$  und der Multiplikationsfaktor  $q$ , dann heißt das 2. Glied  $aq$ , das 3. Glied  $aq^2$  usw. Das letzte Glied wird mit  $aq^{n-1}$  bezeichnet. Wie kann nun eine derartige Stufung im gleichförmig geteilten Netz erzeugt werden? Man zieht vom Nullpunkt eines gleichförmig geteilten Netzes eine Linie, die von einer Parallelen zur  $x$ -Achse geschnitten wird. Bild 38 zeigt diese einfache Konstruktion und zwar wird hier die Linie von einer Parallelen, die durch  $y = 8$  geht, im Punkt  $A$  geschnitten. Eine zweite Parallele, durch den Punkt  $y = 2,5$  gehend, schneidet jetzt zusammen mit der 1. Parallele aus dem Netz einen schmalen Streifen heraus. Fällt ich vom Punkte  $A$  das Lot auf die zweite Parallele, so erhält man den Schnittpunkt  $B$ . Verbindet man den Nullpunkt des Systems mit dem gefundenen Punkte  $B$ , dann schneidet diese Linie die obere Parallele wieder in einem Punkt, von dem man wieder das Lot auf die zweite Parallele fällt usw. Durch diese Konstruktion wird der Streifen in Rechtecke geteilt, dessen eine Seitenkante stets gleich  $0,5$  ist, dessen andere Seitenkante jedoch stetig zunimmt. Es interessiert jetzt das Gesetz der stetigen Längenzunahme. Wir messen zu diesem Zweck die Längen der einzelnen Linienabschnitte. Es ergeben sich folgende Meßwerte:

6      7,5      8,6      10,2      12,7      15.

Diese Zahlenreihe kann keine algebraische sein; vielleicht ist es eine geometrische. Angenommen, wir haben eine geometrische Reihe vor uns, dann entstehen die einzelnen Glieder der Reihe dadurch, daß das erste Glied mit einem Faktor  $q$ , das zweite Glied mit dem Faktor  $q^2$  usw. multipliziert wird. Hier wäre dieser Faktor  $q = 1,2$ . Wir erhalten dann folgende Reihe berechneter Werte:

6	$6 \cdot 1,2$	$6 \cdot 1,2^2$	$6 \cdot 1,2^3$	$6 \cdot 1,2^4$	$6 \cdot 1,2^5$	$6 \cdot 1,2^6$
6	7,2	8,64	10,38	12,45	14,95	17,9.

Ein Vergleich mit obigen Meßwerten zeigt, daß die abgelesenen Werte von den berechneten Werten abweichen. Woher kommt nun diese Abweichung. Sie kann sich einmal ergeben dadurch, daß der Faktor  $q$  nicht genau ermittelt wurde, andererseits kann eine ungenaue Zeichnung die Fehlerquelle sein. Der richtige Faktor  $q$  kann aus der Summe aller Teilstrecken ermittelt werden und zwar mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe. Diese Summenformel heißt:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Das Anfangsglied  $a$  ist hier  $= 6$  mm, die gesamte Strecke 78,5 mm. Wir wollen der Reihe nach für  $q$  verschiedene Zahlenwerte einsetzen und sehen, ob die durch obige Formel berech-



neten Summen = 78,8 werden. Für  $q = 1,18$  erhält man z. B. die Summe

$$S = \frac{6 \cdot (1,18^7 - 1)}{1,18 - 1} = 72,83.$$

Unter Verwendung des Faktors  $q = 1,18$  wird die Summe zu klein, der Faktor  $q$  muß also größer werden. Zwecks genauere Untersuchung setzen wir für  $q$  die Werte  $q = 1,19$ ;  $q = 1,195$ ;  $q = 1,2$ ;  $q = 1,205$  und  $q = 1,21$  ein, bilden die Differenz der berechneten ( $S_b$ ) und der gemessenen ( $S_g$ ) Summenwerte.

Tabelle 11.

$q = 1,19$	1,195	1,2	1,205	1,21
$S_b = 75,13$	76,30	77,30	78,70	79,92
$S_g = 78,50$	78,50	78,50	78,50	78,50
Differenz	- 3,37	- 2,20	+ 0,2	+ 1,4
$S_b - S_g$				

Der dem gemessenen Wert 78,50 am nächsten kommende Summenwert ist der für  $q = 1,205$  berechnete. Folgende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung der Sollwerte (berechnete Werte der Einzelstrecken) und der Istwerte (gemessene Werte der Einzelstrecken), der Fehler in mm und der Fehler in Prozent.

Tabelle 12.

Nr.	ber. Strecke (Sollwert)	abgl. Strecke Istwert	Fehler in mm	Fehler in %
1	$6 \cdot 1,205^0 = 6$	6	0	0
2	$6 \cdot 1,205^1 = 7,23$	7,50	+ 0,27	+ 3,6
3	$6 \cdot 1,205^2 = 8,71$	8,60	- 0,11	- 1,28
4	$6 \cdot 1,205^3 = 10,50$	10,20	- 0,30	- 2,9
5	$6 \cdot 1,205^4 = 12,65$	12,70	+ 0,05	+ 0,4
6	$6 \cdot 1,205^5 = 15,24$	15,00	- 0,24	- 1,6
7	$6 \cdot 1,205^6 = 18,37$	18,40	+ 0,03	+ 0,13

Bild 38a bringt die Darstellung obiger Tabellenwerte und zwar wurden auf der senkrechten Achse die Fehler in mm, auf der waagerechten Achse die Summenwerte aufgetragen. An die einzelnen Punkte wurden die  $q$ -Werte geschrieben, mit denen die betreffenden Summenwerte berechnet wurden. Die Differenzwerte ergeben eine gerade Linie. Bild 38b zeigt die Abweichungen der abgelesenen (bzw. konstruierten) und berechneten Linienabschnitte in mm, abhängig von den einzelnen aufeinanderfolgenden Seiten mit durchgehender Bezifferung. Die einzelnen Punkte wurden durch Linienzug miteinander verbunden. Aus der Darstellung ist ersichtlich, daß sich der Fehlerbetrag nicht



Bild 38.  
Geometrische Reihe dargestellt im Millimeternetz.

nach einem Gesetz stuft, vielmehr ganz dem Zufall unterworfen zu sein scheint. Die Aufzeichnung bzw. Berechnung der Fehler ergab positive und negative Abweichungen der Istwerte von den Sollwerten und zwar betrug der negative mittlere Fehler  $\frac{-1,28 - 2,9 - 1,6}{3} = -1,9$ , der positive mittlere Fehler  $\frac{+ 3,6 + 0,4 + 0,13}{3} = + 1,4$ . Die durchschnittliche Abwei-

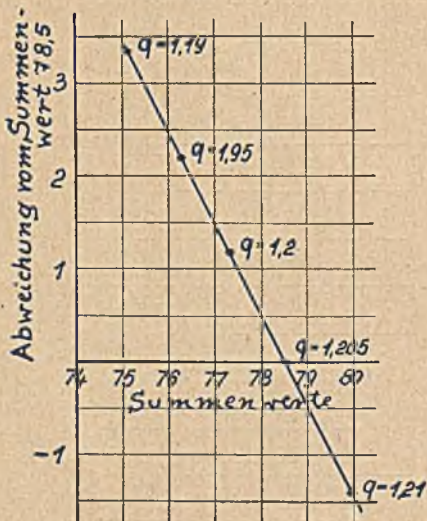


Bild 38a. Fehlerschaubild der abgelesenen und berechneten Werte einer geometrischen Reihe.

chung nach beiden Richtungen würde also etwa  $\pm 1,6\%$  betragen.

Wir wollen jetzt einmal die Genauigkeit der mittels Schlüsselkurve ermittelten Werte nachprüfen, denn vielfach ist es zweckmäßig den Grad der Genauigkeit derartiger Ablesungen zu kennen. Soll z. B. die Gesamtoberfläche eines Kegels abhängig vom Radius des Grundkreises dargestellt werden, verwandelt man die Formel

$$O = r \pi s + r^2 \pi \quad (s = 5 \text{ cm})$$

in Tabellenwerte. Man setzt also für  $r$  einen ganzzahligen Wert ein und erhält den entsprechenden Oberflächenwert  $O$ , der nicht

ganzzahlig ist. Sind aber umgekehrt zu ganzzahligen 0-Werten die zugehörigen r-Werte zu ermitteln, dann ist die Errechnung der Tabellenwerte nicht mehr so einfach, da es sich jetzt um die Lösungen von quadratischen Gleichungen handelt. Diese Berechnungen können vermieden werden, wenn man für ganzzahlige r-Werte die dazugehörigen 0-Werte ermittelt, diese Werte im Netz darstellt und über die Schlüsselkurve die den ganz-

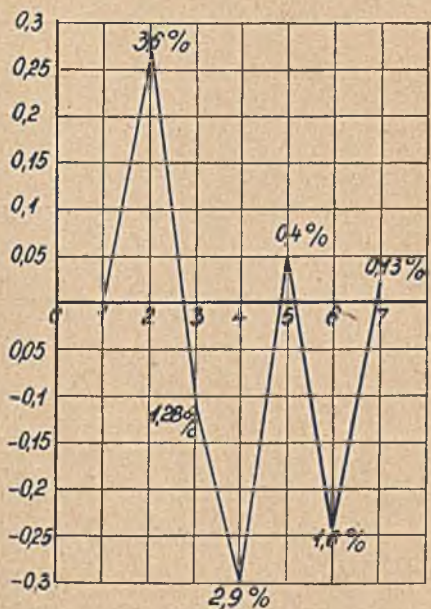


Bild 38b. Abweichungen der konstruierten (Bild 38) und berechneten Werte einer geometrischen Zahlenreihe abhängig von den aufeinander folgenden Seiten.

zahligen 0-Werten entsprechenden r-Werte abliest. Die abgelesenen r-Werte werden jedoch irgendwie von den berechneten r-Werten abweichen. Der Grad der Abweichung bestimmt die Genauigkeit der bildlichen Darstellung. Der Gang bei der Bestimmung des Genauigkeitsgrades ist also noch einmal folgender:

1. Verwandlung der Oberflächenformel des Kegels in Tabellenwerte durch Einsetzen von  $r = 2, 4, 6, 8 \dots$  cm.

2. Eintragung der Tabellenwerte in ein gleichförmig geteiltes Netz und Konstruktion der Schlüsselkurve (Bild 39).

3. Ablesung von ganzzahligen 0-Werten bzw. nichtganzzahligen r-Werten durch Schlüsselkurve.

4. Berechnung der r-Werte bei gegebenen ganzzahligen 0-Werten durch Lösung von quadratischen Gleichungen (siehe Kap. 8).

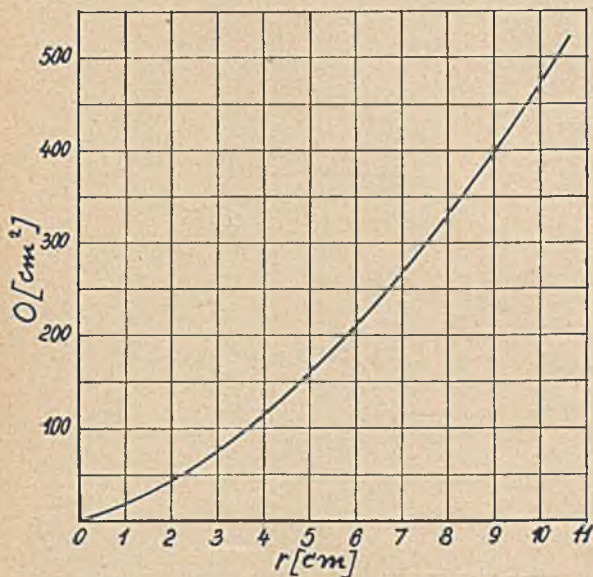


Bild 39. Oberfläche eines Kegels abhängig vom Radius des Grundkreises.

5. Ermittlung der Abweichungen der berechneten und abgelesenen 0-Werte in  $\text{cm}^2$  und in Prozenten.

6. Berechnung des mittleren Fehlers.

1. Arbeitsgang: Aufstellung einer Tabelle für r- und 0-Werte.

2. Arbeitsgang: Darstellung der Tabelle 13 (Bild 39).

3.—5. Arbeitsgang: Aufstellung der Tabelle 14; Werte für 0, r und der Fehler in  $\text{cm}^2$  und Prozenten.

6. Arbeitsgang: Aus den Fehlerzahlen der letzten Spalte der Tabelle 14 ergibt sich ein mittlerer Fehler von  
— 0,48% ~ — 0,5%.

Dieser Fehler ist sehr klein in Anbetracht dessen, daß auf die Zeichnung der Schlüsselkurve nicht besonders große Sorgfalt verwendet wurde. Bild 40 zeigt die Darstellung der Differenzen der abgelesenen und berechneten r-Werte abhängig von den

Tabelle 13.

r	$0 = \pi (r^2 + r 5)$
2	$= \pi (4 + 10) = 44$
4	$= \pi (16 + 20) = 113$
6	$= \pi (36 + 30) = 207$
8	$= \pi (64 + 40) = 327$
10	$= \pi (100 + 50) = 472$

Tabelle 14.

0	r (abgelesen)	r (berechnet)	Fehler in cm <sup>2</sup>	Fehler in %
100	3,62	3,671	-0,051	-1,4
200	5,83	5,861	-0,031	-0,52
300	7,58	7,586	-0,006	-0,08
400	9,05	9,057	-0,007	-0,077
500	10,36	10,361	-0,001	-0,01

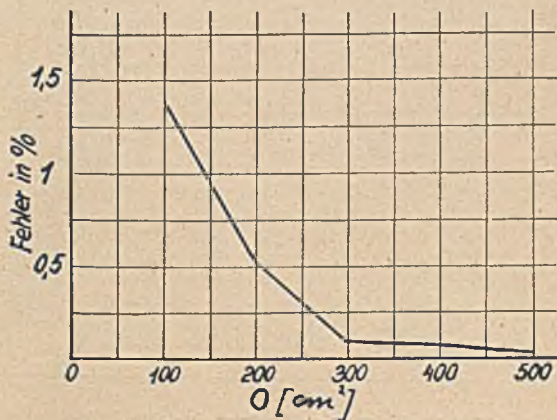


Bild 40. Differenzen der abgelesenen und berechneten r-Werte (Bild 39) abhängig von den O-Werten des Kegels.

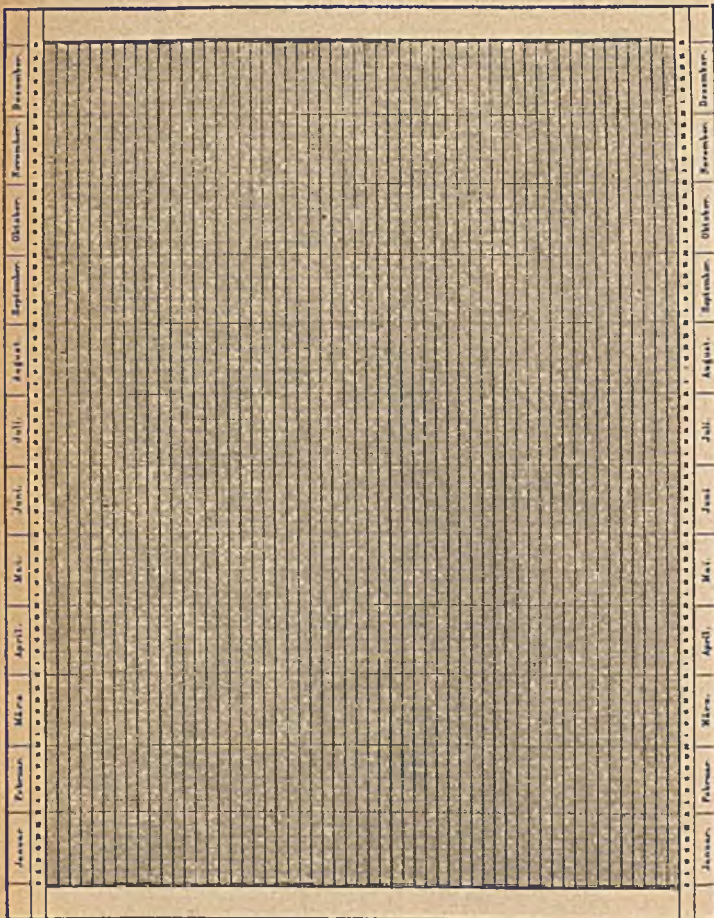


Bild 41. Netzpapier für Jahresberichte.

Oberflächenwerten. Die sich jetzt ergebende Darstellung des Fehlers zeigt, daß bei den höheren Werten der Oberfläche die Abweichungen der abgelesenen und berechneten  $r$ -Werte immer kleiner werden. Daß sie in vorliegendem Beispiel immer negativ sind, ist Zufall. Es sei hier darauf hingewiesen, daß der Ablesefehler durch Vergrößerung des Maßstabes der Systemachsen und damit der Darstellung selbst nicht kleiner wird. Man wird i. a. den Maßstab so wählen, daß die sich ergebende Schlüsselkurve mit einem im Handel erhältlichen Kurvenlineal bequem zu zeichnen ist. Die Krümmung des Kurvenlineals ist so gehalten, daß bei zweckmäßiger Wahl des Maßstabes der sich ergebende Ablesefehler möglichst klein ausfällt.

Die graphische Darstellung läßt aber nicht nur die Gesetzmäßigkeiten oder charakteristischen Merkmale einer Formel erkennen, sondern man ist auch in der Lage, durch Eintragung irgend welcher Meßwerte in ein Netz sich ein Bild zu machen von dem Verlauf technisch wichtiger Vorgänge. Die Ermittlung der algebraischen Formel durch diese Darstellung ist jedoch nicht so einfach und wird in einem späteren Kapitel behandelt werden. Statistischen Zwecken z. B. dient das von der bekannten Firma Schleicher & Schüll-Düren herausgebrachte Netzpapier für Jahres-, Monats-, Wochen- und Tagesberichte. Bild 41 zeigt z. B. ein Netzpapier für Jahresberichte.

Wie steht es nun mit der Darstellung im Raume? Zu den Flächenkoordinaten  $x$  und  $y$  kann auch noch die räumliche  $z$ -Koordinate dazu kommen, so daß wir jetzt ein Raumnetz für unsere Darstellungen gewinnen. Im vorigen Kapitel wurde die

Darstellung der Formel  $V = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot h$  erörtert (S. 44). In der

Fläche konnten nur zwei Veränderliche der Formel in ihrer gesetzmäßigen Abhängigkeit voneinander dargestellt werden, während die dritte Veränderliche als bekannt, als Zahl behandelt wurde. Die Berücksichtigung der dritten Veränderlichen ergab dann die flächenhafte Linien- oder Kurvenschar. Die einzelnen Linien oder Kurven der Schar können jetzt so dargestellt werden, daß man sie im Raume aneinanderreihet und auf der räumlichen Achse des Systems die Kennziffern der einzelnen Glieder der Schar aufträgt. Man erhält dann eine Darstellung, wie sie Bild 42 vermittelte. Es entstehen hier keine Raumkurven, die als Schlüsselkurven nicht brauchbar sind, sondern die Kurven in der Fläche bleiben bestehen und reihen sich in übersichtlicher Weise im Raume aneinander. Allerdings lassen sich die einzelnen Kurven räumlich zu einer Fläche verbinden. Eine derartige Schlüsselfläche wäre zwar darstellungstechnisch vollkommen einwandfrei, zur Feststellung der zahlenmäßigen Abhängigkeit der einzelnen Größen voneinander aber nicht recht geeignet.



Wir wollen jetzt auf eine weitere Eigenart der Darstellung eingehen und bitten den Leser zu diesem Zweck sich noch einmal Bild 38 anzusehen. Bei diesem Bilde handelte es sich um die Darstellung der Abweichungen der berechneten und der

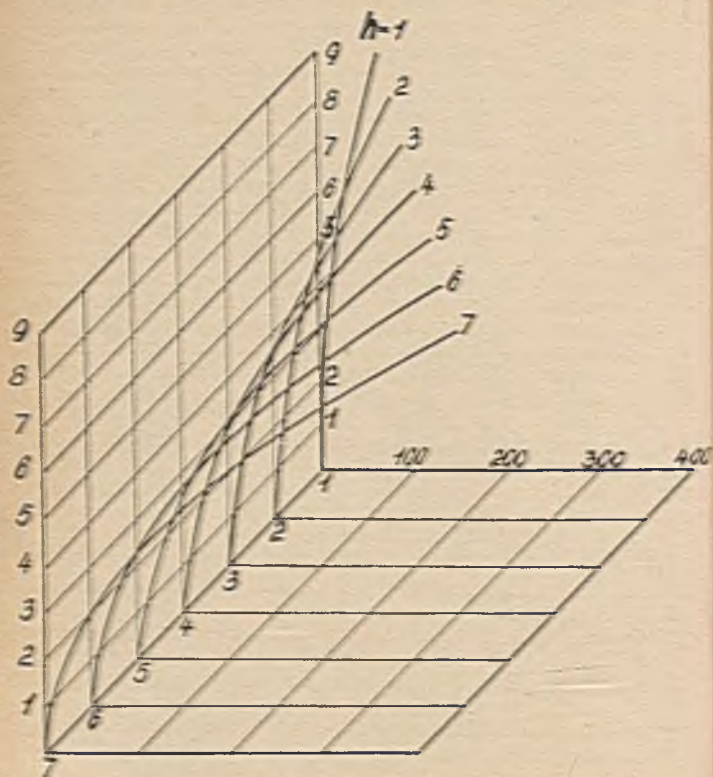


Bild 42. Aneinanderreihung von Schlüsselkurven im Raume.

abgelesenen Streckenwerte durch eine gerade Linie. Die einzelnen Punkte dieser Linie waren gekennzeichnet durch den jeweils zur Berechnung der Summe benutzten Faktor  $q$ . Durch die Bezeichnung der einzelnen Linienpunkte erschien die Linie selbst irgendwie unterteilt; die Linie wurde hierdurch in eine

Leiter, eine Skala, verwandelt. Die „1-Teilung“ war, da es sich um Ablesewerte handelte, nicht gleichmäßig und auch nicht gesetzmäßig. Vielleicht gelingt es uns aber durch eine Bezugzahl eine gerade Linie (oder eine Kurve) gesetzmäßig zu teilen. Wir wählen für unsere Untersuchung die Gleichung der geraden Linie  $y = a x + \frac{1}{2}$ , wo der Steigungsfaktor  $a$  nacheinander die

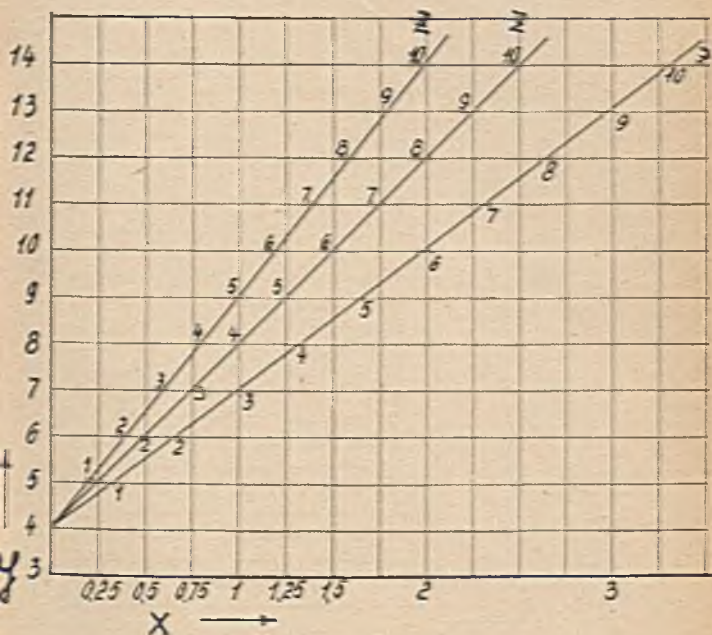


Bild 43. Teilung von Geraden durch sog. Bezugzahlen  $z$ .

Werte 3, 4 und 5 annehmen soll. Die Gleichung wird durch das Gleichheitszeichen in zwei Teile zerlegt. Die unter sich gleichen Teile wollen wir  $= z$  setzen. Es entsteht dann folgendes Gleichungssystem

$$y - \frac{1}{2} = z \quad 3x = z; \quad 4x = z; \quad 5x = z.$$

Diese Gleichungen sind also durch  $z$  miteinander verbunden. Verwandeln wir diese Gleichungen in eine Tabelle, so erhalten wir

Tabelle 15.

z	y	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	5	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
2	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
3	7	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
4	8	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$
5	9	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1
6	10	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$

Die Darstellung dieser Geradenschar zeigt Bild 43. Die Linien sind jetzt geteilt und die einzelnen Teilpunkte sind beziffert, und zwar sind diese Teilpunkte durch die z-Werte gekennzeichnet.

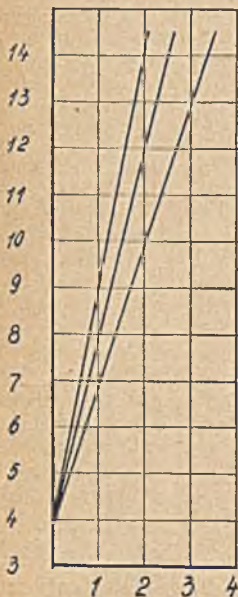


Bild 43a. Geradenschar des Bildes 43 dargestellt in einem Netz mit gleicher Teilung in Längs- und Querrichtung.

Ablesung gewährleistet ist. In Bild 43 z. B. verhalten sich die Teilungseinheiten der x-Achse zu denen der y-Achse wie 4:1.

Dieses Verhältnis wurde deshalb gewählt, um die Linienabstände zu vergrößern und damit die Ablesesicherheit zu verbessern. Bild 43a zeigt dieselben Linien jedoch jetzt in einem Netz dargestellt, wo x- und y-Achse mit den gleichen Teilungseinheiten versehen wurde. Die Ermittlung von Zwischenwerten ist bei Einheiten von 2, 5, 10, 20 und 50 mm nicht schwierig. Bei den Einheiten von 5 und 10 mm besonders heben sich die Netzlينien auf dem Millimeterpapier deutlich hervor. In Bild 36 z. B. wurde die x-Achse (Millisekunden) in 20 mm-Einheiten, die y-Achse (m/sek) in 0,2 mm-Einheiten geteilt.

Oft ist es wichtig, das Längenmaß einer Linie oder eines Kurvenzuges zwischen zwei Punkten zu kennen. Die Länge eines geraden Liniestückes zwischen den Punkten A und B kann ganz einfach mit einem Millimetermaßstab abgemessen oder mittels der bekannten Koordinatenpunkte  $x_1, y_1; x_2, y_2$  berechnet werden. Sind die Punkte A und B mit den Punkten  $x_1 = 2 \text{ cm}, y_1 = 4 \text{ cm}$  und  $x_2 = 6 \text{ cm}, y_2 = 7 \text{ cm}$  bekannt, so kann durch die Beziehung:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (7 - 4)^2} = 5 \text{ cm}$$

die Länge des Liniestückes leicht errechnet werden. Die Länge des Liniestückes errechnet sich also für die gegebenen Werte zu 5 cm. Die Länge eines Kurvenstückes kann ebenfalls berechnet werden. Man zerlegt zu diesem Zweck das Kurvenstück in einige annähernd gerade Streckenteile und berechnet nach der oben angegebenen Beziehung jedes einzelne kleine Streckenteil besonders. Die Zerlegung muß so erfolgen, daß der entstehende Fehler klein bleibt. Man kann jedoch das Kurvenstück auch ausmessen, indem man mit dem Stechzirkel eine bekannte Länge z. B. 0,5 cm einstellt und mit dieser Zirkelöffnung das Kurvenstück abzirkelt, der Rest wird abgeschätzt. Durch die besprochenen Meß- und Berechnungsmethoden verwandelt man den Kurvenzug in ein Sehnenpolygon. Es ist darauf zu achten, daß man die Vergleichsstrecke nicht zu klein wählt, da hierdurch der Meßfehler sich vergrößert. Die Länge des Kurvenstückes kann auch mit dem Meßrädchen (Kurvimeter) bestimmt werden, indem man mit diesem die Meßstrecke abfährt.

Außer Strecken sind aber auch Flächen auszumessen, die durch Kurvenzug abgegrenzt sind. Hier hilft man sich so, daß man die Kästchen des Millimeterpapiers ( $\text{mm}^2$ ) auszählt und die von der Kurve durchschnittenen abschätzt. Hierbei ist auf den Längenmaßstab der Systemachsen zu achten. Bei der Ausmessung von Flächen, die durch einen geschlossenen Kurvenzug begrenzt werden, kann man auch ein Verfahren anwenden, wonach diese durch parallele Geraden in Streifen zerlegt (Bild 44) und nach Augenmaß in Rechtecke verwandelt werden.

Die übrig bleibenden Flächenstücke, die von einem Bogenstück begrenzt werden, können als Parabelabschnitte angesehen und nach der Beziehung (Lambertsche Regel)

$$\frac{2}{3} y x \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} u \bar{x} \quad (\text{siehe Bild 44})$$

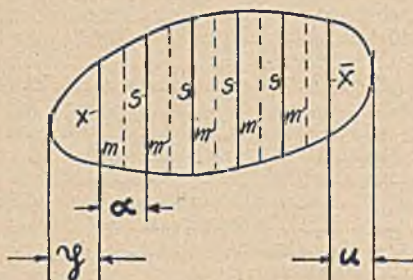


Bild 44. Ermittlung von Flächen, die durch einen geschlossenen Kurvenzug begrenzt werden.

berechnet werden. Der Flächeninhalt kann dann in der Form

$$F = \frac{2}{3} (y x + u \bar{x}) + \Sigma m a \quad (\Sigma = \text{Summe})$$

geschrieben werden. Ist das auszumessende Flächenstück von

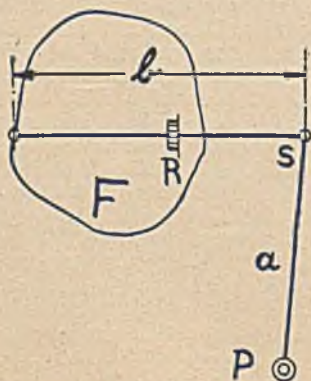


Bild 45. Prinzipbild eines Polarplanimeters.

regelmäßiger Beschaffenheit, teile man es in Streifen gleicher Breite, so daß eine Anzahl Trapeze der Seitenlänge  $s$  entstehen. In diesen Trapezen ziehe man noch die Mittellinien  $m$ , so daß sich die Formel für den Flächeninhalt aus 3 Teilen zusammensetzt:

$$F = \frac{a}{3} \left( \frac{x + \bar{x}}{2} + \Sigma s + 2 \Sigma m \right).$$

$\Sigma s$  und  $\Sigma m$  kann man durch Ausmessen ermitteln. Diese Me-

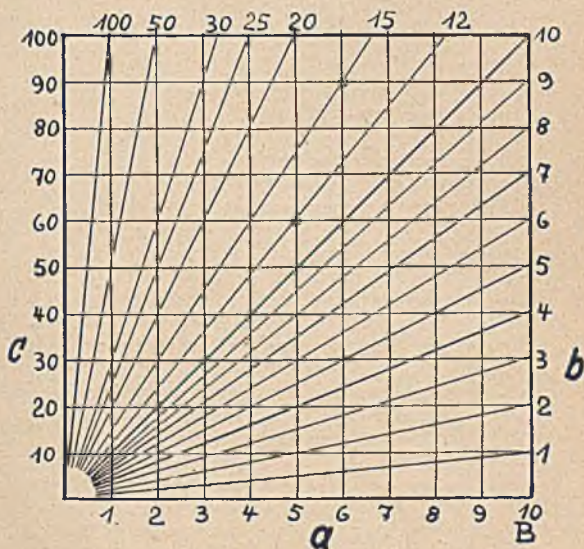


Bild 46. Multiplikationstafel als Linientafel ausgeführt.

thode der Flächenmessung wird als Simpsonsche Regel bezeichnet.

Flächen lassen sich auch mit einem Instrument ausmessen, dem Polarplanimeter. Dieser Flächenmesser besteht in der Hauptsache aus einem um den festen Pol  $P$  (Bild 45) drehbaren Hebelarm  $a$  und einem um dessen Endpunkt  $s$  drehbaren Hebelarm  $b$ , von welchem ein Ende die auszumessende Fläche  $F$  umfährt. Das andere Ende des Hebelarmes  $b$  trägt ein Zahnrädchen  $R$ , das bei der Meßbewegung mit abrollt. Bei der Ausmessung der Fläche muß der Pol  $P$  immer außerhalb der zu messenden Fläche liegen. Man eicht das Planimeter durch Umfahren

eines Quadrates oder eines Kreises von bekanntem Flächeninhalt, wobei aber die Meßrolle immer in ein und demselben Umfassungssinn sich bewegen muß. Derartige Flächenermittlungen sind in der Praxis bei Indikatordiagrammen z. B. notwendig, um die geleistete Arbeit von Arbeitsmaschinen zu ermitteln. Die Fläche eines Indikatordiagramms ist nämlich ein Maß für die beispielsweise von einer Dampfmaschine geleisteten Arbeit.

Abgesehen von der Darstellung irgend welcher Gesetzmäßigkeiten kann man eine Netztafel auch zum Multiplizieren und

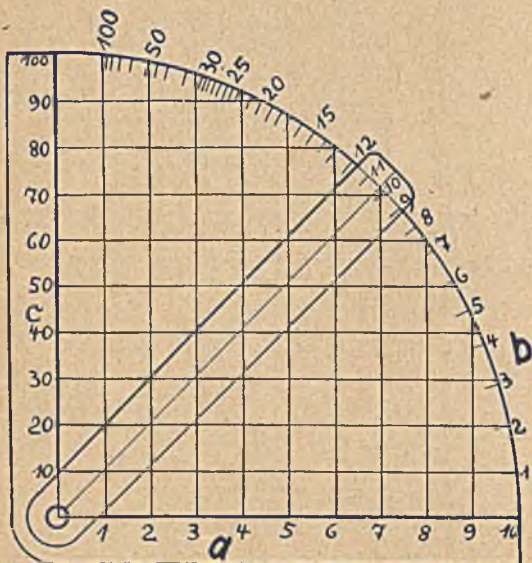


Bild 47. Mechanisierte Multiplikationstafel.

Dividieren, also als reines Recheninstrument, ausbilden. Eine derartige Rechentafel kann grundsätzlich entweder als Linien- oder als Kurventafel verwendet werden. Eine Linientafel dieser Art ist etwa so aufgebaut, wie die in Bild 34 dargestellte. Die Kennziffern der einzelnen Linien sind hier durch Ziffern zu ersetzen, die als Faktoren für die Multiplikation benötigt werden. Die y-Achse wird dann die Resultatzahlen tragen. Bild 46 zeigt eine derartige Rechentafel. Hier wird die Beziehung  $a \cdot b = c$  so dargestellt, daß die einzelnen b-Punkte der in B er-

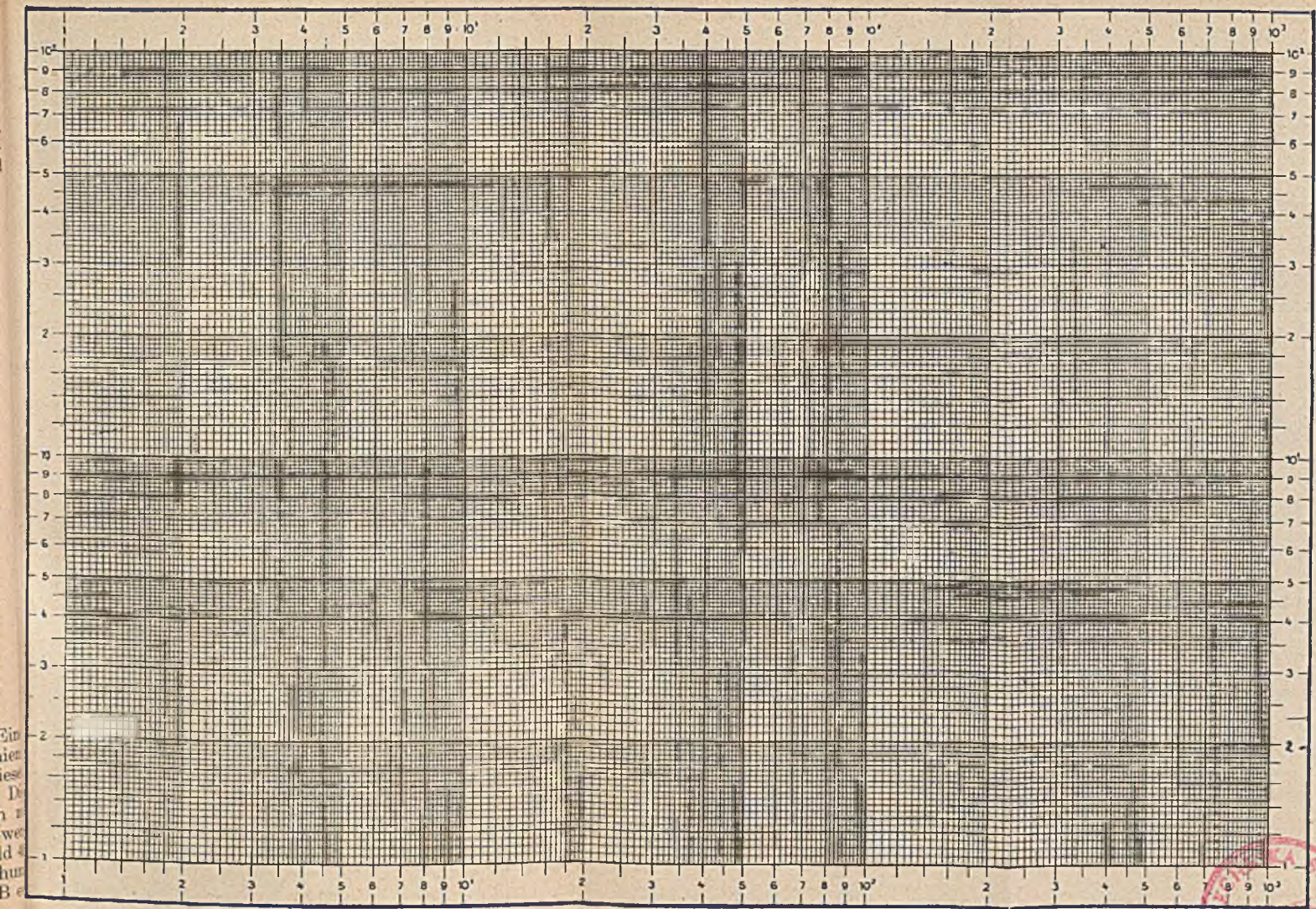


Bild 51. Vollständig geteiltes log. Papier von Schleicher & Schüll (365½).





richteten Senkrechten mit dem Nullpunkte des Systems verbunden werden. Auf der waagerechten Achse sind die a-Werte aufgetragen, auf der senkrechten Achse die c-Werte. Alle drei Skalen tragen gleichförmige Teilung. Ein Nachteil dieser Anordnung ist der enge Bereich für b. Bei Erweiterung des Bereiches auf  $b = 100$  z. B. können die einzelnen Linien nicht mehr als Verbindungslinien des Nullpunktes mit den entsprechenden Punkten der B-Linie gewonnen werden, sondern sie sind mit Hilfe der c- und a-Werte zu konstruieren. Die weiteren

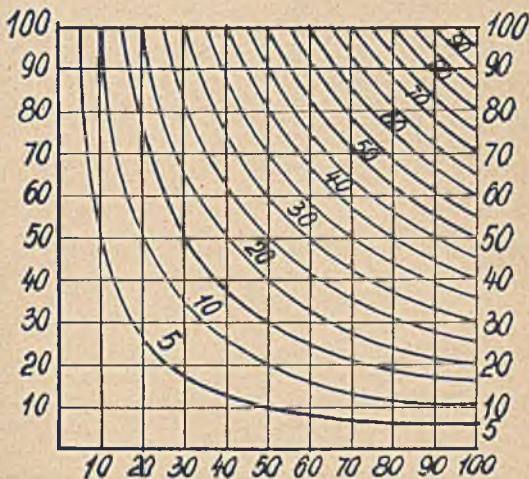


Bild 48. Multiplikationstafel als Kurventafel ausgeführt.

b-Linien sind dann bis zur oberen Begrenzung der Tafel zu ziehen, wo auch die den einzelnen Linien entsprechenden Werte für b einzutragen sind. Die Linie für  $b = 12$  z. B. muß durch den Punkt  $a = 5$ ,  $c = 60$ , die Linie für  $b = 15$  durch den Punkt  $a = 6$ ,  $c = 90$  gehen usw. Die Abstände der einzelnen Linien voneinander werden mit wachsenden b-Werten immer kleiner, so daß der Übersichtlichkeit halber nur einige ausgewählte Linien eingezeichnet werden können. Dieser Nachteil läßt eine Mechanisierung der Rechentafel als zweckmäßig erscheinen. Man grenzt zu diesem Zwecke das System durch einen Kreisbogen ab und zeichnet auf diesem Skalenteile ein, die den b-Werten entsprechen. Über diesem System läßt man nun

ein entsprechendes durchsichtiges Kreisstück mit Weiserstrich sich bewegen, so daß dieser nacheinander die einzelnen Stellungen der b-Linien durchfährt (Bild 47). Im letzten Kapitel dieses Büchleins wird gezeigt, wie diese Anordnung zur Grundlage eines Rechengetriebes dient.

Ein anderer Weg zur Konstruktion einer Multiplikationstafel wurde schon im Kap. 1 angedeutet. Das Bild 15 dieses Kapitels zeigte eine Anordnung, den Flächeninhalt rechtwinkliger Bleche zu messen. Die Zahlen gleichen Flächeninhaltes wurden durch Kurvenzüge miteinander verbunden. Diese Kurven sind gleichseitige Hyperbeln. Bild 48 zeigt eine auf dieser Grundlage ausgeführte Multiplikations- bzw. Divisionstafel. Ein eingezeichnetes Beispiel läßt die Handhabung dieser Tafel leicht erkennen. Eine Mechanisierung dieser Tafel ist, wenn auch nicht mit so einfachen Mitteln, wie bei der Linientafel, ebenfalls durchführbar.

## IV. Darstellung im ungleichförmig geteilten Netz

Außer den gleichförmig geteilten Millimeternetzen verwendet man in der Praxis der graphischen Rechentechnik auch ungleichförmig geteilte Netze. Der Hauptgrund, derartige Netze zu benutzen, ist der, die Kurvenzüge zu geraden Linien zu strecken. Wir wollen einmal untersuchen, wie man nun von der gleichförmigen Teilung zur ungleichförmigen Teilung gelangt. Ziehen wir in einem gleichförmig geteilten Millimeternetz eine Gerade unter  $45^\circ$ , die durch den Nullpunkt geht und beziffern wir die x-Achse nach Maßgabe der vorgedruckten Teilungen von 0 bis 10, so haben wir es in der Hand, unter Benutzung der Schlüsselgeraden die y-Achse nach einem vorgegebenen Gesetze zu teilen. Im Kapitel 1 (Bild 16) wurde eine derartige Teilung schon für das quadratische Gesetz  $y = \left(\frac{x}{a}\right)^2$  durchgeführt. Die Darstellung des allgemeinen Gesetzes  $y = a x^2$ , wo a nacheinander verschiedene Werte annehmen kann, ergibt also im halb quadratisch, halb gleichförmig geteilten Netz eine Geradenschar. Von dieser Schar sind in dem Bild 49 die Geraden mit den Kennziffern  $a = 0,5$  bis  $a = 5$  eingezeichnet. Der allgemeine Zahlenfaktor a ist hier also durch die Steigung der Schlüsselgeraden gekennzeichnet. Nach derselben Methode erhält man auch Darstellungen

für die Gesetze  $a x^3 = y$ ,  $a x^4 = y$  usw. Ein Nachteil dieser so geteilten Netze ist der, daß sie immer nur für ein Gesetz gelten, man kann also nicht beliebig von einem quadratisch geteilten Netz z. B. zu einem kubisch geteilten übergehen.

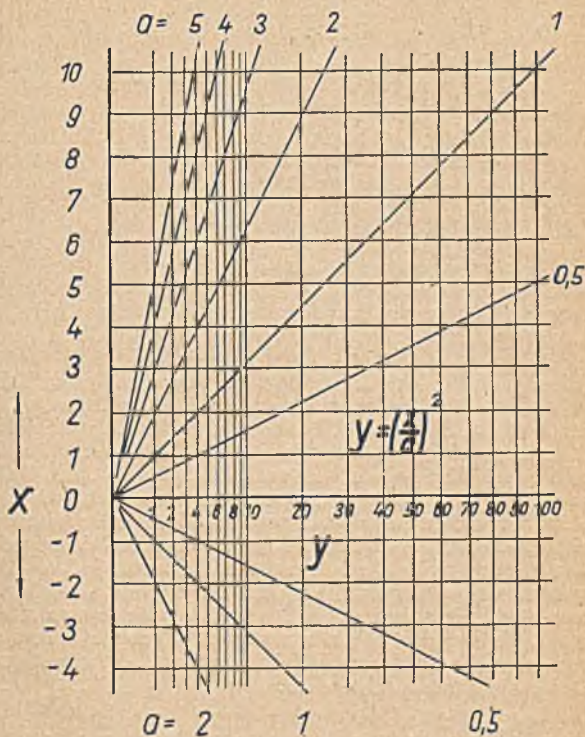


Bild 49. Darstellung der quadratischen Beziehung  $y = \left(\frac{x}{a}\right)^2$  im halb quadratisch halb gleichförmig geteilten Netz.

Führen wir noch in dem Gesetz  $y = \left(\frac{x}{a}\right)^2$  für  $x$  negative Werte ein, so bleibt als Darstellung die gerade Linie erhalten, nur daß sich die Steigung der geraden Linie entsprechend ändert.

Die Linien im positiven Netzteil scheinen sich im negativen zu spiegeln (Bild 49).

Die allgemeine Charakteristik der eben besprochenen Netzart läßt sich also nach folgenden Gesichtspunkten zusammenfassen:

1. Gesetze der allgemeinen Form  $y = a x^n$  werden in halb gleichförmig, halb ungleichförmig geteilten Netzen als gerade Linien dargestellt.

2. Ein Übergang von einem Netz zum andern ist nicht möglich, jedes Netz entspricht nur einem Gesetz.

3. Die Zählung der Teilungseinheiten auf beiden Achsen des Systems beginnt mit 0.

4. Negative  $x$ - und  $y$ -Werte können in derartigen Netzen dargestellt werden.

5. Das nach beiden Richtungen gleichförmig geteilte Netz ist als Sonderfall anzusehen ( $n = 1$ ,  $a = 1$ ).

Um die Möglichkeit zu haben, möglichst verschiedene Gesetze in einem einzigen Netz als gerade Linien darzustellen, muß die Teilung so verändert werden, daß diese Forderung erfüllt ist.

Eine solche Teilung ist die log. Teilung. Auch diese Teilung kann auf dieselbe Art und Weise hergestellt werden, wie die quadratische, kubische u. a. Das Gesetz, das der logarithmischen Teilung zugrunde liegt, lautet  $y = a^x$ . Bild 50 zeigt die Konstruktion mit Hilfe einer Schlüssellinie unter  $45^\circ$ . Die Teilung wurde durchgeführt unter Benutzung des log. Gesetzes der Form  $y = 2^x$ . Das so entstandene halb logarithmisch, halb gleichförmig geteilte Netz wird zur Darstellung bestimmter Gesetzmäßigkeiten in der Praxis häufig verwendet. Ehe wir jedoch darauf eingehen, wollen wir zunächst die Eigenarten einer log. geteilten Strecke kennen lernen. Diese Eigenarten lassen sich aus dem log. Gesetz selbst schon herauslesen. Wenn wir in dem oben angegebenen Gesetz für  $x$  die Zahlen 0, 1, 2 . . . . . einsetzen, erhält man folgende Zahlenpaare:

$x = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = 1$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024.

Der erste Wert in der  $y$ -Reihe ist also 1, d. h. der Anfangspunkt einer log. Teilung ist nicht 0 sondern 1. Vergleichen wir die  $y$ -Werte paarweise, so stellen wir fest, daß der Verhältniswert zweier willkürlich herausgegriffener nebeneinander stehender  $y$ -Werte immer gleich ist, z. B.

$$\frac{2}{4} = \frac{16}{32} = \frac{256}{512} = \frac{1}{2}.$$

Das Verhältniß richtet sich also nach der Wahl der Basis  $a$ . Verwandelt man das Gesetz  $y = 3^x$  in eine Reihe von Wertepaaren, so würde der Verhältnißwert der  $y$ -Werte 1:3 betragen. Auf die Verstreckung zu geraden Linien hat die Basis jedoch keinen Einfluß. Verlängern wir die log. geteilte Schlüssellinie des Bildes 50 über den Punkt 1 hinaus und beziffern die einzelnen Punkte wieder, so kommen wir zu immer kleineren ( $y$ -) Werten, die aber nie zu Null werden. Negative  $y$  Werte lassen sich aus diesem Grunde in diesem log.-getheilten Netz nicht darstellen. Da die log. Teilung auch für das Verständnis des in Kap. 13 ausführlich behandelten Rechenschiebers sehr wichtig ist, wollen wir an dieser Stelle ganz kurz auf das logarithmische Rechnen bzw. auf das Rechnen mit Exponentialzahlen eingehen. Bei der Multiplikation und Division derartiger Zahlen soll es sich immer um Exponentialzahlen gleicher Basis handeln. Eine Exponentialzahl ist eine vereinfachte Schreibweise eines Produktes, das aus mehreren gleichen Faktoren besteht. Die Zahl  $2^5$  [sprich: 2 hoch 5] bedeutet:  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$  d. h. also die Zahl 2 soll fünfmal mit sich selbst multipliziert werden. Sind also zwei Exponentialzahlen miteinander zu multiplizieren, so schreibt man sie zum besseren Verständnis der Rechenoperationen ausführlich genau wie oben hin. Es bedeutet also

$$2^4 \times 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Als Multiplikationszeichen wurde einmal der Punkt, das andere Mal das  $\times$  gewählt. Da diese beiden Operationszeichen aber gleichwertig sind, kann man also schreiben:

$$2^4 \times 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 2^{4+5}.$$

Das  $\times$ -Zeichen, das beide Exponentialzeichen miteinander verbindet, ist zu einem Pluszeichen im Exponenten geworden. Allgemein kann diese Regel folgendermaßen geschrieben werden:

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \text{oder in Worten:}$$

Exponentialzahlen mit gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert.

Es gelingt also durch Beziehung der gewöhnlichen Zahlen auf eine bestimmte Basiszahl die Operation der Multiplikation auf die nächst einfachere der Addition zurückzuführen. In ganz ähnlicher Weise werden Exponentialzahlen durcheinander dividiert. Es ist z. B.

$$2^5 : 2^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 = 2^{5-4} = 2^1.$$

In allgemeiner Form lautet die in dieser Aufgabe zur Anwendung gekommene Regel:

$$a^x : a^y = a^{x-y} \quad \text{oder in Worten:}$$

Exponentialzahlen mit gleicher Basis werden durcheinander dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert. Ist  $x = y$ , so wird obige Regel folgende eigenartige Form annehmen:

$$a^x : a^x = a^{x-x} = a^0 = 1.$$

Dies kann sozusagen als Beweis gelten für die oben schon hingeschriebene Beziehung  $y = 2^0 = 1$ . Gleichzeitig sei auf die Schreibweise negativer Exponenten hingewiesen. Es bedeutet z. B.  $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ . Die Gleichheit der Verhältniswerte kann am besten aus der Reihe der Zehnerpotenzen erkannt werden. Es ist z. B.

$$10^1 = 10; 10^2 = 100; 10^3 = 1000; 10^4 = 10000 \text{ usw.}$$

Auf der logarithmisch geteilten Linie können also die Verhältniswerte in folgender Form geschrieben werden.

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000} = \frac{1000}{10000} = \frac{10000}{100000} \dots\dots$$

Aus obiger Aufstellung der Zehnerpotenzen läßt sich übrigens auch erkennen, daß die Stellenzahl, die dem aus der Tabelle entnommenen Logarithmus vorangesetzt wird, sich nach der Zahl der Nullen hinter der 1 richtet. Einer Null hinter der 1 (10) entspricht eine 1 im Exponenten, zwei Nullen hinter der 1 (100) entspricht eine 2 im Exponenten usw. Geht man weiter nach rückwärts, dann ist:

$$10^0 = 1; 10^{-1} = 0,1; 10^{-2} = 0,01; 10^{-3} = 0,001 \text{ usw.}$$

Hieraus ersieht man wieder, daß keiner Null hinter der 1 eine Null im Exponenten entspricht, einer Null vor der 1 (0,1) eine  $-1$  im Exponenten entspricht usw. Nach diesem System werden also die Stellenzahlen bei den Logarithmen angegeben. Die logarithmische Teilung enthält also noch eine dritte Eigentümlichkeit, die dem Wesen der Logarithmen entspricht: negative Werte können nicht dargestellt werden.

Kehren wir jetzt zum log. geteilten Netz zurück. Wir wollen jetzt das in Abb. 50 dargestellte nur in einer Richtung log. geteilte Netz verwandeln in ein vollständig log. geteiltes Netz. Bild 51 zeigt ein gebräuchliches im Handel erhältliches vollständig log. geteiltes Papier der Firma Schleicher & Schüll (Nr. 365½). In diesem Netz werden alle Gesetze der allge-

meinen Form  $y = a x^n$  als Gerade dargestellt. Wir wollen jetzt, ehe wir die Darstellung im Millimeternetz und im vollständig log. geteilten Netz miteinander vergleichen, noch einmal die Eigenarten jenes Netzes zusammenfassen:

1. Alle Gesetze der Form  $y = a x^n$  werden in einem vollständig log. geteilten Netz als gerade Linien dargestellt.
2. Die Teilung beider Systemachsen beginnt mit Null.
3. Negative Werte lassen sich nicht darstellen.

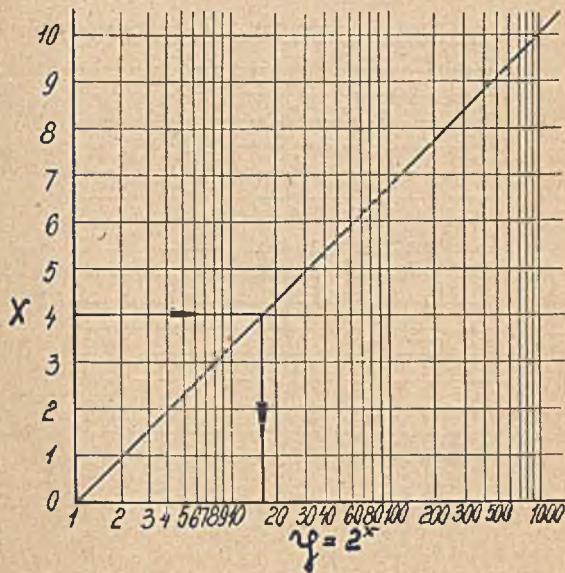


Bild 50. Darstellung des Gesetzes  $2^x$  durch gerade Linie.

In den nun folgenden Bild 52 und 53 sind die Darstellungen einiger Gesetze sowohl im Millimeternetz als auch im ganzlog. geteilten Netz einander gegenübergestellt. Setzt man in oben angegebenem allgemeinen Gesetz  $n = 1$ , so erhält man die Gleichung der geraden Linie, die (im Millimeternetz) durch den Nullpunkt geht:  $y = a x$ . In den vergleichenden Bildern 52 und 53

ist die Gleichung der Form  $y = 3 x$  eingetragen (I) und zeigen die stark ausgezogenen Teile der Linie in beiden Netzen an, wieweit die Abbildung im log. geteilten Netz überhaupt möglich war. Die Teilungseinheiten sowohl der x- als auch der y-Achse sind im log. Netz gleich, im Millimeternetz verhalten sie sich der deutlichen Darstellung wegen wie 2:1. Der Kurvenzug II des Bildes 52 stellt eine gleichseitige Hyperbel dar. Das Gesetz der gleichseitigen Hyperbel erhält man durch Einsetzen von  $-1$  für  $n$  in die Form  $y = a x^n$ . Für den allgemeinen Zahlenfaktor wurde 2 gesetzt, so daß das dargestellte Gesetz lautet

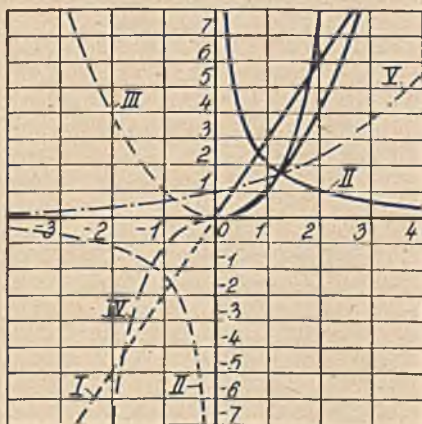


Bild 52. Darstellung einiger grundlegender Beziehungen-im gleichförmig geteilten Millimeternetz.

$x y = 2$ . Der negative Ast der Hyperbel ist im log. geteilten Netz überhaupt nicht darstellbar. Kurvenzug III, eine Parabel, ist durch Tabellierung des quadratischen Gesetzes  $y = x^2$  entstanden. Auch hier ist der negative Teil der Parabel im log. geteilten Netz nicht darstellbar; die in beiden Netzen darstellbaren Teile des Kurvenzuges wurden stark ausgezogen. Kurvenzug IV endlich, eine kubische Parabel illustriert das kubische Gesetz  $y = x^3$ . Auch hier ist der negative Ast der kubischen Parabel im log. geteilten Netz nicht darstellbar. Aus allen diesen



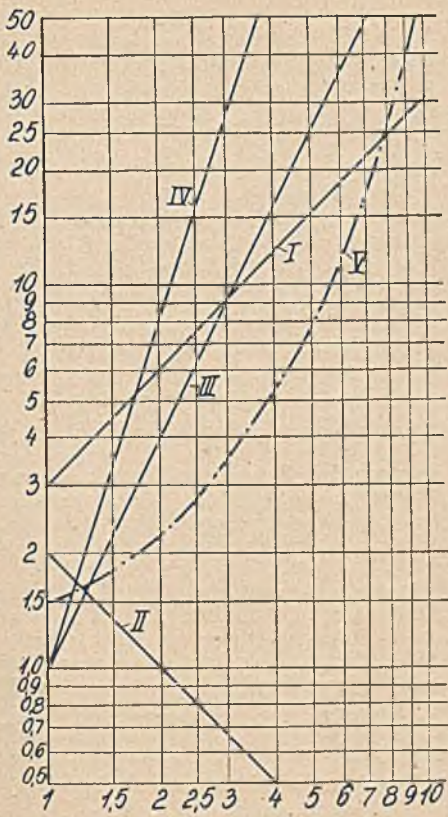


Bild 53. Darstellung einiger grundlegender Beziehungen im ungleichförmig geteilten logarithmischen Netz.

zu geraden Linien verstreckten Kurvenzügen läßt sich leicht das zugehörige Gesetz ermitteln, da die logarithmierte Formel in jedem Fall zur allgemeinen Form der geraden Linie führt. Durch Logarithmierung wird also aus:

$$I. y = 3x \quad \log y = \log 3 + \log x \quad [y = x + m]$$

Steigung positiv und  $= 1$ ; Gerade unter  $45^\circ$  schneidet bei  $x = 1$  und  $y = 3$  die  $y$ -Achse.

$$II. y = \frac{2}{x} \quad \log y = \log 2 - \log x \quad (y = -x + m)$$

Steigung negativ und  $= |1|$ ; Gerade unter  $135^\circ$  schneidet bei  $x = 1$   $y = 2$  die  $y$ -Achse.

$$III. y = x^2 \quad \log y = 2 \cdot \log x \quad (y = ax)$$

Steigung positiv und  $= 2:1$ ; Gerade unter  $63^\circ 30'$  geht durch den 1-Punkt des log. geteilten Netzes.

$$IV. y = x^3 \quad \log y = 3 \cdot \log x \quad (y = ax)$$

Steigung positiv und  $3:1$ ; Gerade unter  $71^\circ 40'$  geht durch den 1-Punkt des log. geteilten Netzes.

Kommt zu dem Ausdruck  $y = ax^n$  noch ein Faktor  $b$  hinzu, so daß wir  $y = ax^n + b$  erhalten, dann läßt sich dieses Gesetz im ganzlog. geteilten Netz nicht mehr als gerade Linie darstellen.

Gesetze dagegen der allgemeinen Form  $y = b \cdot ax$  strecken sich im halb logarithmisch, halb gleichförmig geteilten Netz zu geraden Linien. Die Eigenart dieses Netzes gestattet die Darstellung negativer  $x$ -Werte. Durch Gegenüberstellung der Darstellungen im Millimeternetz und im log. geteilten Netz ist klar zu ersehen, welche Netzart in dem einen oder anderen Falle zu wählen ist. Sind z. B. Nullwerte zu ermitteln oder sollen negative Werte berücksichtigt werden, dann ist unbedingt das Millimeternetz zu wählen. Auch dann, wenn man die Werte unverzerrt z. B. zu Eichzwecken benutzen will, ist das Millimeternetz dem log. geteilten Netz vorzuziehen. Einige Beispiele mögen die Eigenarten der beiden Darstellungsmöglichkeiten noch einmal aufzeigen.

Die Darstellung der Schnittgeschwindigkeit  $v$

$$v = \frac{d \pi n}{1000} \quad (d = \text{Durchmesser der abzdrehenden Welle} \\ n = \text{Umdrehungszahl pro min der Spindel})$$

ergibt im Millimeternetz eine Schar von geraden Linien, die sämtlich durch den Nullpunkt gehen. Die Stufung der Kennziffern für  $n$  soll außerdem nach dem Gesetz einer geometrischen Reihe erfolgen. Diese Stufung zeigt Bild 38; wurde außerdem auf S. 50 genau besprochen. Nach Festlegung der Bereiche

für  $d$  (0—240 mm),  $n$  (60—500 U/min) und  $v$  (bis 60 m/min) wird ein sog. wirtschaftlicher Bereich für  $v$  im Netz abgegrenzt. In Bild 54 wurde dieser Bereich für  $v = 40$  und  $v = 50$  m/min abgegrenzt. Nach der Festlegung dieser Grenzen ist die erste  $n$ -Linie zu zeichnen bzw. der Anfangswert der Kennziffer für  $n$  zu wählen. In vorliegendem Beispiel wurde als Anfangswert  $n = 200$  angenommen. Durch die Begrenzung des wirtschaftlichen  $v$ -Bereiches und Eintragung einer ersten  $n$ -Linie ist gleichzeitig auch der Stufungsfaktor für die  $n$ -Reihe gegeben

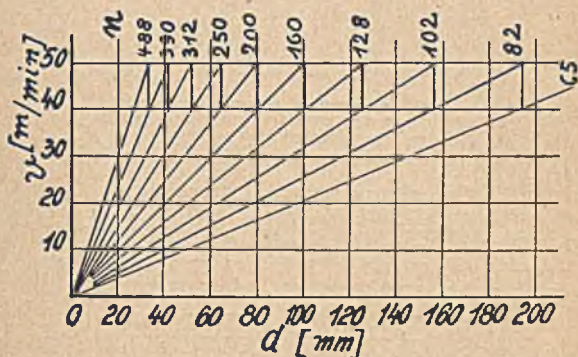


Bild 54. Schnittgeschwindigkeit  $v$  abhängig vom Werkstückdurchmesser  $d$  (Darstellung im Millimeternetz).

(siehe S. 49). Aus  $v = 40$  m/min und  $d = 80$  mm läßt sich leicht die nächstniedrige  $n$ -Zahl ermitteln. Man erhält für

$$n = \frac{1000 v}{d \pi} = \frac{1000 \cdot 40}{80 \pi} = 159 \text{ U/min} \sim 160 \text{ U/min.}$$

Der Stufungsfaktor  $q = \frac{160}{200} = 0,8$  ergibt folgende Abstufung der  $n$ -Werte

$$\frac{200}{0,8} \quad \frac{200}{0,8^2} \quad \frac{200 \cdot 0,8^1}{0,8^3} \quad \frac{200 \cdot 0,8^2}{0,8^4} \quad \frac{200 \cdot 0,8^3}{0,8^4} \quad \frac{200 \cdot 0,8^4}{0,8^4} \text{ bzw.}$$

Die abgerundeten  $n$ -Werte wurden als Kennziffern an die einzelnen Linien des Bildes 54 angeschrieben. Zur Kontrolle berechnen wir einmal mittels der aus Bild 54

entnommenen Werte  $v = 50$  und  $d = 240$  den zugehörigen  $n$ -Wert und erhalten:

$$n = \frac{v \cdot 1000}{d \pi} = \frac{50000}{240 \pi} = 66,3$$

statt des aus der Reihe berechneten Wertes 65,6. Dies bedeutet eine Abweichung von etwa 1%. Auch für die erste Linie rechnen wir den  $n$ -Wert mittels abgelesener  $d$ - und  $v$ -Werte nach und erhalten  $n = \frac{50000}{32 \pi} = 497$  statt des berechneten Wertes 488.

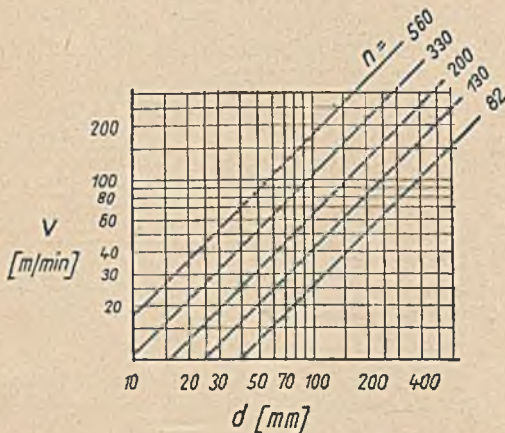


Bild 55. Schnittgeschwindigkeit  $v$  abhängig vom Werkstückdurchmesser  $d$  (Darstellung im log. geteilten Netz).

was noch nicht 2% Abweichung bedeutet. Die eben festgestellte Fehlergrenze ist für unsere technischen Berechnungen mehr als ausreichend. Übertragen wir jetzt diese Linientafel auf log. geteiltes Papier, so erhalten wir (Bild 55) eine Schar von parallelen Linien, die eine Steigung von  $m = 1$  ( $= \operatorname{tg} 45^\circ$ ) besitzen. Logarithmieren wir nämlich die Gleichung  $v = \frac{d \pi n}{1000}$ ,

so erhalten wir  $\log v = \log d + \log n + \log \frac{\pi}{1000}$ , wo das Glied  $\log n$  für die gewählte Kennziffer als konstant anzusehen ist.

Wenn wir also das Zahlenglied  $\log n + \log \frac{\pi}{1000}$  vernachlässigen,

so bleibt übrig  $\log v = \log d$  bzw.  $\frac{\log v}{\log d} = 1 = \tan 45^\circ$ . Die

parallelen Linien (Bild 55) sind alle gleich weit voneinander entfernt, d. h. einer ungleichförmigen Stufung im Millimeternetz entspricht eine gleichförmige im logarithmischen Netz. Auf log. geteiltem Papier lassen sich also technische Gesetze leichter und schneller darstellen als auf Millimeterpapier. Bei der Konstruktion geht man so vor, daß man zunächst wieder eine Anfangslinie mit glattem  $n$ -Wert in das log. Netz einzeichnet, und zwar wurde wieder die Linie mit der Kennziffer  $n = 200$  als Anfangslinie gewählt. Da die nächste Linie für  $n = 160$  parallel der Grund- oder Anfangslinie verläuft, braucht nur ein Punkt dieser Linie berechnet und eingezeichnet zu werden. Durch diesen Punkt wird die Parallele zur Grundlinie gezogen. Durch die zweite Linie ist der Abstand aller Linien voneinander bekannt, so daß dieser nur so oft abgetragen zu werden braucht, wie Linien benötigt werden. Die Abtragung erfolgt auf einer Linie senkrecht zur Grundlinie. Der Fehler, der etwa durch ungenaue Zeichnung in die Darstellung kam, ist jetzt leicht durch Nachrechnung eines Punktes der Endlinie zu ermitteln. Für  $v = 60$  und  $d = 57$  (Bild 55) ergibt sich der Wert

$$n = \frac{v \cdot 1000}{d \pi} = \frac{60 \cdot 1000}{57 \cdot \pi} = 334.$$

Dieser Wert weicht gegenüber dem berechneten um 1 % ab. Im log. geteilten Netz können also die Drehzahlwerte nach geometrischem Gesetze leichter gestuft werden als im Millimeternetz. Nach Ausmessung des Linienabstandes kann leicht die Zahl der Kennlinien nach Maßgabe der verfügbaren Papierfläche errechnet werden. Außer der Formel für die Schnittgeschwindigkeit  $v$  braucht der Kalkulator noch die Formel zur

Berechnung der Schnittzeit  $T = \frac{l}{ns}$ . In dieser Formel bedeutet

$l$  die Länge des Werkstückes in m,  $n$  die minutliche Umdrehungszahl der Spindel und  $s$  der Vorschub in m/min. Auch diese Formel soll zunächst im Millimeternetz, dann aber auch im log. geteilten Netz dargestellt werden. Veränderlich dargestellt werden hier die Werte für  $T$  und  $s$ , wobei die Werte für  $n$  jeweils unverändert bleiben, d. h. als Zahlenwerte behandelt werden. Die  $n$ -Werte stimmen bei der Darstellung beider Formeln überein. Die Länge  $l$  des Werkstückes soll immer 1 m betragen. Der

Vorschub  $s$  soll in den Grenzen 0,1—20 mm/Umdr. gehalten werden. Bild 56 zeigt eine Hyperbelschar, durch die die Formel für die Schnittzeit dargestellt wird. Der Abstand der einzelnen Hyperbeln voneinander wird nach oben und nach rechts immer geringer, so daß man sich in diesem Bereich leicht in der zu

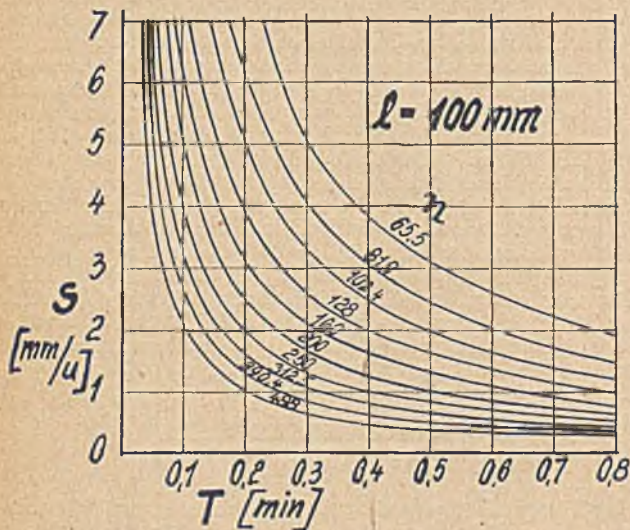


Bild 56. Vorschub  $s$  abhängig von der Schnittzeit  $T$   
(Darstellung im Millimeternetz).

wählenden Kurve irren kann. Nur im mittleren Kurventeil ist der Abstand so groß, daß eine einigermaßen sichere Ablesung gewährleistet ist. Im übrigen beansprucht die Konstruktion eines derartigen Nomogrammes ziemlich viel Zeit, da eine genügend große Anzahl Wertepaare zur Darstellung jeder einzelnen Kurve berechnet werden müssen. Alle diese Nachteile lassen eine Darstellung im log. geteilten Netz zweckmäßiger erscheinen, da sich hier die Hyperbeln zu geraden Linien verstrecken. In Bild 57 ist die Formel für die Schnittzeit  $T$  im logarithmisch geteilten Netz dargestellt. Wir erhalten jetzt an-

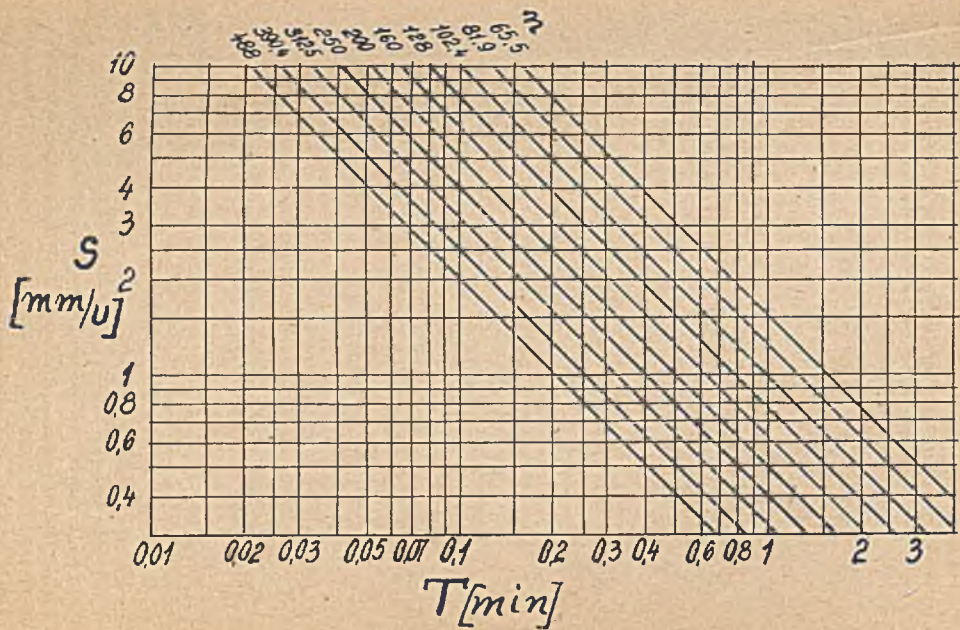


Bild 57. Vorschub  $s$  abhängig von der Schnittzeit  $T$  (Darstellung im log. geteilten Netz).

statt der Hyperbeln eine Schar von parallelen geraden Linien, die alle gleichen Abstand voneinander haben. Die Abstände der Linien sind die gleichen wie im  $d - v$ -Diagramm (Bild 55), da ja in beiden Darstellungen für  $n$  dieselben Werte gewählt wurden. Legt man das  $T - s$ - und das  $d - v$ -Diagramm übereinander, dann erkennt man — was ja auch schon aus den Steigungswerten der beiden logarithmierten Formeln hervorgeht — daß jetzt die  $n$ -Linien aufeinander senkrecht stehen. Durch

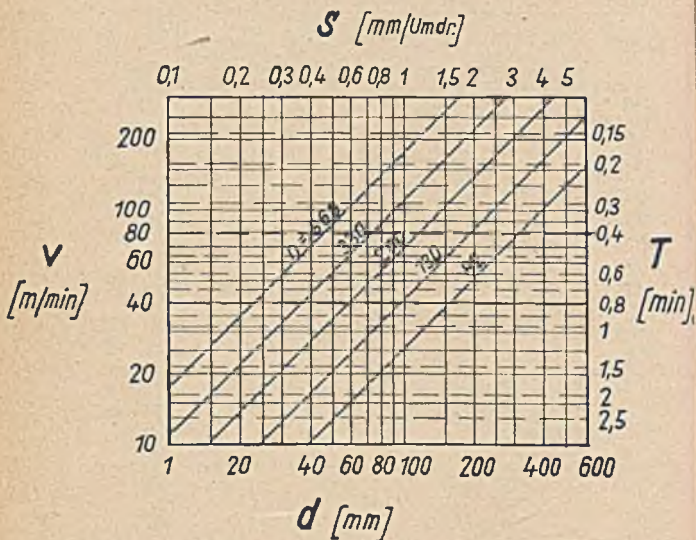


Bild 58. Vereinigung der Tafeln 55 und 57 im log. geteilten Netz.

Drehung beider Tafeln um  $90^\circ$  können die beiden Linienscharen zur Deckung gebracht werden. Bild 58 zeigt die beiden Tafeln nach ihrer Zusammenlegung. Bild 6 auf S. 57 des Bändchens „Betriebsberechnungen“ der Deutschen Werkmeisterbücherei zeigt eine derartige in der Praxis oft benutzte Tafel.

Zu einer ganz ähnlichen Darstellung führt die Formel zur Leistungsermittlung an Maschinen (siehe „Betriebsberechnungen“ S. 212). Bekanntlich errechnet man die Leistung  $N$  in PS aus der Formel



$$N = \frac{P \cdot v}{75} \quad P = \text{Umfangskraft in kg} \\ v = \text{Umfangsgeschwindigkeit der Bremsscheibe in m/sek.}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit wiederum ist definiert durch

$$v = \frac{2 r \pi n}{60} \quad r = \text{Halbmesser der Bremsscheibe in m} \\ n = \text{Umlaufzahl der Bremsscheibe pro min}$$

Diese Beziehungen wollen wir sofort in ganzlogarithmisch geteiltes Papier eintragen und wählen hierfür das Papier Nr. 365 $\frac{1}{2}$  der Firma Schleicher & Schüll. Zunächst ist die

Formel  $N = \frac{P \cdot v}{75}$  darzustellen, und zwar für den Bereich

$P = 10 - 100 \text{ kg}$ ,  $N = 10 - 100 \text{ PS}$  und  $v = 1 - 30 \text{ m/sek.}$

Auf der senkrecht stehenden Achse tragen wir die Werte für  $n$  und auf der waagerechten Achse die für  $P$  auf. Wir wählen für  $v$  die geometrisch gestufte Wertereihe:  $v = 1; 2; 4; 8; 16; 32 \text{ m/sek}$  und erhalten wieder eine Schar von Geraden mit gleichem Abstand voneinander. Die Geraden haben eine negative Steigung d. h. sie weisen alle in die rechte Ecke des Blattes. Der Steigungswinkel beträgt  $135^\circ$ . Wir vervollständigen das zweiachsige System zu einem vierachsigen, so daß das Netz von einem Rechteck begrenzt ist. Dreht man jetzt das Blatt so herum, daß die  $v$ -Linien eine positive Steigung haben und trägt man auf der jetzt waagerechten Achse die  $r$ -Werte in cm auf, so sind nur noch die  $n$ -Werte auf der letzten Rechteckseite einzutragen.

Da die Formel  $v = \frac{2 r \pi n}{60}$  den konstanten Wert  $\frac{2 \pi}{60}$  enthält,

werden sich die  $n$ -Werte nicht so ohne weiteres den vorgedruckten Teilungen des Papiers anpassen. Wir wollen versuchen, sie durch Berechnung zu finden. Hierbei geht man so vor, daß man einen  $v$ - und  $n$ -Wert vorgibt und daraus den  $r$ -Wert ermittelt. Für  $n = 100$  z. B. und  $v = 2 \text{ m/sek}$  erhält man

$$r = \frac{2 \cdot 60}{2 \pi \cdot 100} = 192 \text{ cm} \text{ und ebenso für } n = 200 \text{ und } v = 4 \text{ m/sek}$$

den Wert  $r = \frac{4 \cdot 60}{2 \pi \cdot 200} = 192 \text{ cm}$ . Aus Bild 59 geht die Eintragung der  $r$ -Werte hervor. Vergleicht man die so erhaltene

Teilungseinheit mit der entsprechenden der  $r$ -Skala, erkennt man, daß die Teilungen übereinstimmen. Die  $n$ -Teilungen stimmen damit auch mit den  $P$ - und  $N$ -Teilungen überein. Die gefundenen  $n$ -Werte lassen auch auf die Auftragsrichtung dieser Werte auf der  $n$ -Achse schließen. Diese ist der der gegenüberliegenden  $P$ -Achse entgegengesetzt gerichtet. Man braucht jetzt nur noch die Teilung der  $n$ -Leiter durch Anlegen eines vom log. Papier abgeschnittenen Streifens zu vervollständigen,

um eine Netztafel zu erhalten, in der 5 Veränderliche dargestellt sind. Von Vorteil ist es, daß drei Rechteckseiten sofort unter Benutzung der vorgedruckten Teilungen (genau wie beim  $T-s=d-v$ -Diagramm) beziffert werden können. Das Rechtecknetz kann auch entsprechend dem geforderten Geltungsbereich vergrößert oder verkleinert werden, ohne daß die Teilungen sich ändern.

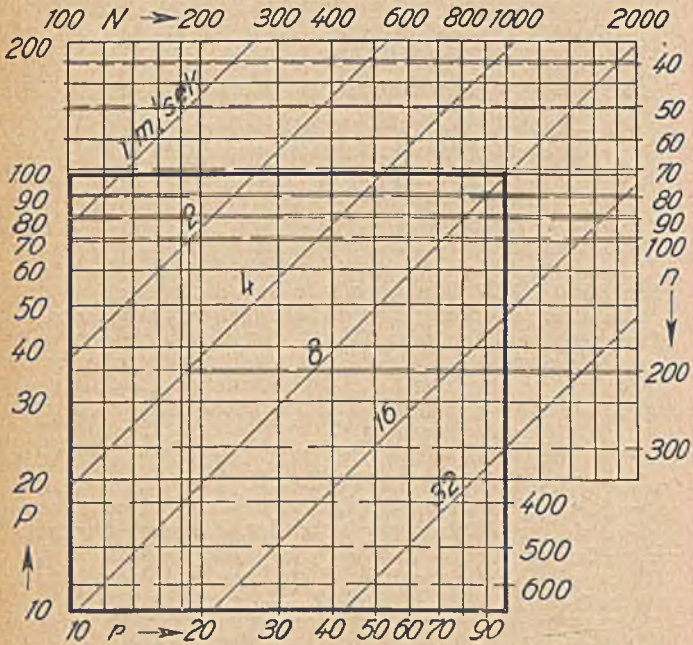


Bild 59. Rechentafel zur Ermittlung der Leistung (kann mit Tafel 103 vereinigt werden).

Das log. geteilte Netz kann genau so wie das Millimeternetz zur Ausbildung einer Multiplikationstafel benutzt werden. Die gleichen Produktwerte liegen jetzt nicht mehr auf Hyperbeln, sondern auf geraden Linien (vergl. auch Bild 56 und Bild 57). Durch Einzeichnung der Quadrat- und Kubuslinie (siehe Bild 60) können auch Quadrat- und Kubikwurzeln bzw. 2. und 3. Potenzen abgelesen werden. Ernst Bräuer z. B. hat durch ge-

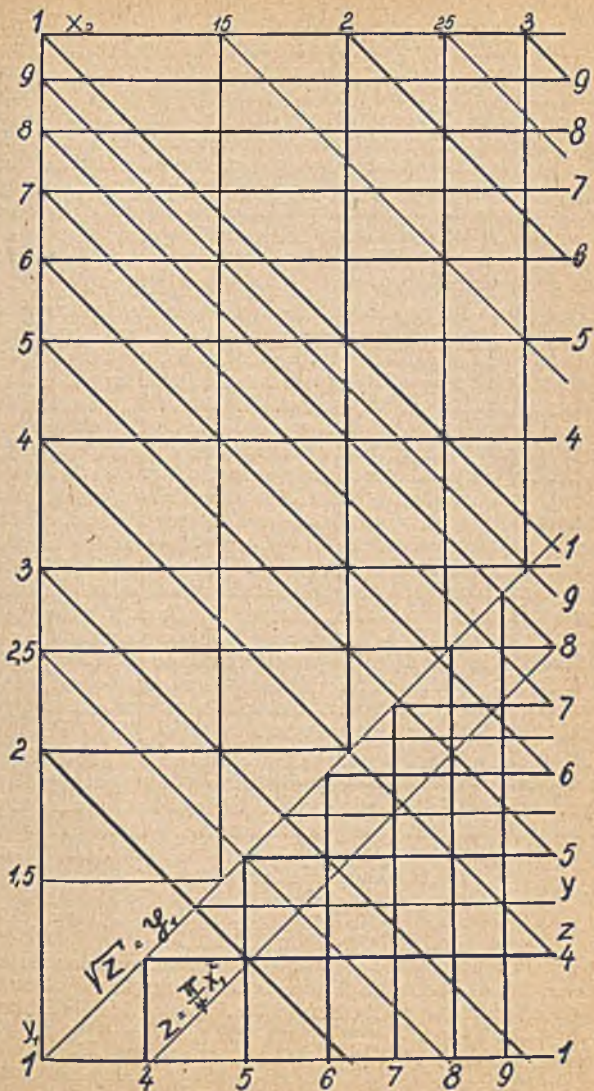


Bild 60 Multiplikationstafel von Ernst Brauer (Linienscharen im vollständig log. geteilten Netz).

schickte Netzanordnung eine Rechentafel handlicher Form geschaffen. Mit dieser Tafel lassen sich auch zusammengesetzte Multiplikations- und Divisionsaufgaben lösen. Alle derartige Rechentafeln sind heute wohl ausnahmslos durch den Rechenschieber (Kap. 13) verdrängt worden. Die Bilder 16 und 49 machten uns mit Netzen vertraut, die halb gleichförmig, halb quadratisch geteilt waren, und in denen quadratische Gesetze als gerade Linien abgebildet wurden. Nun gibt es auch halb gleichförmig, halb log. geteilte Netze, in denen sich Gesetze bestimmter Prägung abbilden lassen und zwar sind es Gesetze der Form  $y = b \cdot a^x$ . Wir wollen uns jetzt mit dieser Netzart etwas genauer befassen.

Eine ganze Anzahl technisch-physikalischer Gesetze sind in Formeln der eben angegebenen Form festgelegt. Die Basis  $a$  kann verschiedene Zahlenwerte annehmen, wobei die Basiszahlen 10 und  $e = 2,718$  eine besondere Stellung einnehmen. Die Basiszahl  $a$  beeinflusst jedoch die Darstellung im halblogarithmisch geteilten Netz nicht wesentlich. Als Beispiel einer derartigen Gesetzmäßigkeit sei erwähnt, daß die Ausschläge jedes ausschwingenden Körpers nach dem Gesetz  $a = b \cdot e^{-kt}$  abklingen, wo  $b$  eine Zahl,  $k$  der Dämpfungsfaktor und  $t$  die Zeit bedeutet. Weiter errechnet sich der Luftdruck  $p$  in der Höhe  $h$  über dem Meeresspiegel zu  $p = p_1 \cdot e^{-mh}$  wo  $m$  eine Zahl und  $p_1$  der Luftdruck in der Höhe des Meeresspiegels ist. Die Entladung eines Kondensators geht ebenfalls nach einem derartigen Exponentialgesetz vor sich, das in der Formel  $V = V_0 \cdot a^{-t}$  Ausdruck findet.  $V_0$  bedeutet hier die Spannung am Anfang der Beobachtung und  $V$  die Spannung nach einer Beobachtungszeit  $t$ . Die Basis  $a$  kann hier als Materialzahl gedeutet werden. Es handelt sich hier um das Material, was zur Ableitung der elektrischen Ladung benutzt wird.

Die Abhängigkeit der sog. Qualitätszahlen von den Grundtoleranzen des Isapaßsystems wird im halblog. geteilten Netze als gerade Linie dargestellt (Bild 61). Die Grundtoleranzen werden in  $i$ -Paßeinheiten angegeben. Diese Paßeinheiten sind ihrerseits wieder vom Durchmesser  $D$  der Welle bzw. der Bohrung abhängig, und zwar nach folgendem Gesetz:

$$i = 0,45 \sqrt[3]{D} + 0,001 D.$$

Tabelle 16 enthält die Wertepaare der Qualitätszahlen  $Q$  und der Grundtoleranzen  $G$ . Die Stufung der Grundtoleranzen erfolgt in einer geometrischen Reihe, wo der Multiplikationsfaktor  $\sqrt[3]{10} \cong 1,6$  beträgt. Das Gesetz dieser Abhängigkeit kann also in der Form  $1,58Q^{-1} = G$  geschrieben werden.

Tabelle 16.

Q	G	Q	G	Q	G
1	$1,58^0 = 1 \text{ i}$	7	$1,58^6 = 16 \text{ i}$	12	$1,58^{11} = 160 \text{ i}$
2	$1,58^1 = 1,6 \text{ i}$	8	$1,58^7 = 25 \text{ i}$	13	$1,58^{12} = 250 \text{ i}$
3	$1,58^2 = 2,5 \text{ i}$	9	$1,58^8 = 40 \text{ i}$	14	$1,58^{13} = 400 \text{ i}$
4	$1,58^3 = 4,0 \text{ i}$	10	$1,58^9 = 64 \text{ i}$	15	$1,58^{14} = 640 \text{ i}$
5	$1,58^4 = 6,4 \text{ i}$	11	$1,58^{10} = 100 \text{ i}$	16	$1,58^{15} = 1000 \text{ i}$
6	$1,58^5 = 10 \text{ i}$				

Näheres über Isapaßungen usw. lese man im Bande 2 der

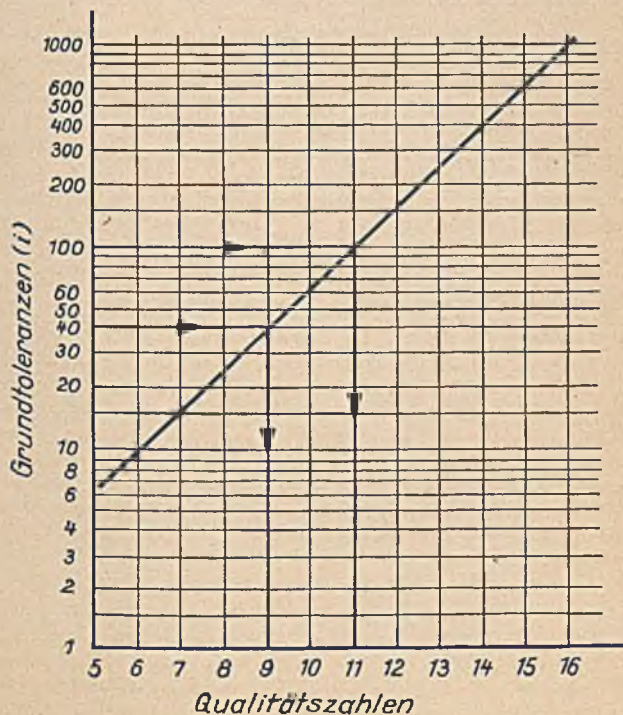


Bild 61. Abhängigkeit der sog. Qualitätszahlen von den Grundtoleranzen  $i$  des Isapaßsystems.

Gruppe IV der Deutschen Werkmeister-Bücherei: „Meßwerkzeuge und Werkstattmessungen“ nach.

Um die Eigenarten und Vorteile des halb logarithmisch halb gleichförmig geteilten Papiers noch genauer zu untersuchen, wollen wir ein sehr wichtiges Exponentialgesetz darstellen, nämlich die Zinseszinsformel. Diese Formel gibt an, in welcher Weise sich Kapital und Zinsen nach Ablauf einer bestimmten Anzahl von Jahren verzinsen. Nach  $n$ -Jahren ist nämlich das Anfangskapital  $k$  zum Endkapital  $K$  angewachsen bei Annahme eines Zinsfaktors

$$q = \frac{100 + p\%}{100}.$$

Die Zinseszinsformel lautet demnach:

$$K = k \cdot q^n.$$

Für unsere Untersuchung wollen wir ein Anfangskapital

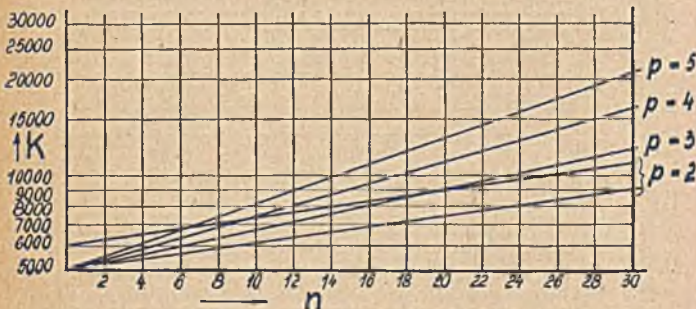


Bild 62. Anwachsen eines Kapitals nach  $n$  Jahren bei verschiedener Verzinsung.

$k = 5000$  Mark zugrunde legen, das bei einem bestimmten Zinsfuß  $p$  zu einem zu berechnenden Betrage angewachsen ist. Für  $p$  wählen wir zunächst die Zahl 2. Wir erhalten also beim Einsetzen dieser Zahlenwerte in obige Formel:

$$K = 5000 \cdot 1,02^{30} = 9057 \text{ Mark.}$$

Diesen Punkt tragen wir auf der Jahresendlinie (siehe Bild 62) ein und verbinden ihn mit dem Punkt  $k = 5000$ ;  $n = 0$ . Um zu sehen, ob das Gesetz sich wirklich als gerade Linie darstellen läßt, wollen wir noch einen Zwischenwert berechnen, der zeigen soll, daß alle diese Punkte auf einer geraden Linie liegen. Für  $n = 10$  erhält man dann:

$$K = 5000 \cdot 1,02^{10} = 6095 \text{ Mark.}$$

Nach Einzeichnung auch dieses Punktes ins Netz erkennt man, daß dieses Gesetz wirklich durch eine gerade Linie dargestellt wird. Jetzt wollen wir für dasselbe Anfangskapital (5000 Mark) und für dieselbe Zahl  $n$  aber für einen Zinsfuß von 3% das Endkapital berechnen. Wir erhalten in diesem Falle:

$$K = 5000 \cdot 1,03^{30} = 12139 \text{ Mark.}$$

Auch diesen Punkt tragen wir auf der Jahresendlinie ein. Für  $q = 1,04$  erhalten wir endlich ein Endkapital  $K = 16213$  Mark. Vergleichen wir jetzt die Abstände der einzelnen Punkte auf der Jahresendlinie, so ist klar zu erkennen, daß die beiden Abstände einander gleich sind. Die Linien also mit ganzzahlig gestuften Kennziffern ( $p = 2; 3; 4 \dots$ ) liegen gleich weit voneinander entfernt. Um diese eigenartige Tatsache zu erhärten, bestimmen wir durch Abtragen des gefundenen Abstandes den Punkt für  $q = 1,05$  ( $p = 5\%$ ) auf der Jahresendlinie. Als Endkapital für diesen Zinsfuß erhalten wir von der Jahresendlinie nach links gehend den Wert 21 000 Mark. Die Rechnung ergibt einen Wert  $K = 21611$  Mark. Dieser erhaltene Wert rechtfertigt also unsere Konstruktion. Der Fehler von  $\sim 3\%$  ist unbedeutend. Die Eigenart dieses Netztyps ermöglicht es, durch entsprechende Unterteilung der Jahresendlinie und Verbindung des erhaltenen Punktes mit dem Anfangspunkt  $k = 5000; n = 0$  das Anwachsen des Kapitals bei 3,5% bei 4,75% usw. genau von Jahr zu Jahr zu verfolgen. Wenn wir nicht ein Grundkapital von 5000 Mark, sondern ein solches von 6000 Mark z. B. bei einem Zinsfuß von 2% beobachten wollen, so braucht man nichts weiter zu tun, als auf der Linientafel zur Kennlinie 2% die Parallele durch den Punkt  $k = 6000; n = 0$  zu ziehen. Diese übersichtliche Methode der Darstellung ermöglicht auch Vergleiche anzustellen. Die Kapitalzuwachslinie eines Grundkapitals von 6000 Mark zu 2% Verzinsung schneidet die Kapitalzuwachslinien eines Grundkapitals von 5000 Mark mit den Kennziffern 5%, 4% und 3% in je einem Punkte. Der erste Schnittpunkt (Bild 61) zeigt, daß nach etwa 6 Jahren das Grundkapital von 6000 Mark bei einem Zinsfuß von 2% zu demselben Betrage angewachsen ist wie ein solches von 5000 Mark zu 5% Verzinsung. Der zweite Schnittpunkt besagt, daß nach fast 10 Jahren die Kapitalien von 5000 und 6000 Mark, einmal zu 2%, das andere Mal zu 4% verzinst, dieselbe Höhe erreicht haben. Der dritte Schnittpunkt endlich gibt an, daß nach etwa 18 Jahren erst das eine Kapital zu 2%, das andre zu 3% verzinst, gleiche Höhe erreichten. Diese Untersuchungen zeigten deutlich die Vorteile der Darstellung auf halblog. geteiltem Papier. Bezugnehmend auf das Gesetz des Kapitalzuwachses fassen wir noch einmal die eben besprochenen Eigenarten der Darstellung kurz zusammen:

1. Exponentialgesetze der allgemeinen Form  $y = b \cdot a^x$  ergeben, auf halblog. geteiltem Papier dargestellt, gerade Linien.

2. Die Linien des Kapitalzuwachses tragen als Kennziffern den Betrag des Zinsfußes, bezeichnen also die Stufung der Basis des Exponentialgesetzes. Gleicher Stufung der Basis entspricht gleiche Stufung der Abschnitte auf der Jahresendlinie.

3. Die Darstellung auf halblog. geteiltem Papier ermöglicht, den Zuwachs verschiedener Kapitalien bei verschiedenem Zinsfuß zu verfolgen und zu vergleichen.

Da auf halblog. geteiltem Papier auf der gleichförmig geteilten Systemachse auch negative Werte eingetragen werden können, kommt es hier zu dem eigenartigen Zusammenfallen des Eins- und Nullpunktes als Anfangspunkte des Systems. Ein weiterer Vorteil log. geteilter Netze ist die Möglichkeit, die Ablesegenauigkeit einzelner Bereiche zu staffeln. Die Werte des Bereiches 1—10 z. B. können genauer als die des Bereiches 10—100 ermittelt werden. Der prozentuale Fehler des abgelesenen und berechneten Wertes bleibt jedoch in allen Bereichen der gleiche. Man wird auch dann log. geteilte Netze verwenden, wenn die eingetragenen Wertepaare keine geraden Linien ergeben, dafür aber einen so großen Bereich umfassen, daß die Darstellung auf Millimeterpapier unzuweckmäßig erscheint. In der Praxis begegnen uns manchmal Formeltypen, deren Darstellung nur auf log. geteiltem Papier möglich ist. Eine derartige Type ist z. B. die Umrechnungsformel der spezifischen Zähigkeit  $\eta$  in Englergrade E:

$$\frac{100 \eta}{\alpha} = E \cdot 7,61 - E^{-3} \quad [a = \text{spez. Gewicht}].$$

Auch das Gaußsche Fehlergesetz zeigt eine solche Form:

$$y = e^{-x^2}.$$

An folgenden Ausdrücken sollen die Eigenarten jener Formeltypen durch die graphische Darstellung sichtbar gemacht werden

$$\text{I } y_1 = 1,1x^{1,1} \qquad \text{II } y_2 = 1,1^{1,1^x}.$$

Diese beiden Formeln wurden in Zahlenpaare umgewandelt. Tabelle 17 enthält jene Werte.

Tabelle 17.

x =	1	2	3	5	10	20	40	50	60
$y_1 =$	1,100	1,226	1,376	1,750	3,320	13,08	247,7	1149	5490
$y_2 =$	1,110	1,122	1,135	1,166	1,280	1,898	74,55	71963	$39616 \cdot 10^8$



Bild 63 zeigt die in ein ganzlog. geteiltes Netz eingetragenen Wertepaare. Der Kurvenzug I verläuft zunächst ziemlich flach, um dann rasch zu hohen Werten anzusteigen. Kurvenzug II verläuft ebenfalls zunächst ganz nahe der x-Achse, um dann aber ganz plötzlich fast kerzengerade emporzusteigen. Jedoch auch die in Bild 63 dargestellten Kurven lassen sich in Spezialnetzen zu geraden Linien verstrecken, wie Bild 63a für das

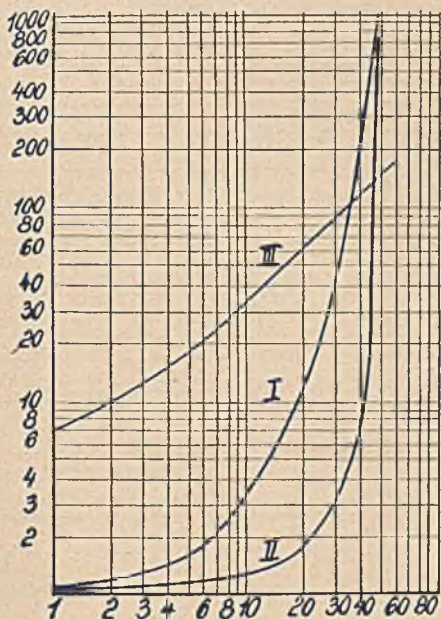


Bild 63. Darstellung der Gesetze  $y_1 = 1,1^{x^{1,1}}$  (I)  $y_2 = 1,1^{1,1x}$  (II) und  $y_3 = 3x + 4$  (III).

Gesetz  $y_1 = 1,1^{x^{1,1}}$  zeigt. In senkrechter Richtung ist das Netz logarithmisch gestuft, in waagerechter Richtung ist die Stufung dem angegebenen Gesetz angepaßt (siehe auch Bild 50). Die Darstellung auf halblog. geteiltem Papier fand auch in der Normung Anwendung. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die meisten Stufungen in der Technik eine geometrische Reihe ergeben.

Der Mensch hat offenbar das Bedürfnis, zwei Gegenstände, die sich der Größe nach unterscheiden sollen, so zu gestalten, daß ihr Größenunterschied sofort in die Augen fällt. Schon 1922 entstanden daher die dezimalgeometrischen Reihen der Normungszahlen, die im Normblatt DIN 323 zusammengefaßt sind. Tabelle 18 gibt eine Übersicht über jene Normungszahlen, die dem erwähnten Normblatt zugrunde liegen. Die Stufung der Reihe R 40 z. B. entstand so, daß der Zahlenbereich von 1 bis 10 geometrisch in 40 Teile unterteilt wurde. Die Reihe R 20 ent-

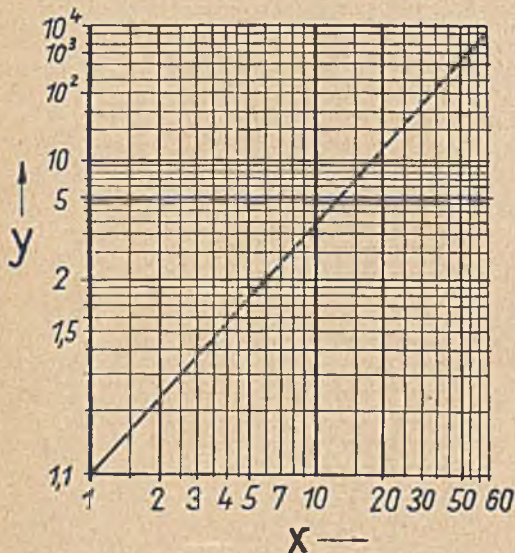


Bild 63a.

stand aus der Reihe R 40, indem jeder zweite Wert aus der Grundreihe ausgelassen wurde. Aus der Reihe R 20 entstand ebenfalls wieder durch Auslassen des zweiten Wertes die Reihe R 10 und daraus ganz ebenso die Reihe R 5. Aus der geometrischen Stufung ergeben sich folgende Rechenregeln.

1. Produkte und Quotienten aus beliebig vielen Normungszahlen sind wieder Normungszahlen.
2. Ganzzahlige Potenzen von Normungszahlen sind wieder Normungszahlen.

Tabelle 18.

R 40	R 20	R 10	R 5
1,00	1,00	1,00	1,00
1,06			
1,12	1,12		
1,18			
1,25	1,25	1,25	
1,32			
1,40	1,40		
1,50			
1,60	1,60	1,60	1,60
1,70			
1,80	1,80		
1,90			
2,00	2,00	2,00	
2,12			
2,24	2,24		
2,36			
2,50	2,50	2,50	2,50
2,65			
2,80	2,80		
3,00			
3,15	3,15	3,15	
3,35			
3,55	3,55		
3,75			
4,00	4,00	4,00	4,00
4,25			
4,50	4,50		
4,75			
5,00	5,00	5,00	
5,30			
5,60	5,60		
6,00			
6,30	6,30	6,30	6,30
6,70			
7,10	7,10		
7,50			
8,00	8,00	8,00	
8,50			
9,00	9,00		
9,50			
10,00	10,00	10,00	10,00

3. Der doppelte oder halbe Wert jeder Normungszahl ist wieder eine Normungszahl.

Die Normzahlreihen wurden auf halblog. geteiltem Papier dargestellt und zwar sind auf der waagerechten Achse dieses Netzes die Gliednummern der Reihen aufgetragen, auf der senkrechten Achse die Werte der Reihen. Die Teilung wurde in gleichmäßiger Stufung eingetragen, ähnlich wie es auch schon in dem Bild 50 erfolgte.

Bild 63 a zeigt das Normzahlpapier, worin die Werte der Reihen R 5, R 10, R 20 und R 40 durch gerade Linien dargestellt werden konnten. Das Normzahlpapier ist dort zu verwenden, wo schon normfähige Gegenstandsreihen vorhanden sind, die jedoch noch nicht mit den Normungszahlen in Einklang stehen. Man trägt also derartige Reihen in das N — Z-Papier ein und sieht, welcher genormten Linie eine solche Darstellung am nächsten kommt. Man erkennt dann aus der Darstellung sehr leicht, welche Normungszahlenreihe für die betreffende Normung in Frage kommt.

Die Vereinigung zweier Netztafeln brachte, wie zwei Beispiele zeigten (Bild 58 und Bild 59) den Gewinn, daß in einem Nomogramm zwei Formeln mit insgesamt 5 Veränderlichen dargestellt werden konnten. Wir wollen jetzt eine Tafel besprechen, die gestattet, den Druckverlust in Gasfernleitungen zu ermitteln. Die dieser Tafel zugrunde liegende Formel lautet:

$$B_2 - B_1 = 1.5973 \cdot 10^6 \cdot \gamma^{0,852} \cdot \frac{Q^{1,853}}{d^{4,987}} \text{ (nach Brabbée).}$$

Hier bedeuten  $B_2 - B_1$  eine Funktion der Druckdifferenz am Anfang und am Ende der Gasfernleitung,

l die Rohrlänge der schmiedeeisernen Rohre in mm,

$\gamma$  das spez. Gewicht des Leuchtgases, (0,5 kg/m<sup>3</sup>),

Q die stündliche Fördermenge in m<sup>3</sup>,

d die lichte Weite des Rohres in mm.

Die Darstellung obiger Beziehung zerfällt in drei Teile und zwar wird

in Tafel I  $\frac{B_2 - B_1}{l}$  abhängig von Q bei  $d = \text{const}$

in Tafel II  $\frac{B_2 - B_1}{l}$  abhängig von  $B_2 - B_1$  bei  $l = \text{const}$  und

in Tafel III B abhängig vom Druck dargestellt.

Auf der senkrecht stehenden Achse der Tafel I werden (Bild 64) die Werte für  $\frac{B_2 - B_1}{l}$ , auf der waagerechten Achse

die Werte für Q aufgetragen. Für d wurden die Zahlenwerte

d =	10	15	20	25	30	35	40	50	65	80
	90	100	125	150	175	200	225	250	300	

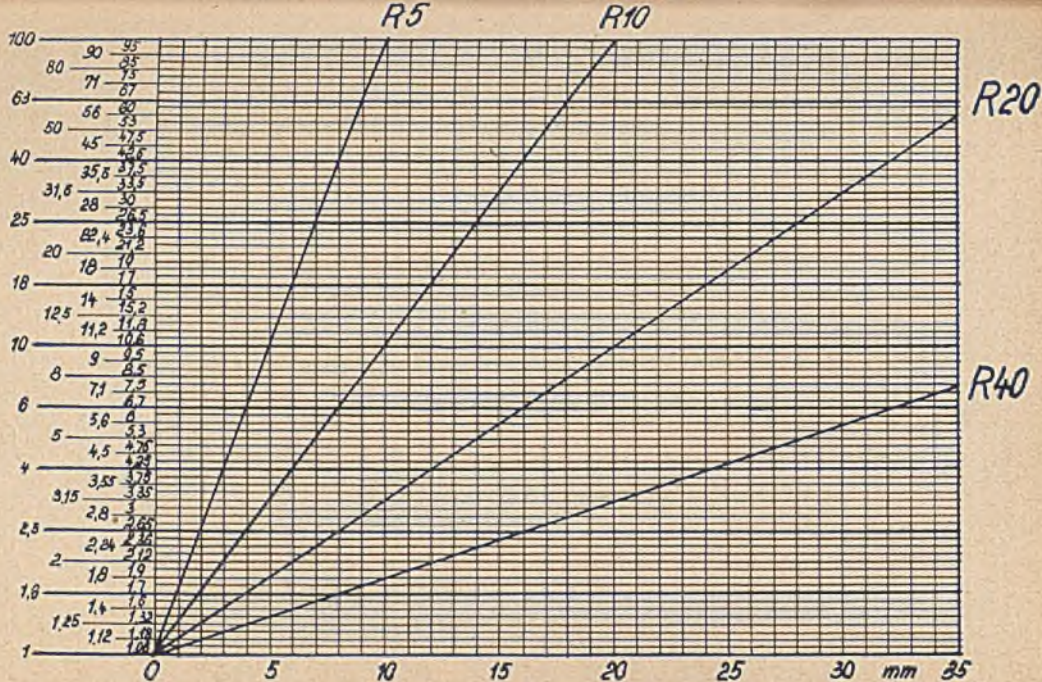


Bild 63b. Darstellung der Grundstufungen im Normalzahlpapier.

gewählt und nacheinander in die Bestimmungsgleichung eingesetzt. Für  $Q$  wurden leicht zu berechnende Werte wie  $Q = 100, 1000, 10000 \text{ m}^3/\text{std}$  gewählt. Nur die Linie mit der Kennziffer  $d = 10$  wurde durch drei Werte genau festgelegt, die übrigen wurden durch die bestimmten Punkte parallel zu dieser Linie gezogen. Der Bereich für  $Q$  umfaßt 1 bis  $10000 \text{ m}^3/\text{std}$ . Um für diesen Bereich die Zahl der  $d$ -Linien zu ermitteln, geht man so vor, daß man zunächst durch Reihenbildung die letzte Linie, die Grenzlinie, zu ermitteln sucht. Die Reihe enthält bei  $d = 10$  als Anfangslinie und dem Multiplikationsfaktor  $q = 2$  die Werte 10, 20, 40 und 80. Der Abstand der Linien mit der Kennziffer  $d = 10$  und  $d = 20$  wurde auf einer Linie senkrecht zur 1.  $d$ -Linie noch zweimal abgetragen, so daß man als Grenzlinie (Bild 64) die Linie für  $d = 80$  erhielt. Ganz kurz soll der Gang der Konstruktion der Tafel I noch einmal zusammengefaßt werden:

1. Bereiche der in der Tafel verwendeten Größen festlegen.
2. Berechnung der (3) zur Konstruktion der ersten  $d$ -Linie notwendigen Wertepaare.
3. Ermittlung der Grenz- oder Abschlußlinie durch Reihenbildung.
4. Konstruktion der Zwischenlinien durch Berechnung eines Wertepaares bzw. Festlegung eines Punktes dieser Linien. Ziehen der Parallelen durch diese Punkte zur Linie mit der Kennziffer  $d = 10$ .
5. Nach Fertigstellung der Tafel Einzeichnen eines Beispiels, das gleichzeitig eine Stichprobe bedeutet für richtige Konstruktion der Tafel.

Mittels Tafel II, deren  $\frac{B_2 - B_1}{l} = \text{Achse}$  mit der der Tafel I zusammenfällt, ist für bekanntes  $l$  der Wert  $B_2 - B_1$  zu berechnen. Die  $l$ -Werte sind auf der verlängerten  $Q$ -Achse der Tafel I aufzutragen. Die Schar der  $l$ -Linien wurde ganz ähnlich ermittelt wie die Schar der  $d$ -Linien der Tafel I. Tafel III dient zur Ermittlung der zu den  $B$ -Werten gehörenden Drücken. Aus der Differenz dieser Werte erhält man dann den Druckverlust. Ist z. B. die stündliche Gasmenge  $Q = 1000 \text{ m}^3$ , die Rohrweite  $d = 150 \text{ mm}$ , die Rohrlänge  $10000 \text{ mm}$ , so geht man zunächst vom Punkt  $1000 \text{ m}^3$  der Tafel I senkrecht nach oben bis zum Schnittpunkt der Linie mit der Kennziffer  $d = 150$ . Diesen Wert entspricht auf der  $\frac{B_2 - B_1}{l}$ -Achse der Wert 17000, der als Zwischenwert allerdings nur bedingtes Interesse hat. Man gehe daher sofort weiter zur Tafel II bis zur Linie mit der

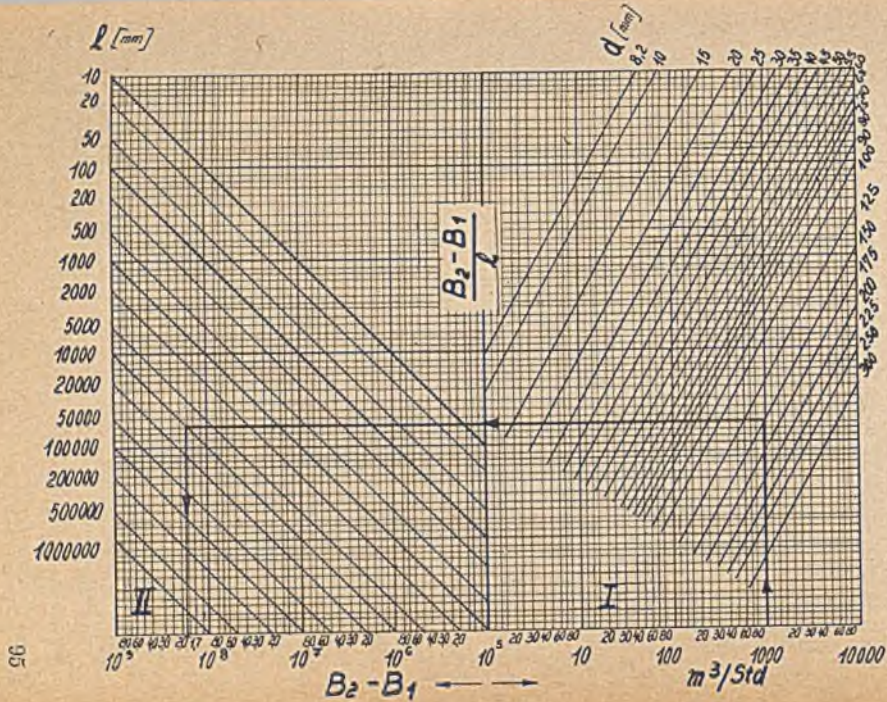


Bild 64.  
 Tafel zur Ermittlung  
 der Werte  $B_2 - B_1$   
 (Funktion der Druck-  
 differenz am Anfang  
 und am Ende der Gas-  
 fernleitung) bei be-  
 kannter Durchfluß-  
 menge ( $m^3/Std.$ ) bei be-  
 kanntem Rohrdurch-  
 messer  $d$  (mm) und be-  
 kannter Rohrlänge  $l$   
 (mm).

Kennziffer  $l = 10000$  und lese auf der  $B_2 - B_1$ -Achse den Wert  $1,7 \cdot 10^8$  ab. Zur Bestimmung des Druckverlustes geht man von dem Druck aus, den man am Ende der Rohrleitung haben will, sucht diesen auf der senkrechten Achse der Tafel III und findet den zugehörigen Wert für  $B_1$  auf der waagerechten Linie. Zu dieser Zahl addiert man die vorher ermittelte Zahl für  $B_2 - B_1$  und findet so über die Schlüssellinie auf der senkrechten Achse den erforderlichen Anfangsdruck. Nehmen wir beispielsweise an, daß der Enddruck 2 at betragen soll, so entspricht diesem Enddruck  $B_1 = 4 \cdot 10^8$ . Hierzu  $B_2 - B_1 = 1,7 \cdot 10^8$  addiert gibt  $5,7 \cdot 10^8$ , so daß sich der zugehörige Anfangsdruck

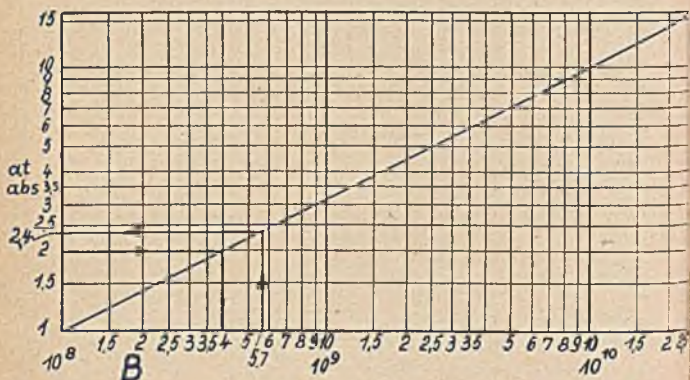


Bild 64a. Tafel zur Ermittlung des Druckverlustes aus den B-Werten in Gasfernleitungen.

zu 2,4 at oder als Druckverlust 0,4 at ergibt. Dieses Beispiel ist in Bild 64a eingetragen.

## V. Konstruktion von Leitertafeln

Während in einer Netztafel die algebraischen Gesetze oder Formeln sich als Gerade oder Kurven darstellen lassen, dient eine sog. Leitertafel nur der Ermittlung von Funktionswerten. Der Verlauf der Gesetzmäßigkeit kann aus einer Leitertafel so ohne weiteres nicht herausgelesen werden. Die Leitern, die als Elemente oder Bausteine einer Leitertafel zu bezeichnen sind.



bestehen aus gesetzmäßig geteilten und entsprechend bezifferten Linien. Den Leitern begegneten wir allerdings schon in den Netztafeln, insbesondere sind die bezifferten Grenzlinien eines Netzes z. B. als Leitern anzusehen. Die in Bild 65 dargestellte Leitertafel ist die einfachste Form dieser Art von Rechenhilfen. Sie besteht aus 3 Leitern, den beiden Außenleitern und der Mittelleiter. Alle drei Leitern sind gleichförmig geteilt und dementsprechend von Null anfangend beziffert. Die Abstände der

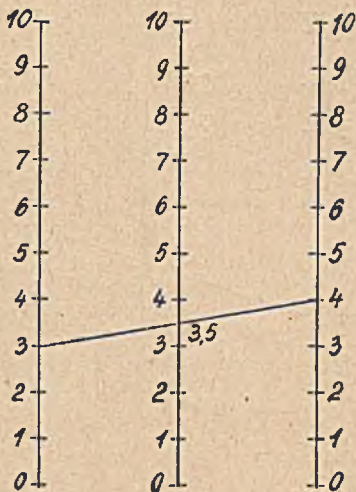


Bild 65. Arithmetisches Mittel dargestellt in einer Dreileitertafel mit Leitern gleicher Teilung.

3 Leitern voneinander sind gleich. Verbindet man die Nullpunkte der Leitern, so erkennt man, daß diese auf einer geraden Linie liegen, und daß die Leitern senkrecht auf dieser Verbindungslinie der Nullpunkte stehen. Wie benutzt man nun eine derartige Tafel bzw. welche Rechenoperation läßt sich mit der oben dargestellten Leitertafel ausführen? Die Antwort auf diese Frage erhält man durch Ausführung einer kleinen Konstruktion. Verbindet man nämlich je einen Punkt der Außenleitern miteinander, z. B. den Punkt 3 und den Punkt 4 (Bild 65), dann schneidet diese Linie die Mittelleiter in dem Punkte 3,5. Dieser

erhaltene Wert ist aber das <sup>1</sup>algebraische Mittel  $\frac{3 + 4}{2} = 3,5$ ,  
 oder allgemein geschrieben  $\frac{a + b}{2}$ . Die Leitertafel kann als  
 als Trapez angesehen werden, in dem die Mitten der beiden  
 Gegenseiten miteinander verbunden werden (Bild 12). Diese  
 Verbindungslinie ist das algebraische Mittel aus den beiden

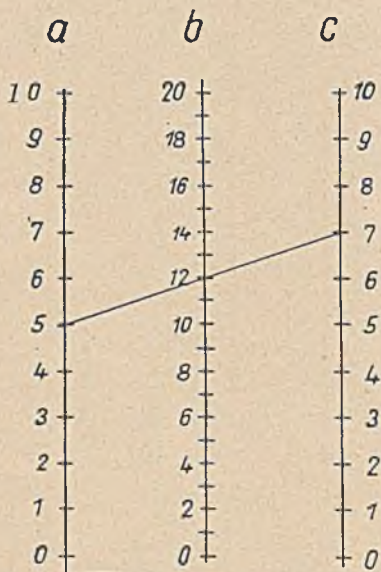


Bild 66. Dreileitertafel zur Addition zweier Zahlen.

Grundlinien des Trapezes. Trotzdem also die in Bild 65 dargestellte Leitertafel sehr einfach gebaut ist, sind doch bei ihrer Konstruktion 5 Punkte zu beachten:

1. Lage der Leiteranfangspunkte,
2. Abstand der einzelnen Leitern voneinander,
3. Größe der Maßeinheiten,
4. Richtung der Bemaßung der Leitern,
5. Festlegung des Anwendungsbereiches.

Hierbei kann der zahlenmäßige Abstand der Leitern voneinander beliebig gewählt werden, wofern nur die Abstände unter sich gleich sind. Gleichgültig ist auch die Abmessung der Maßeinheiten, wenn sie nur alle untereinander gleich sind. Gleichgültig ist ferner die Lage der Nullpunkte, d. h. es ist ganz gleich, ob der Nullpunkt der Bemaßung oben oder unten liegt. Hat man aber z. B. den Nullpunkt einer Leiter festgelegt, dann gilt diese Festlegung auch für die beiden andern Leitern.

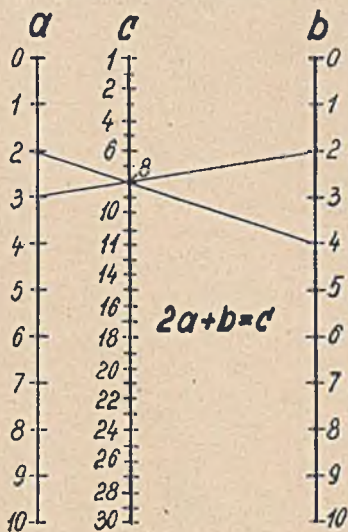


Bild 67. Darstellung der Beziehung  $2a + b = c$  in einer Dreileitertafel.

Soll jetzt nicht das algebraische Mittel  $\frac{a + b}{2} = c$ , sondern die Additionsformel  $a + b = c$  (also das doppelte algebraische Mittel) durch eine Leitertafel dargestellt werden, so ändern bzw. verkürzen sich die Maßeinheiten der Mittelleiter um die Hälfte (Bild 66). Verschieben wir jetzt die Mittelleiter des Bildes 65 um 3 Einheiten nach unten bzw. nach oben, so heißt jetzt die dargestellte Formel  $a + b + 3 = c$  bzw.  $a + b - 3 = c$ , wie sich der Leser leicht überzeugen kann. Durch Verschiebung der einzelnen Leitern können also konstante Zahlenwerte in der Formel berücksichtigt werden. Verschieben wir jetzt in dem Bild 65 die Mittelleiter so nach links, daß sich die Abstände

wie 1:2 verhalten, dann stellt bei entsprechender Verkürzung der Maßeinheiten der Mittelleiter diese Leitertafel die Formel  $2a + b = c$  dar (Bild 67). Durch Verschiebung der Mittelleiter also und Verkürzung ihrer Maßeinheiten kann auch ein Multiplikationsfaktor in der darzustellenden Formel berücksichtigt werden. Bild 66 zeigt aber außerdem noch, daß auch negative Werte durch diese Tafelform berücksichtigt werden

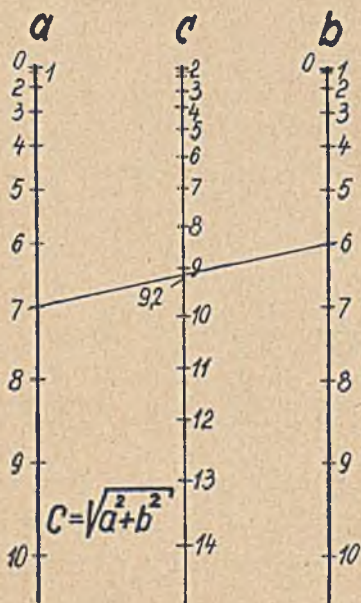


Bild 68. Dreileitertafel mit Leitern quadratischer Teilung.

können. Durch diese Veränderungen kann also die Normalform der Dreileitertafel der jeweilig darzustellenden Formel angepaßt werden. Durch die Leitertafel, deren Leitern gleichförmig geteilt sind, wird also der Formeltyp  $da \pm eb = c$  dargestellt, wo  $d$  und  $e$  Zahlen bedeuten. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Normalleitertafel des Bildes 65 mit einer ungleichförmigen Teilung zu versehen und zwar wählen wir die quadratische Teilung, die, wie wir schon in Kap. 4 gesehen haben, sich

leicht aus der gleichförmigen Teilung herleiten läßt. Durch eine solche Tafel läßt sich z. B. die Formel des Pythagoräischen Lehrsatzes  $a^2 + b^2 = c^2$  (die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypothenusenquadrat) darstellen. Bild 68 zeigt eine derartige Leitertafel. Bei weitgehender Unterteilung der einzelnen Maßeinheiten kann also auf der Mittelleiter  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  abgelesen werden. Die Teilungseinheiten der Mittelleiter sind auch hier gegenüber denen der Außenleitern um die Hälfte ver-

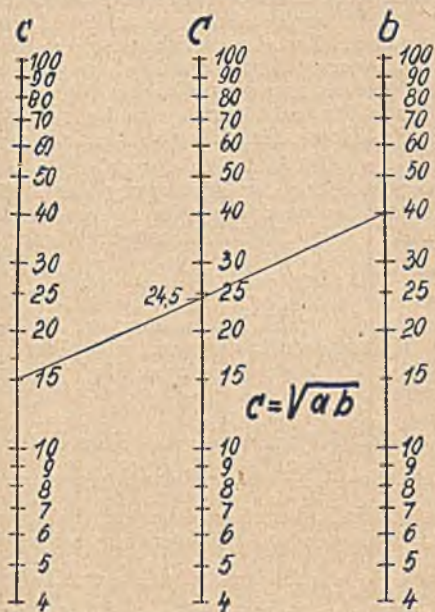


Bild 69. Geometrisches Mittel dargestellt in einer Dreileitertafel mit Leitern log. Teilung.

kürzt. Die Abstände der Leitern voneinander sind gleich. Die Anfangspunkte liegen auf einer Linie. In entsprechender Weise können auch hier durch Verschiebung der Leitern und Veränderung der Leiterteilungen konstante Zahlenfaktoren berücksichtigt werden. Teilen wir jetzt die 3 Leitern logarithmisch, so erhalten wir, wenn

1. die Einspunkte der Leitern auf einer Linie liegen,

2. die Abstände der Leitern voneinander gleich sind,
3. die Maßeinheiten aller drei Leitern gleich sind,
4. die Richtung der Maßzahleneintragung bei allen drei Leitern übereinstimmt,

die Darstellung des geometrischen Mittels  $\sqrt{ab} = c$  (Bild 69). Die Veränderung bzw. Verschiebung des Anfangspunktes (Einspunkt) der Mittelleiter um einen bestimmten Betrag bedeutet, daß der Ausdruck des geometrischen Mittels noch mit diesem Betrag zu multiplizieren bzw. durch diesen Betrag zu dividieren ist. Durch Veränderung der Leiterabstände und entsprechende Verkürzungen der Leiterteilungen kann ein konstanter Zahlenfaktor im Exponenten der Faktoren  $a$  und  $b$  berücksichtigt werden. Durch Verkürzung der Maßeinheiten der mittleren Leiter um die Hälfte erhält man eine Leitertafel, durch die Produkte dargestellt werden, d. h. also statt des geometrischen Mittels  $\sqrt{ab} = c$  wird jetzt die Formel  $ab = c$  dargestellt. Die Richtungsänderung der Auftragung der Maßzahlen bedeutet Änderung des Vorzeichens im Exponenten der Größen  $a$  oder  $b$ . Bild 70 zeigt die Darstellung der Beziehung

$$3 a b^{-1} = c \quad \left[ \frac{3 a}{b} = c \right].$$

Da Leitertafeln mit log. Teilung weitaus am häufigsten in der praktischen Rechentechnik vorkommen, wollen wir die verschiedenen Möglichkeiten an einigen praktischen Beispielen noch einmal aufzeigen.

Beispiele:

Als erstes Beispiel wollen wir die Formel der Schnittgeschwindigkeit  $v = \frac{d \pi n}{1000}$  als Dreileiternomogramm darstellen.

Da wir eine Multiplikationsformel vor uns haben, müssen die Leitern log. geteilt werden. Außerdem ist noch ein konstanter

Zahlenfaktor  $\frac{\pi}{1000}$  durch Verschiebung der Mittelleiter zu be-

rücksichtigen. Wenn wir diese Formel also durch ein Leiternomogramm darstellen wollen, gehen wir so vor, daß wir zunächst die drei Leitern in gleichem Abstand voneinander hinzeichnen und die Außenleitern log. teilen und zwar so, daß der Anfangspunkt und die Auftragsrichtung der Teilung übereinstimmt. Die Teilung der Mittelleiter ist um die Hälfte verkürzt, stimmt jedoch in der Auftragsrichtung der Teilung

mit den Außenleitern überein. Der Faktor  $\frac{\pi}{1000}$  wird durch Ver-

schiebung der Mittelleiter nach oben berücksichtigt. Bild 71 zeigt die ausgeführte Leitertafel für den Bereich  $v = 0,3 - 30$ ,

$d = 10 - 100$ ,  $n = 10 - 100$ . Für den Entwurf von Leiter-  
tafeln wählt man zweckmäßigerweise das halblog. geteilte Pa-  
pier. Durch das Fluchtlinienprinzip (Bild 72) kann die Teilung

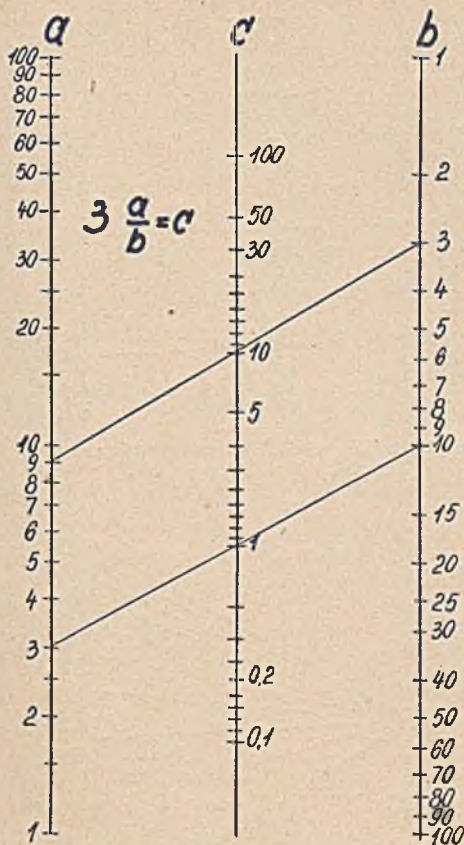


Bild 70. Dreileitertafel mit Leitern log. Teilung stellt die  
Beziehung  $\frac{3a}{b} = c$  dar.

um jeden Betrag verkürzt werden. Hierzu ist nur nötig, die  
Endpunkte einer Teilungseinheit (1—10) mit einem Punkt, der

auf der Mittelsenkrechten  $M$  liegt, zu verbinden. Die anderen Punkte der Teilung werden gleichfalls mit dem Fluchtpunkt verbunden. Je nachdem die zu teilende Leiter näher oder weiter

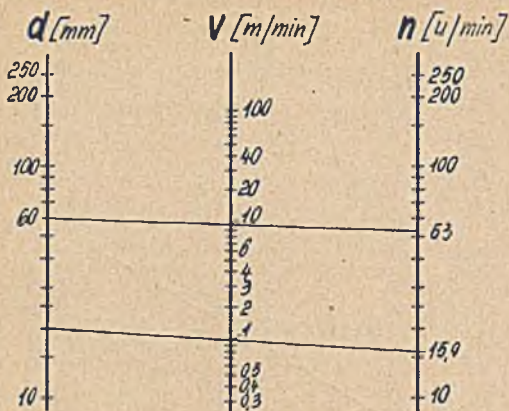


Bild 71. Schnittgeschwindigkeit, Werkstückdurchmesser und Drehzahl als Drelleitertafel dargestellt.

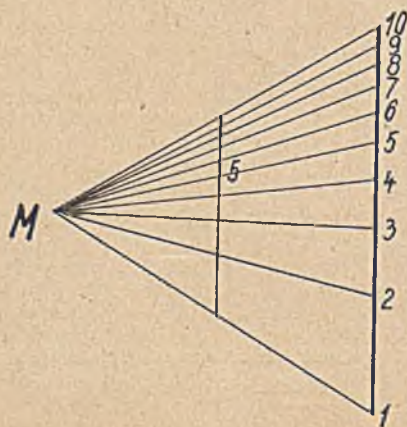


Bild 72. Fluchtlinienprinzip gestattet beliebige Verkürzung der log. Teilungseinheiten.



an den Fluchtpunkt herangerückt wird, je nachdem ändert sich die Länge der Skala bzw. der einzelnen Teilungseinheiten im selben Verhältnis. Der Anfänger kann beim Entwurf einer Tafel auch den Weg einschlagen, daß er die Hauptteilungspunkte z. B. der Mittelleiter durch Berechnung findet. In der  $d-v-n$ -Tafel findet man den Punkt  $v = 1$  durch Verbinden der Punkte  $d = 20$  und  $n = 15,9$ , wobei der Wert dieses Punktes aus der

Beziehung  $n = \frac{1000 \cdot 1}{20 \pi}$  ermittelt wird. Den Punkt  $v = 10$

findet man durch Verbinden der Punkte  $d = 60$  und

$n = \frac{1000 \cdot 10}{60 \pi} = 53,2$ . Durch Abgreifen mit dem Stechzirkel

stellt man fest, daß die Zehnereinheit der  $v$ -Leiter wirklich um die Hälfte kleiner ist, als die Zehnereinheit der  $d$ - und  $n$ -Leiter.

Die fertig ausgeführte Leitertafel prüft man noch einmal durch eine Stichprobe, ob alle Leitern richtig geteilt sind. Durch Lo-

garithmierung der Formel  $v^1 = \frac{d^1 \pi \cdot n^1}{1000}$  ist übrigens zu er-

kennen, daß wir es mit einer Normaltafel zu tun haben, in der die Abstände der Leitern gleich sind, die Auftragsrichtung der Maßzahlen und die Maßeinheiten bei allen Leitern übereinstimmen. Man erhält nämlich:

$$1 \cdot \log v = 1 \cdot \log d + 1 \cdot \log n + \log \frac{\pi}{1000}.$$

Alle Glieder dieser Beziehung haben positives Vorzeichen (gleiche Auftragsrichtung der Maßzahlen). Der Zahlenfaktor, mit dem  $\log v$ ,  $\log d$  und  $\log n$  multipliziert wird, ist  $= 1$  (gleicher Abstand der Leitern, gleiche Maßeinheiten der Außenleitern. Die logarithmierte Gleichung entspricht also der Gleichung  $a + b + z = c$  ( $z$ -Zahl). Durch Logarithmierung von Produktformeln gelangt man also zu Summenformeln, die durch Leitertafeln mit  $\log$  geteilten Leitern dargestellt werden.

Als zweites Beispiel wählen wir die Darstellung der Formel

$$v = 0,785 \cdot 10^{-6} \cdot s \cdot d^2$$

wo  $v$  = Hubvolumen in l,  $d$  = Bohrung in mm,  $s$  = Hub in mm bedeutet. Diese Formel unterscheidet sich von der vorigen durch den Exponenten des zweiten Gliedes, der hier  $= 2$  ist. Wir wollen jetzt einmal untersuchen, wie sich durch die Veränderung des Exponenten die Normaltafel verändert. Bei der Konstruktion dieser Leitertafel gehen wir so vor, daß wir zunächst die Außenleitern für  $s$  und  $d$  hinzeichnen und mit einer  $\log$  Teilung versehen, die in der Auftragsrichtung und der Größe der Maßeinheiten übereinstimmen (Bild 73). Die Lage

der Mittelleiter und deren Teilungseinheiten wollen wir durch Rechnung bzw. durch Konstruktion finden. Die Lage der Mittelleiter findet man durch Verbinden paarweise entsprechender Punkte der Außenleitern. Wählen wir für  $V$  den Wert 1 l und

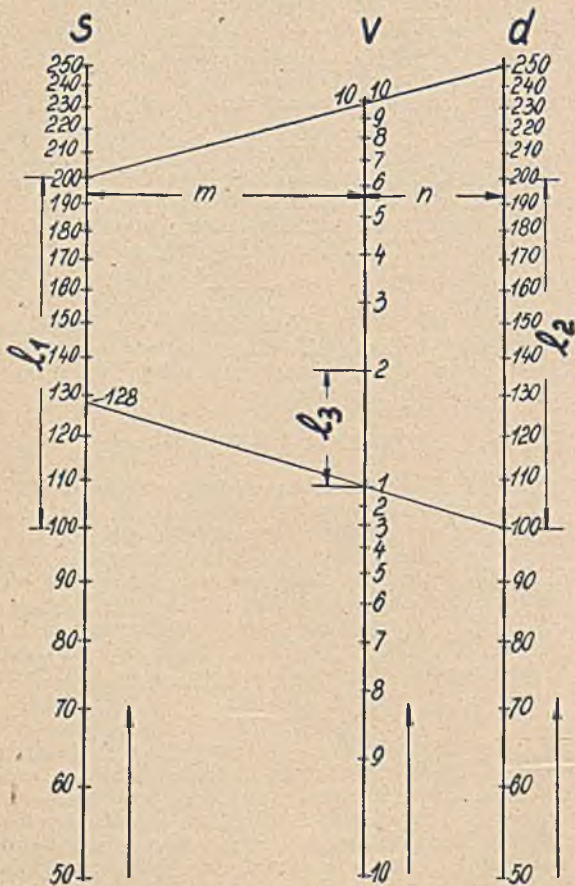


Bild 73. Hubvolumen abhängig von der Zylinderbohrung und vom Hub.

für  $d$  den Wert 100 bzw. 150 mm, so erhält man für  $s$  folgende Werte:

$$s = \frac{10^6}{0,785 \cdot 100^2} = 128 \text{ mm}; \quad s = \frac{10^6}{0,785 \cdot 150^2} = 56,6 \text{ mm}.$$

Die Verbindungslinien schneiden sich also in einem Punkte, der einmal die Lage der Mittelleiter festlegt, zum andern den Anfangspunkt  $v = 11$  angibt. Zum Vergleich der Zehnereinheiten wollen wir jetzt den Punkt  $v = 10$  auf der Mittelleiter suchen. Wählen wir für  $d$  den Wert 250 mm, so erhalten wir:

$$s = \frac{10^6 \cdot 10}{0,785 \cdot 250^2} = 205.$$

Vergleichen wir mit dem Stechzirkel die erhaltene Zehner-einheit der Mittelleiter mit den Zehnereinheiten der Außenleitern, so zeigt der Vergleich ein Verhältnis 1:3. Die Leiterabstände  $m$  und  $n$  verhalten sich dagegen wie 2:1. Logarithmiert man die Hubvolumengleichung, so ist:

$$\log v = \log 0,785 \cdot 10^{-6} + \log s + 2 \log d.$$

Diese Formel entspricht dem Formeltyp  $a + 2b + z = c$ . Bild 66 stellte einen ähnlichen Formeltyp dar, nämlich  $2a + b = c$ . Bei einem Vergleich des Bildes 66 mit der Darstellung der Hubvolumenformel Bild 73 erkennt man, daß die Verhältnisse der Leiterteilungen und der Abstände der Leitern voneinander in beiden Tafeln übereinstimmen, nur daß einmal die Mittelleiter nach links ( $2a + b = c$ ), das andre Mal nach rechts ( $a + 2b + z = c$ ) verschoben wurde. Es zeigt sich hier (Bild 73), daß eine gesetzmäßige Abhängigkeit zwischen der Leiterteilung und den Abständen der Leitern einerseits und den Exponenten der einzelnen Faktoren der darzustellenden Beziehung andererseits besteht. Bezeichnen wir den Exponenten des Faktors  $s$  ( $= 1$ ) mit  $A$ , den Exponenten des Faktors  $d$  ( $= 2$ ) mit  $B$ , die Leiterabstände mit  $m$  und  $n$ , die Maßeinheiten mit  $l_1, l_2$  und  $l_3$ , so bestehen folgende Beziehungen zwischen diesen Größen:

$$A = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{l_1}{l_3}; \quad B = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{l_2}{l_3}.$$

Machen wir die Leiterabstände gleich, also  $m = n = 1$ , dann erhalten wir folgende Werte:

$$A = 1 = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{l_1}{l_3}; \quad B = 2 = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{l_2}{l_3} \quad \text{also}$$

$$\frac{l_1}{l_3} = \frac{2}{1} \quad \text{und} \quad \frac{l_2}{l_3} = \frac{4}{1}.$$

Die Teilungseinheiten der Leitern wären in diesem Falle

sämtlich voneinander verschieden und verhielten sich wie 2:4:1. Einfacher wäre es für die Konstruktion, wenn die Leiterabstände sich wie 2:1 verhielten. In diesem Falle erhalten wir:

$$1 = \frac{1}{2+1} \cdot \frac{l_1}{l_3} \quad 2 = \frac{2}{2+1} \cdot \frac{l_2}{l_3} \quad \text{also ein Verhältnis}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{3}.$$

Aus diesen Verhältniszahlen erkennen wir, daß die Teilungseinheiten der Außenleitern einander gleich und zwar dreimal so groß sind wie die der Innenleiter. Diese Verhältnisse ergaben sich ebenfalls in der dargestellten Leitertafel, wo wir von vornherein die Teilungseinheiten der beiden Außenleitern gleich machten. Die darzustellende Formel kann nun aber in verschiedener Form geschrieben werden, je nachdem man sie nach der einen oder anderen Variablen entwickelt. Die Hubvolumenformel läßt sich gleicherweise auch nach  $s$  und nach  $d$  entwickeln. Man erhält also als

$$\text{Form 2} \quad s = \frac{v}{d^2 \cdot 0,785 \cdot 10^{-6}} = v d^{-2} \cdot 1,27 \cdot 10^6 \quad \text{und als}$$

$$\text{Form 3} \quad d = \sqrt{\frac{v}{s \cdot 0,785 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{v \cdot s^{-1} \cdot 1,27 \cdot 10^6}.$$

Form 2 würde sich darstellungstechnisch durch die Auftragsrichtung der Maßeinheiten der  $d$ -Leiter und durch die andersartige Berücksichtigung der Zahlenkonstanten von der Form 1 unterscheiden. Form 3 ist am leichtesten darzustellen, insofern wir es hier mit einer Formel zu tun haben, die dem geometrischen Mittel ganz ähnlich ist. Legt man Form 3 der Darstellung zu Grunde, dann sind die Maßeinheiten der 3 Leitern sowie die Leiterabstände gleich zu machen. Die Auftragsrichtung jedoch der Maßeinheiten der  $s$ -Leiter ist verschieden von der der  $v$ - und  $d$ -Leiter. Bild 74 und Bild 75 zeigt die Darstellung der Hubvolumenformel nach Form 2 und 3 für dieselben Bereiche der Form 1. Vergleichen wir hinsichtlich der Ablesegenauigkeit die Bereiche der drei Formen, so erkennt man, daß die Ablesegenauigkeit für die  $v$ -Leiter überall dieselbe geblieben ist. Für die  $s$ -Leiter hat sie sich in der 2. Form sehr verschlechtert. Würde es uns also um eine genaue Ermittlung des  $s$ -Wertes zu tun sein, so würde die Form 2 nicht in Frage kommen. Durch starkes Ausziehen der betreffenden Leiterteile wurden die entsprechenden Bereiche der 3 Leitern gekennzeichnet. Ehe man also eine gegebene Formel durch eine Leitertafel darstellt, überlege man sich die Formelform, die man zweckmäßigerweise der Konstruktion zugrunde legt. Die mög-

lichen Formeln sind hinsichtlich Ablesegenauigkeit, Bereich und Einfachheit der Herstellung sorgfältig gegeneinander abzu-

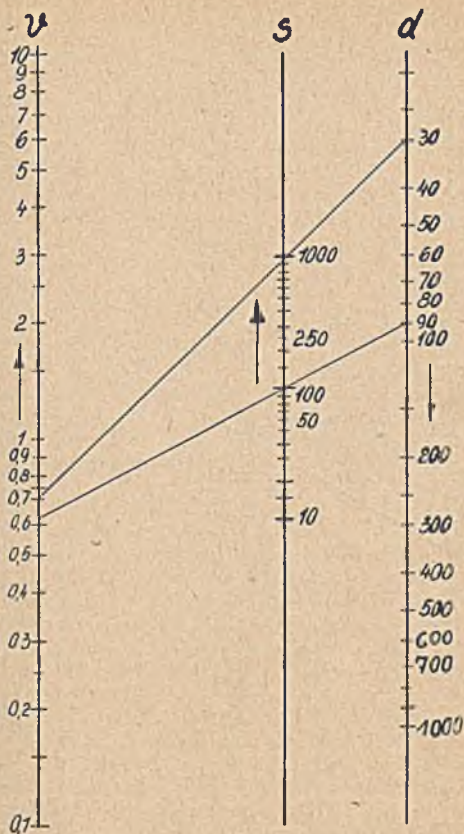


Bild 74. Darstellung der Hubvolumenformel unter Benutzung des Gesetzes in der Form  $s = v d^{-2} \cdot 1,27 \cdot 10^6$ .

wägen. Die Anzahl der möglichen Formen einer Formel richtet sich nach den in der Formel enthaltenen Variablen.

Durch Erweiterung der Dreileitertafel auf eine Fünfleiter-

tafel können Formeln mit 4 Variablen dargestellt werden. Man zerlegt zu diesem Zweck die betreffende Formel in zwei

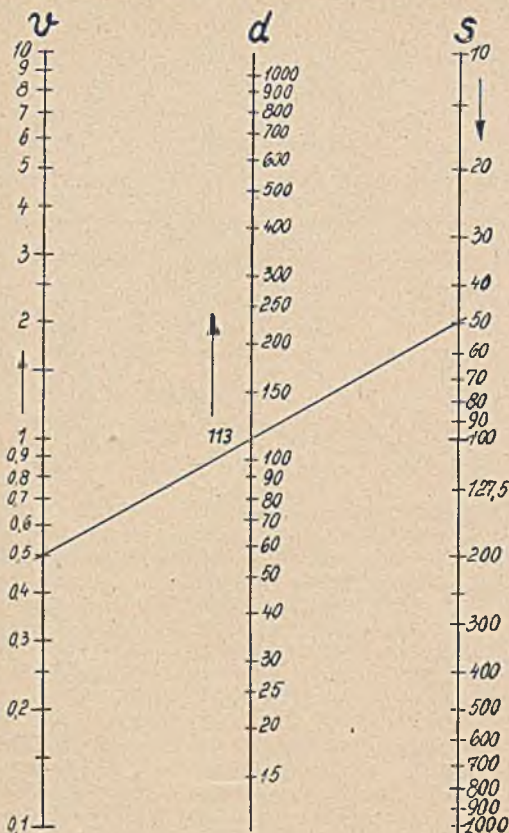


Bild 75. Darstellung der Hubvolumenformel unter Benutzung des Gesetzes in der Form  $d = \sqrt[3]{v s^{-1} \cdot 1,27 \cdot 10^6}$ .

Teile. Soll z. B. die Formel zur Bestimmung der Schnittzeit  $T = \frac{1}{n s}$  vertafelt werden, dann bestehen 5 verschiedene Mög-

lichkeiten, diese Formel zu zerlegen. Diese Fälle seien kurz zusammengestellt:

1.  $Ts = \frac{1}{n}$ ;  $Ts = z$ ;  $\frac{1}{n} = z$  4.  $Tn = \frac{1}{s}$ ;  $Tn = z$ ;  $\frac{1}{s} = z$
2.  $\frac{T}{l} = \frac{1}{ns}$ ;  $\frac{T}{l} = z$ ;  $\frac{1}{ns} = z$  5.  $ns = \frac{1}{T}$ ;  $ns = z$ ;  $\frac{1}{T} = z$ .
3.  $\frac{n}{l} = \frac{1}{Ts}$ ;  $\frac{n}{l} = z$ ;  $\frac{1}{Ts} = z$ .

Betrachten wir die erste Form der Zerlegung:  $Ts = z$  und  $\frac{1}{n} = z$ . Jede dieser Teilformeln ist durch eine normale Dreileitertafel darzustellen. Der erste Teil ist eine Dreileitertafel mit den Außenleitern für T und s und der Mittelleiter für z; der zweite Teil ist eine Dreileitertafel mit den Außenleitern für l und n und der Mittelleiter für z. Die Mittelleiter ist also in beiden Teiltafeln die gleiche. Die Außenleitern der beiden Teiltafeln werden also so um die gemeinsame Mittelleiter gruppiert, daß die Abstände entsprechender Leiterpaare von der Mittelleiter gleich sind. Bild 76 zeigt die Darstellung der Formel zur Ermittlung der Schnittzeit in ihrer ersten Form. Die Teilungseinheiten der z-Leiter sind wieder um die Hälfte kleiner als diejenigen der  $n = T = s = l$ -Leitern. Ist nun z. B.  $n = 50, l = 30$  und  $s = 0,2$ , also bekannte Werte, und es soll T ermittelt werden, dann verbindet man die betreffenden Punkte auf der n- und l-Leiter. Die Verbindungslinie schneidet die z-Leiter in dem Punkte 0,6. Dieser Wert ist eine Teillösung und als solcher auch für das zweite Leiterpaar verbindlich. Man braucht daher nur noch den Punkt  $s = 0,2$  mit dem Punkte  $z = 0,6$  zu verbinden. Diese Verbindungslinie schneidet die T-Leiter in einem Punkte, der dem gesuchten Werte  $T = 3$  entspricht. Da die Zwischenlösungen (z-Werte) nicht interessieren, braucht die z-Leiter auch nicht geteilt und beziffert zu werden. Diese den beiden Teiltafeln gemeinsame Leiter wird auch als Zapfenlinie bezeichnet. Für die Darstellung ist es übrigens gleich, welches von den beiden Außenleiterpaaren außen, welches innen steht. In der zur Darstellung gebrachten Tafel (Bild 76) stehen außen die T- und s-Leitern, innen die n- und l-Leitern. Bei Berücksichtigung aller Darstellungsmöglichkeiten kann also vorliegende Formel zur Ermittlung der Schnittzeit in 10 verschiedenen Formen dargestellt werden.

Eine andre Formel, die sich in mannigfacher Gestalt verfafeln läßt, ist die zur Berechnung zylindrischer Schraubenfedern. Der Drahtdurchmesser d der Schraubenfeder wird durch die Formel

$$d = \sqrt[3]{\frac{P \cdot r}{0,196 \tau}}$$

errechnet. Hier bedeutet  $P$  die Tragkraft der Feder in kg,  $d$  den Drahtdurchmesser in mm,  $r$  den Windungsradius in mm und  $\tau$  die zulässige Beanspruchung in  $\text{kg/mm}^2$ . Bevor man diese Formel zerlegt, bringt man sie auf die Form

$$P = \frac{0,1963 \cdot d^3 \tau}{r}$$

Wir zerlegen folgendermaßen:

$$z = \frac{P}{\tau} \quad \text{und} \quad z = 0,1963 d^3 r^{-1}$$

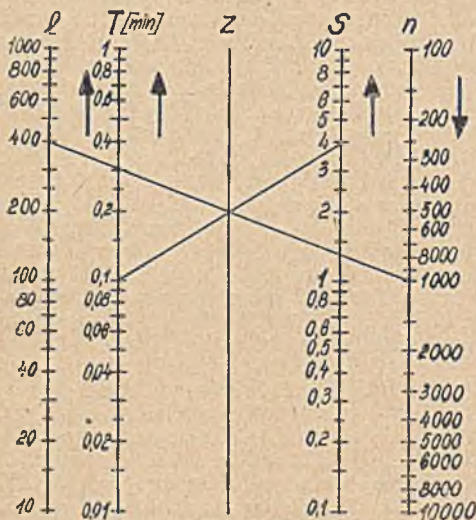


Bild 76. Ermittlung der Schnittzeit durch Doppelleitertafel;—

Benutzung des Gesetzes in der Form  $T_s = \frac{1}{n}$ .

Da die  $z$ -Werte wieder Zwischenwerte darstellen, braucht die  $z$ -Leiter nicht geteilt werden. Die  $\tau$ -Leiter teilen wir im Bereich von 10 bis 100  $\text{kg/mm}^2$ , die  $P$ -Leiter im Bereich von 1—1000. Um das Nomogramm harmonisch zu gestalten, wird man die  $P$ -Leiter so zwischen die  $\tau$ - und die  $z$ -Leiter legen, daß trotz Zu-



sammendrängung der Teilung der P-Leiter müheloses Ablesen gewährleistet ist. Verhalten sich die Leiterabstände  $m$  und  $n$  wie 1:2, dann kann man aus der Beziehung  $B = 1 = \frac{1}{1+2} \cdot \frac{l_2}{l_3}$

bzw.  $\frac{l_2}{l_3} = \frac{3}{1}$  das Verhältnis der Leiterteilungen ermitteln. Da die z-Leiter nicht geteilt zu werden braucht, interessiert auch nicht der Weg zu ihrer Ermittlung. Der zweite Teil der Konstruktion hat zum Ziel die Festlegung und Teilung der Außenleitern, da die Mittelleiter schon vorhanden ist. Die Leiterabstände  $m'$  und  $n'$  wird man wieder so wählen, daß die Leiterteilungen gleich werden. Dies ist der Fall, wenn  $m':n' = 1:3$  ist. Durch Einsetzen der entsprechenden Größen in die Beziehung auf S. 107 erhält man:

$$A = 3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{l_1}{l_3}$$

$$|B| = 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{l_2}{l_3}$$

$$\frac{l_1}{l_3} = \frac{4}{1} \quad \text{und} \quad \frac{l_2}{l_3} = \frac{4}{1}$$

Die Teilungen der Außenleitern sind also bei dem angenommenen Verhältnis der Leiterabstände gleich. Wenn wir noch den konstanten Faktor 0,1963 durch Verschieben der betreffenden Leiter berücksichtigen, so können wir mit Hilfe dieser (in Bild 77 dargestellten) Doppelleitertafel den Drahtdurchmesser  $d$  einer Schraubenfeder ermitteln. Außer dem Drahtdurchmesser  $d$  der Schraubenfeder muß man noch zur richtigen Dimensionierung ihre Windungszahl  $n$  kennen, die sich aus der dargestellten Tafel leider nicht ablesen läßt. Man müßte also

noch die Formel  $n = \frac{f \cdot d \cdot G}{4 \pi r^2 \cdot \tau}$  in einer Leitertafel darstellen. In

dieser Formel bedeutet  $f$  die Durchbiegung der Feder,  $d$  (wie oben) den Drahtdurchmesser,  $G$  den Gleitmodul in  $\text{kg/cm}^2$ ,  $r$  (wie oben) den Windungsradius und  $\tau$  die zul. Beanspruchung in  $\text{kg/cm}^2$ . In der Formel zur Berechnung des Drahtdurchmessers  $d$  als auch in der zur Berechnung der Windungszahl  $n$  kommen die Variablen  $r$  und  $d$  vor. Es liegt daher nahe, beide Formeln in einer Tafel darzustellen, jedoch müßten dann nicht weniger als 7 Variable berücksichtigt werden. In der Konstruktionstafel der A. T. Z. (Heft Nr. 18 1935) verringerte man die Zahl der Variablen von 7 auf 5, indem man die Tafel für ein konstantes  $\tau = 3500 \text{ kg/cm}^2$  und ein konstantes  $G = 800000 \text{ kg/cm}^2$  berechnete. Jetzt konnten beide Formeln in einer Sechs-Leiter-

tafel dargestellt werden, wo eine Leiter, die Zapfenlinie nicht beziffert zu werden brauchte. Bild 78 gibt diese Tafel wieder. Die Konstruktion dieser Tafel zerfällt in drei Teile und zwar wird zunächst die Formel zur Ermittlung der Windungszahl

$$n = \frac{f \cdot d \cdot 800000}{r^2 \cdot 4 \pi \cdot 3500}$$

in zwei Teile geteilt und durch Vertafelung der Teilformeln dargestellt. Die Zerlegung ergibt

$$f^{-1} \cdot n = x \quad \text{und} \quad d r^{-2} \cdot 18,2 = x.$$

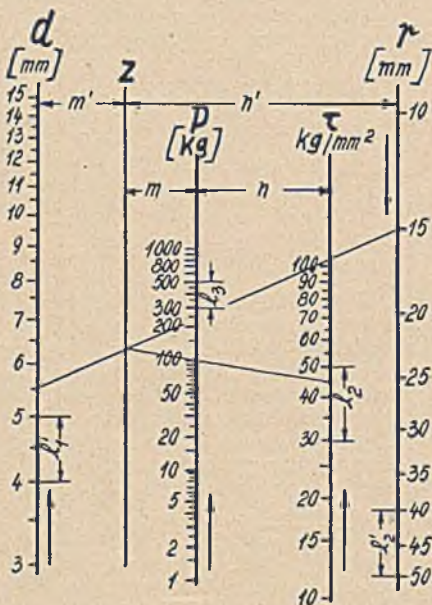


Bild 77. Leitertafel zur Ermittlung der Drahtstärke  $d$  einer Schraubenfeder, wenn bekannt ist die Tragkraft  $P$  der Feder der Windungsradius  $r$  und die zulässige Beanspruchung  $\tau$ .

Die erste Beziehung ist in bekannter Weise durch eine Normaleitertafel darzustellen. Die Teilungseinheiten und die Abstände von der Mittelleiter sind gleich, die Auftragsrichtung der Teilungseinheiten ist nach Maßgabe des Vorzeichens der Ex-

ponenten entgegengesetzt gerichtet. Die zweite Teilformel  $x = dr^2 \cdot 18,2$  entspricht einem schon behandelten Formeltyp (siehe Bild 74 S. 109). Hier verhalten sich die Teilungseinheiten der Außenleitern (r- und d-Leiter) zu den Teilungseinheiten der Mittelleiter (x-Leiter) wie 3:1, die Abstände der Außenleitern von der Mittelleiter wie 1:2. Da die x-Leiter nicht geteilt wurde (Bild 78) ist das Verhältnis der Teilungseinheiten aus dem

Bilde nicht zu ersehen. Die 3. Formel  $d = \sqrt[3]{\frac{Pr}{0,1963 \cdot 3500}}$

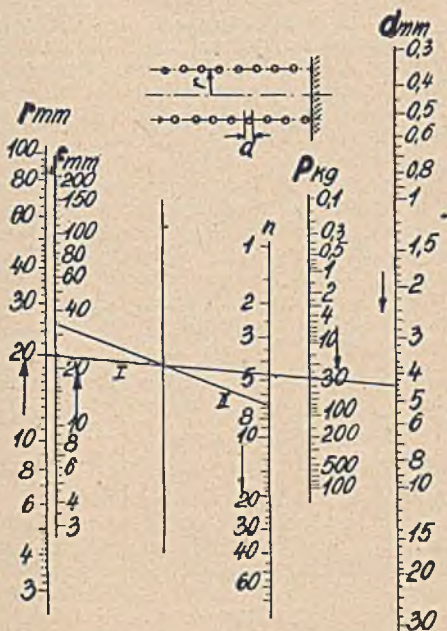


Bild 78. Leitertafel zur Ermittlung der Windungszahl  $n$  der Schraubenfeder.

wird in die Form  $P = 687 \cdot d^3 \cdot r^{-1}$  verwandelt und auch nach dieser Form dargestellt. Da die d- und die r-Leitern schon in richtiger Weise beziffert wurden, braucht nur noch die P-Leiter so untergebracht und beziffert zu werden, daß das Tafelgefüge

eine fließende Ableseung zuläßt. Bei einem Verhältnis der Leiter-  
teilungen der d- und r- und P-Leitern von

$$4:1 [l_1:l_3 = l_2:l_3 = 4:1]$$

ermittelt man die Abstände aus den Beziehungen

$$3 = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{4}{1} \quad \text{und} \quad 1 = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{4}{1}$$

Es verhalten sich demnach  $n:m = 3:1$ , was man mit dem Stech-  
zirkel nachprüfen kann. Wenn also  $P = 30$  kg,  $r = 20$  mm und  
 $f = 34$  mm gegeben ist und die Werte für  $d$  und  $n$  gesucht  
werden, so verbindet man zunächst  $P = 30$  mit  $r = 20$ , wobei  
die Verlängerung der Verbindungslinie die d-Leiter im Punkte  
 $d = 4,4$  mm und die Zapfenlinie schneidet. Zur Ermittlung  
von  $n$  verbindet man  $f = 34$  mit dem Schnittpunkt der Zapfen-  
linie. Die Verbindungslinie schneidet die n-Leiter im Punkte  
 $n = 6,8$ . Die verlangte Feder hat also eine Drahtstärke von  
4,4 mm und besitzt eine Windungszahl von etwa 7 Windungen.

Die eben behandelten Leitertafeln mit log. Leiterteilung sind  
unter Benutzung von Formeln aufgebaut worden, deren einzelne  
Glieder durch das Malzeichen miteinander verbunden sind, For-  
meln also, die reine Produktformeln darstellen. Summenformeln  
dagegen sind — um es noch einmal zu wiederholen — durch  
Leitertafeln mit gleichförmiger oder verwandter Teilung dar-  
zustellen. Nun gibt es aber auch sog. gemischte Formeltypen  
wie z. B. die Volumenformel eines Hohlzylinders:

$$V = \pi \cdot h (R^2 - r^2).$$

Zerlegen wir diese Formel zwecks Darstellung sinngemäß, er-  
halten wir

$$V = \pi \cdot h \cdot x \quad x = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

[ $2R =$  Außendurchmesser,  $2r =$  Innendurchmesser,  $h =$  Höhe]

Die erste Teilformel ist eine Multiplikationsformel, die zweite  
dagegen eine Additionsformel. Die erste Formel wird durch eine  
Dreileitertafel mit log. Teilung, die zweite durch eine solche  
mit quadratischer Teilung dargestellt. Eine unmittelbare Ver-  
bindung beider Tafeltypen in einer Doppeltafel mit der x-Leiter  
als gemeinsamer Mittelleiter ist nicht möglich. Eine Verbindung  
ist nur möglich durch Zwischenschaltung eines Gliedes, das die  
quadratische in die log. Teilung und umgekehrt verwandelt.  
Bild 79 zeigt eine derartige Lösung. Die x-Leiter ist also jetzt  
in beiden Teiltafeln nicht mehr Mittelleiter, sondern Außen-  
leiter. Die Form der 1. Teilformel, die zur Konstruktion der  
ersten Teiltafel verwendet wurde, lautet  $R^2 - x^2 = r^2$ , die der 2.,  
mittels derer die zweite Teiltafel aufgebaut wurde:

$$x V^{-1} = \pi^{-1} \cdot h^{-1}.$$

Diese Formen wurden deshalb gewählt, damit die Tafelform eine flüssige und sinngemäße Ermittlung der Lösung möglich

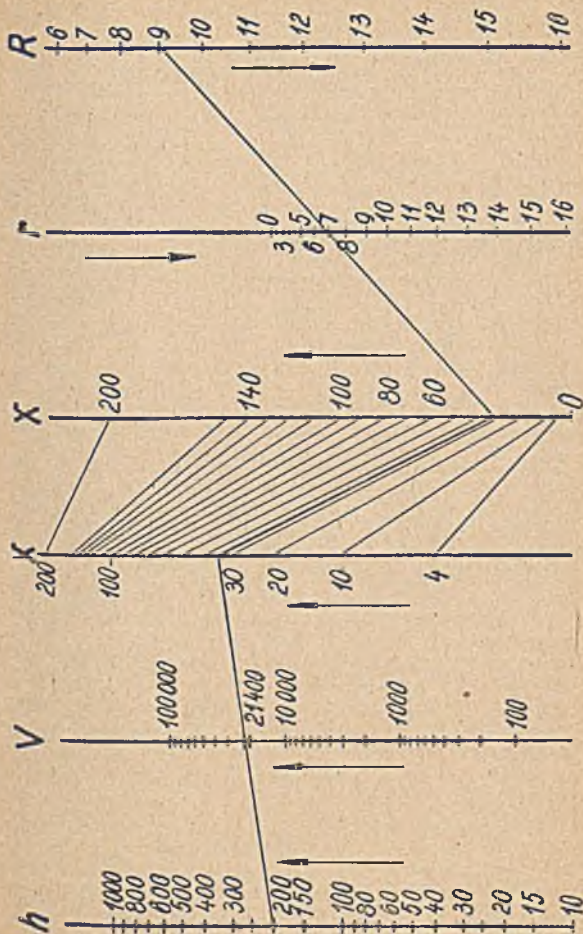


Bild 79. Ermittlung des Volumens eines Hohlzylinders; Aufbau der Tafel unter Benutzung der Beziehungen  $V = \pi h x$ ;  $x = \sqrt{R^2 - r^2}$ .

macht. Bild 80 zeigt noch eine andere mögliche Lösung, die erwähnte Volumenformel darzustellen. Die erste Tafel ist so

aufgebaut, daß man mit dem Aufsuchen der Punkte für R und r beginnt, deren Werte gegeben sind und zwar von links nach

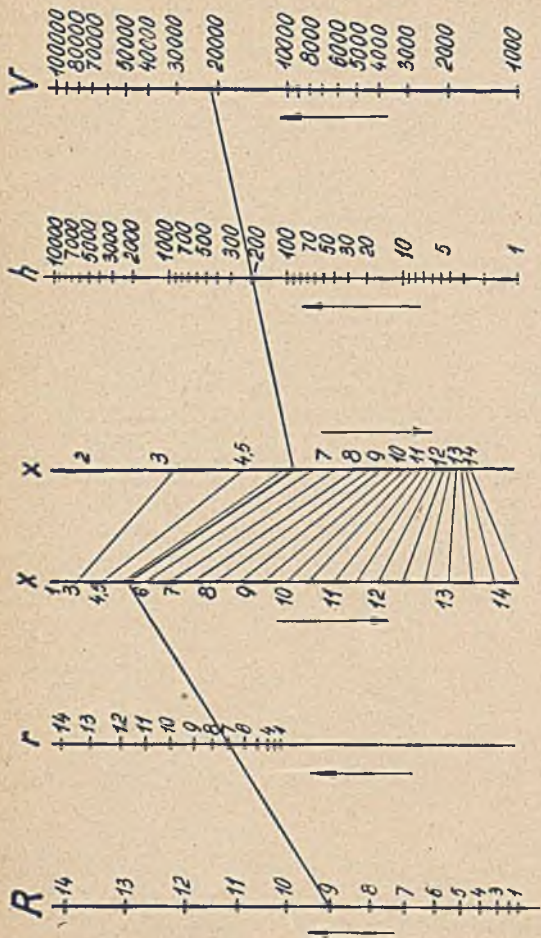


Bild 80. Ermittlung des Volumens eines Hohlzylinders; Aufbau der Tafel unter Benutzung der Beziehungen  $\frac{V}{\pi x} = h$ ;  $x = \sqrt{R^2 - r^2}$ .

rechts fortschreitend so etwa wie man schreibt. Dann geht man über h, dessen Wert ebenfalls bekannt ist, weiter und ge-

langt endlich auf der äußersten rechten Leiter zur Lösung, zum Wert des Volumens. Bei der zweiten Tafelform muß man zunächst entgegen dem Gefühl von rechts anfangend die Punkte für  $r$  und  $R$  aufsuchen, um dann auf der vorletzten Leiter den Lösungswert zu finden. Man erkennt an dieser Gegenüberstellung, daß der feinere Aufbau einer Leitertafel so erfolgen muß, daß eine Anschlußmöglichkeit an andre Tafeln berücksichtigt wird und daß weiter die sinngemäße und fließende Ermittlung des Lösungswertes gewährleistet ist. Im übrigen muß eine Lösung, die zwei Leitertafeln mit wesensfremder Teilung durch ein Bindeglied vereinen will, tunlichst vermieden werden. In diesen Fällen sind (wie im nächsten Kapitel geschildert wird) andre Darstellungen zu wählen. Wenn zwei Formeln eine oder mehrere Variablen gemeinsam haben, dann ist die Möglichkeit gegeben, eine Tafel aufzubauen, die ein festgefügt Ganzes bildet. Die Formeln zur Dimensionierung der Schraubenfedern bzw. ihre Darstellung (Bild 78) zeigten diese Lösungsmethode.

Als nächste Aufgabe wollen wir die zur Bestimmung der Schnittzeit dienenden Formeln  $T = \frac{1}{n s}$  und  $v = \frac{d \pi n}{1000}$ , die als

Einzeltafeln schon beschrieben und abgebildet wurden (Bild 71 und 76) in einer Tafel vereinigen. Das Bindeglied für beide Formeln bzw. Leitertafeln ist die Variable  $n$ . Die  $n$ -Leiter muß also so in das Leitergefüge eingeordnet werden, daß hierdurch eine Vereinigung beider Tafeln erfolgen kann. Die in Bild 71 dargestellte  $d - v - n$ -Tafel kann so wie sie ist, zum Zusammenbau verwendet werden, da die  $n$ -Leiter schon nach der Formel form Außenleiter ist. Die Tafel zur Ermittlung der Schnittzeit (Bild 76) ist allerdings so umzubauen, daß die  $n$ -Leiter linke Außenleiter wird. Bild 81 zeigt die beiden angeführten Teiltafeln in einer Tafel vereinigt. Allerdings kann die Ermittlung der Lösung jetzt nicht mehr so fließend erfolgen, daß wir von links anfangend nach rechts fortschreitend in einem Zuge zum Lösungswert gelangen, wie dies die Tafel Bild 76 ermöglichte. In vielen derartig gelagerten Fällen erweisen sich Kompromisse als notwendig. In der vereinigten  $d - v - T - s$ -Leitertafel geht man von den beiden Außenleitern, die die leicht zugänglichen Maße der zu bearbeitenden Welle enthalten, nach den innen gelegenen Leitern, um auf der in der Tafelmitte etwa gelegenen  $T$ -Leiter die Lösung zu finden. In einer solchen Tafel ist es zweckmäßig (siehe auch Bild 112), die Aufeinanderfolge der einzelnen Schritte in einem eingezeichneten Beispiel durch fortlaufende Zahlen zu belegen. Zu erwähnen ist noch, daß eine derartige Darstellung schon einen Übergang darstellt zu einem mechanischen Rechengerät. Ein solches Gerät wird in Kap. 14 unseres Büchleins noch genauer beschrieben werden.

### Vergleich zwischen Leiter- und Netztafel.

Die Darstellung eines Gesetzes in einem Netze verfolgt zunächst einen ganz anderen Zweck als seine Darstellung durch eine Leitertafel. In einer Netztafel wird das algebraische Gesetz sozusagen abgebildet; jedem algebraischen Gesetze entspricht also ein ganz bestimmtes, seine charakteristischen Merkmale aufzeigendes Bild, das außerdem gestattet, die zahlenmäßige Abhängigkeit der in diesem Gesetze enthaltenen Größen zu verfolgen. Solche charakteristischen Merkmale sind Kurvenform oder Gerade, flaches oder steiles Ansteigen der Geraden oder Kurve, Lage des Nullpunktes usw. Eine Leitertafel vermittelt diese Merkmale nicht in so eindrucksvoller Weise, sie stellt vielmehr ein reines Recheninstrument dar, das in handwerklicher

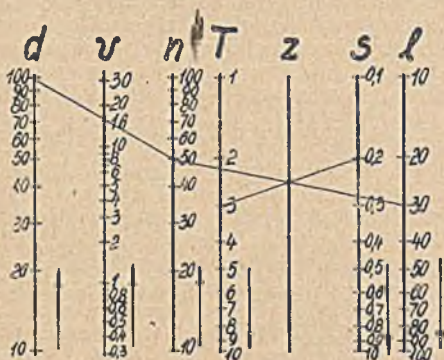


Bild 81. Vereinigung der Tafeln 71 und 76 in einer Verbundleitertafel.

Weise bedient wird. Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen beiden Darstellungsarten ist der, daß die Netztafel ein Gebilde darstellt, das gleichsam Tabellenwerte in Reihen und Kolonnen geordnet enthält, die sich ohne weiteres Hilfsmittel aus einer Zahlentafel ablesen lassen. Bei der Leitertafel ist eine derartige Ordnung von Tabellenwerten so ohne weiteres nicht erkennbar. Außerdem braucht man zum Ablesen irgend welcher voneinander abhängiger Werte der Leitertafel eine glatte Unterlage und ein Ablesehilfsmittel wie Lineal, Faden usw. Weiter unterscheiden sich beide Darstellungsmöglichkeiten durch verschiedene Ablesegenauigkeit. In einer Netztafel können ganz allgemein die Werte von nur zwei voneinander abhängigen Größen fortlaufend mit großer Genauigkeit ermittelt werden.



Soll in derselben Darstellung noch eine dritte Größe berücksichtigt werden, so ist eine ganze Schar von Linien und Kurven zu zeichnen, deren Kennziffern nach bestimmter Ordnung fortschreiten. Eine feinere Unterscheidung in der Reihe dieser Kennziffern ist nicht möglich, wenn die Darstellung nicht undeutlich werden soll. Aus diesem Grunde können nicht alle Werte mit gleicher Genauigkeit abgelesen werden. Rein äußerlich betrachtet ist die Leitertafel viel einfacher in ihrem Aufbau als die Netztafel. Außerdem braucht die Leitertafel weniger Raum als eine Netztafel gleicher Genauigkeit. Bevor man also an die Darstellung eines Gesetzes geht, ist zu überlegen, welche Darstellungsart für vorliegenden Fall in Frage kommt. Regeln für die verschiedenen Fälle aufstellen zu wollen, wäre nicht zweckmäßig, da die Darstellung ein und desselben Gesetzes möglicherweise ganz verschiedene Aufgaben zu erfüllen hat. Für die Werkstatt z. B. ist in vielen Fällen eine Netztafel mehr am Platze als wie eine Leitertafel. Man muß daher alle Fragen, die Form der Darstellung betreffend, in jedem Falle grundsätzlich immer von Neuem klären.

## VI. Verbindung von Leiter- und Netztafeln

Die Volumenformel des Hohlzylinders durch Doppelleitertafeln (Bild 79 und 80) darzustellen, ist nur durch Zwischenschaltung eines Gliedes möglich, wodurch die log. Teilung in eine quadratische Teilung übergeführt wird. Da ein derartiges Zwischenglied möglichst vermieden werden soll, wollen wir nach einer anderen Darstellungsmöglichkeit suchen, wo nur gleichartige Teilungen verwendet werden. Zunächst zerlegen wir wieder die Volumenformel in die Teilformeln

$$V = \pi h x^2 \text{ und } x^2 = R^2 - r^2.$$

Die erste Formel wird in einem rechtwinkligen Netz dargestellt, dessen senkrechte Achse quadratisch, dessen waagerechte Achse gleichförmig geteilt ist und zwar trägt die senkrechte Achse die  $x$ -Werte, die waagerechte die  $V$ -Werte. Bei Konstantsetzung von  $h$  erhalten wir eine Geradenschar, deren einzelne Geraden als Kennziffer die Werte für  $h$  im Bereich  $h = 1 - 20$  tragen. Aus dem Bild 82 ist zu ersehen, daß die Abstände der einzelnen Geraden voneinander um so größer werden, je kleiner die Kennziffer wird. Da die  $x$ -Achse des Netzes gleichzeitig

rechte Außenleiter der Leitertafel ist, müßte die zweite Teilformel auf die Form gebracht werden:

$$x^2 + r^2 = R^2.$$

Dieser Tafeltyp wurde schon auf S. 117 behandelt. Wir erhalten so eine Verbindung von Leitertafel und Netztafel. Die Teilung der x-Achse kann nach Fertigstellung der Tafel weggelassen werden, da die x-Werte als Teillösungen nicht inter-

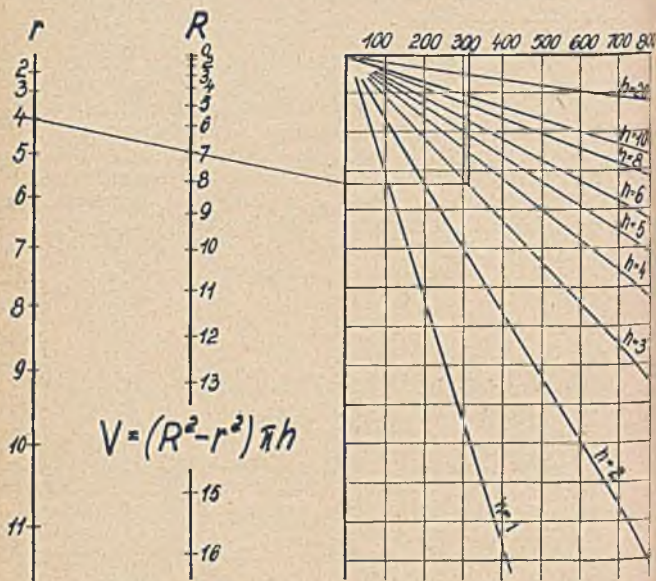


Bild 82. Ermittlung des Volumens eines Hohlzylinders. Darstellung durch Liter-Netztafel.

essieren. Der Vorteil dieser Darstellung vor der im vorigen Kapitel liegt im Wegfall des Zwischengliedes und in der gleichmäßigen Ablesegenauigkeit. Alle  $h$ -Werte allerdings können nicht berücksichtigt werden, da diese ja in einer festliegenden Zahlenordnung gestuft sind.

Eine andre Möglichkeit der Darstellung ergibt sich aus einer anderen Formulierung der Volumenformel. Multipliziert man die Formel  $V = \pi \cdot h (R^2 - r^2)$  aus, so erhält man:

$$V = \pi h R^2 - \pi h r^2.$$

Die beiden Glieder der rechten Seite der Gleichung werden durch  $V_1$  und  $V_2$  ersetzt. Obige Formel erhält also die Form:

$$V = V_1 - V_2; \quad \pi h R^2 = V_1; \quad \pi h r^2 = V_2.$$

Die erste Formel wird als einfache Subtraktionsleitertafel dargestellt (siehe Bild 66). Die Teilung der Leitern dieser Tafel ist gleichförmig und zwar ist die Auftragerichtung der Teilungen der  $V_1$ - und  $V$ -Leiter dem Formelbau  $+ V = + V_1 - V_2$  entsprechend entgegengesetzt gerichtet der der  $V_2$ -Leiter. Die Teilungseinheiten der Mittelleiter sind wieder gegenüber denen

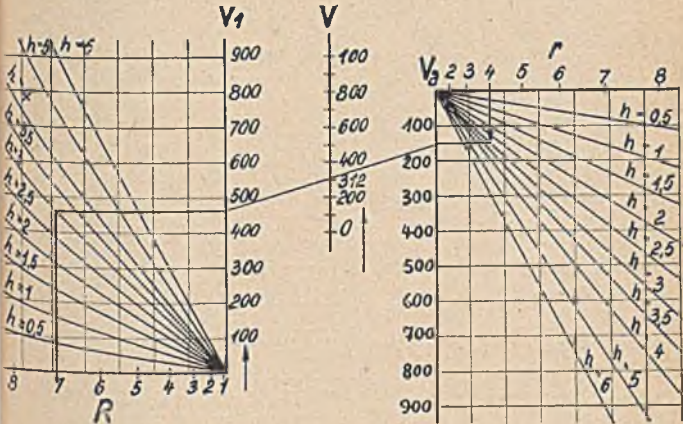


Bild 83. Darstellung des Volumens eines Hohlzylinders durch zwei Netztafeln und eine Leitertafel; Aufbau der Tafel unter Benutzung der Beziehungen  $V = V_1 - V_2$ ;  $V_1 = \pi h R^2$ ;  $V_2 = \pi h r^2$ .

der Außenleitern um die Hälfte verkürzt. Die Nullpunkte der  $V$ - und  $V_2$ -Leitern sind sinngemäß verschoben. An dieses Mittelstück schließen sich, nach Bild 83 zwei Netze an, deren senkrechte Achsen gleichförmig, dessen waagerechte Achsen quadratisch geteilt sind. Die in den Netzen dargestellten Teilformeln ergeben eine Schar gerader Linien, deren Kennziffern die  $h$ -Werte darstellen. Die Aufeinanderfolge der Werte für  $h$  stimmt in beiden Netzen überein. Diese Linienscharen lassen sich leicht zeichnen, da man für jede Linie nur einen Punkt zu bestimmen braucht, der mit dem Nullpunkt zu verbinden ist. Eine Kon-

trolle für die richtige Konstruktion ergibt sich dadurch, daß die Linien mit gleichen Kennziffern parallel zueinander stehen müssen. Ein eingezeichnetes Beispiel zeigt die Benutzung der Tafel. Die Teilungen der  $V_1$ - und  $V_2$ -Leitern können auch weggelassen werden, sie wurden nur zum besseren Verständnis des Tafelaufbaues in Bild 83 stehen gelassen. Ein Vorteil dieser Darstellung vor der vorher besprochenen liegt darin, daß die  $V_1$

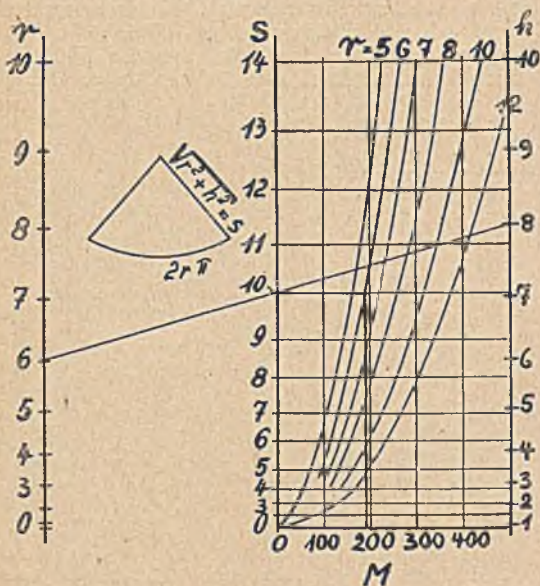


Bild 84. Tafel zur Ermittlung der Mantelfläche eines Kegels; Verbindung einer Leitertafel mit einer Netztafel.

und  $V_2$ -Werte — sofern man sie in dem Bilde stehen läßt — die Vollvolumina der einzelnen Zylinder angeben. Darstellungstechnisch nicht gut dagegen ist die doppelte Berücksichtigung der Höhe  $h$ .

Als weiteres Beispiel wollen wir die Formel der Mantelfläche eines Kegels darstellen. Diese Formel zerlegen wir zunächst wieder in die beiden Teilformeln

$$M = \pi r s \text{ und } s = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Wir beginnen den Tafelaufbau mit der Darstellung der ersten

Teilformel  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ . Diese Formel wandeln wir um in  $s^2 = r^2 + h^2$  und stellen sie als normale Dreileitertafel mit quadratischer Teilung dar. Die s-Leiter sei gleichzeitig noch senkrechte Achse eines rechtwinkligen Netzes, dessen waagerechte Achse die M-Werte trägt. Das Netz wird also zwischen die s- und h-Leiter der Leitertafel geschoben. Die im Netz dargestellte Formel  $M = \pi \cdot r \cdot s$  erscheint nicht mehr als Geraden­schar, sondern als Kurvenschar, deren einzelne Kurven als Kennziffern die r-Werte tragen. Wir haben also hier den umgekehrten Fall vor uns, wo in einem Netz die Formel der geraden Linie ( $y = m x$ ) eine Parabel ergibt. Wird diese Darstellung zu unübersichtlich, dann muß das Leiternomogramm so aufgebaut werden, daß die s-Leiter rechte Außenleiter wird, an die dann das Netz angebaut wird. In diesem Falle muß die Teilformel in der Form  $s^2 - r^2 = h^2$  verwendet werden (Bild 85). Diese Art der Darstellung hat leider verschiedene Nachteile insofern als wir Kurven statt gerade Linien erhalten und außerdem die Größe r zweimal dargestellt werden muß, was möglichst zu vermeiden ist.

Aus den behandelten Beispielen ist zu ersehen, daß die Formulierung der Formel die Darstellung entscheidend beeinflusst. Selbst Formeln, die im ersten Augenblick recht verwickelt erscheinen, können nach einigen Umformungen recht einfach und mit geringem Zeitaufwand dargestellt werden.

Als nächste Aufgabe wollen wir die Formel

$$\frac{1}{J} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{E \cdot r_1}$$

vertafeln. In dieser Formel bedeuten  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$  Widerstände in  $\Omega$ . Als Nebenbedingung ist verlangt, daß  $r_1 + r_2 = \text{const} = 50 \Omega$  betragen soll. Das Zeichen  $\Omega$  (griechischer Buchstabe: Omega) ist das Symbol für die Einheit des el. Widerstandes. Der Spannungswert E soll außerdem immer 6 V (Volt) betragen.

Die Stromstärke J soll in M. A. (Milliampère =  $\frac{1}{1000}$  Ampère) ermittelt werden. Die Formel in ihrer obigen Form ist für eine Darstellung nicht recht geeignet. Wir wollen durch Umformung diese Formel darstellungsfähig machen. Die Größe E wird auf die linke Gleichungsseite gebracht, die rechte Gleichungsseite wird in drei Summanden unterteilt. Wir erhalten also:

$$\frac{E}{J} = \frac{r_1 r_2}{r_1} + \frac{r_1 r_3}{r_1} + \frac{r_2 r_3}{r_1} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{E}{J} = r_2 + r_3 + \frac{r_2}{r_1} \cdot r_3 = r_2 + r_3 \left( \frac{r_2}{r_1} + 1 \right).$$

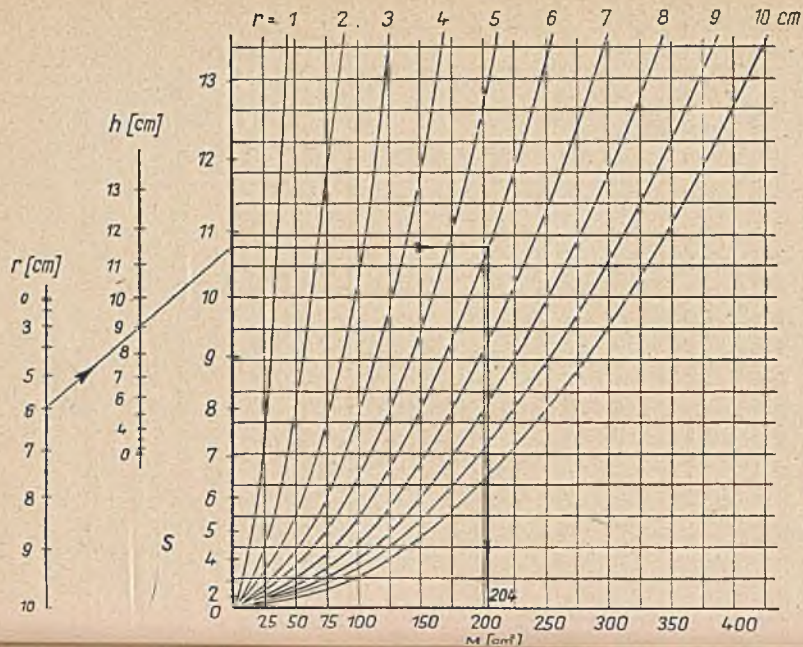


Bild 85.  
Tafel zur Ermittlung  
der Mantelfläche eines  
Kegels; Darstellung  
unter Benutzung der  
Teilformeln  
 $M = \pi r s$  und  
 $s^2 = r^2 + h^2$ .

Diese Formel wird in die beiden Teilformeln zerlegt:

$$\frac{E}{J} - r_2 = z \quad \text{und} \quad r_3 \left( \frac{r_2}{r_1} + 1 \right) = z.$$

Die erste Teilformel wird als Dreileitertafel mit gleichförmig geteilten Leitern, die zweite im gleichförmig geteilten Netz dargestellt. Zur besseren Darstellung bringt man die erste Formel

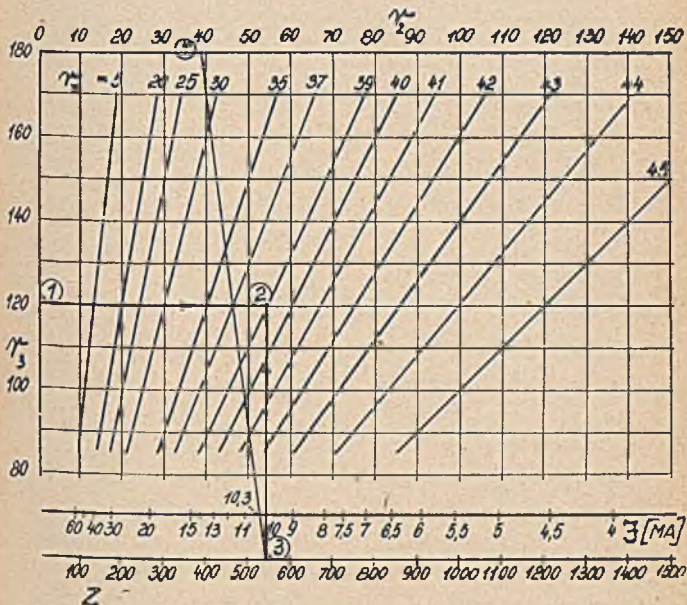


Bild 86. Ermittlung der Stromstärke, wenn die Spannung 6 Volt beträgt und 3 Widerstände gegeben sind ( $v_1 + r_1 = \text{const.} = 50 \Omega$ ); benutzte

$$\text{Beziehung: } \frac{1}{J} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{E r_1}$$

noch auf die Form  $\frac{E}{J} = z + r_2$ . Die Außenleitern der Leiter-  
tafel werden zunächst gleichförmig geteilt (Bild 86). Die Lage  
der Mittelleiter wird durch Verbindung zweier entsprechender  
Punkte der Außenleitern gefunden. Die Werte der Mittelleiter  
sind Reziprokwerte, weshalb die Teilung dieser Leiter ungleich-

förmig ausfällt. Die zweite Formel wird in einem Netz dargestellt, auf dessen waagerechter Achse die  $z$ -Werte, auf dessen senkrechter Achse die  $r_3$ -Werte aufgetragen sind. Die einzelnen Linien der Geradenschar tragen als Kennziffer die  $r_2$ -Werte, obgleich immer die Werte  $\frac{r_2}{r_1} + 1$  nach obiger Formel konstant gesetzt wurden. Da sich aber laut Nebenbedingung die  $r_2$ - und  $r_1$ -Werte zu  $50 \Omega$  ergänzen, so ist, wenn  $r_2$  gegeben, auch  $r_1$  bekannt. Die  $z$ -Leiter der Leitertafel und die  $z$ -Achse des Netzes fallen zusammen. Die Teilungseinheiten der  $z$ - und  $r$ -Leiter wurden so bemessen, daß die  $J$ -Leiter nicht mitten im Netz zu liegen kommt und damit die Ermittlung des  $z$ -Wertes stört. Die Teilung der  $z$ -Leiter kann in der fertig konstruierten Tafel weggelassen werden, da die  $z$ -Werte als Zwischenwerte nicht interessieren. Noch einmal wollen wir ganz kurz die einzelnen Schritte bei der Konstruktion der eben behandelten Leiter-Netztafel zusammenfassen:

1. Umformung der gegebenen Formel in eine zur Darstellung geeignete Form.
2. Konstruktion der Geradenschar durch jeweilige Konstantsetzung des Wertes  $\frac{r_2}{r_1} + 1$ . Bezifferung der Geraden nach Maßgabe der  $r_2$ -Werte.
3. Hinzeichnen der  $r_2$ -Leiter in beliebigem Abstand von der  $z$ -Achse bzw.  $z$ -Leiter.
4. Ermittlung der Lage der  $J$ -Leiter durch Verbindung entsprechender Punkte der  $z$ - und  $r_2$ -Leiter.
5. Einzeichnung der Teilung der  $J$ -Leiter.
6. Kontrolle der fertig konstruierten Tafel durch Eintragung und Berechnung eines willkürlich gewählten Beispiels.

Als weitere Aufgabe soll die Oberfläche eines zylindrischen Körpers  $0 = d \pi h + \frac{d^2 \pi}{2}$  durch eine Verbundtafel (Verbindung von Leiter- und Netztafel dargestellt werden. Wir trennen die Formel in

$$d \pi h = x \quad \text{und} \quad 0 = x + \frac{d^2 \pi}{2}$$

und gewinnen damit zwei zur Darstellung geeignete Teilformeln. Es wird mit der Darstellung der zweiten Teilformel begonnen (Bild 87), die eine Dreileitertafel ergibt. Die  $x$ -Leiter wird gleichförmig, die  $d$ -Leiter quadratisch (mit Berücksichtigung des Faktors  $\frac{\pi}{4}$ ) geteilt. Da die Teilungseinheiten der  $x$ - und der  $d$ -Leiter im Grunde genommen übereinstimmen, ergibt sich die



Teilungseinheit der Mittelleiter gesetzmäßig als um die Hälfte verkürzte Teilungseinheit der Außenleitern. Die Teilungen aller drei Leitern sind nach einer Richtung aufgetragen. An die x-Leiter schließt sich das x-Netz an, dessen Achsen ebenfalls gleichförmig geteilt sind. Die in diesem Netz dargestellte Formel  $d \pi h = x$  ergibt eine Geradenschar, deren einzelne Linien als Kennziffer die h-Werte tragen. Die Teilung der x-Achse bzw. der x-Leiter wird nach Fertigstellung der Tafel weggelassen.

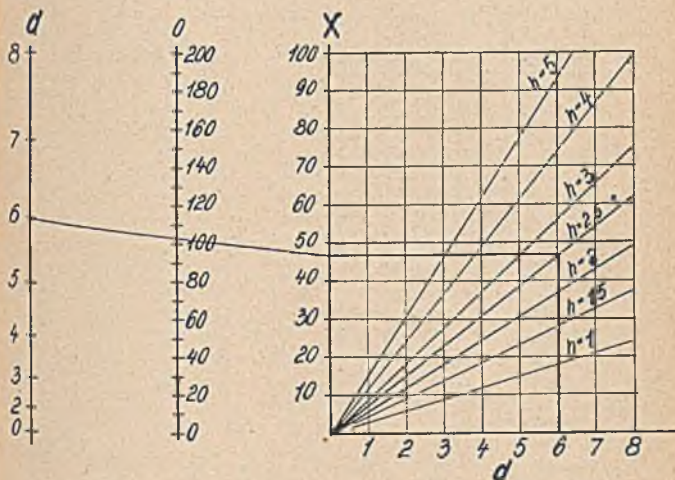


Bild 87. Die Oberfläche eines zylindrischen Körpers dargestellt durch eine Verbundtafel; benutzte Beziehungen:

$$d \pi h = x; \quad 0 = x + \frac{d^2 \pi}{2}.$$

Wir haben bisher bei unseren Beispielen nur Leitern und Netze mit gleichförmigen und verwandten Teilungen berücksichtigt. In den nun folgenden Beispielen sollen log. geteilte Leitern und Netze verwendet werden. Zunächst wollen wir noch einmal die schon zweimal dargestellten Formeln zur Ermittlung der Schnittzeit T und der Schnittgeschwindigkeit v als Verbundnetz darstellen. Zu diesem Zweck teilen wir die T-Formel in die Teile:

$$T = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{x}{n} = s.$$

Das Kernstück der in Bild 88 wiedergegebenen Darstellung bildet die Dreileitertafel mit den Außenleitern für  $x$  und  $n$  und der Mittelleiter für  $s$ . An die  $n$ -Leiter schließt sich das  $n = 6$

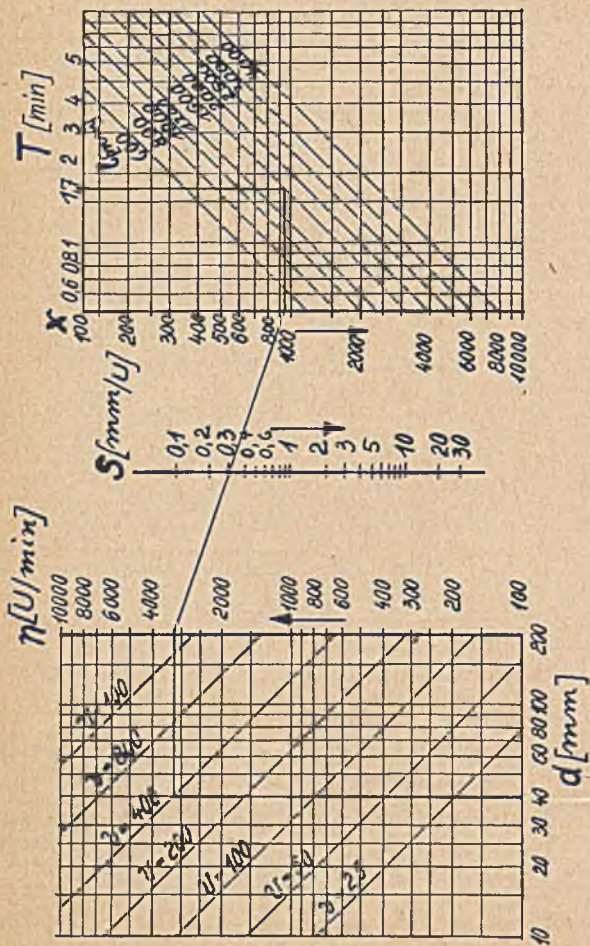


Bild 88. Ermittlung der Schnittzeit durch eine Verbundtafel (zwei Netztafeln, eine Leitertafel).

Netz an, dessen senkrechte Achse die n-Leiter, dessen waagerechte Achse die d-Leiter ist. Die Linien der in diesem Netz dargestellten Schar tragen als Kennziffern die Werte für die Schnittgeschwindigkeit v. Auf der n-Leiter wurden nun die wirklich zu verwendenden n-Werte in geometrischer Stufung eingetragen, die Teilung der n-Leiter erscheint daher gleichförmig. Rechts an die Leitertafel schließt sich das x-T-Netz an, dessen senkrechte Achse die x-Leiter ist, dessen waagerechte Achse die T-Werte trägt. Die in diesem Netz dargestellten Linien tragen als Kennziffer die l-Werte. Alle verwendeten Teilungen dieser Tafel sind logarithmische, die l- und v-Linien stehen aufeinander senkrecht. Eine derartige Darstellung ist dann zu wählen, wenn die Werte für l und v in ganz bestimmter Stufung verwendet werden sollen. Die x-Achse bzw. x-Leiter braucht nicht beziffert zu werden. Der Ablesungsgang erfolgt fließend von links oben (d-Wert) nach rechts unten (T-Wert). Durch diese Verbundtafel wurden Formeln mit 6 Veränderlichen dargestellt.

Ein zweites Beispiel behandle die Darstellung einer Formel aus der Festigkeitslehre. Durch Zug wird ein Körper (Rundeisenstab z. B.) verlängert, also in seiner Form verändert. Diese Formveränderung ist proportional der Belastung. Bei großer Belastung wird nun eine größere Längenänderung auftreten als bei kleiner Belastung. Die Belastung darf allerdings nur bis zu einer gewissen Grenze ansteigen, andernfalls bricht der Körper. Diese Grenze bezeichnet man als Proportionalitätsgrenze. Die bei der Belastung auftretende Dehnung ist proportional der Spannung. Dieses Proportionalitätsgesetz heißt nach dem englischen Physiker Hooke das Hooksche Gesetz. Die Verlängerung verteilt sich über den ganzen Körper, so daß sich auf der ganzen Länge eines Rundeisenstabes z. B. der Durchmesser gleichmäßig verringert. (Siehe Band 5, Betriebsberechnungen, der D. W. B. S. 124/125.) Bezeichnet nun

E den Elastizitätsmodul in  $\text{kg/cm}^2$

l die ursprüngliche Länge (des Rundeisenstabes) in cm

$\lambda$  (Lambda) die Verlängerung des Stabes in cm

P die Belastung des Stabes in kg

$F = \frac{d^2 \pi}{4}$  den Querschnitt in  $\text{cm}^2$ ,

so kann die Verlängerung  $\lambda$  durch folgende Formel berechnet werden:

$$\lambda = \frac{P \cdot l}{F \cdot E}.$$

Diese Formel soll vertafelt werden und zwar für folgende Bereiche:

$$E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ bis } 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned}
 P &= 5000 \text{ bis } 20000 \text{ kg} \\
 l &= 100 \text{ bis } 1000 \text{ cm} \\
 d &= 1 - 8 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Wir wollen die Tafeln verschieden formen, obige Formel ist also entsprechend umzuwandeln. Die erste Tafelform, die wir besprechen wollen, baut sich auf den Formeln

$$P l = z; \quad z = E \cdot x; \quad x = \frac{\lambda d^2 \pi}{4} \quad \text{auf.}$$

Die beiden ersten Teilformeln werden zur Aufstellung einer Doppelleitertafel benutzt. Die 3. Teilformel wird in einem log. geteilten Netz dargestellt. Die Stufung der d-Linien erfolgt geometrisch, die sich dabei ergebenden d-Werte wurden abgerundet. Bei der Stufung wurde als 1. Glied  $d = 1 \text{ cm}$  und als Stufungsfaktor  $q = 1,2$  angenommen. Es ergibt sich folgende Zahlentabelle:

Tabelle 19.

d =	1	1,2	1,2 <sup>2</sup>	1,2 <sup>3</sup>	1,2 <sup>4</sup>	1,2 <sup>5</sup>	1,2 <sup>6</sup>	1,2 <sup>7</sup>	1,2 <sup>8</sup>	1,2 <sup>9</sup>	1,2 <sup>10</sup>
d =	1	1,2	1,44	1,728	2,073	2,48	2,98	3,58	4,28	5,15	6,16
d =	1	1,2	1,4	1,7	2	2,5	3	3,5	4	5	6
x =	0,785	1,13	1,54	2,27	3,14	4,9	7,06	9,6			

Die einzelnen Linien wurden so gewonnen (Bild 89), daß immer nur ein Punkt berechnet wurde (Linien unter 45° zur  $\lambda$ -Achse), wobei  $\lambda = 1$  und  $d$  vorgegeben und daraus  $x$  errechnet wurde.

Eine zweite Tafelform entstand, wenn die Hauptformel in folgende Teilformeln zerlegt wurde:

$$\frac{P}{E} = x; \quad \frac{d^2 \pi}{4} \lambda = z; \quad x l = z.$$

Die dritte Teilformel wird als Dreileitertafel dargestellt. An die Leitertafel schließt sich nach oben das  $P = x$ -Netz (Geradenschar mit Kennziffer  $E$ ) und nach unten das  $z = \lambda$ -Netz an (Geradenschar mit Kennziffer  $d$ ). Bild 90 zeigt diese zweite Tafelform.

Die dritte Tafelform endlich entstand nach folgender Zerlegung der Hauptformel:

Bild 89. Ermittlung der Verlängerung  $\lambda$  eines Rundeisenstabes, wenn gegeben ist die ursprüngliche Länge  $l$ , die Belastung  $P$ , der Querschnitt und der Elastizitätsmodul  $E$ . Benutzte Teilformeln:  $P l = z; z = E x; x = \frac{\lambda d^2 \pi}{4}$ .

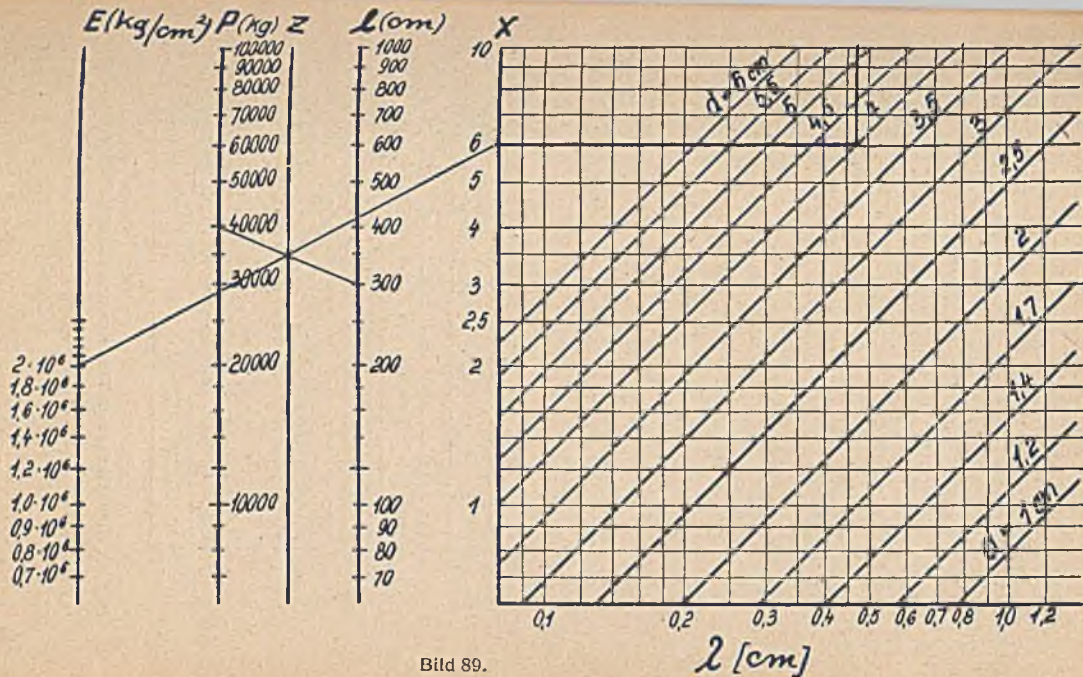


Bild 89.

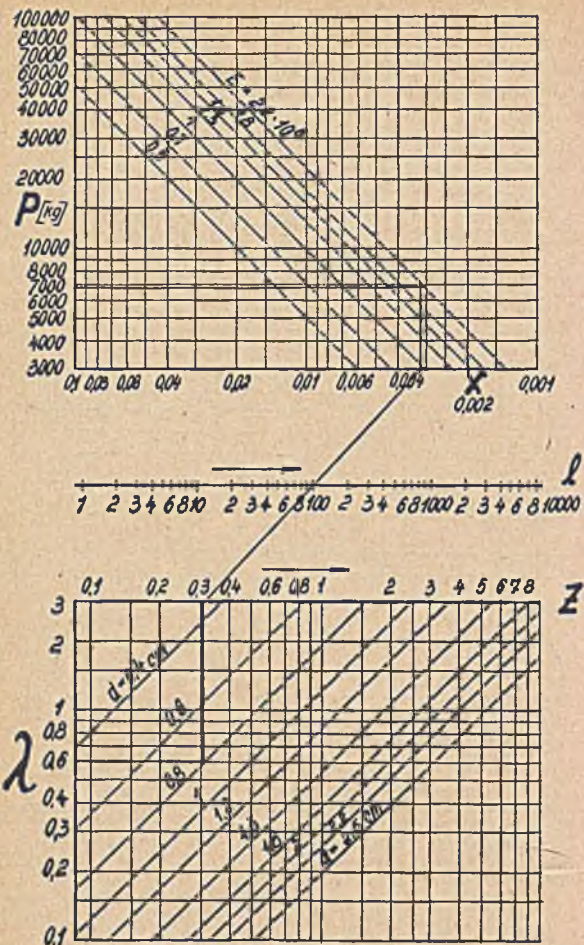


Bild 90. Ermittlung der Verlängerung  $\lambda$  eines Rundeisenstabes;

benutzte Teilformeln:  $\frac{P}{E} = x$ ;  $\frac{d^2 \pi}{4} \lambda = z$ ;  $x l = z$ .

$$P l = z; \quad \frac{E d^2 \pi}{4} = x; \quad z = x \cdot \lambda.$$

Hier beginnt man die Aufstellung der Tafel mit dem  $E = x$ -Netz (Geradenschar mit Kennziffer  $d$ ). Hieran schließt sich nach unten eine Doppelleitertafel an (Bild 91).

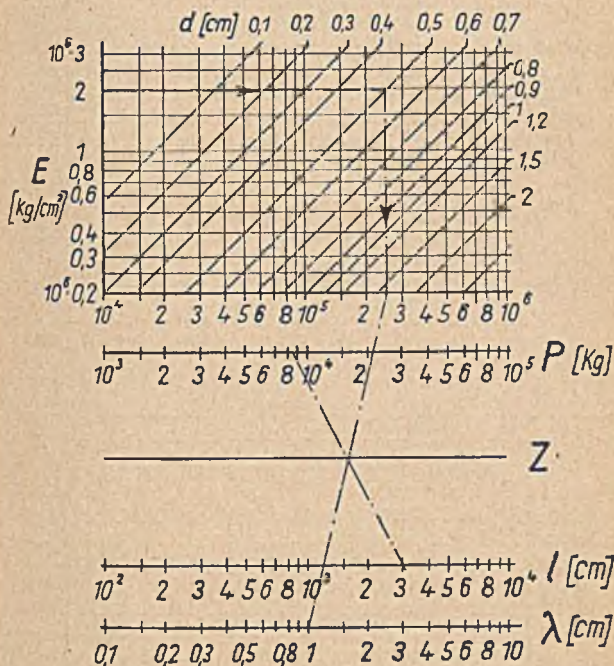


Bild 91. Ermittlung der Verlängerung  $\lambda$  eines Rundeisenstabes; benutzte Teilformeln:  $P l = z; \quad \frac{E d^2 \pi}{4} = x; \quad z = x \lambda.$

Die erste und dritte Tafelform gestattet eine fließende Ablesung von links nach rechts bzw. von oben nach unten. In beiden Fällen kommt man automatisch zum Wert der Verlängerung  $\lambda$ . Die zweite Tafelform ist im Gegensatz dazu so aufgebaut,

daß man oben bzw. unten mit der Ablesung beginnt und an der Mittelleiter der Leitertafel das Resultat  $\lambda$  abliest.

Viele Formeln, die 4, 5 oder mehr Variable enthalten, sind meist so gebaut, daß sie sich bequem durch zusammengesetzte Leitertafeln darstellen lassen. Im allgemeinen hüte man sich jedoch vor einer Häufung von parallelen Leitern, da hier die Ablesung ziemlich verwickelt wird. Die Reihenfolge besonders der zum Ziele führenden Operationen ist in einer derartigen Tafel schwer zu übersehen. Die Verbundtafel kann sich an die Forderungen der Praxis insofern besser anpassen, als in ihr die eine oder andre Teilformel zweckentsprechend bald als Leitertafel bald als Netztafel zur Darstellung gelangt. Der Wechsel in der Tafelform wirkt nicht so ermüdend wie das Einerlei der zusammengesetzten Leitertafel. Hat man die Wahl zwischen Verbundtafel und Leitertafel, gebe man der Verbundtafel unbedingt den Vorzug. In den folgenden Kapiteln werden wir noch andre Arten von Verbundtafeln kennen lernen. Es ist anzustreben, durch organische Verbindung aller möglichen Tafeltypen das Gefüge der Rechentafel aufzulockern, damit sie der dem jeweiligen Verwendungszweck entsprechende Form erhält.

## VII. Andere aus geraden Leitern zusammengesetzte Leitertafeln

Im 5. Kapitel wurde die Konstruktion und Verwendungsmöglichkeit von Leitertafeln gezeigt, deren Bestandteile zueinander parallele Geraden waren. Mit der einfachsten Dreileitertafel (Bild 65) wurde das algebraische Mittel gefunden. Die Leitern dieser Tafel waren sämtlich gleichförmig geteilt und die Leiterteilpunkte lagen auf einer Flucht. Diese Normaltafel wollen wir jetzt in der Weise verändern, daß wir die Außenleitern schiefe kippen, daß sie sich in einem Punkt an die Mittelleiter anlehnen. In dem Bild 92 wurden die Außenleitern sowohl parallel zur Mittelleiter als auch an diese angelehnt gezeichnet, so daß diese Tafel 5 Leitern enthält. Die mittlere Leiter ist jetzt Höhe und Winkelhalbierende eines Dreiecks geworden, dessen Grundlinie allerdings als für die Darstellung unwichtig fortgelassen wurde. Die Teilung der Leitern beginnt mit Null an der Dreiecksspitze. Die Teilungspunkte aller drei Leitern liegen auf Parallelen zur gedachten Dreiecksgrundlinie. Die drei Leitern des in Bild 92 gezeigten Nomogramms sind in je 10 Teile geteilt. Die gedachte (gestrichelt gezeichnete) Grundlinie des Dreiecks verbindet als



die Punkte 10 der drei Leitern. Ziehen wir zu dieser Grundlinie eine Parallele, die z. B. die Punkte 8 der fünf Leitern schneidet, dann ist die Zahl 8 der Mittelleiter das algebraische Mittel der Zahlen 8 der Außenleitern  $\left(\frac{8+8}{2}\right)$ . Die Verhältnisse ändern sich

aber, wenn man zwei voneinander abweichende Zahlen z. B. 3 und 8 der Außenleitern der beiden Leitertafeln verbindet. Die Verbindungslinie der Punkte der Außenleitern der aus parallelen Geraden zusammengesetzten Leitertafel schneidet die Mittelleiter im Punkte 5,5. Diese Zahl ist das algebraische Mittel der Zahlen 3 und 8. Die Verbindungslinie der Außenleitern der Dreieckstafel schneidet die Mittelleiter im Punkte 4,4. Diese

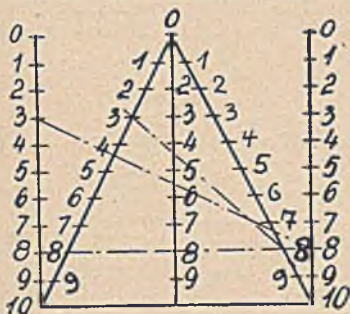


Bild 92. Darstellung des harmonischen Mittels durch eine Dreileitertafel, deren Leitern in einem Punkte zusammenstoßen.

Zahl ist das harmonische Mittel der Zahlen 3 und 8 und ist allgemein gekennzeichnet durch die Formel  $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

oder nach x entwickelt  $x = \frac{2ab}{a+b}$ . Diese Beziehung läßt sich

leicht als Proportion schreiben, also z. B. in der Form  $\frac{2b}{x} = \frac{a+b}{a}$  und dementsprechend durch Abtragen der be-

treffenden Werte auf den Schenkeln eines Winkels darstellen.

Bild 93 zeigt die Darstellung der Proportion für die Werte  $a = 3$  und  $b = 8$ . Da jedoch zur Ausführung dieser Konstruktion besondere Zeichenwerkzeuge, wie Winkel usw. notwendig sind, wird man die zuerst beschriebene Methode zur Ermittlung des harmonischen Mittels jener vorziehen. Durch Gegenüberstellung und Vergleich der beiden Tafeltypen erhalten

wir hier ein übersichtliches Bild von den Zusammenhängen des arithmetischen und harmonischen Mittels. In den hier interessierenden technisch-physikalischen Formeln (Scheitelweitengleichung der Optik oder Kirchhoff'sche Regeln der Elektrotechnik) ist die zu berechnende Größe das halbe harmonische Mittel zweier anderer. Bilden wir das halbe harmonische Mittel als Dreiecksleitertafel ab, so sind hier die Teilungen der Außenleitern nur halb so groß wie die Teilungen der Innenleiter. Für die Konstruktion von Dreiecksleitertafeln wird man Millimeterpapier wählen. Die Dreieckshöhe kann dann in Zentimeter-Einheiten geteilt werden. Die entsprechenden Punkte der Außenleitern bei beliebigem Winkel an der Dreiecksspitze erhält man durch Ziehen von Parallelen zur gedachten Dreiecksgrundlinie bei Benutzung der Querteilung des Millimeterpapiers. Beim Ent-

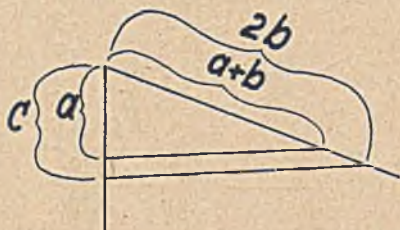


Bild 93. Das harmonische Mittel durch ähnliche Dreiecke dargestellt.

wurf einer derartigen Leitertafel ist die Größe des Winkels an der Dreiecksspitze so zu wählen, daß eine gute Ablesung der Leiterwerte gewährleistet ist. Macht man das Verhältnis von Grundlinie zu Höhe wie 8:10, d. h. wird der Winkel an der Spitze zu  $22^\circ$  gewählt, dann erhält man eine besonders gute Ablesegenauigkeit. Bild 94 gibt eine Dreiecksleitertafel wieder, in der auf der Dreieckshöhe der Gesamtwiderstand  $W$  zweier zueinander parallel geschalteter Widerstände  $W_1$  und  $W_2$  abgelesen werden kann. Die Werte  $W_1$  und  $W_2$  finden sich auf den Außenleitern der Rechentafel. Die Leiterteilungen von Außen- und Innenleiter verhalten sich wie 1:2, wobei die wahre Größe der Maßstabeinheit der Außenleiter etwa 5,4 mm beträgt. Die Grundlinie verhält sich zur Höhe wie 8:10, wie oben empfohlen.

Eine andere Art von Leitertafeln, die sich ebenfalls aus geraden Leitern zusammensetzen, zeigt die Form eines N oder liegend gezeichnet eines  $\Sigma$ . Nomogramme dieser Art lassen sich nach der Teilung der Leitern in drei Hauptgruppen einteilen, und zwar sind

1. alle drei Leitern gleichförmig,
  2. die zwei Außenleitern gleichförmig, die Mittelleiter ungleichförmig,
  3. alle drei Leitern ungleichförmig geteilt.
- Die beiden ersten Gruppen dieses Tafeltyps stellen die Formel

$$\frac{a}{b} = \frac{l^x}{10 - l^x}$$

dar und zwar wird durch die Formel

$$\frac{a}{b} = \frac{l^1}{10 - l^1}, \quad (x \text{ also} = 1 \text{ gesetzt})$$

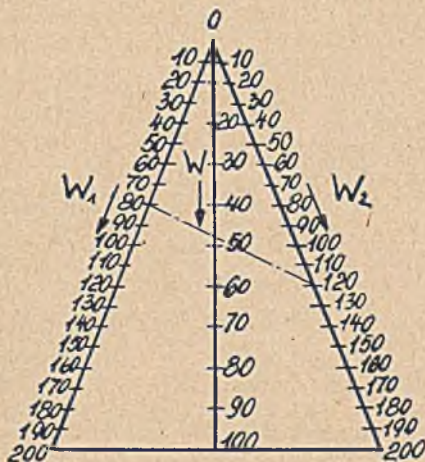


Bild 94. Ermittlung des Gesamtwiderstandes  $W$  aus den zwei zueinander parallel geschalteten Widerständen  $W_1$  und  $W_2$  (Kirchhoffsche Regel).

die erste Gruppe und durch die Formel

$$\frac{a}{b} = \frac{l^{>1}}{10 - l^{>1}} \quad \text{z. B. } x = 2$$

die zweite Gruppe herausgehoben. Die Formel  $\frac{a}{b} = \frac{l}{10 - l}$  ist also als Spezialfall oben angegebener allgemeiner Beziehung anzusehen. Bild 95 zeigt die einfachste Form dieses Tafeltyps. Hier sind die Leiterteilungen der beiden Außenleitern unterein-

ander gleich und die Teilungen der Verbindungsleiter sind — wie leicht einzusehen — durch Verbindung entsprechender Werte der beiden Außenleitern entstanden. Dementsprechend sind auch die Teilungseinheiten der Verbindungsleiter unter sich gleich, so daß wir eine Leitertafel erhalten, deren Leitern sämtlich gleichförmig geteilt sind. Vergleicht man mit dieser einfachsten Form die in Bild 96 dargestellte quadratische Form, erkennt man zunächst, daß die Auftragungsrichtung der Leiterwerte in beiden Formen übereinstimmt. Nur die Teilungseinheiten der Mittelleiter weichen von denen der Außenleiter ab

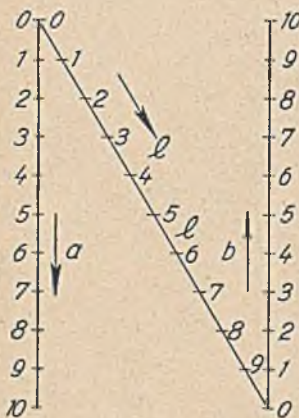


Bild 95. Darstellung der  
Beziehung  $\frac{a}{b} = \frac{l}{10-l}$  durch  
N-förmige Leitertafel.

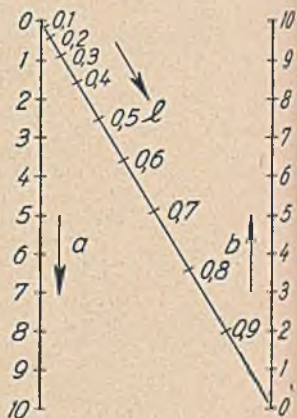


Bild 96. Darstellung der  
Beziehung  $\frac{a}{b} = \frac{l^2}{10-l^2}$  durch  
N-förmige Leitertafel.

Die Teilung der Mittelleiter der quadratischen Form erfolgt wieder durch Verbindung entsprechender Punkte der Außenleitern. Es werden glatte Zahlenwerte für  $l$  und  $b$  angenommen und der entsprechende  $a$ -Wert berechnet. Ist z. B.  $b = a$  und es soll der Punkt  $l = 0,6$  auf der Mittelleiter angegeben werden, dann errechnet sich aus:

$$a = \frac{b l^2}{1-l^2} = \frac{8 \cdot 0,36}{1-0,36} = 4,5$$

der entsprechende Punkt auf der  $a$ -Leiter, der mit dem Punkt  $b = 8$  verbunden die Verbindungsleiter im Punkte  $l = 0,6$

schneidet. Folgende Tabelle gibt die zusammengehörigen Werte für  $a$ ,  $b$  und  $l$  an, die zur Bezifferung der Mittelleiter notwendig sind.

Tabelle 20.

$l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$a$	0,1	0,42	0,99	1,52	2,33	4,50	7,68	7,10	4,25	$\infty$
$b$	10	10	10	8	7	8	8	4	1	1

Nach Fertigstellung der Teilung versäume man nicht, noch eine Kontrolle durchzuführen, indem man einige Werte der Außenleitern miteinander verbindet und das erhaltene Resultat durch Rechnung nachprüft.

Der Formeltyp  $\frac{a}{b} = \frac{l}{10-l}$  begegnet uns ziemlich häufig

in der Praxis. Man denke z. B. an folgende Aufgabe. Die großen Seiten zweier flächengleicher Rechtecke sollen sich zu 10 ergänzen. Wenn also die Seite des einen Rechtecks  $b_1 = 7$  cm lang ist, dann ist die große Seite des anderen Rechtecks  $b_2 = 10 - 7 = 3$  cm lang. Die kleine Seite des einen Rechtecks sei  $a_2 = 3$  cm lang, wie lang ist dann die kleine Seite  $a_1$  des anderen Rechtecks. Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf der Gleichsetzung der Flächeninhalte der beiden Rechtecke:

$$(10 - b_1) \cdot a_2 = b_1 \cdot a_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1}{10 - b_1}$$

oder

$$(10 - 7) \cdot 3 = 7 \cdot a_1; \quad a_1 = \frac{9}{7} \cong 1,28 \text{ cm.}$$

Der eben behandelte Formeltyp kann jedoch auch andere Formen annehmen. Man erhält z. B. bei Auflösung nach  $l$

$$l = \frac{10a}{a+b}$$

einer Form, die ebenfalls häufig in der Praxis vorkommt. Vor Vertafelung einer Formel untersuche man daher diese auf ihre mögliche Formulierung; vielleicht entspricht eine Form einem bestimmten Tafeltyp.

Eine andere Art von Tafeln in N-Form gestattet die Ausführung von Multiplikationen bzw. Divisionen. Auch hier sind die Außenleitern gleichförmig geteilt und stimmen mit denen der beiden ersten Formen vollkommen überein. Die Mittelleiter wird nach derselben Methode geteilt wie die der Form 2, was in diesem Falle, wie aus Bild 97 hervorgeht, recht einfach ist. Die Auftragsrichtung ihrer Teilungswerte weicht von der der beiden ersten Formen ab: sie ist diesen entgegengesetzt gerichtet. Teilt man jetzt die Außenleitern unter Benutzung des

nur zur Hälfte logarithmisch geteilten Papiers von Schleicher & Schüll Nr. 369½ logarithmisch, dann kann bei entsprechender Teilung der Mittelleiter (siehe Bild 98) durch diese Tafelform die Formel  $u = vw$  (Fall 4) dargestellt werden. Die Auftragsrichtung der Mittelleiterteilung ist für die beiden letzten Formen gleich. Die N-förmigen Nomogramme gestatten Ablesung aller möglichen Zwischenwerte. Außerdem sind sie auch noch dadurch ausgezeichnet, daß die Außenleitern alle (bis auf den Fall 4) gleichförmig geteilt sind. Sie eignen sich daher als Teiltafeln in einer zusammengesetzten Rechentafel, wo An-

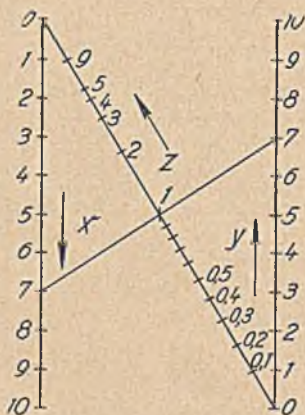


Bild 97. Multiplikationstafel in N-Form.

schlußleitern mit gleichförmiger Teilung gefordert werden. Im nächsten Kapitel werden N-förmige Nomogramme als Teiltafeln in einem Nomogrammgefüge behandelt werden.

Aus geradlinigen Leitern setzt sich noch eine andere Art von Leitertafeln zusammen, die Kreuzfluchttafel. Durch diese Tafel lassen sich Formeln mit 4 Variablen darstellen. Kreuzfluchttafeln erster Art setzen sich aus gleichförmig geteilten, Kreuzfluchttafeln zweiter Art aus ungleichförmig (logarithmisch) geteilten Leitern zusammen. Wir wollen uns zunächst mit den Kreuzfluchttafeln der ersten Art befassen, durch die der Formeltyp

$$y = \frac{u}{v} \cdot x \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{x} = \frac{u}{v}$$

dargestellt werden kann. Eine Proportion wird ja bekanntlich

so dargestellt (siehe Bild 99), daß die betreffenden Zahlenwerte der Proportion als Streckenwerte auf den Schenkeln eines Winkels abgetragen werden. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind hier parallele Linien. Von dieser einfachsten Darstellung wollen wir jetzt ausgehen und zwar denken wir uns zwei rechte Winkel so übereinander gelegt, daß ihre Schenkel sich decken. Auf den Schenkeln des einen rechten Winkels sollen die Werte für  $y$  und  $u$ , auf den Schenkeln des andern diejenigen für  $x$  und  $v$  aufgetragen werden. Verdrehe ich nun die beiden

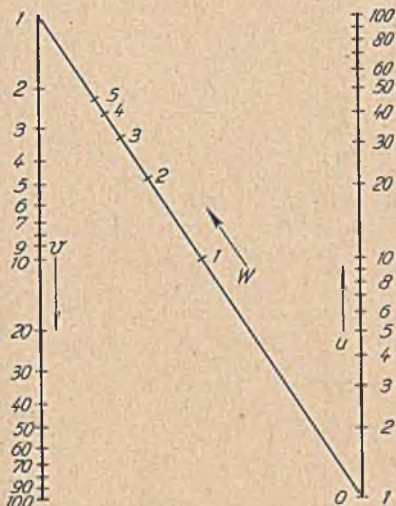


Bild 98. Darstellung der Beziehung  $u = vw$  als Leitertafel in N-Form.

Winkel so gegeneinander, daß der  $v$ -Schenkel des einen rechten Winkels mit dem  $y$ -Schenkel des andern zusammenfällt und der  $x$ -Schenkel die Verlängerung des  $u$ -Schenkels ist (Bild 100), dann stellt dieses Gebilde eine Kreuzfluchttafel der ersten Art dar. Die Verbindungslinien entsprechender Schenkelpunkte, die vorher parallele Linien waren, sind jetzt zu aufeinander senkrecht stehenden Linien geworden. Wenn also drei Werte einer Proportion gegeben sind und man will den vierten finden, bedient man sich eines sog. Weiskreuzes, das auf Transparentpapier gezeichnet ist. Durch eine derartige Leitertafel kann beispielsweise die Formel zur Ermittlung der Umfangskraft:

$$p = \frac{G \cdot l}{r}$$

dargestellt werden. Bild 103 zeigt an einer Skizze, welche Bedeutung den Größen  $P$ ,  $G$ ,  $l$  und  $r$  zukommt (siehe auch: Deutsche Werkmeister-Bücherei: Betriebsberechnungen, Abschn. H, Lei-

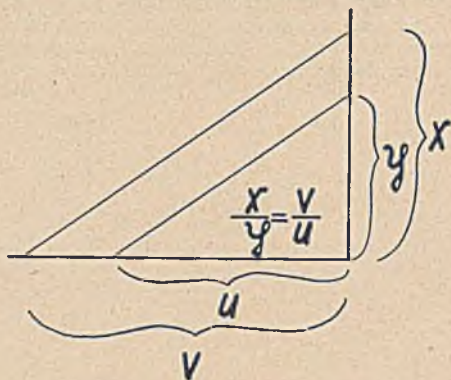


Bild 99. Vorstufe einer Kreuzfluchttafel erster Art.

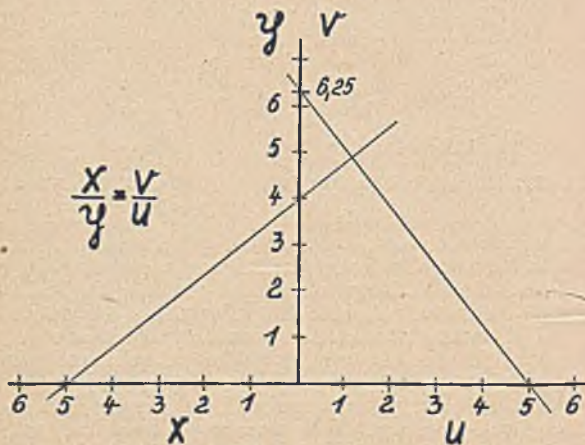


Bild 100. Kreuzfluchttafel 1. stellt eine Proportion dar.



stungsermittlung an Maschinen). Bild 101 zeigt die Benutzung der Kreuzfluchttafel. Ist z. B.  $l = 60$  cm und  $r = 20$  cm gegeben, so verbindet man zunächst diese beiden Punkte. Ist jetzt noch  $G = 30$  kg bekannt und soll  $P$  gefunden werden, dann fällt man vom Punkt  $G = 30$  auf die Verbindungslinie das Lot, das die  $P$ -Linie im Punkt 30 trifft. Dieser Wert wurde gesucht. Um den 4. Punkt zu finden, benutzt man — wie oben schon angedeutet — das Weiskreuz, da eine Konstruktion aufeinander stehender Linien unzweckmäßig ist.

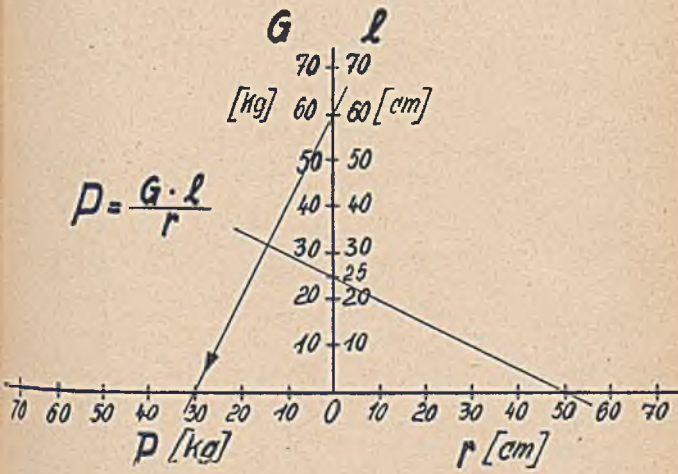


Bild 101. Ermittlung der Umfangskraft  $P$  durch Kreuzfluchttafel 1. Art (Leitern sind gleichförmig geteilt).

Die Kreuzfluchttafel zweiter Art hat in ihrer einfachsten Form die Gestalt eines Quadrates. Sie unterscheidet sich von der ersten Art rein äußerlich dadurch, daß die Leitern hier sowohl gleichförmig als auch logarithmisch geteilt sein können. Der Aufbau und die Benutzung der Tafel geht aus Bild 102 hervor. Lege ich ein Weiskreuz so auf ein Quadrat, daß die vier Strahlen des Kreuzes die Quadratseiten in je einem Punkte schneiden, dann sind die Summen entsprechender Abschnitte (in dem Bild 102 stark ausgezogen) der Quadratseiten gleich. Es ist also bei gleichförmiger Teilung nach Bild 102  $a + b = c + d$ , bei log. Teilung dagegen heißt die Beziehung  $a \cdot b = c \cdot d$ . Die Auftragsrichtung der Leiterteilungen hat in beiden Fällen

einen bestimmten Drehsinn. Dieser Drehsinn ist in Bild 102 durch Pfeile angedeutet. Hierbei ist es ganz gleich, ob der Drehsinn rechtsdrehend (im Uhrzeigersinne) oder linksdrehend (im Gegenuhrzeigersinne) verläuft. Der Drehsinn der Auftragsrichtung der Leiterteilungen ist in Bild 102 rechtsdrehend. Die Formel zur Ermittlung der Umfangskraft soll jetzt auch durch eine Kreuzfluchttafel zweiter Art dargestellt werden (Bild 103).

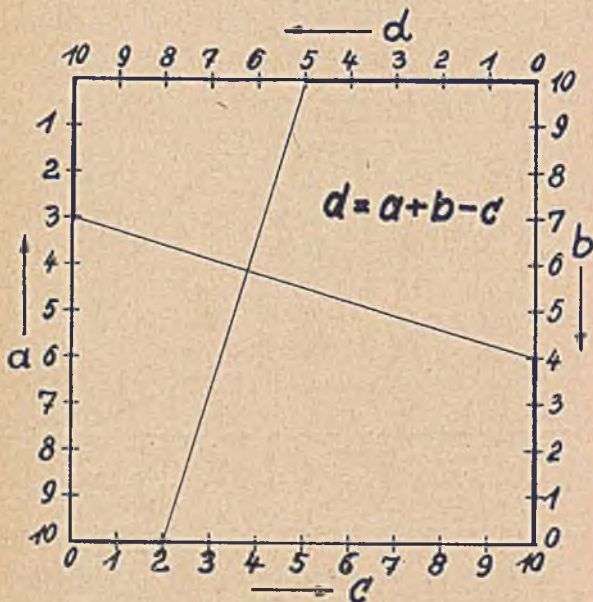


Bild 102. Durch Vierleitertafel in Quadratform wird die Beziehung  $d = a + b - a$  dargestellt.

Da die Darstellung log. geteilte Leitern verlangt, benutzen wir zur Formung dieser Tafel das nach zwei Richtungen log. geteilte Papier von Schleicher & Schüll Nr. 365 $\frac{1}{2}$ . Nach Abgrenzung eines Quadrates auf dem Papier beziffern wir die Seiten des Quadrates. Zur Bezifferung der linken senkrechten Leiter benutzen wir die Teilung des Papiers und tragen hier die Werte  $G = 10 - 100$  kg ein. Auf der oberen waagerechten Leiter tragen wir die Werte für  $P = 10 - 100$  kg ebenfalls unter

Benutzung der Papierteilung ein. Haben wir die Richtung der Teilung für diese beiden Leitern vorgegeben, so ist die Richtung der beiden andern Leitern damit festgelegt, und zwar ist sie entgegengesetzt gerichtet den gegenüberliegenden Leitern. Verbindet man jetzt den Punkt  $G = 30$  mit  $l = 20$  und fällt auf die Verbindungslinie dieser beiden Punkte z. B. vom Punkt  $r = 20$  aus das Lot, so schneidet dieses Lot die P-Leiter im Punkte  $P = 30$ , denn  $P = \frac{30 \cdot 20}{20} = 30$ . Die Teilungsrichtung verläuft also jetzt nach einer Richtung und zwar dem Drehsinne nach in Uhrzeigerichtung. Statt zu konstruieren benutzt man

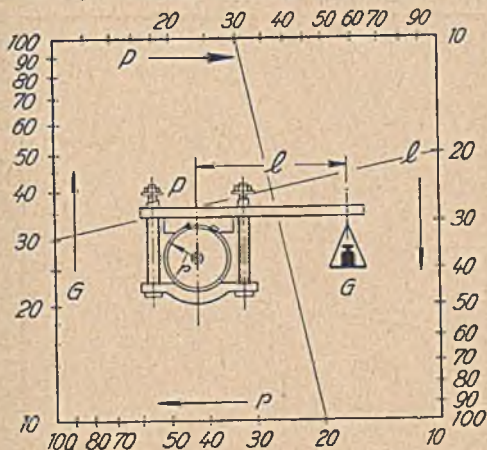


Bild 103. Ermittlung der Umfangskraft  $P$  durch Kreuzfluchttafel 2. Art (Leitern sind log. geteilt).

zur Ermittlung der Lösung wieder das Weiserkreuz. Der Bereich dieser Tafel läßt sich nicht so ohne weiteres erweitern, da die Leiterteilungen alle voneinander abhängig sind.

Wir vertafeln jetzt die Beziehung  $T = \frac{1}{n \cdot s}$ , die schon im V. Kapitel als Doppelleitertafel dargestellt wurde. Wir bringen zu diesem Zweck diese Formel auf die Form:

$$T \cdot n = \frac{1}{s} \quad \text{bzw.} \quad T^{+1} \cdot n^{+1} = 1^{+1} \cdot s^{-1}.$$

Diese Beziehung weicht von der normalen Produktgleichung

chung dadurch ab, daß auf der rechten Seite der Gleichung ein Bruch steht. Tragen wir wieder auf der linken Quadratseite die Werte  $s = 0,1 - 1$  (Bild 104) und auf der unteren Quadratseite die Werte  $n = 10 - 100$  auf und zwar unter Benutzung der gedruckten Teilungen, so ist damit die Auftragungsrichtung der Teilungen der gegenüberliegenden Quadratseiten festgelegt. Die Auftragungsrichtung der Teilungen der oberen Quadratseite ist also entgegengesetzt gerichtet der der unteren. Die Auftrags-

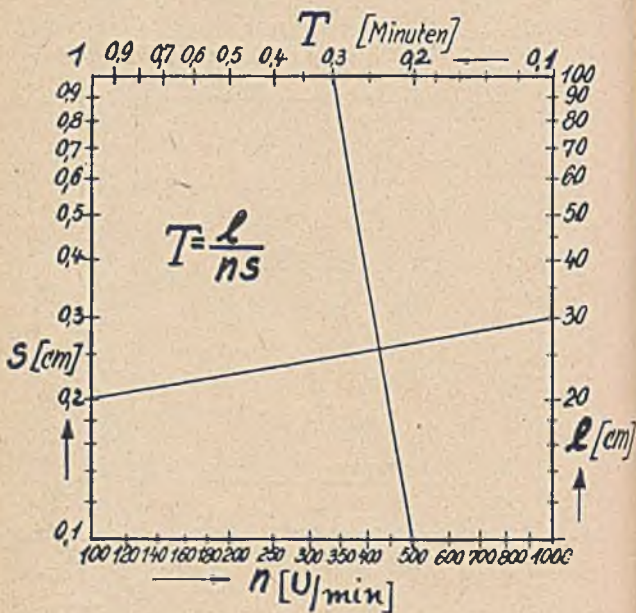


Bild 104. Ermittlung der Schnittzeit durch Kreuzfluchttafel 2. Art.

richtungen der Teilungen der linken und rechten Quadratseite dagegen stimmen miteinander überein. Die Teilungsrichtung der linken Quadratseite unterbricht also sozusagen den Drehsinn der Teilung der Quadratseiten, was auch die eingetragenen Pfeile erkennen lassen. In der Formel  $T^{+1} \cdot n^{+1} = 1^{+1} \cdot s^{-1}$  zeigt das negative Vorzeichen des Exponenten von  $s$  diese Unterbrechung an. Für die Darstellung eines derartigen Formeltyps

können also für drei Seiten die vorgedruckten Teilungen benutzt werden.

Dieses Beispiel zeigt, daß sich die Teilungen auf den Quadratseiten auch noch auf andere Art aufragen lassen. Um dies zu zeigen, verwandeln wir die Produktgleichung  $P \cdot r = l \cdot G$  in die Quotientengleichung  $\frac{P}{G} = \frac{l}{r}$  und teilen jetzt unter Benutzung dieser Form die Quadratseiten. Die gegenüberliegenden

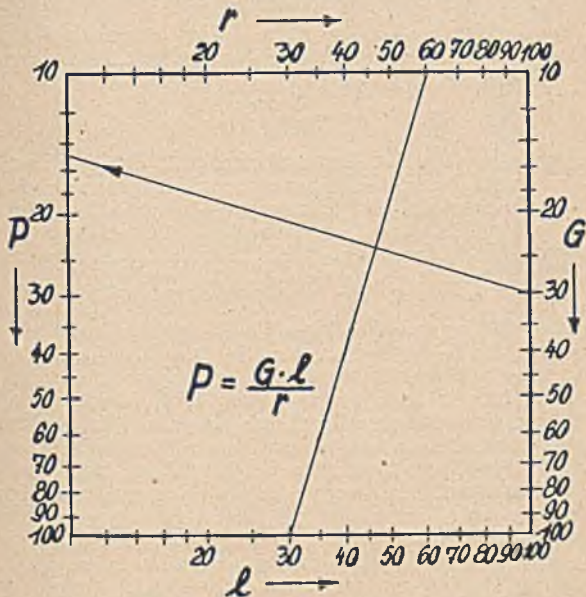


Bild 105. Ermittlung der Umfangskraft  $P$  durch Kreuzfluchttafel 2. Art (Darstellung der Quotientengleichung  $\frac{P}{G} = \frac{l}{r}$ ).

Seiten haben jetzt (siehe Bild 105) übereinstimmende Teilungsrichtung und der Drehsinn ist durch die Teilungsrichtung der  $G$ - und  $r$ -Seite unterbrochen. Eine derartige Darstellung bringt aber keine Vorteile, da auch hier für nur zwei Quadratseiten die vorgedruckte Teilung benutzt werden kann.

Die Leitertafel in Quadratform eignet sich gut zur Vereinigung mit einer Netztafel. In Netztafeln, die eine quadratische

Form aufweisen, können, wie wir schon gesehen haben, zwei Formeln dargestellt werden, die eine Veränderliche miteinander gemeinsam haben, und zwar sind es Formeln mit insgesamt 5 Veränderlichen. Wir wollen jetzt eine quadratische Leitertafel mit einer Netztafel verbinden, durch die die Formeln zur Leistungsermittlung an Maschinen dargestellt werden. Bekanntlich errechnet sich die Leistung N in PS aus der Beziehung

$$N = \frac{P \cdot v}{75}$$

wo P = Umfangskraft in kg und v die Umfangsgeschwindigkeit der Brems Scheibe in m/sek. Gleichzeitig ist die Umfangsgeschwindigkeit auch

$$v = \frac{2 r \pi n}{60}$$

wo r = Halbmesser der Brems Scheibe in m als Hebelarm der Umfangskraft P und n die Umlaufzahl der Brems Scheibe in der Minute darstellt. Zur Darstellung dieser beiden Formeln wählen wir wieder das nach beiden Richtungen log. geteilte Papier von Schleicher & Schüll Nr. 365 1/2. Zunächst stellen wir

hier die Formel  $N = \frac{P \cdot v}{75}$  dar und zwar wählen wir für

P = 10 — 100 kg und N = 10 — 100 PS für Geschwindigkeiten im Bereich von 1—30 m/sek. Auf der senkrecht stehenden Achse tragen wir die Werte für N und auf der waagerechten Achse für P auf. Wenn wir dann für v = 1, 2, 4, 8, 16 und 32 m/sek wählen, erhalten wir eine Geradenschar, deren Geraden untereinander parallel sind und gleichen Abstand voneinander haben, wenn wir die Werte nach den vorgedruckten Teilungen des Papiers eintragen. Die Geraden haben eine negative Steigung, d. h. sie weisen alle in die rechte Ecke des Blattes. Der Steigungswinkel beträgt 135°. Gleichzeitig kann man das Netz so vervollständigen, daß es die Form eines Quadrates erhält. Dreht man dann das Blatt so herum, daß die v-Linien jetzt eine positive Steigung haben und trägt man auf der waagerechten Achse die r-Werte in cm auf, so sind nur noch die n-Werte einzutragen.

Da die Formel  $v = \frac{2 r \pi n}{60}$  den konstanten Wert  $\frac{2 \pi}{60}$  enthält,

werden sich die Werte nicht mehr den Teilstrichen des Papiers anpassen lassen, sondern müssen durch Berechnung gefunden werden. Hier geht man so vor, daß man einen v- und n-Wert vorgibt und daraus den r-Wert ermittelt. Für n = 100 z. B. und v = 2 m/sek erhält man

$$r = \frac{2 \cdot 60}{2 \pi \cdot 100} = 192 \text{ cm}$$

und ebenso für  $n = 200$  und  $v = 4$  m/sek den Wert:

$$r = \frac{4 \cdot 60}{2 \pi \cdot 200} = 192 \text{ cm.}$$

Bild 106 zeigt, wie die  $r$ -Werte eingetragen wurden. Vergleicht man die so erhaltene Teilungseinheit mit der entsprechenden der  $r$ -Skala, so sieht man, daß die Teilung mit der der  $r = P$ - und  $N$ -Achse übereinstimmt. Weiter lassen die erhaltenen Werte auf die Auftragsrichtung der Werte der  $n$ -Achse

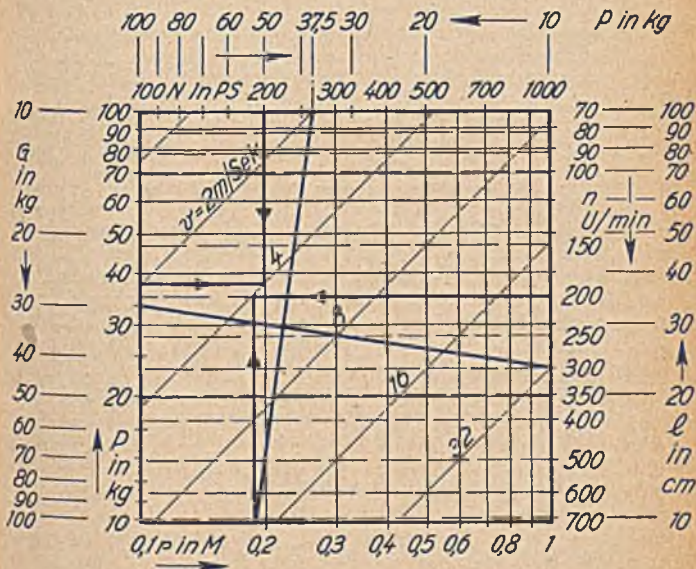


Bild 106. Leitertafel in Quadratform verbunden mit Netztafel (Darstellung der Beziehungen  $N = \frac{P \cdot v}{75}$  und  $v = \frac{2 \pi r n}{60}$  in einer Tafel).

schließen. Diese ist der der gegenüberliegenden  $P$ -Achse entgegengesetzt gerichtet. Wenn man die Teilung der  $n$ -Leiter durch Anlegen eines Streifens log. Papiers noch vervollständigt, erhält man eine vollkommen einwandfreie Netztafel in Quadratform. Von Vorteil ist es, daß drei Quadratseiten sofort unter Benutzung der vorgedruckten Teilungen beziffert werden können.

Wenn man nun diese Netztafel mit der quadratischen Kreuzfluchttafel verschmelzen will, wird man zunächst die beiden Tafeln so übereinander legen, daß die r-Leiter, die ja in beiden Tafeln vorkommt, zur Deckung gebracht wird. Jetzt kehrt sich die Teilungsrichtung der Leitern der Kreuzfluchttafel um (vergleiche Bild 103 mit Bild 106), so daß wir auch für die zweite Leiter (1-Leiter) die vorgedruckte Teilung des Papiers benutzen können. Das eingezeichnete Beispiel läßt erkennen, wie man mittels der bekannten Werte für  $N = 200$  PS und  $v = 4$  m/sek zunächst die Umfangskraft  $P = 37,3$  kg findet. Genau ebenso läßt sich noch durch den gegebenen Wert  $n = 200$  U/min der Halbmesser der Bremsscheibe zu  $r = 19,2$  cm ermitteln. Nun lege ich das Weiserkreuz so, daß der Mittelstrahl durch den eben gefundenen Punkt  $r = 19,2$  und den Punkt  $P = 37,5$  geht. Wähle ich für  $G$  den Wert 30 kg, geht der vierte Strahl des Weiserkreuzes durch  $l = 24$  und dies ist auch der verlangte Wert, da

$$l = \frac{P \cdot r}{G} = \frac{37,5 \cdot 19,2}{30} = 24 \quad \text{ist.}$$

Die Seiten der Quadrattafel lassen sich aber auch quadratisch teilen. Durch eine derartig geteilte Quadrattafel kann z. B. die Formel  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  dargestellt werden, d. h. also, es kann durch eine derartige Tafel die Diagonale eines vierseitigen Prismas ermittelt werden. Bringt man obige Gleichung auf die Normalform  $d^2 - a^2 = b^2 + c^2$ , so zeigt das negative Vorzeichen von  $a^2$  an, daß der Drehsinn der Teilungsrichtung durch die Teilung der a-Seite unterbrochen wird. Mit dieser Tafel läßt sich eine Tafel in Quadratform, deren Leitern logarithmisch geteilt sind, vereinigen. Ist die Teilungsrichtung der log. geteilten Leitern dieselbe wie die der quadratisch geteilten, so wird durch diese ein Formeltyp wie

$$u = x \cdot y \cdot z$$

dargestellt.

Diese Form besitzt z. B. auch die Formel

$$V = a b c$$

durch die sich das Volumen  $V$  eines vierseitigen Prismas aus den drei Kanten  $a, b, c$  berechnen läßt. Bild 107 zeigt die verbundene Quadrattafel. Sie wurde so hergestellt, daß man wieder unter Benutzung der vorgedruckten Teilungen ein quadratisches Stück des log. Papiers von Schleicher & Schüll Nr. 365½ bezifferte und darüber ein Stück transparentes Millimeterpapier breitete. Da die Zehnereinheit des genannten log. Papiers 10 cm beträgt, konnte man jetzt mit Hilfe der Millimeterteilung zunächst die quadratische Teilung für den Bereich von 1—100 mm eintragen, um dann auch die log. Teilung vom log. geteilten



Papier auf das Millimeterpapier abzupausen. Bei der Teilung der d-Seite ist zu beachten, daß der Bereich der Teilung dieser Seite sich von  $10^2$  bis  $14, 15^2$  erstreckt. Der Bereich der V-Seite dagegen umfaßt das Gebiet von 10 bis 100. Mit zwei Einstellungen eines Weiserkreuzes läßt sich also leicht das Volumen als auch die Diagonale eines vierseitigen Prismas aus den drei Kanten des Prismas rasch ermitteln. Um Verwechslungen der beiden Teilungen zu vermeiden, lege man mindestens eine der

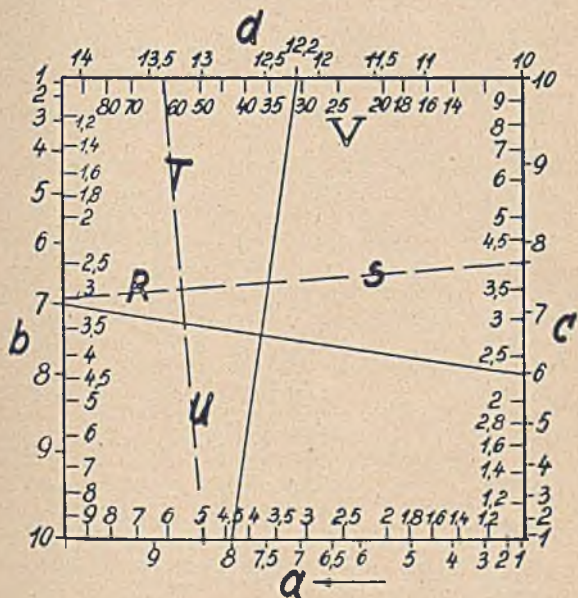


Bild 107. Verbindung einer log. geteilten und quadraticsh geteilten Quadrattafel (Darstellung der Beziehungen  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  und  $V = abc$  in einer Tafel).

Teilungen farbig an. Durch sinngemäße Bezifferung der Zentimeterteilung der Quadratseiten läßt sich darüber hinaus noch die Formel

$$S = a + b + c,$$

also die Summe der Seiten des Prismas darstellen. Mit dieser gleichförmigen Teilung wurden die Seiten der Quadratleitertafel Bild 108 versehen, um die Formel

$$O = 2(a b + a c + b c)$$

also die Oberfläche eines vierseitigen Prismas abzubilden. Die Oberflächenformel wurde zu diesem Zweck in drei Teilformeln zerlegt, die folgendermaßen bezeichnet wurden:

$$a b = x \qquad a c = y \qquad b c = z$$

Diese drei Teilformeln wurden durch N-förmige Leitertafeln dargestellt. Die Außenleitern dieser Tafelform sind — wie schon

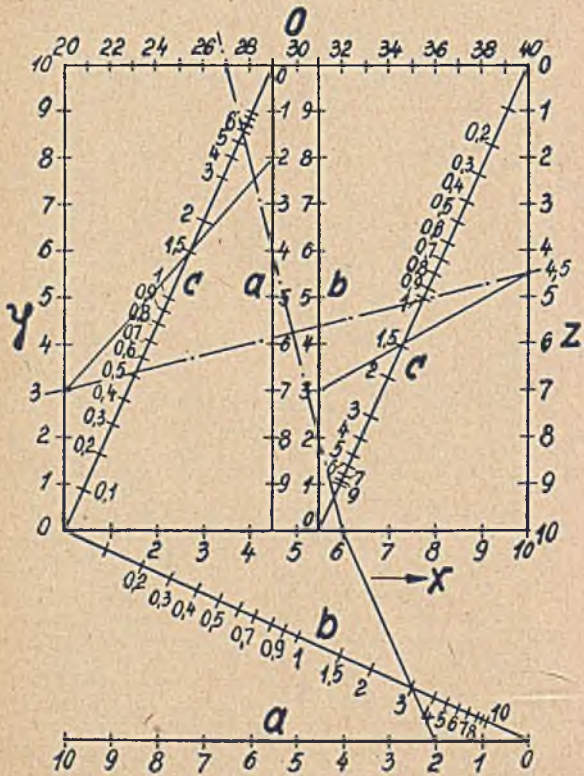


Bild 108. Quadratleitertafeln mit gleichförmig geteilten Leitern verbunden mit 3 Multiplikationstafeln in N-Form (Darstellung der Beziehungen  $O = 2(a b + a c + b c)$  und  $V = a b c$ ).

beschrieben — gleichförmig geteilt und somit als Nebentafeln der quadratischen Haupttafel gut zu verwenden. Die hier benutzte Quadrattafel zeigt Bild 102; die Teilungsrichtungen der Leitern stimmen in beiden Bildern überein. Die Teilung der Tafel in N-Form wurde gleichfalls in diesem Kapitel behandelt. Alle drei Teiltafeln wurden in vorliegendem Beispiel gleich geteilt. Der Bereich der 0-Seite verdoppelt sich durch den Faktor 2 der Formel. Die Tafel ist sehr leicht herzustellen und ebenso

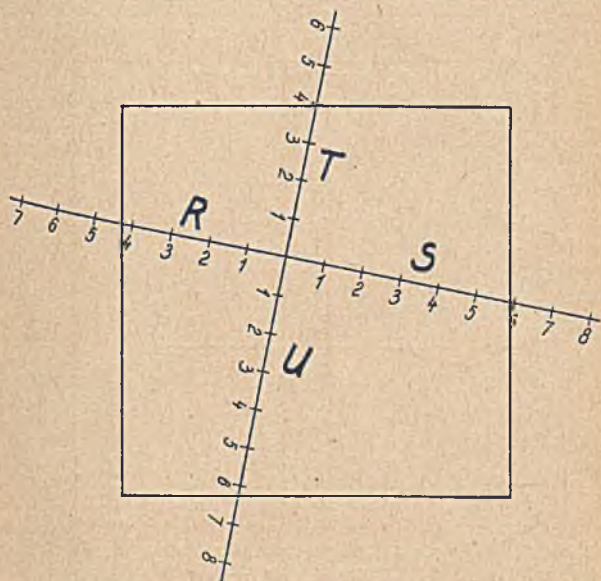


Bild 109. Weiserkreuz als Leitertafel (Darstellung der Beziehung:  $R + S = T + U$ ).

leicht zu handhaben. Ein eingezeichnetes Beispiel ( $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1,5$ ) erläutert den Lösungsweg. Die Bereiche der einzelnen Tafeln lassen sich selbstverständlich sinngemäß erweitern. Die Teilungen der  $x = y = z$ -Seiten, die eigentlich nur die Teil- oder Zwischenlösungen angeben, wurden deshalb nicht entfernt, weil so der Zusammenhang der Teillösungen mit der Hauptlösung klar erkannt werden kann.

Prüft man in der eben beschriebenen Tafel durch verschiedene Weiserstellungen nach, ob die Quadratseiten richtig ge-

teilt und beziffert sind und mißt hierbei die Länge der vier Strahlen des Weiserkreuzes innerhalb des Quadrates, dann macht man die Wahrnehmung, daß die Summe je zweier zusammengehöriger Kreuzteile gleich ist. In der Abb. 109 wurden diese Teile mit den Buchstaben R, S, T und U bezeichnet. Dementsprechend besteht also die Beziehung  $R + S = T + U$ , d. h. also das Weiserkreuz kann bei geeigneter Bezifferung die selbe Beziehung darstellen wie das Quadrat selbst. Von dieser Umkehrung macht man allerdings wenig Gebrauch. Verwandelt man das vierstrahlige Weiserkreuz in ein dreistrahliges und

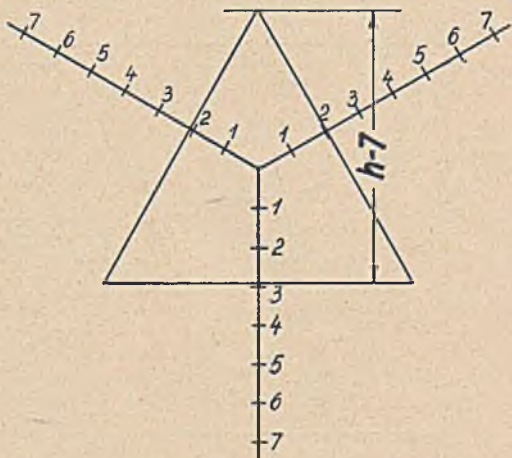


Bild 110. Weiserstern als Leitertafel (Darstellung der Beziehung  $a + b + c = h$ ).

zwar so, daß die Winkel, die die einzelnen Strahlen miteinander bilden, je 120 Grad betragen, dann ist dieser Dreistrahl bei geeigneter Teilung und Bezifferung eine Leitertafel, deren Eigenart wir kurz erläutern wollen. Läßt man von diesen drei Strahlen ein gleichseitiges Dreieck so schneiden, daß die Strahlen auf den Dreiecksseiten senkrecht stehen, dann ist die Summe der durch die Dreiecksseiten begrenzten Strahlen gleich der Höhe des Dreiecks (Abb. 110). Beziffert man die gleichförmig geteilten Strahlen des Dreistrahls und verschiebt man das Dreieck auf dem Dreistrahl so, daß die Strahlen immer senkrecht auf den Dreiecksseiten stehen, dann ergänzen sich also die einzelnen

Abschnitte des Dreistrahls zum Längenmaß der Dreieckshöhe. Durch diese Tafelanordnung wird also die Beziehung

$$a + b + c = h$$

verwirklicht.

Durch Parallelverschiebung einer Dreiecksseite kann die Höhe  $h$  nach Wunsch verändert werden. Der Dreistrahl ist nun allerdings als Rechentafel nicht recht geeignet, zumal dann nicht, wenn die Struktur der darzustellenden Formel den Aufbau einer Teiltafel notwendig macht. Wir lassen also die beiden Rechenhilfen ihre Rollen tauschen und machen jetzt das Dreieck durch Teilung und Bezifferung seiner Dreiecksseiten zur Rechentafel und den Dreistrahl zum Weiserstern. Allerdings muß jetzt der Dreistrahl so gedreht werden, daß die einzelnen Strahlen zu den Dreiecksseiten parallel stehen. Die Strahlen des Weisersterns zerschneiden die drei Dreiecksseiten in je zwei Abschnitte.



Bild 111 a.

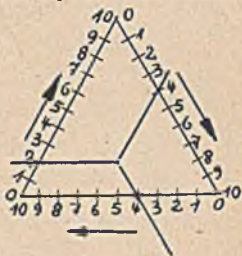


Bild 111 b.

Einstellungen des Dreistrahls bei verschiedenen Bezifferungsrichtungen der Dreiecksseiten.

Drei Abschnitte dieser Seiten, die nicht zusammenstoßen, ergänzen sich jetzt zur Größe einer Dreiecksseite. Teilt man die Dreiecksseiten in je 10 Teile und beziffert die Teilstriche so, daß die Teilungsrichtung wieder einen Drehsinn ergibt, dann kann durch diese Anordnung ebenfalls die Beziehung

$$a + b + c = s$$

dargestellt werden, nur daß jetzt  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Maße der Abschnitte der Dreiecksseiten bedeuten und  $s$  das Maß der Dreiecksseite selbst darstellt, das selbstverständlich immer gleich bleibt. Bei der Einstellung des Dreistrahls ist zu beachten, daß diese vom Drehsinn der Teilungsrichtung abhängt. Da durch die Bezifferung der Teilungseinheiten ein Drehsinn rechts herum und links herum erzeugt werden kann, ist der Dreistrahl dem Drehsinne entsprechend einzustellen. Die Abbildungen 111 a

und b zeigen die Einstellungen des Dreistrahls bei Bezifferung im Uhrzeigersinne (rechts herum) bzw. bei Bezifferung im Gegenuhrzeigersinne (links herum). Dieser Anordnung haftet insofern ein Mangel an, als die Bewegung des Weiserkreuzes immer parallel den Dreiecksseiten erfolgen muß. Man bedient sich daher des Weisersterns nicht mehr, um die Lösung zu finden, sondern versieht das Dreieck mit Koordinaten parallel den Dreiecksseiten. Dieses Koordinatensystem in Dreiecksform hat allerdings noch andere Aufgaben zu erfüllen, als die Darstellung einer

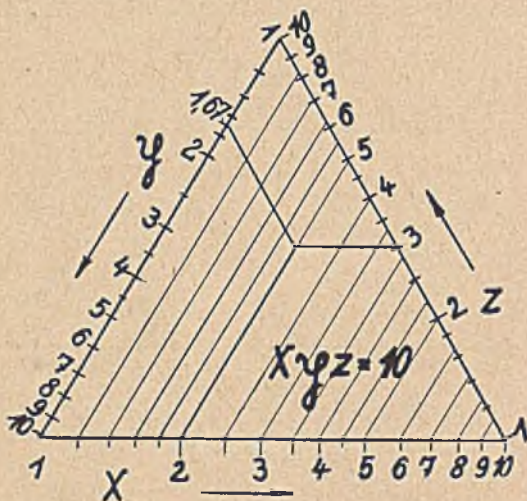


Bild 112. Leitertafel in Dreiecksform (Darstellung der Beziehung  $x y z = 10$ ).

Beziehung  $a + b + c = s$ . Auf diese soll in einem der nächsten Kapitel noch genauer eingegangen werden. Genau wie die Leitern der Leitertafel in Quadratform können auch die Leitern der Leitertafel in Dreiecksform logarithmisch, quadratisch usw. geteilt werden. Teilt man die Seiten logarithmisch, dann lautet die durch diese Form dargestellte Beziehung

$$x y z = \text{const.}$$

Bild 112 zeigt diese Tafel. Für const wurde der Wert 10 gewählt. Bei entsprechender quadratischer Teilung kann die analytische Beziehung der Kugel:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{const}$

verwirklicht werden. Durch entsprechende Umkehrung der Teilung läßt sich z. B. auch die Formel  $\frac{x \cdot y}{z} = 1$  (Bild 113) abbilden. Dies ist also die 6. Möglichkeit, die Multiplikationsformel  $x \cdot y = z$  zu vertafeln. Die fünf anderen Tafeltypen waren

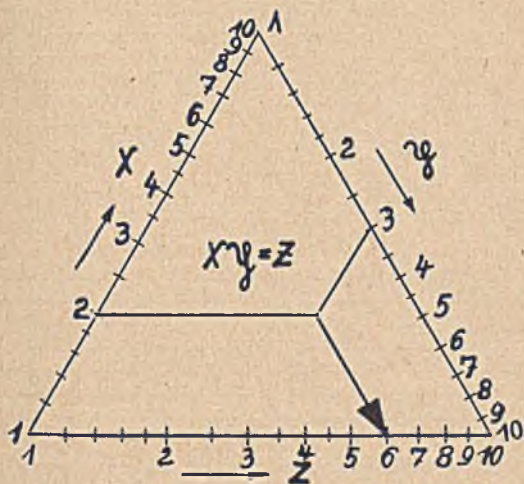


Bild 113. Multiplikationstafel in Dreiecksform (Leitern sind log. geteilt).

1. die normale log. geteilte Dreileitertafel (Bild 70),
2. die Dreileitertafel in N-Form mit gleichförmig geteilten Außenleitern (Bild 97),
3. die Hyperbeltafel im gleichförmig geteilten Netz (Bild 48),
4. die Strahlentafel im gleichförmig geteilten Netz (Bild 46),
5. die Strahlentafel im log. geteilten Netz (Bild 60).

Aus dieser Zusammenstellung ist zu ersehen, wie mannigfaltig die Darstellungsmethoden der graphischen Rechentechnik sind. Allerdings ist auch hier bei der Auswahl der möglichen Darstellungsform Zweck und Ziel zu erwägen.

## VIII. Leitertafeln mit nichtgeradlinigen Leitern

Durch sogen. allgemeine Leitertafeln werden meist Formeln vertafelt, die die Form von quadratischen oder kubischen Gleichungen haben. Viele Formeln weisen gerade die Form von quadratischen oder kubischen Gleichungen auf. Da die streng mathematische Lösungsmethode jedoch zu viel mathematische Kenntnisse voraussetzt, wollen wir für diese Gleichungsform einfache graphische Lösungsmethoden angeben. Quadratische Gleichungen sind allerdings auch streng mathematisch leicht zu lösen und der Lösungsweg bietet zu allerlei rechen-technischen Betrachtungen willkommenen Anlaß.

Eine vollständige quadratische Gleichung — und die interessiert hier nur — hat die Form (Normalform)

$$x^2 + a x + b = 0.$$

Eine derartige Gleichung besteht also aus dem quadratischen Glied der Unbekannten ( $x^2$ ) und dem linearen Glied der Unbekannten ( $x$ ); die Größen  $a$  und  $b$  sind Zahlenwerte. Jede quadratische Gleichung kann auf die Normalform gebracht werden. Die Verwandlung einer quadratischen Gleichung in ihre Normalform ist der erste Schritt zur Lösung bei Anwendung einer streng mathematischen Lösungsmethode. Es gibt in der Hauptsache drei Lösungswege für quadratische Gleichungen:

1. Näherungslösung durch Abbildung im gleichförmig geteilten Netz;
2. genaue mathematische Lösung durch Bildung des sog. Ergänzungsquadrates;
3. Lösung durch Benutzung der Beziehungen

$$x_1 + x_2 = a, \quad x_1 x_2 = b.$$

Wir wollen jetzt die einzelnen Lösungswege etwas genauer durchsprechen. Der erste Lösungsweg ist folgender: Zunächst setzen wir für die Zahl 0 der rechten Seite der Normalform eine zweite Variable  $D$ . Warum gerade der Buchstabe  $D$  gewählt wurde, wird der Leser bald erfahren. Durch diese neue Variable wird die Gleichung zu einer Gleichung mit zwei Unbekannten. Sie ist in einem gleichförmig geteilten Netz darstellbar nach Aufstellung einer Tabelle für die  $x$ - und  $D$ -Werte. Die Wertepaare in das Netz eingetragen ergeben durch Kurvenzug verbunden eine Parabel. Diese Art, eine Gleichung zu lösen ist eine Näherungslösung insofern, als wir uns mit jedem Werte, den wir für  $x$  wählen, der  $x$ -Achse und damit dem richtigen Werte für  $x$  nähern. Jedem Werte von  $x$ , der keine Lösung ist, entspricht ein  $D$ -Wert. In dem Augenblick, wo der richtige Wert



für  $x$  in die Gleichung eingesetzt wird, ist der  $D$ -Wert Null, d. h. jetzt ist keine Differenz zwischen der rechten und der linken Seite der Gleichung mehr vorhanden. Die  $D$ -Werte sind also Differenzwerte, die angeben, nach welcher Richtung die Lösung zu finden ist. Die Richtung zum Auffinden des richtigen  $x$ -Wertes ist zunächst durch den immer kleiner werdenden  $D$ -Wert gekennzeichnet. Der Lösungswert für  $x$  macht also die linke Seite der Gleichung zu Null. Die Eintragung der sich ergebenden Wertepaare ins Netz verfolgt den Zweck, die Suchrichtung einwandfrei festzustellen. Genau wie bei einer Messung ermittelt man zunächst ganz grob den ungefähren Wert für  $x$ , um dann durch Einsetzen von entsprechend fein abgestuften  $x$ -Werten die endgültige Lösung zu finden. Wählt man jedoch einen zu kleinen Lösungswert für  $x$ , dann wird der entsprechende  $D$ -Wert negativ. Durch Verbinden eines nicht zu großen positiven mit einem nicht zu großen negativen  $D$ -Wert erhält man schließlich ebenfalls den richtigen  $x$ -Wert durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der  $x$ -Achse.

Diese Methode, die Lösung zu finden, ist sinngemäß auch bei allen höheren Gleichungen anzuwenden.

Die eben allgemein beschriebene Lösungsmethode wollen wir jetzt an einem praktischen Beispiel erproben und wählen hierfür die Formel zur Ermittlung der Oberfläche eines Kegels:

$$F = r^2 \pi + r \pi s,$$

wo  $s = \sqrt{r^2 + h^2}$  die sog. Seitenlinie des Kegels,  $r$  den Radius des Grundkreises und  $h$  die Höhe des Kegels ist. Gemäß unserer Lösungsvorschrift bringen wir diese Formel zunächst auf die Normalform der quadratischen Gleichung für  $r$  und erhalten so:

$$r^2 + r s - \frac{F}{\pi} = 0.$$

Wählen wir für  $s = 6$  cm und für  $\frac{F}{\pi} = 27$ , so ist:

$$r^2 + 6r - 27 = 0.$$

Setzt man jetzt für  $0$  die Variable  $D$  ein, so erhält man:

$$r^2 + 6r - 27 = D.$$

Durch Einsetzen einiger beliebiger Zahlenwerte suche ich zu ermitteln, in welcher Richtung der Lösungswert für  $r$  liegt. Man wählt  $r = 10$  und  $r = 5$  und erhält:

$$r = 10 \quad 100 + 60 - 27 = 133$$

$$r = 5 \quad 25 + 30 - 27 = 28.$$

Die  $D$ -Werte 133 und 28 zeigen an, daß die richtige Lösung für  $r$  noch kleiner als 5 ist, d. h. es ist in Richtung kleiner werdender  $r$ -Werte weiter zu suchen. Man erhält also weiter für

$$\begin{aligned} r = 4 & \quad 16 + 24 - 27 = 13 \\ r = 3 & \quad 9 + 18 - 27 = 0. \end{aligned}$$

Der Lösungswert ist mit  $r = 3$  gefunden. Geht man jetzt mit den  $r$ -Werten noch weiter herunter, so werden die  $D$ -Werte negativ und zwar wird ihr Betrag zunächst größer, dann wieder kleiner, um schließlich bei  $r = -9$  zum zweiten Mal den  $D$ -Wert zu Null zu machen. Man erhält also folgende Tabelle:

Tabelle 21.

$r$	$r^2 + 6r - 27 = D$
2	$4 + 12 - 27 = -11$
1	$1 + 6 - 27 = -20$
0	$0 + 0 - 27 = -27$
- 1	$1 - 6 - 27 = -32$
- 2	$4 - 12 - 27 = -35$
- 3	$9 - 18 - 27 = -36$
- 4	$16 - 24 - 27 = -35$
- 5	$25 - 30 - 27 = -32$
- 6	$36 - 36 - 27 = -27$
- 7	$49 - 42 - 27 = -20$
- 8	$64 - 48 - 27 = -11$
- 9	$81 - 54 - 27 = 0$
- 10	$100 - 60 - 27 = +13$
- 11	$121 - 66 - 27 = +28$

Bild 114 zeigt die in ein gleichförmig geteiltes Netz eingetragen und durch Kurvenzug verbundenen Punkte. Auf der waagerechten Achse sind die  $r$ -Werte, auf der senkrechten Achse die  $D$ -Werte zu finden. Die entstandene Kurve ist eine Parabel, muß daher die  $r$ -Achse in zwei Punkten schneiden und zwar sind dies in vorliegendem Falle die Punkte  $r_1 = +3$  cm,  $r_2 = -9$  cm (?!). Wie leicht einzusehen, ist nur der positive Wert als Lösung für obige Gleichung brauchbar. Es folgt daraus, daß jede quadratische Gleichung zwei Lösungswerte hat. Verschieben wir jetzt die Parabel (Bild 114) nach oben, dann rücken die Schnittpunkte der Parabel mit der  $x$ -Achse immer näher zusammen, bis sie schließlich zusammenfallen. Jetzt berührt die Parabel mit ihrem Scheitel gerade die  $x$ -Achse. Lassen wir die Parabel noch ein kleines Stück nach oben wandern, dann schneidet die Parabel nicht mehr die  $x$ -Achse. Berührt die Parabelscheitel die  $x$ -Achse, erhalten wir einen Lösungswert.

schneidet die Parabel die x-Achse nicht, erhalten wir keinen „reellen“ Lösungswert mehr für x.

Um alle diese Möglichkeiten klar und deutlich aufzuzeigen, betrachten wir einmal den zweiten Lösungsweg. Diese mathematisch genaue Lösungsmethode kommt durch Hinzufügen

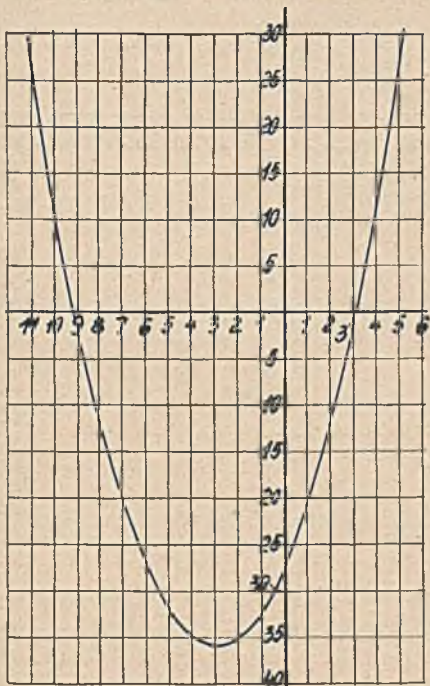


Bild 114. Lösung einer quadratischen Gleichung durch graphische Näherungsmethode.

des sog. quadratischen Ergänzungsgliedes auf beiden Seiten der quadratischen Gleichung zum Ziel. Dieser Schritt sieht für die erwähnte Volumengleichung folgendermaßen aus:

$$r^2 + 6r + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 27 + \left(\frac{6}{2}\right)^2.$$

Der Form  $r^2 + 6r + \left(\frac{6}{2}\right)^2$  entspricht die Grundformel der Algebra

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

wo also der Wert  $\frac{6}{2}$  dem Wert  $b$  entspricht. Es ist also

$$\left(r + \frac{6}{2}\right)^2 = 36 \text{ bzw. } r = -3 \pm \sqrt{36}$$

oder anders geschrieben

$$r_1 = -3 + 6 = 3 \quad \text{und} \quad r_2 = -3 - 6 = -9.$$

Dieser zahlenmäßig durchgeführte Lösungsweg kann jedoch auch aus der Normalform  $x^2 + ax + b = 0$  entwickelt werden. Wir erhalten hier:

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Aus dieser Form der Lösung lassen sich leicht jene oben erwähnten drei Fälle erkennen. Ist z. B.  $\frac{a^2}{4} = b$ , so ist offenbar der Wurzelwert  $= 0$  und wir erhalten eine Lösung. Ist  $\frac{a^2}{4} > b$  erhalten wir einen reellen (positiven) Wurzelwert und damit zwei Lösungswerte. Wird dagegen  $\frac{a^2}{4} < b$ , erhalten wir unter der Wurzel negative Werte und damit keinen reellen Lösungswert. Negative Zahlen unter der Wurzel nennt man imaginäre Zahlen. Die Einheit einer imaginären Zahl ist  $\sqrt{-1} = i$ . Die Lösung einer quadratischen Gleichung, wo  $\frac{a^2}{4} < b$  ist, setzt sich aus einer gewöhnlichen (reellen) und einer imaginären Zahl zusammen. Die Vereinigung von reeller und imaginärer Zahl nennt man komplexe Zahl. In den Fällen, wo auch komplexe Zahlen als Lösungen quadratischer Gleichungen berücksichtigt werden müssen (Aufgaben aus der Schwingungstechnik) führt die graphische Näherungsmethode nicht zum Ziel. (Siehe auch: Nomogramme für die komplexen Wurzeln charakteristischer Gleichungen von Schwingungsproblemen von O. Hecc

und A. Walther, Ing.-Archiv 1. Band 1930 S. 611.) Die Lösungs-

formel  $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$  kann schließlich mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, so daß man den Lösungswert als Summe oder Differenz aus  $\frac{a}{2}$  und  $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$  erhält. Setzt

man für den Wurzelwert  $y$  ein, so ist  $a^2 = (2\sqrt{b})^2 + (2y)^2$ . Ist in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypothense  $a$  und die eine Kathete  $2\sqrt{b}$ , dann ist die andere Kathete  $2y$ . Zählt man die Hälfte dieser Kathete zeichnerisch je nach dem Vorzeichen zu  $\frac{a}{2}$  zu oder von  $\frac{a}{2}$  ab, dann erhält man die beiden Lösungen. Diese Lösung durch Zirkel und Lineal ist für unsere rechentechnischen Zwecke viel zu umständlich und nicht recht brauchbar.

Der dritte Lösungsweg dagegen enthält eher Möglichkeiten einer einfachen Darstellung. Dieser Weg ist durch Benutzung einiger Beziehungen zwischen den Lösungswerten und den Zahlenkonstanten  $a$  und  $b$  festgelegt. Geht man nämlich hier von der quadratischen Gleichung der Form:

$$x^2 - ax + b = 0$$

aus, dann gelten folgende einfachen Beziehungen zwischen den beiden Lösungswerten der quadratischen Gleichung  $x_1$  und  $x_2$  und den Zahlengrößen  $a$  und  $b$ .

$$x_1 + x_2 = a \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = b.$$

Eine quadratische Gleichung habe z. B. die Form

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Die Lösungswerte dieser Gleichung werden zu  $x_1 = 3$  und  $x_2 = 4$  ermittelt, so daß folgende Beziehung bestehen muß:

$$x_1 + x_2 = a = 7 \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = b = 12.$$

Diese Beziehungen sind zeichnerisch leicht darzustellen. Schlägt man z. B. über der Strecke  $x_1 + x_2 = 7$  einen Kreis und zieht im Abstand von  $b' = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{12}$  eine Parallele zu  $x_1 + x_2$ , so trifft diese Parallele den Kreis in zwei Punkten. Fällt man von einem dieser Punkte das Lot auf die  $(x_1 + x_2) =$  Strecke, so zerlegt dieses Lot die  $(x_1 + x_2) =$  Strecke in die Teilstrecken  $x_1$  und  $x_2$ . Trägt man die verschiedenen Werte für  $\sqrt{x_1 x_2}$  auf der Peripherie des Halbkreises auf, so würde man hierdurch eine Art Kreisleiter erhalten. Bild 115 zeigt eine derartige „Leiter“ in Kreisform. Aus dem Bilde ist zu ersehen, wie die Teilung erhalten wurde. Die

abgebildete Kreisleiter stellt die bestimmte quadratische Gleichung dar

$$x^2 - 7x + b = 0,$$

wo  $b'$  sich von 0 bis  $\sqrt{3,5^2}$  verändern läßt. Wollte man dann weiter die Gleichung  $x^2 - 8x + b = 0$  z. B. darstellen, dann wäre ein neuer Kreis zu zeichnen mit dem Halbmesser  $a = 8$ .

wo sich  $b'$  jetzt in einem Bereich von 0 bis  $\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2}$  verändern kann. Die beiden Halbkreise berühren sich alle im Nullpunkte der  $(x_1 + x_2) =$  Skala. Bei einem Versuch, mehrere Kreise mit immer kleiner werdenden Halbmessern, wie angegeben, zu zeichnen, wird man einsehen, daß auf solche Weise eine feinere

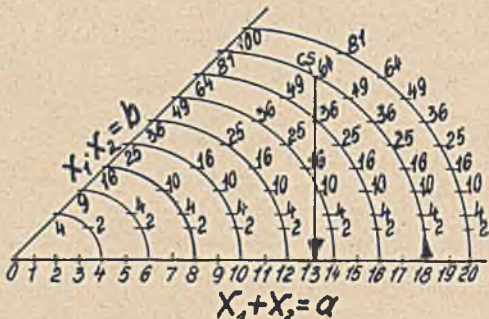


Bild 115. Darstellung quadratischer Gleichungen durch Kreisleitern. Beispiel:  $x^2 - 18x + 65 = 0$ ;  $x_1 + x_2 = 18$ ;  $x_1 x_2 = 65$ ;  $x_1 = 13$ ;  $x_2 = 5$ .

Unterteilung der  $(x_1 + x_2)$  Skala nicht möglich ist. Bei einer großen Anzahl von Halbkreisen wird die Ablesung ungenau und die erhaltenen Werte fehlerhaft. Durch eine andere Anordnung ist es jedoch möglich, die Kreisdurchmesser feiner zu unterteilen. Diese Anordnung wird in Kap. 13 beschrieben.

Der Gang der Lösungen der oben angegebenen quadratischen Gleichung  $x^2 - 7x + 12 = 0$  ist dann folgender: Man geht auf dem nach Maßgabe der Werte  $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{b}$  geteilten Kreisumfang so lange weiter, bis man zum Punkt  $b = 12$  gelangt. Von diesem Punkte fällt man das Lot auf den Halbmesser des Kreises, dessen Maß  $x_1 + x_2 = 7$  cm beträgt. Das Lot trifft den Halbmesser im Punkte 4, d. h. es ist  $x_1 = 4$  und  $x_2 = 3$ . Dies sind die gesuchten Werte der quadratischen Gleichung.

So einfach an und für sich diese Lösung ist, so haftet ihr

doch der Mangel eines nur beschränkten Anwendungsbereiches an. Einer solchen Beschränkung ist die sog. allgemeine Leiter-  
 tafel in geringerem Maße unterworfen. Wir wollen daher die  
 quadratische Gleichung durch das allgemeine Leiternomogramm  
 darstellen. In einer derartigen Tafel ist es möglich, alle Werte  
 für  $x$  als auch für  $a$  und  $b$  gleich übersichtlich zu erfassen. Bei  
 der jetzt zu beschreibenden Rechentafel sollen gleichfalls Kreis  
 und Gerade durch Teilung und Bezifferung zu Leitern werden.  
 Diese Darstellung ist vorzugsweise dann zu verwenden, wenn  
 die Leitertafel nicht in ein zusammengesetztes Tafelgefüge ein-  
 geordnet zu werden braucht. Zunächst wollen wir einmal unter-  
 suchen, auf Grund welcher mathematischer Beziehungen ein  
 Kreis überhaupt geteilt werden kann. Denkt man sich einen  
 Kreis in den Mittelpunkt eines rechtwinkligen Koordinaten-  
 systems gerückt, so lautet seine Gleichung bekanntlich:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Diese Gleichungsform ist für die Darstellung einer Leiter-  
 tafel nicht recht brauchbar. Es hat sich ergeben, daß erst dann  
 eine für unsere Zwecke brauchbare Beziehung entsteht, wenn  
 man den Kreismittelpunkt solange auf der  $x$ -Achse verschiebt,  
 bis dieser Kreis die  $y$ -Achse berührt. Nehmen wir zudem an,  
 daß es sich um einen Einheitskreis handelt, dessen Durchmesser  
 $D = 1$  beträgt. Der Kreis ist also um den Betrag  $\frac{D}{2} = \frac{1}{2}$  nach  
 rechts verschoben. Aus der oben angegebenen Mittelpunkts-  
 gleichung ist also entstanden:

$$(1) \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Diese Gleichung kann nach einiger Umformung zur Ver-  
 tafelung benutzt werden. Wir trennen sie so, daß über ein  
 beiden getrennten Beziehungen gemeinsames Verbindungsglied  
 zwei Bestimmungsgleichungen für  $x$  und  $y$  entstehen. Multipli-  
 ziert man Gleichung 1 aus, so erhält man:

$$y^2 = x - x^2.$$

Nach Division durch  $x^2$  wird hieraus

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1-x}{x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Wollen wir einen größeren Bereich verwenden, dann multipli-  
 zieren wir beide Gleichungsseiten mit einem Wahlfaktor z. B.  
 mit 100. Gleichzeitig ähneln wir die linke Gleichungsseite formal  
 der rechten an. Es ist danach:

$$\frac{y(x+1-x)}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}; \quad y + y \frac{1-x}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

oder

$$(2) \quad 100y + y \left( \frac{100 - 100x}{x} \right) = 100 \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Bezeichnen wir die rechte Seite der Gleichung mit  $10A$ , so ist

$$(3) \quad A = 10 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad \text{oder nach } x \text{ entwickelt}$$

$$(4) \quad x = \frac{100}{100 + A^2}$$

Da nun  $A^2 = \frac{100(1-x)}{x}$  ist, kann Gleichung (2) geschrieben werden:  $100y + yA^2 = 10A$  oder nach  $y$  entwickelt

$$(5) \quad y = \frac{10A}{100 + A^2}$$

Die Beziehungen (4) und (5) sollen uns nun dazu verhelfen, den Kreisumfang zu teilen. Für vorgegebenes  $A$  errechnet sich dann auch  $x$  und  $y$ . Die errechneten  $x$ - und  $y$ -Werte müssen sich auf der Kreisperipherie schneiden. Dieser Umstand ermöglicht eine Kontrolle der berechneten Werte. Man zeichnet also auf Millimeterpapier ein Koordinatenkreuz und trägt in das so entstandene Netz die  $x$ - $y$ -Werte der Tabelle ein, wobei einem cm die Einheit 0,1 entspricht. Tabelle 22 enthält die zur Teilung des Kreisumfangs benötigten Werte.

Man sieht aus der Tabelle, daß die negativen und positiven Werte der  $A$ -Leiter symmetrisch zur  $x$ -Achse liegen. Die Kreisleiterteilung kann man sich also auch nur durch Berücksichtigung der  $x$ -Werte entstanden denken. Jetzt steht noch die Teilung der  $a$ - und  $b$ -Leiter aus. Die  $y$ -Achse wird Trägerin der  $a$ -Werte, die  $x$ -Achse die der  $b$ -Werte. Die Teilung dieser Leitern geht nun so vor sich, daß zwecks Teilung der  $y$ -Achse z. B. vom Nullpunkt der  $x$ -Leiter aus die einzelnen Punkte der  $x$ -Leiter verbunden werden (Bild 116). Wenn nun die Punkte  $x = 0$  und  $x = -10$  der  $x$ -Leiter verbunden werden, so bedeutet das, daß eine quadratische Gleichung mit den Lösungswerten  $x_1 = 0$  und  $x_2 = -10$  gelöst werden soll. Die Lösung bedeutet hier: Finden der  $a$ - und  $b$ -Werte. Die quadratische Gleichung kann geschrieben werden:

$$(x - 0)(x + 10) = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + 10x = 0.$$

Der Wert  $+10$  entspricht dann dem  $a$ -Wert auf der  $y$ -Achse. Verbindet man weiter die Punkte  $x_1 = +10$ ,  $x_2 = -20$  miteinander, so erhält man folgende quadratische Gleichung:

$$(x + 10)(x - 20) = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - 10x - 200 = 0.$$

Der Wert  $-10$  würde dann dem Werte  $a = -10$  auf der



Tabelle 22.

A	x	y	A	x	y
0	1	0	60	0,027	0,162
1	0,99	0,099	70	0,002	0,140
2	0,96	0,192	80	0,015	0,123
3	0,917	0,275	90	0,012	0,109
4	0,862	0,344	100	0,009	0,099
5	0,800	0,400	— 1	0,99	— 0,099
6	0,735	0,441	— 2	0,96	— 0,192
7	0,671	0,469	— 3	0,917	— 0,275
8	0,609	0,487	— 4	0,862	— 0,344
9	0,553	0,497	— 5	0,800	— 0,400
10	0,5	0,500	— 6	0,735	— 0,441
11	0,453	0,497	— 7	0,671	— 0,469
12	0,410	0,492	— 8	0,609	— 0,487
13	0,372	0,484	— 9	0,553	— 0,497
14	0,328	0,473	— 10	0,500	— 0,500
16	0,281	0,45	— 11	0,453	— 0,497
18	0,241	0,434	— 12	0,410	— 0,492
20	0,200	0,400	— 13	0,372	— 0,484
25	0,138	0,345	— 14	0,328	— 0,473
30	0,100	0,300	— 16	0,281	— 0,450
40	0,059	0,235	— 18	0,241	— 0,434
50	0,033	0,192	— 20	0,200	— 0,400

y-Leiter entsprechen. Die Werte  $\pm 10$  grenzen auf der a-Achse ein bestimmtes Gebiet ab, das zu unterteilen ist. Die verschiedenen Werte der a-Leiter liegen symmetrisch zur x-Achse, ebenso wie die entsprechenden Punkte der x-Leiter. Die übrigen Punkte der a-Leiter erhält man, wie schon angedeutet, durch Verbindung des Null-Punktes der x-Leiter mit den Punkten  $x = 11, 12 \dots 70$  bzw.  $x = -11, -12 \dots -70$ . Mit Hilfe der Teilung der a-Achse gelingt es uns jetzt leicht, auch die x- bzw. b-Achse zu teilen. Verbindet man z. B. den Punkt  $a = -10$  mit den Punkten  $x_1 = 20$  und  $x_2 = -20$ , so erhält man nach Einsetzen dieser Werte in die Normalform der quadratischen Gleichung:

$$400 - 10 \cdot 20 - 200 = 0 \quad \text{bzw.} \quad 400 - 200 + b = 0.$$

Dies bedeutet, daß dem von der Verbindungslinie dieser beiden Werte geschnittene Punkt auf der b-Leiter der Wert  $b = -200$  zukommt (siehe Bild 116). Die Verbindungslinie der Punkte  $x_1 = +10$  und  $x_2 = -10$  schneidet die b-Leiter gerade im Punkte  $-100$ , denn

$$(x + 10) \cdot (x - 10) = 0; \quad x^2 - 100 = 0; \quad a = 0; \quad b = -100.$$

Ganz ebenso erhält man alle anderen Werte der  $b$ -Achse. Nach erfolgter Teilung der  $x = a = b$ -Leiter verbinde man zwei Werte der  $a$ - und  $b$ -Leiter und prüfe noch einmal durch Rech-

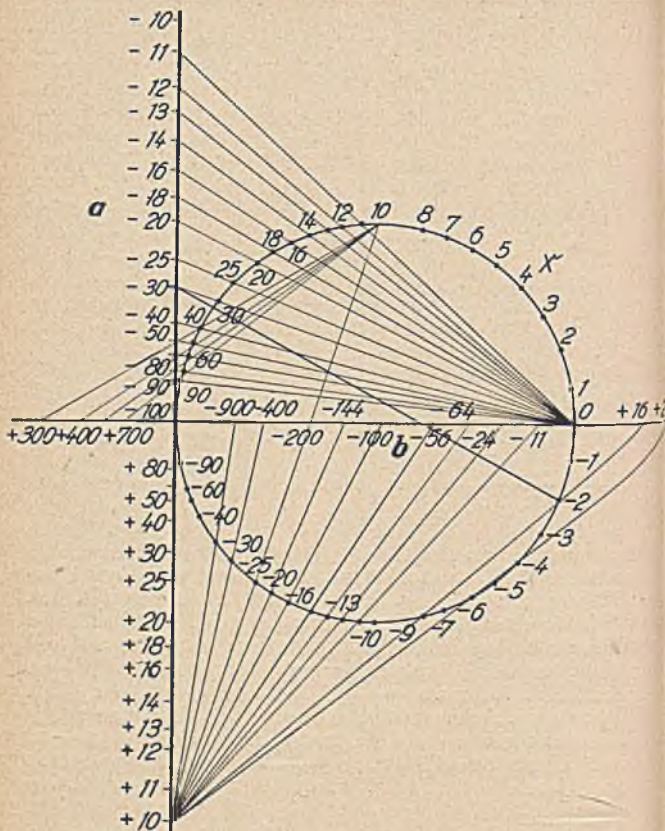


Bild 116. Konstruktion der Teilungen einer Kreisleiter.

nung nach, ob der durch die Verbindungslinie erhaltene Schnittpunkt auf der  $x$ -Leiter richtig beziffert ist. Gegeben sei z. B.  $a = -30$ ,  $x_1 = -2$ . Setzt man diese Werte in die Normalform der quadratischen Gleichung ein, erhält man:  $4 + 2 \cdot 30 = 64$

d. h.  $b = -64$ . Das Bild 116 läßt erkennen, daß die Verbindungslinie der betreffenden Werte die  $x$ -Leiter im Punkte  $x = -2$  trifft. Wir fassen zum Schluß noch einmal den Gang bei der Leiterteilung in vier Punkten zusammen:

1. Teilung des Kreises im Koordinatensystem mittels der

$$\text{Beziehungen } x = \frac{100}{100 + A^2} \text{ und } y = \frac{10A}{100 + A^2}$$

2. Teilung der  $a$ - ( $y$ -) Leiter durch Konstruktion

3. Teilung der  $b$ - ( $x$ -) Leiter mittels Teilung der  $a$ -Leiter.

4. Kontrolle der Teilung durch Verbinden zweier willkürlich gewählter Punkte auf der  $a$ -,  $x$ - oder  $b$ -Leiter und Nachrechnung durch Einsetzen der gewählten Werte in die Normalform der quadratischen Gleichung.

Diese Tafelform kann z. B. für die Darstellung der Formel zur Berechnung der Oberfläche eines Zylinders verwendet werden. Sie lautet:  $F = 2r^2\pi + 2r\pi h$ , wo  $r$  = Radius der Grundkreisfläche und  $h$  = Höhe des Zylinders. Als Normalform lautet obige Gleichung:  $r^2 + rh - \frac{F}{2\pi} = 0$ . Aus dieser Form der quadratischen Gleichung geht hervor, daß einmal nur positive Werte für  $h$ , das andere Mal nur negative Werte für  $\frac{F}{2\pi}$

in Frage kommen. Außerdem sind als Lösungen nur positive  $r$ -Werte zu berücksichtigen. Die nach diesen Gesichtspunkten geformte Tafel zeigt Bild 117. Die Werte der  $b$ -Leiter werden durch Multiplikation von  $2\pi$  in die allein interessierenden  $F$ -Werte verwandelt. Ist z. B.  $h = 27$  mm und der Radius des Grundkreises  $r = 6$  mm, so wird die Oberfläche des Zylinders durch Verbinden dieser beiden Punkte ermittelt. Ihre Verbindungslinie schneidet die  $F$ -Leiter im Punkte  $1250 \text{ mm}^2$ , welcher Wert sich auch durch Rechnung als der richtige erweist.

Eine andere Darstellung der quadratischen Gleichung, die sich gut in ein Nomogrammgefüge als Teiltafel einbauen läßt, besteht aus zwei parallelen Leitern und einer Hyperbel als Kurvenleiter. Auch in dieser Rechentafel sind sowohl positive als auch negative Werte gleich gut und übersichtlich angeordnet. Auf der Kurvenleiter sind die  $x$ -Werte, auf den parallelen Geradenleitern die  $a$ - und  $b$ -Werte der Normalform der quadratischen Gleichung eingezeichnet. Die Einzeichnung der  $x$ -Werte auf der Kurvenleiter fußt auf folgender Überlegung. Durch die Summe der Koeffizienten von  $a$  und  $b$  ist der Abstand der  $a$ - und  $b$ -Leiter gegeben. Dieser Abstand soll für alle Werte von  $x$  gleichbleiben. Man muß also die Koeffizienten so umformen, daß sie zusammenaddiert immer 1 ergeben. Dies ist zu erreichen,

wenn man die Normalform der quadratischen Gleichung durch  $x + 1$  dividiert. Man erhält dann:

$$\frac{x^2}{x+1} + a \frac{x}{x+1} + b \cdot \frac{1}{x+1} = 0.$$

Setzt man für  $\frac{x^2}{x+1} = -z$ , für  $\frac{x}{x+1} = B$  und endlich für  $\frac{1}{x+1} = A$ , dann ist  $aB + bA = z$  und  $A + B = 1$ .

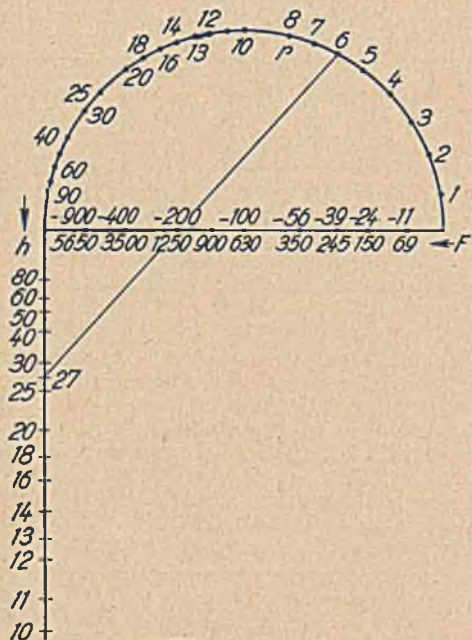


Bild 117. Ermittlung der Oberfläche eines Zylinders, wenn gegeben ist der Grundkreisradius und die Höhe des Zylinders (Darstellung der Beziehung  $F = 2r^2\pi + 2r\pi h$ ).

Hier ist die Zahl 1 als Einheit aufzufassen. Wählt man für den Abstand der beiden parallelen Leitern 1 cm, so ist dies Maß zugleich die Teilungseinheit der a- und b-Leiter. Wir erhalten also zwei Gleichungssysteme, die durch den Faktor  $x$  miteinander verbunden sind:

$$\text{I. } \frac{x^2}{x+1} = -z; \quad \frac{x}{x+1} = B. \quad \text{II. } \frac{x^2}{x+1} = -z; \quad \frac{1}{x+1} = A.$$

Mit Hilfe eines dieser Gleichungssysteme kann die x-Leiter punktweise bestimmt werden. Zur Konstruktion wählen wir das  $A = z$ -System und tragen die einzelnen Wertepaare abhängig voneinander in ein Koordinatennetz ein. Jedes Wertepaar ist durch Wahl eines x-Wertes bestimmt. In der Tabelle 23 wurden einige zur Konstruktion der Tafel benutzten Zahlenpaare zusammengestellt (Bild 118).

Tabelle 23.

x	A	z	x	A	z	x	A	z
-6	-0,2	7,2	-1,6	-1,66	4,26	-0,5	2	-0,5
-5	-0,25	6,25	-1,4	-2,5	4,9	0	1	0
-4	-0,33	5,34	-1,3	-3,33	5,63	1	0,5	-0,5
-3	-0,5	4,5	-0,7	3,33	-1,63	3	0,25	-2,25
-2	-1	4	-0,6	2,5	-0,9	5	0,17	-4,17
						6	0,14	-5,15

Ist die x-Leiter als Kurvenzug festgelegt, dann ist die x-Achse überflüssig und kann weggelassen werden (daher in dem Bilde nur gestrichelt gezeichnet). Die b-Leiter ist um eine Einheit = 1 cm gegenüber der a-Leiter verschoben. Soll der Abstand der a- und b-Leitern voneinander vergrößert werden, dann multipliziert man die quadratische Gleichung mit einem Faktor z. B. mit 10 und erhält dann:

$$\frac{10x^2}{x+1} = -z; \quad \frac{10x}{x+1} = B; \quad \frac{10}{x+1} = A.$$

Es würden sich dann folgende Zahlenwerte ergeben:

Tabelle 24.

x	A	z	x	A	z
0	10	0	5	1,7	-41,7
1	5	-5	6	1,4	-51,5
2	3,33	-13,3	7	1,25	-61,2
3	2,5	-22,5	8	1,11	-71,1
			9	1	-81
4	2	-32	10	0,91	-91

Da für die meisten praktischen Anwendungen nur positive Lösungswerte in Frage kommen, wurden die Werte  $x = 1 - 10$  zur Darstellung gewählt. Um die guten Eigenschaften dieser

Tafelform für den Zusammenbau mit anderen Teiltafeln zu zeigen, wollen wir die Formel:

$$V = \frac{4}{3} \pi [a b c + b^2 (10 - c)]$$

durch eine Verbundtafel darstellen. Obige Formel ist der Ausdruck für die Summe der Volumina zweier Ellipsoide, deren

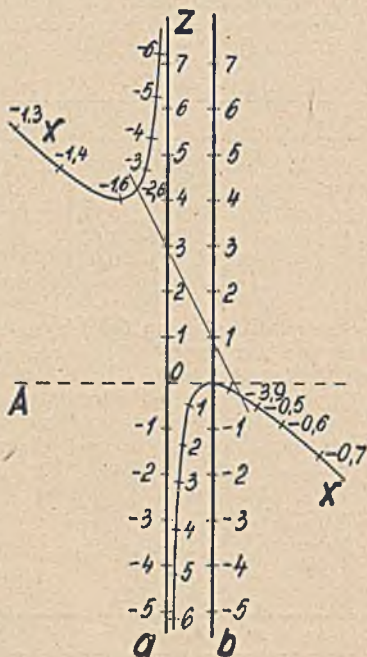


Bild 118. Allgemeine Leitertafel zur Lösung quadratischer Gleichungen.

Kenntnis aus irgend welchen technischen Gründen wichtig ist. Das eine Ellipsoid habe die Hauptachsen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , das andere, ein Rotationsellipsoid, die Hauptachsen  $b$  und  $10 - c$ . Obige Gleichung verwandelt man zunächst in eine quadratische Gleichung:

$$b^2 + b \cdot \frac{a c}{10 - c} - \frac{V}{\frac{4}{3} \pi (10 - c)} = 0.$$

Setzen wir  $\frac{ac}{10-c} = u$  und  $\frac{V}{z} = v$ , wo  $z = \frac{4}{3}\pi(10-c)$ , so werden diese Teilformeln in Teiltafeln verwandelt. Es sind also folgende Formeln in Tabellenwerte umzuformen:

$$1. b^2 + bu - v = 0$$

$$2. \frac{u}{a} = \frac{c}{10-c}$$

$$3. V = z \cdot v; z = \frac{4}{3}\pi(10-c).$$

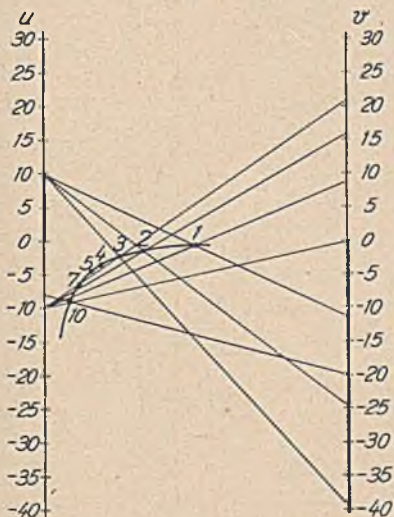


Bild 119. Konstruktion der Teilungen der Mittelleitern einer allgemeinen Leitertafel durch Verbinden entsprechender Punkte der Außenleitern.

Das Kernstück der Verbundtafel bildet die Darstellung der Formel 1 durch ein allgemeines Leiternomogramm. Bild 119 zeigt die Entstehung dieser Leitertafel. Die Teilung der Kurvenleiter wurde hier nicht durch Berechnung, sondern durch Konstruktion gewonnen. Es wurden entsprechende Punkte der Geradenleitern miteinander verbunden. Der Gang der Konstruktion ist folgender: Zunächst werden in beliebigem Abstände voneinander zwei parallele Leitern hingezichnet und zwar für den Bereich  $\pm 40$ . Bei der Konstruktion der b-Leiter nehmen

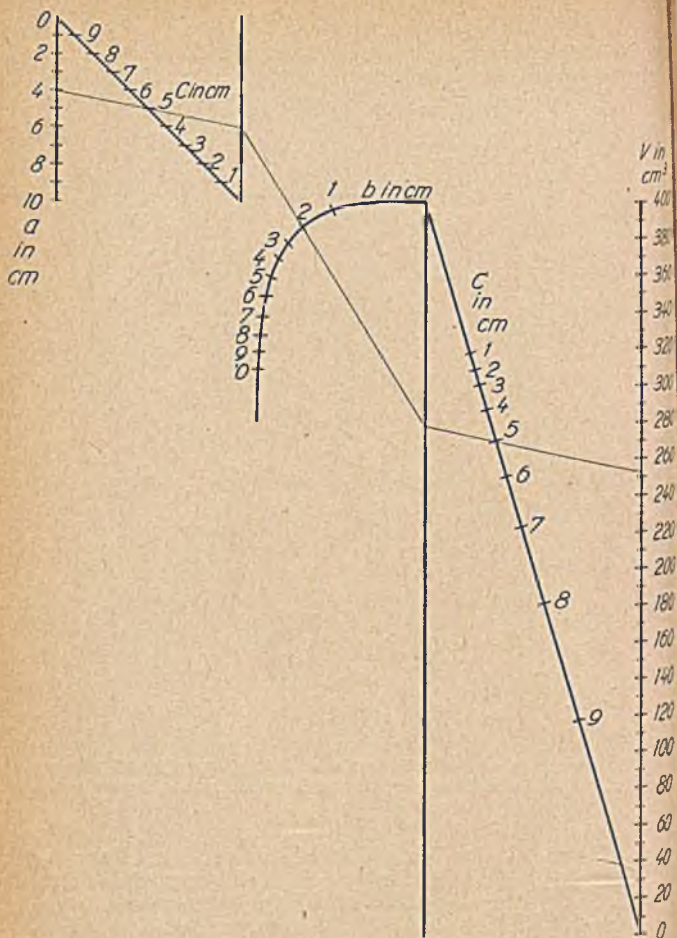


Bild 120. Ermittlung des Volumens der Summe zweier Ellipsoide  
 (Darstellung der Beziehung  $V = \frac{4}{3} \pi [a b c + b^3 (10 - c)]$ ).



wir den  $u$ - und den  $b$ -Wert als bekannt an, setzen die betreffenden Werte in die Gleichung  $b^2 + b u + v = 0$  ein und finden den entsprechenden  $v$ -Wert. Für die vorgegebenen Werte  $u_1 = 10$  und  $u_2 = -10$  erhält man für

$$b = 1 \quad \begin{array}{l} 1 + 10 = 11; \quad v = -11 \quad \text{und} \\ 1 - 10 = -9; \quad v = +9 \end{array}$$

$$b = 2 \quad \begin{array}{l} 4 + 2 \cdot 10 = 24; \quad v = -24 \quad \text{und} \\ 4 - 2 \cdot 10 = -16; \quad v = +16 \end{array}$$

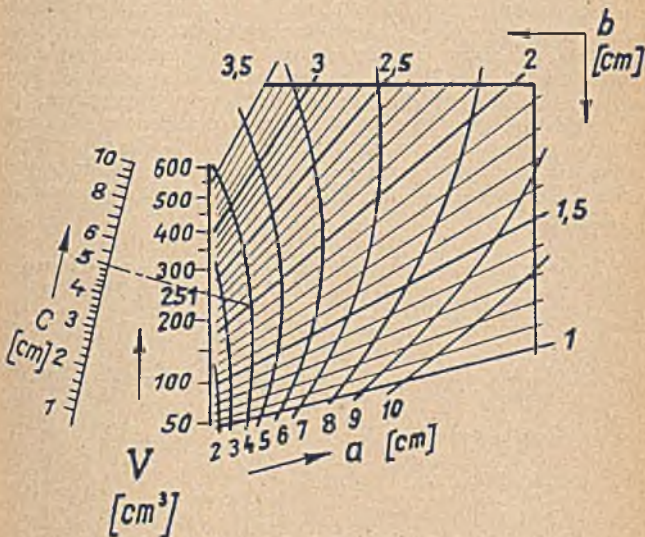


Bild 120a

$$b = 3 \quad \begin{array}{l} 9 + 3 \cdot 10 = 39; \quad v = -39 \quad \text{und} \\ 9 - 3 \cdot 10 = -21; \quad v = +21 \end{array}$$

$$b = 10 \quad \begin{array}{l} 100 + 10 \cdot 10 = 200; \quad v = -200 \quad \text{und} \\ 100 - 10 \cdot 10 = 0; \quad v = 0. \end{array}$$

Der für vorliegende Verhältnisse benötigte Bereich umfaßt  $u = 0$  bis  $10$  und  $v = 0$  bis  $-40$ . Die in Frage kommenden Liniensegmente wurden im Bild 119 stark ausgezogen. Die beiden Außenleitern dieser Tafel werden als Anschlußleitern zweier Teiltafeln in N-Form benutzt. Wir ergänzen also (siehe:

Bild 120) die Mitteltafel in der angegebenen Weise. Der Abstand der a- von der u-Leiter bzw. der V- von der v-Leiter ist beliebig. Die Teiltafel links oben ist schon als Form 1 auf S. 133 beschrieben worden. Die Leiterteilungen der a- und der u-Leiter stimmen demnach überein, ihre Teilungsrichtung ist entgegengesetzt gerichtet. Die Teilung der c-Leiter kann noch einmal durch Verbinden entsprechender Werte der Außenleitern nachgeprüft werden. Die Teilung der v-Leiter der zweiten N-förmigen Teiltafel bestimmt die Teilung auch der andern Leitern. Die beiden Außenleitern, d. h. also der v- und V-Leitern wurden, wie es die Bereiche erforderten, im Verhältnis 1:10 geteilt. Die Auftragerichtung der Außenleitern stimmt in beiden Teiltafeln überein. Auf der Mittelleiter der Teiltafel rechts unten werden nicht die z-Werte, sondern sofort die c-Werte eingetragen, die allein zur Ermittlung der Lösung interessieren. Die Teilung der z-Leiter kann wieder so vorgenommen werden, daß man aus vorgegebenen v- und c-Werten die V-Werte berechnet und die diesen Werten entsprechenden Punkte miteinander verbindet. Wird z. B.  $v = 10$  und  $c = 1$  als bekannt angenommen, so ist nach Tabelle 25

$c = 1; V = \frac{4}{5}\pi \cdot 9 \cdot 10 = 377$	$c = 3; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 7 \cdot 10 = 293$
$c = 2; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 \cdot 10 = 355$	$c = 4; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6 \cdot 10 = 251$
$c = 5; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5 \cdot 10 = 210$	$c = 8; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2 \cdot 10 = 84$
$c = 6; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4 \cdot 10 = 168$	$c = 9; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1 \cdot 10 = 42$
$c = 7; V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \cdot 10 = 126$	

Im Bedarfsfalle ermittle man auch Zwischenwerte. In der fertigen Rechentafel werden alle überflüssigen Teilungen und Zahlen weggelassen. Von den sechs geradlinigen Leitern ist also nur eine ungleichförmig geteilt. Ein Beispiel zeige die Benutzung der Rechentafel. Man verbinde die gegebenen Werte  $a = 4$  cm mit  $c = 5$  cm in der Teiltafel links oben und erhält damit einen Schnittpunkt der u-Leiter. Diesen Punkt verbinde man mit dem bekannten Wert  $b = 2$  auf der Kurvenleiter und gelangt damit zur v-Leiter. Den erhaltenen Punkt auf der v-Leiter wiederum verbindet man mit  $c = 5$  der Mittelleiter der Teiltafel rechts unten und erhält auf der V-Leiter den Wert  $251 \text{ cm}^3$ . Da die Leitern beinahe alle gleichförmig geteilt sind, kann der Lösungswert ziemlich genau ermittelt werden.

So einfach und vorteilhaft der Aufbau dieses Nomogramms auch erscheint, sei doch nachträglich auf verschiedene Nachteile aufmerksam gemacht. Die Leiterlängen der N-förmigen Teiltafeln sind wesentlich von einander verschieden. Die Schnittverhältnisse auf der Leiter zwischen dem Rechenweg von  $b$  nach  $c$  werden nach unten zu immer ungünstiger. Leider kommt die Größe  $c$  bei dieser Darstellung zweimal vor, was möglichst zu vermeiden ist. Eine zweckmäßigere Darstellung wird durch eine kombinierte Leiter-Netz-Tafel erzielt, die projektiv verzerrt ist. Das Ergebnis ist hier durch eine Gerade sicher und bequem abzulesen. Auf die hier angewandte Methode der projektiven Verzerrung sei in diesem Buche nicht weiter eingegangen, Wer von den Lesern sich für diese Art der Darstellung interessiert, sei auf die am Schluß des Buches im Schrifttumsnachweis angeführten Bücher von Schwerdt hingewiesen, wo jenen Methoden ein breiterer Raum gewidmet ist.

Viele technisch wichtigen Formeln können formal als kubische Gleichungen geschrieben werden. Auch diese Gleichungsart kann, wenn es sich um die Normalform

$$x^3 + a x + b = 0$$

handelt, durch ein allgemeines Leiternomogramm vertafelt werden. Diese Leitertafel besteht ebenfalls aus zwei parallelen Leitern und zwei punktweise zu bestimmenden Kurvenzügen, die zusammen als dritte Leiter gelten können. Die parallelen  $a$ - und  $b$ -Leitern sind wieder gleichförmig geteilt. Da auch hier die Summe der Koeffizienten von  $a$  und  $b$  den Abstand der  $a$ - und  $b$ -Leiter bzw. die Teilungseinheit der parallelen Leitern bestimmt, so ist der oben angegebene Gleichungstyp durch  $x + 1$  zu dividieren. Es ist also:

$$\frac{x^3}{x + 1} + \frac{a x}{x + 1} + \frac{b}{x + 1} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$a B + b A = z \quad \text{und} \quad B + A = 1, \quad \text{wo}$$

$$B = \frac{x}{x + 1} \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{x + 1}.$$

Aus einem von beiden Gleichungssystemen:

$$\text{I.} \quad \frac{x^3}{x + 1} = -z; \quad \frac{x}{x + 1} = B$$

$$\text{II.} \quad \frac{x^3}{x + 1} = -z; \quad \frac{1}{x + 1} = A$$

können nach Einsetzen eines Wertes für  $x$  die  $A$ - (bzw.  $B$ -) und die  $z$ -Werte berechnet werden. Tabelle 26 enthält die Werte zur Konstruktion des Bildes 121.

Ist die x-Leiter als Kurvenzug festgelegt, dann ist auch die A-Achse überflüssig und kann bei der endgültigen Ausführung weggelassen werden. Die z-Achse wird zur a-Leiter, die

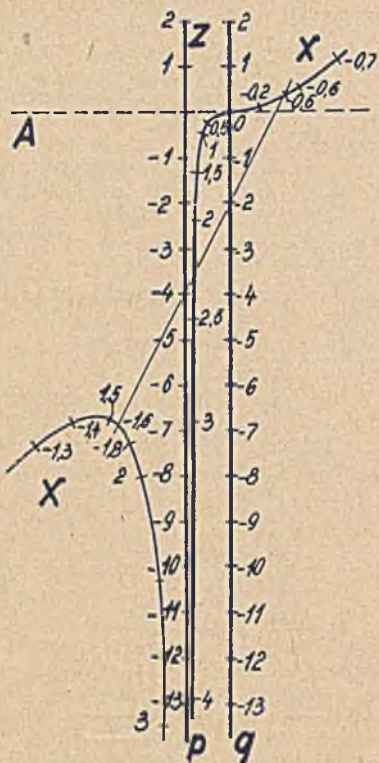


Bild 121. Allgemeine Leitertafel zur Lösung reduzierter kubischer Gleichungen (Darstellung der Gleichung  $x^3 + ax + b = 0$ ).

b-Leiter ist gegenüber der a-Leiter um eine Einheit = 1 cm verschoben. Verbindet man z. B. die Punkte  $a = -4$  und  $b = -2$ , dann schneidet die Verbindungslinie die x-Leiter,

Tabelle 26.

x	A	z	x	A	z	x	A	z
-3	-0,5	-13,5	-0,7	3,33	1,14	1,5	0,4	-1,35
-2,6	-0,625	-11	-0,6	2,5	0,54	2	0,33	-2,66
-2	-1	-8	-0,5	2	0,25	2,5	0,29	-4,48
-1,6	-1,66	-6,76	-0,2	1,25	0,01	3	0,25	-6,75
-1,4	-2,5	-6,87	0	1	0	4	0,2	-12,8
-1,3	-3,33	-7,33	1	0,5	-0,5	5	0,166	-20,8

auch aus Bild 121 hervorgeht in drei Punkten. Die kubische Gleichung hat also drei Lösungswerte.

## IX. Darstellungen der trigonometrischen Funktionen

Wir nehmen an, daß dem Leser die Grundzüge der Trigonometrie, so wie sie etwa Band 5 der Deutschen Werkmeisterbücherei (Betriebsberechnungen) vermittelt, bekannt sind. Zunächst ist es wichtig, die Darstellung der einzelnen Winkel-funktionen im gleichförmig geteilten Netz zu kennen, damit dann auf Grund dieser Kenntnis auch gerade Linien trigonometrisch geteilt werden können. Diese so geteilten Leitern sind dann in Leitertafeln einzugliedern. Der Aufbau der Kurvenbilder kann unter Verwendung von trigonometrischen Tabellen, wie sie z. B. im Tabellenbuch für das Metallgewerbe von Wilhelm Friedrich zu finden sind, vor sich gehen. Der Verlauf der einzelnen Kurvenzüge läßt sich jedoch auch mittels bestimmter leicht berechenbarer Funktionswerte ziemlich genau bestimmen. Derartige Werte sind z. B. jene für  $\sin 0^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 45^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$  und  $\sin 90^\circ$ . Haben wir diese Werte rechnerisch ermittelt, dann sind mit diesen auch die entsprechenden Werte der  $\cos$ -,  $\tan$ - und  $\cotg$ -Funktionen zu bestimmen und die einzelnen Kurvenbilder zusammenzustellen. Die Grenzwerte  $\sin 0^\circ = 0$  und  $\sin 90^\circ = 1$  können leicht am Einheitskreise selbst dargestellt werden. Im ersten Quadranten des Einheitskreises (Bild 122) ist der sog. Radiusvektor aus der Ruhelage bis zum Punkte B gedreht worden. In der Beziehung

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

ist die Strecke  $\overline{OB} = r = 1$  immer gleich und verändert sich nicht, d. h. der Winkel  $\alpha$  und die Strecke  $\overline{AB}$  sind ganz allein voneinander abhängig. Je kleiner der Winkel  $\alpha$  wird, desto kleiner wird auch die Strecke  $\overline{AB}$ . Für die Ruhelage des Radiusvektor, d. h. für  $\alpha = 0$  erhält man  $\sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$ . Lassen wir nun den Radiusvektor immer weiter wandern, d. h. den Winkel  $\alpha$  immer größer werden, so wächst auch die Strecke  $\overline{AB}$ . Bei einem Winkel von  $\alpha = 90^\circ$  würden wir also den Verhältniswert  $\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$  erhalten. Damit sind die beiden Grenzwerte für  $\sin 0^\circ$  und  $\sin 90^\circ$  gefunden und können sie in die Tabelle eintragen. Es ist zu beachten, daß die Verdrehung des Radius

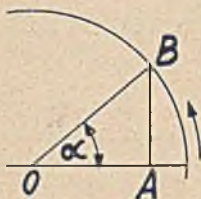


Bild 122. Die  $\sin$ -Funktion, dargestellt am Einheitskreise

$$\left( \sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \right).$$

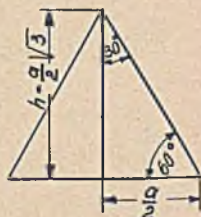


Bild 123. Berechnung der Grenzwerte  $\sin 30^\circ$  und  $\sin 60^\circ$  im gleichseitigen Dreieck.

vektors aus der Nulllage immer entgegen der Uhrzeigerichtung erfolgt. Anschließend an die Grenzwertberechnung ermitteln wir die Werte für  $\sin 30^\circ$  und  $\sin 60^\circ$ . Hierfür fällt man in einem gleichseitigen Dreieck (Bild 123) von der Dreiecksspitze das Lot auf die Grundlinie. Dieses Lot halbiert einmal den Winkel an der Spitze und dann auch die Grundlinie. Das gleichseitige Dreieck zerfällt also in zwei Dreiecke, in denen je ein  $30^\circ$ - und ein

$60^\circ$ -Winkel vorkommt. Bei der Verhältnis-Bildung  $\sin 30^\circ = \frac{a}{2}$

kürzt sich  $a$  weg und man erhält  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ . Bilden wir jetzt das Verhältnis  $\sin 60^\circ = h : a$ , so ist zunächst  $h$  durch einen Ausdruck zu ersetzen, in dem  $a$  vorkommt. Der Satz des Pythagoras läßt uns diesen finden. Es ist nämlich  $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

und  $h = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ . Diesen Wert in obige Verhältnisgleichung eingesetzt ergibt

$$\sin 60^\circ = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Auch diese Werte tragen wir in die Tabelle ein, in der noch der Wert für  $\sin 45^\circ$  in der ersten Zeile fehlt. Diesen ermitteln wir im gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck (Bild 124), indem wir wieder von der Dreieckspitze auf die Grundlinie des Dreiecks das Lot fällen. Hierdurch erhalten wir wieder zwei rechtwinklig

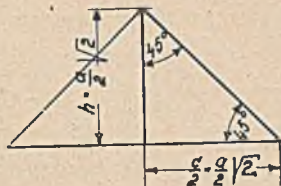


Bild 124. Berechnung des Grenzwertes  $\sin 45^\circ$  im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck.

gleichschenkelige Dreiecke. Die Verhältnisgleichung für  $\sin 45^\circ$  lautet:  $\sin 45^\circ = \frac{h}{a}$ . Auch hier ist  $h$  durch eine Beziehung zu ersetzen, in der  $a$  vorkommt. Da die Hälfte der Grundlinie gleich der Höhe  $h$  ist, kann geschrieben werden:

$$a^2 = h^2 + h^2 = 2h^2, \quad h = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Da Wurzeln im Zähler tunlichst vermieden werden sollen, schaffen wir diese durch Multiplikation von  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  weg und erhalten

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \sqrt{2}.$$

Dieser Wert oben eingesetzt ergibt:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Die fünf Werte können in ein Koordinatensystem eingetragen

werden. Auf der waagerechten Achse werden die Winkelwerte, auf der senkrechten Achse die entsprechenden natürlichen Werte der Winkelfunktionen aufgetragen. Verbindet man die eingetragenen Werte durch Kurvenzug, so ist dieser Kurvenzug ein Stück der sin-Kurve. Da der Kreis vier gleiche Quadranten hat, so sind auch die sin-Werte für die anderen Quadranten gleich, nur daß im 3. und 4. Quadranten die betreffenden natürlichen Werte negativ werden. Man kann also die sin-Kurve so, wie es in Bild 125 geschehen ist, vervollständigen. Derartige Kurvenformen spielen bei der Darstellung von Schwingungsvorgängen

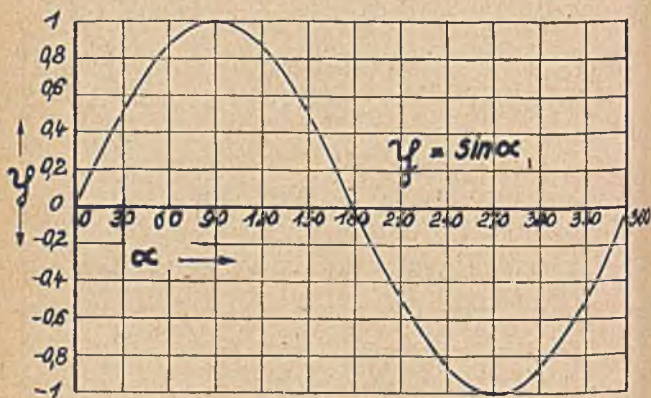


Bild 125. Darstellung der Beziehung  $y = \sin \alpha$  (sin = Linie).

und anderen periodischen Vorgängen eine große Rolle. Aus den berechneten sin-Werten wollen wir jetzt die entsprechenden cos-, tg- und cotg-Werte ermitteln. Die Funktion, die mit der Vorsilbe co bezeichnet ist, (cos, cotg) ist die Ergänzungsfunktion der ursprünglichen (sin, tg). Die Vorsilbe „co“ ist die Abkürzung des Wortes complementär = Ergänzung. Die Ergänzung beider Funktionen läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha); \quad \text{tg } \alpha = \text{cotg } (90^\circ - \alpha) \text{ und umgekehrt:}$$

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha); \quad \text{cotg } \alpha = \text{tg } (90^\circ - \alpha).$$

Die Zahlentafeln der Winkelfunktionen sind unter Verwendung obiger Beziehungen aufgebaut. Die cos-Werte sind also aus den betreffenden sin-Werten durch folgende Beziehungen zu ermitteln:



$$\sin 0^\circ = \cos (90^\circ - 0^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin 90^\circ = \cos (90^\circ - 90^\circ) = \cos 0^\circ = 1$$

$$\sin 30^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\sin 45^\circ = \cos (90^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Die cos-Werte werden gleichfalls in ein Netz (Bild 126) eingetragen. Durch Vergleich mit der (gestrichelt eingezeichneten)

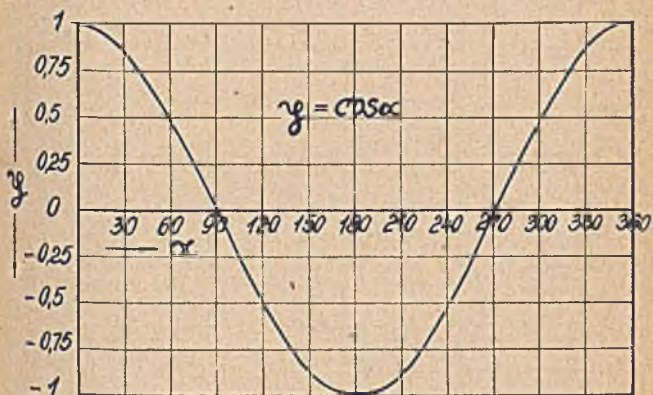


Bild 126. Darstellung der Beziehung  $y = \cos \alpha$  (cos-Linie).

sin-Kurve kann die vollkommene Gleichheit beider Kurvenzüge festgestellt werden, der Unterschied zwischen beiden Darstellungen beruht lediglich in ihrer gegenseitigen Verschiebung um  $90^\circ$ .

Die beiden Beziehungen:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

ermöglichen die Berechnung der  $\operatorname{tg} \alpha$ - und  $\operatorname{cotg} \alpha$ -Werte aus den entsprechenden  $\sin \alpha$ - und  $\cos \alpha$ -Werten. Es bestehen also folgende Zusammenhänge:

$$\begin{array}{ll}
 \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 & \operatorname{cotg} 0^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \\
 \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty & \operatorname{cotg} 90^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 90^\circ} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \\
 \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} & \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1 & \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1.
 \end{array}$$

Auch die tg- und cotg-Werte sind in ein Netz einzutragen (Bild 127) und zu einer vollständigen tg- bzw. cotg-Kurve zu

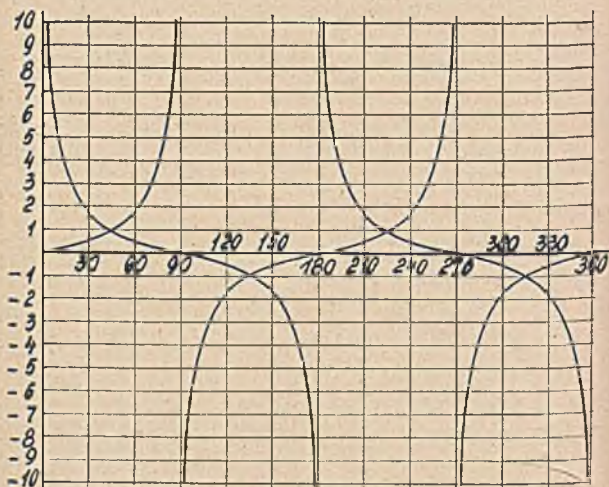


Bild 127. Eintragung der tg- und cotg-Werte in ein Netz.

ergänzen. Dieser Kurventyp liefert kein zusammenhängendes Kurvenbild wie die sin-Linie, sondern besteht aus zwei getrennten Kurvenzügen, die jedoch ebenso wie die sin-Linie periodisch verlaufen. Die tg-Kurve ist gegenüber der cotg-

Kurve um  $90^\circ$  verschoben. Tabelle 27 faßt noch einmal die errechneten Funktionswerte zusammen.

Tabelle 27.

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1
Cosinus	1	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangens	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
Cotangens	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	0

Was sagen uns nun diese Kurvenbilder? Durch die Symmetrie des Kurvenzuges ist man in der Lage, alle Winkelwerte über  $90^\circ$  in solche unter  $90^\circ$  zu verwandeln, d. h. also in Werte, die in der Tabelle zu finden sind. Ist z. B. der Wert  $\sin 100^\circ$  zu ermitteln, so konstruieren wir zunächst eine sog. Symmetrielinie; die in vorliegendem Falle durch den Punkt  $90^\circ$  geht (Bild 125). Die Werte in gleichem Abstand von dieser Symmetrielinie sind gleich, d. h. es gilt die Beziehung  $\sin(90^\circ + 10^\circ) = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \sin 80^\circ$  usw. Den natürlichen Zahlenwerten der Winkelfunktionen kommen bestimmte Vorzeichen zu, die ebenfalls aus dem Kurvenbild ermittelt werden können. Soll z. B. für  $\cos 120^\circ$  der entsprechende Zahlenwert auch dem Vorzeichen nach richtig bestimmt werden, braucht man nur der  $\cos$ -Linie bis zum Winkelwerte  $120^\circ$  zu folgen und auf der senkrechten Achse den Wert  $-0,5$  abzulesen. Mit Hilfe der  $\sin$ -Linie gelingt es uns andererseits leicht, die senkrecht stehende Achse des Netzes gemäß den Winkelwerten gesetzmäßig zu teilen. Wir erhalten auf diese Weise eine nach dem  $\sin$ -Gesetz geteilte Leiter. Eine derartige Leiter wollen wir jedoch auf eine andere Art gewinnen. In dem Bild 122 wurde der Radiusvektor aus der Ruhestellung in die durch den Buchstaben B gekennzeichnete Stellung gerückt. Da jedem Winkel  $\alpha$  eine Strecke  $\overline{AB}$  entspricht, teilen die Lote von den Punkten B auf die senkrecht stehende Achse diese nach dem  $\sin$ -Gesetz. Gleichzeitig teilen die Lote von den Punkten B auf die waagerechte Achse diese nach dem  $\cos$ -Gesetz. Nach derselben Methode kann auch eine Strecke nach dem  $\tan$ - und  $\cotg$ -Gesetz geteilt werden, nur daß die betreffenden Skalenteile für Winkel nahe  $90^\circ$  sehr groß werden. Bild 128 zeigt eine Gegenüberstellung von vier Leitern, die nach den

verschiedenen Winkelfunktionsgesetzen geteilt wurden. Die geteilten Leitern geben zwar die charakteristischen Eigentümlichkeiten der einzelnen Winkelfunktionsgesetze einwandfrei wieder, sind jedoch als Rechenhilfen nur in wenigen Fällen brauchbar. Um daher die Winkelfunktionsleitern auch für Leitertafeln mit log. geteilten Leitern verwenden zu können, verwandelt man die natürliche Teilung in eine logarithmische. Folgende Zusammenstellung gibt Aufschluß, über wieviel Zehner-einheiten sich die sin-Teilungen erstrecken:

$$\begin{aligned} \sin 3'' - \sin 21'' &\sim 1 \cdot 10^{-5} - 1 \cdot 10^{-4} \\ \sin 21'' - \sin 3' 27'' &\sim 1 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-3} \\ \sin 3' 27'' - \sin 34' 23'' &\sim 1 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-2} \\ \sin 34' 23'' - \sin 5^\circ 44' 30'' &\sim 1 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-1} \\ \sin 5^\circ 44' 30'' - \sin 90^\circ &\sim 1 \cdot 10^{-1} - 1 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

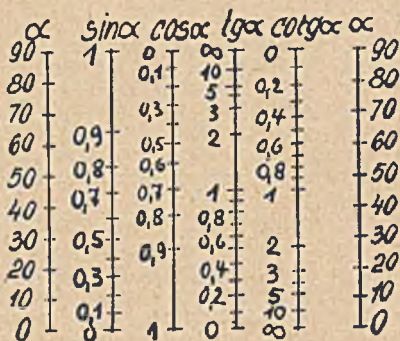


Bild 128. Vergleich der Winkelfunktionen durch Gegenüberstellung entsprechend geteilter Leitern.

Die Teilung der sin (cos-)Funktion erstreckt sich also im log. geteilten Maßstab gemessen über 5 ganze Einheiten. Die Teilung der tg (cotg-)Funktion erstreckt sich, wie wir gleich sehen werden, über 8 ganze Einheiten. Die Wertbereiche der ersten 4 Einheiten fallen mit denen der sin-Funktion zusammen. Die folgenden Einheiten erstrecken sich wieder in Potenzen von 10 ausgedrückt über folgende Bereiche:

$$\begin{aligned} \text{tg } 5^\circ 44' - \text{tg } 45^\circ &\sim 1 \cdot 10^{-1} - 1 \cdot 10^0 \\ \text{tg } 45^\circ - \text{tg } 84^\circ 18' &\sim 1 \cdot 10^0 - 1 \cdot 10^1 \\ \text{tg } 84^\circ 18' - \text{tg } 89^\circ 26' &\sim 1 \cdot 10^1 - 1 \cdot 10^2 \\ \text{tg } 89^\circ 26' - \text{tg } 89^\circ 57' &\sim 1 \cdot 10^2 - 1 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Praktische Bedeutung kommt allerdings nur dem 4. und 5. Bereich der  $\sin$ -Teilung zu, die auch bei den meisten Rechenschiebern als zwei getrennte Skalen zu finden sind und dem 1. bis 7. Bereiche der  $\operatorname{tg}$ -Teilung. Die Rechenschieberteilungen der trigonometrischen Funktionen sind ein wertvolles Hilfsmittel zur Teilung trigonometrischer Leitern. Sie können mit dem Stechzirkel direkt abgegriffen und übertragen werden. Die einzelnen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck wie z. B.  $a = c \cdot \sin \alpha$ ,  $b = c \sin \beta$  usw. können als Dreileitertafel dar-

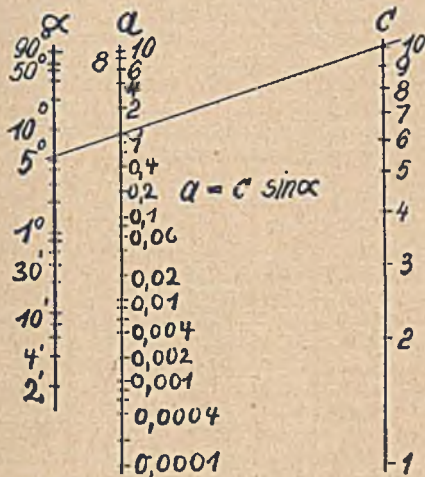


Bild 129. Dreileitertafel zur Ermittlung der Seite  $a$  im rechtwinkligen Dreieck, wenn gegeben ist die Seite  $c$  und der Winkel  $\alpha$ .

gestellt werden. Bild 129 zeigt eine derartige Tafel für die Beziehung  $a = c \sin \alpha$ . Eine Leitertafel für diese Beziehung wird folgendermaßen hergestellt: Zunächst werden die beiden Außenleitern, d. h. also die  $\sin \alpha$ -Leiter und die  $c$ -Leiter hingezichnet. Die Werte der  $\sin \alpha$ -Leiter erstrecken sich in dem Bild 129 über 3 Zehnereinheiten, die der  $c$ -Leiter über eine Zehnereinheit. Eine Einheit der  $\sin \alpha$ -Leiter ist gleich  $\frac{1}{4}$  der Einheit der  $c$ -Leiter. Um die Zehnereinheiten der  $\sin \alpha$ -Leiter besser hervorzuheben, wurden die sie begrenzenden Teilstriche stark ausgezogen. Dies braucht in einer für praktische Zwecke konstruierten Tafel selbstverständlich nicht zu geschehen. Zu bestimmen ist jetzt

1. Der geometrische Ort der  $a$ -Leiter,
2. die Teilung der  $a$ -Leiter.

Der geometrische Ort der  $a$ -Leiter läßt sich als Schnittpunkt der Verbindungslinien zweier entsprechender Punktpaare festlegen. Verbindet man z. B. den Punkt  $30^\circ$  ( $\sin 30^\circ = 0,5$ ) der  $a$ -Leiter mit dem Punkt 2 der  $c$ -Leiter und den Punkt  $90^\circ$  ( $\sin 90^\circ = 1$ ) der  $a$ -Leiter mit dem Punkt 1 der  $c$ -Leiter, schneiden sich beide Linien im Punkt 1 der  $a$ -Leiter. Somit ist der geometrische Ort und Punkt 1 der Mittelleiter gefunden. Verbindet man  $a = 90^\circ$  mit  $c = 10$ , dann schneidet die Verbindungslinie die Mittelleiter im Punkte 10. Somit ist die Zehner-einheit der  $a$ -Leiter gefunden und man kann sie auf der  $a$ -Leiter abtragen. Die Abstände  $m$  und  $n$  der Leitern voneinander verhalten sich wie 1:4, was leicht mit Stechzirkel nachgeprüft werden kann. Ist jetzt z. B. eine Beziehung  $b = c \cdot \cos a$  darzustellen, so ist zu beachten, daß die Teilungsrichtung der  $\cos$ -Leiter entgegengesetzt gerichtet ist der der  $\sin$ -Leiter. Wir zählen noch einmal die drei charakteristischen Merkmale der trigonometrischen Teilungen auf:

1. Die Teilung der Winkelfunktionen ist immer ungleichförmig; die log. Teilung der trigonometrischen Funktionen gestattet gleichzeitig, auch kleine Winkelwerte genügend genau zu erfassen.
2. Die Leiter kann nur für einen Winkelbereich von  $90^\circ$  für alle Winkelfunktionen eindeutig geteilt werden.
3. Die Teilung der  $\cos$ - und  $\cotg$ -Funktion ist in entgegengesetzter Richtung aufzutragen als die der  $\sin$ - und  $tg$ -Funktion.

Geht man vom rechtwinkligen zum schiefwinkligen Dreieck über, dann wäre zunächst die Darstellung des  $\sin$ -Satzes zu überlegen, der bekanntlich als Proportion geschrieben wird.

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Zunächst liegt es nahe, diese Beziehung als Doppelleistertafel darzustellen und zwar in der Zerlegung

$$a \cdot \sin \beta = z; \quad b \cdot \sin \alpha = z,$$

wo also die Mittel ( $z$ )-Leiter nicht geteilt zu werden braucht (Bild 130). Die  $\sin \alpha$ - und  $\sin \beta$ -Leitern können auch hier nur bis  $90^\circ$  geteilt werden, was offenbar ein Nachteil ist, da häufig Dreiecke mit stumpfen Winkeln zu berechnen sind. Der  $\sin$ -Satz läßt sich auch durch eine Kreuzfluchttafel darstellen. Bei der Konstruktion dieser Tafel geht man so vor, daß man einen gleichlangen Schenkel zweier rechten Winkel teilt und den einen Schenkel gleichförmig, den andern nach dem  $\sin$ -Gesetz. Die Teilungsrichtung ist in beiden Fällen gleich; Scheitelpunkt des Winkels und Anfangspunkt (0-Punkt) der Teilung

fallen zusammen. Einen von beiden rechten Winkeln zeichnet man zweckmäßigerweise auf durchsichtiges Millimeterpapier. Die Lösung erhält man bei Verwendung nur eines Winkels durch Verbinden zweier Schenkelpunkte und Ziehen einer Parallelen zur Verbindungsgeraden durch einen dritten Schenkelpunkt. Diese Darstellung wurde schon auf S. 190 besprochen. Zeichnet man die eine Parallele in den Winkel des Grundblattes, die andere Parallele in den Winkel des durchsichtigen Deckblattes ein und dreht die beiden Winkel um  $90^\circ$  gegeneinander, so daß

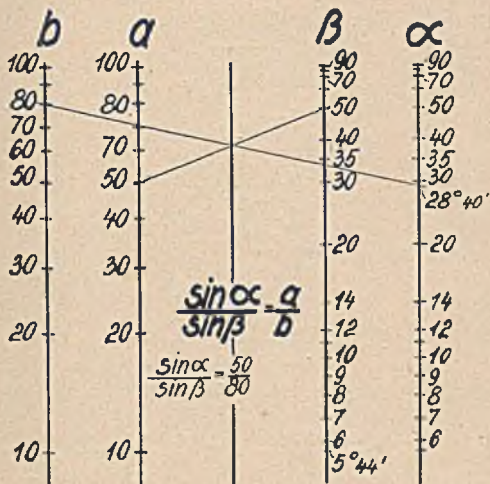


Bild 130. sin-Satz dargestellt als Doppelleitertafel.

ein Schenkelpaar eine gerade Linie bildet, dann stehen nach der Drehung auch die beiden Parallelen senkrecht aufeinander. Diese Rechenhilfe heißt Kreuzfluchttafel. Hier ermittelt man die Lösung nicht mehr durch Ziehen von Parallelen, sondern durch Weiskreuz. Die senkrechte Leiter dieser Tafel ist sowohl sinusförmig als auch gleichförmig geteilt, die linke Leiter ist gleichförmig, die rechte Leiter ebenfalls nach dem sin-Gesetz geteilt. Den Winkel  $\beta$  z. B. ermittelt man aus  $a = 50$ ,  $b = 80$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , indem man ein Sucherkreuz so durch die Punkte der gegebenen Werte legt, daß der freie Strahl des Kreuzes durch den gesuchten Wert  $\beta = 53^\circ$  geht (Bild 130a).

Wir wollen uns jetzt überlegen, wie sich die Formel des cos-

Satzes am zweckmäßigsten darstellen läßt. Der cos-Satz in der Form

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \gamma < 90^\circ.$$

könnte man sich aus zwei Doppelleitertafeln zusammengesetzt denken. Die Formel wäre dann in zwei Teile zu zerlegen, und zwar in

$$c^2 = a^2 + b^2 - z^2 \quad \text{und} \quad z^2 = 2ab \cos \gamma.$$

Die Formel  $z^2 = 2ab \cos \gamma$  ist dann als Doppelleitertafel mit log. geteilten Leitern darzustellen. Da also die eine Leiter-

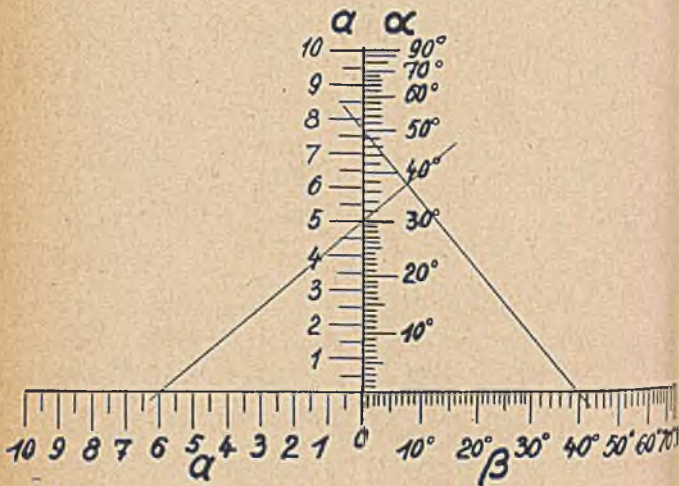


Bild 130 a. sin-Satz dargestellt durch Kreuzfluchttafel 1. Art.

gruppe quadratisch, die andere logarithmisch zu teilen wäre, müßte eine Verbindungsleiter oder ein Verbindungsglied eingeschaltet werden, um die beiden Teilungen ineinander überzuführen (siehe S. 117/118). Ein solches Zwischenglied ist jedoch zu vermeiden. Es ist deshalb die Darstellung im Netz zu wählen. Auf der waagerechten Achse wären dann die Werte für  $2ab$  auf der senkrechten die für  $z$  aufzutragen (Bild 131). Bei Stufung der  $\gamma$ -Werte erhält man eine Schar von Geraden, die durch den Nullpunkt gehen. Bei dieser Anordnung ist es möglich, auch cos-Werte  $> 90^\circ$  darzustellen, deren natürlicher Zahlenwert bekanntlich negativ wird, so daß also für Winkel  $> 90^\circ$  die Formel des cos-Satzes die Form annimmt



$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma.$$

Wenn die Werte für  $a$ ,  $b$  und  $\gamma$  gegeben sind, dann findet man hier den Lösungswert für  $c$  folgendermaßen: Zunächst verbindet man die betreffenden Punkte der  $a$ - und  $b$ -Leiter. Die Verbindungslinie schneidet die  $x$ -Leiter oder Zapfenlinie in einem bestimmten Punkt. Darauf bildet man das doppelte Produkt von  $a$  und  $b$  und geht von dem so gefundenen Punkt der  $2ab$ -Koordinate parallel zur  $z$ -Koordinate bis zu der Geraden, die den gegebenen Wert für  $\gamma$  als Kennziffer trägt, um von hier

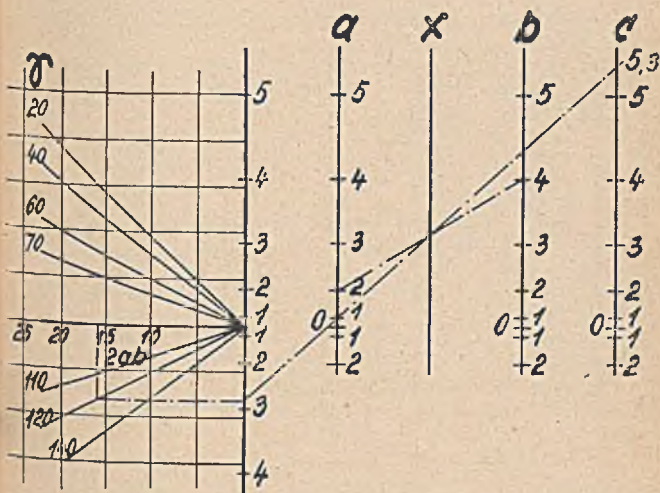


Bild 131. cos-Satz durch Doppelleitertafel und Netztafel dargestellt.

zur  $z$ -Leiter umzubiegen. Den so erhaltenen Punkt auf der  $z$ -Achse verbindet man mit dem gefundenen Punkt der Zapfenlinie. Die Verbindungslinie schneidet die  $c$ -Leiter in einem Punkt, dessen Ziffer der gesuchte Wert ist. Die Teilungen der  $a$ -,  $b$ -,  $c$ - und  $z$ -Leitern sind Quadrattteilungen und zwar ist auf allen vier Leitern dieselbe Teilung aufgetragen. Die Teilung der  $x$ -Leiter verhält sich zur Teilung der andern vier Leitern wie 1:2. Da die Teilungseinheiten der  $x$ -Leiter jedoch nicht interessieren, wurden sie in dem Bild 131 weggelassen. Da nur positive Werte für  $a$ ,  $b$  und  $c$  gegeben bzw. zu ermitteln sind, ist auf den Leitern auch nur eine positive Teilung bzw. Beziffer-

rung aufgetragen. Nur auf der z-Leiter wurden, wie schon erwähnt, auch negative Werte aufgetragen.

Eine andere Darstellungsmöglichkeit der Formel des cos-Satzes würde sich dann ergeben, wenn wir alle Glieder der gegebenen Formel durch  $a^2$  dividieren. Man erhält dann:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2ab}{a^2} \cdot \cos \gamma$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \cos \gamma.$$

Durch diesen Kunstgriff erniedrigte sich die Zahl der Va-

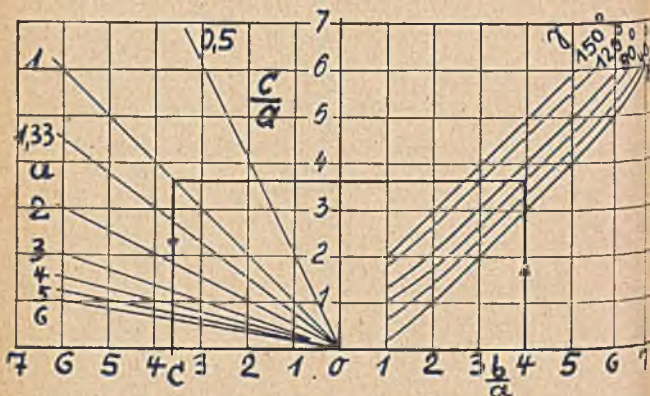


Bild 132. cos-Satz durch zwei Netztafeln dargestellt.

riablen von 4 auf 3, wenn man jetzt  $\frac{c}{a}$ ,  $\frac{b}{a}$  und  $\gamma$  als Variable ansieht. Diese Formel ist in einem Netz darzustellen (Bild 132). Auf der waagerechten Koordinate des Netzes sind die  $\frac{b}{a}$ -Werte auf der senkrechten die  $\frac{c}{a}$ -Werte aufzutragen. Tabelle (28) enthält die zur Konstruktion der Tafel benutzten Werte. Bei Vorgabe von  $a$  läßt sich aus dem gefundenen Verhältniswert  $\frac{c}{a}$  die wahre Länge von  $c$  ermitteln. Es wird daher an das erste Netz ein zweites so angebaut, daß beide Netze die  $\frac{c}{a}$ -Koordinate ge-

meinsam besitzen. Es entsteht so eine Geradenschar, deren einzelne Geraden durch den Nullpunkt gehen; jede Gerade trägt als Kennziffer einen a-Wert.

Tabelle 28.

$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$					
	$\gamma = 10^\circ$	$\gamma = 40^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 80^\circ$	$\gamma = 120^\circ$	$\gamma = 150^\circ$
1	0,173	0,684	1	1,28	1,73	1,93
2	1,03	1,39	1,73	2,08	2,64	2,91
3	2,02	2,32	2,64	2,99	3,61	3,90
4	3,02	3,29	3,61	3,95	4,58	4,89
5	4,02	4,28	4,58	4,92	5,56	5,88
6	5,02	5,28	5,56	5,91	6,55	6,88

Die erste Darstellung setzt die Berechnung von  $2 a b$ , die zweite die von  $\frac{b}{a}$  voraus. Auch die zweite Darstellung ist aus diesem Grunde nicht ganz befriedigend. Diese Rechentafel gewährleistet nur dann eine rasche und bequeme Ablesung, wenn außer einem Winkel im Dreieck die diesen Winkel einschließenden Seiten gegeben sind. Der cos-Satz ermöglicht aber außerdem noch die Berechnung des Winkels  $\gamma$  aus den Seiten  $a, b, c$  und die Berechnung der dritten Seite, wenn gegeben sind zwei Seiten und ein diesen Seiten anliegender Winkel. Im ersten Fall ist die Formel nach  $\cos \gamma$  zu entwickeln und zwar ist dann:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 a b}$$

Im zweiten Fall würde die Umwandlung ergeben:

$$b^2 - 2 a b \cdot \cos \gamma = c^2 - a^2 \quad \text{bzw.} \quad a^2 - 2 a b \cos \gamma = c^2 - b^2.$$

Diese beiden quadratischen Gleichungen sind bei einer strengen Lösung (S. 164) nach  $b$  bzw. nach  $a$  aufzulösen. Sind uns z. B. die an einem Punkt angreifenden Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  bekannt (Bild 133) und kennen wir außerdem den Winkel  $\gamma$ , den die Krafrichtungen miteinander einschließen, dann kann man nach dem Parallelogramm der Kräfte die resultierende Kraft  $K_R$  und gegebenenfalls auch die Teilwinkel  $\gamma_1$  oder  $\gamma_2$ , die  $K_R$  und eine von beiden Krafrichtungen  $K_1$  oder  $K_2$  miteinander bilden, ermitteln. Während wir aus den drei Bestimmungsstücken  $\delta = 2 R - \gamma$ ,  $K_1$  und  $K_2$  mit der zuerst besprochenen Form des cos-Satzes  $K_R$  zu

$$K_R = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - 2 K_1 K_2 \cos \delta}$$

berechnen, ist der Teilwinkel  $\gamma_1$ , ebenfalls durch Anwendung des cos-Satzes zu ermitteln und zwar durch die Beziehung:

$$\cos \gamma_1 = \frac{K_1^2 + K_R^2 - K_2^2}{2 K_1 K_R}$$

Wir können also mit dem cos-Satz alle Stücke des Kraftdreiecks berechnen. Um alle Möglichkeiten, die der cos-Satz bietet, auszunutzen, wählen wir für die Konstruktion einer dritten Tafel die Formel des cos-Satzes in der Form

$$b^2 + bq + p = 0, \text{ wo } q = -2a \cos \gamma \text{ und } p = -\sqrt{c^2 - a^2}.$$

Vorliegende quadratische Gleichung wollen wir als allgemeine Leitertafel darstellen, die aus zwei parallelen Geradenleitern und einer Kurvenleiter besteht. Von der Kurvenleiter wollen wir nur das Stück benutzen, das mit positiven Zahlen (für  $b$ ) beziffert ist, denn die negativen Werte interessieren nicht. Der

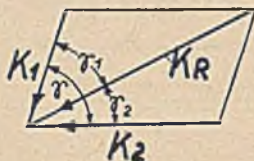


Bild 133. Beziehungen im Kräfteparallelogramm (Kräfte  $K_1$ ,  $K_2$ ; resultierende Kraft  $K_R$  wirkend unter den Winkeln  $\gamma_2$  bzw.  $\gamma_1$ ).

Aufbau dieser Tafel, der in Kap. 8 S. 174 genau besprochen wurde, sei hier nur ganz kurz wiederholt. Durch die Summe der Koeffizienten von  $p$  und  $q$  ist der Abstand der  $p$ - und  $q$ -Leiter gegeben. Dieser Abstand soll für alle Werte von  $b$  gleichbleiben. Man muß also die Koeffizienten so umformen, daß sie zusammenaddiert immer eine sich gleich bleibende Zahl ergeben. Da der Abstand der  $p$ - und  $q$ -Leiter sich zu der Teilungseinheit dieser Leitern der Ablesegenauigkeit wegen wie 10:1 verhalten soll, multiplizieren wir die Gleichung mit  $\frac{10}{1+b}$  und erhalten:

$$\frac{10 b^2}{1+b} + q \frac{10 b}{1+b} + p \frac{10}{1+b} = 0.$$

Setzt man für

$$\frac{10 b^2}{1+b} = -z, \text{ für } \frac{10 b}{1+b} = B \text{ und für } \frac{10}{1+b} = A,$$

dann ist  $q B + p A = z$  und  $A + B = 10$ . Setzt man für  $b$ ,  $A$  und  $z$  Zahlenwerte ein, dann läßt sich die  $b$ -Leiter punktweise

bestimmen. Nach der Konstruktion der b-Leiter ist die A-Leiter überflüssig und wird deshalb in der fertigen Tafel weggelassen (Bild 134). Die z-Leiter verwandelt sich in die p-Leiter, wobei zu beachten ist, daß die Teilung der z-Leiter 10 mal so groß ist als die Teilung der p-Leiter. Tabelle 29 enthält die zur Konstruktion der b-Leiter erforderlichen Werte.

Tabelle 29.

p	z	A	b	p	z	A	b
0	0	10	0	— 5,14	— 51,4	1,43	6
— 0,5	— 5	5	1	— 6,12	— 61,2	1,25	7
— 1,33	— 13,3	3,33	2	— 7,11	— 71,1	1,11	8
— 2,25	— 22,5	2,5	3	— 8,1	— 81	1	9
— 3,2	— 32	2	4	— 9,1	— 91	0,9	10
— 4,16	— 41,6	1,66	5				

Rechts an die allgemeine Leitertafel wird unter Benutzung der q-Leiter eine Netztafel angebaut, in der die Formel  $q = 2 a \cdot \cos \gamma$  durch eine Geradenschar dargestellt wird. Jede Gerade trägt wieder als Kennziffer den ihr zugehörigen  $\delta$ -Wert. Die Formel  $p = \sqrt{c^2 - a^2}$  wird zweckmäßigerweise als Leitertafel mit quadratischer Teilung ausgebildet und unter Benutzung der p-Leiter an die linke Seite der Mitteltafel angebaut. Diese Anordnung gewährleistet eine fließende Ablesung. Ist z. B.  $a = K_1 = 3 t$ ,  $b = K_2 = 2 t$  und der Winkel  $\delta = 60^\circ$  [ $\gamma = 120^\circ$ ], so lesen wir für  $K_R$  einen Wert 2,65 t ab. Um den Teilwinkel  $\gamma_1$  abzulesen, der von den Seiten bzw. Kräften  $a = K_1$  und  $c = K_R$  eingeschlossen wird, denken wir uns das Krafteck so gedreht, daß sich die Seiten  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 2,65$  in die Seiten  $a = 2,65$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$  verwandeln. Gehen wir diesen Werten auf der Tafel nach, so lesen wir für  $\gamma_1$  einen Winkel von  $41^\circ$  ab. Rechnen wir diesen Wert nach, indem wir die in Frage kommenden Werte in die Formel des cos-Satzes einsetzen, erhalten wir:

$$\cos \gamma_1 = \frac{2,65^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2,65 \cdot 3} = 0,75; \gamma_1 = 41^\circ.$$

Der Teilwinkel  $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$  ist damit auch gefunden. Diese Tafel ist zwar etwas schwieriger aufzubauen als die beiden anderen Tafeln, gestattet dafür aber, wie gezeigt wurde, die Ermittlung aller möglichen Werte.

Die einfachen Beziehungen  $b = c \cdot \cos a$ ,  $a = c \cdot \sin a$  usw. können auch durch N-förmige Nomogramme vertafelt werden, wie sie in Kap. 7 behandelt wurden. Dort waren die Außenleitern der N-förmigen Multiplikationstafel gleichförmig geteilt.

Teilt man nun die Außenleitern einer derartigen Leitertafel quadratisch (Bild 135), dann erzielt man für die Mittelleiter ( $\cos \alpha$ ) eine gleichmäßigere Teilung, als bei gleichförmiger Teilung der Außenleitern. Bei der Teilung der Mittelleiter geht man folgendermaßen vor. Soll z. B. der Teilstrich ermittelt wer-

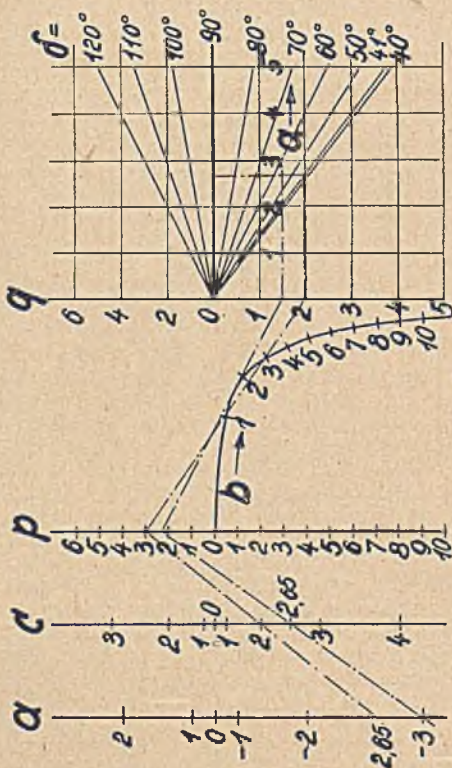


Bild 134. cos-Satz dargestellt durch Dreileitertafel, allgemeiner Leitertafel und Netztafel.

den, der dem Wert  $\cos 50^\circ = 0,643$  entspricht, dann geht man von einem als bekannt angenommenen Wert der c-Leiter, z. B. von  $c = 9$  aus. Es ist dann  $9 \cdot 0,643 = 5,78$ . Es wird also der Wert  $c = 9^2 = 81$  mit  $b = 5,78^2 = 33,5$  verbunden. Der Schnitt der Verbindungslinie mit der Mittelleiter ist also mit  $\alpha = 50^\circ$  zu beziffern. Hier wird also die quadratische Teilung wie eine

gleichförmige Teilung benutzt. Man legt also dem Aufbau der Tafel nicht die einfache Multiplikationsformel  $x y = z$ , sondern die Formel  $x^n y^n = z^n$  zugrunde. Durch richtige Wahl des Exponenten  $n$  (in unserm Falle  $n = 2$ ) kann also die Teilung der Mittelleiter beeinflusst werden. Tabelle 30 enthält einige Werte,

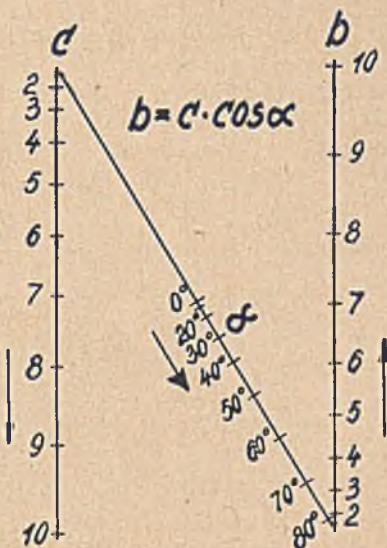


Bild 135. Dreileitertafel zur Ermittlung der Seite  $b$  im rechtwinkligen Dreieck, wenn gegeben ist die Seite  $c$  und der Winkel  $\alpha$  (Leitertafel in N-Form mit quadratisch geteilten Außenleitern).

die für die Konstruktion der Mittelleiter des Bildes 135 verwendet wurden.

Tabelle 30.

	$c \cdot \cos \alpha = b$	$b^2$
$\cos 10^\circ = 0,9848$	$7 \cdot 0,9848 = 6,9$	$6,9^2 = 47,6$
$\cos 20^\circ = 0,9397$	$7 \cdot 0,9397 = 6,56$	$6,56^2 = 43,0$
$\cos 30^\circ = 0,8660$	$7 \cdot 0,8660 = 6,06$	$6,06^2 = 36,6$
$\cos 40^\circ = 0,7660$	$7 \cdot 0,7660 = 5,36$	$5,36^2 = 28,7$
$\cos 60^\circ = 0,5$	$7 \cdot 0,5 = 3,5$	$3,5^2 = 12,2$

Sind im Dreieck die Seiten  $a$ ,  $b$  und die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bekannt, dann kann durch die sog.  $\cos$ -Beziehung die Seite  $c$  berechnet werden. Diese Formel lautet:

$$a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha = c.$$

Die entsprechenden Formeln zur Berechnung der Seiten  $b$  und  $a$  lauten:

$$c \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \gamma = b \quad \text{und}$$

$$b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta = a.$$

Zwecks Darstellung der (ersten)  $\cos$ -Formel ist diese in drei Teile zu zerlegen und zwar in

$$a \cdot \cos \beta = x, \quad b \cdot \cos \alpha = y; \quad x + y = c.$$

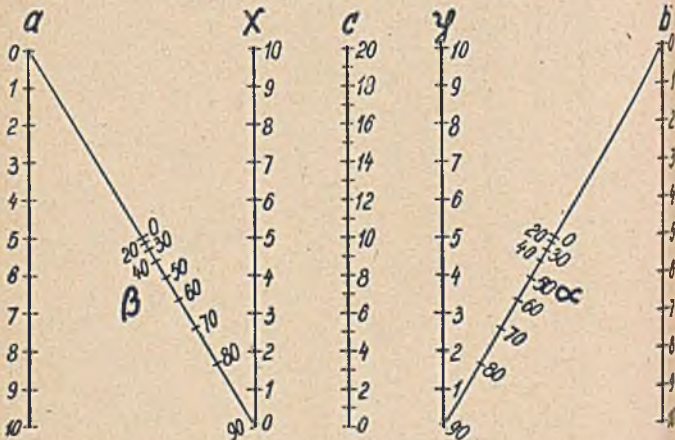


Bild 136. Ermittlung der Seite  $c$  eines Dreiecks, wenn bekannt sind die Seiten  $a$  und  $b$  und die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  (Darstellung der sog.  $\cos$ -Beziehung  $a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha = c$ ).

Bei dieser Anordnung ist die Haupttafel ein Additionsnogramm und die Teiltafeln sind N-förmige Leitertafeln mit gleichförmig geteilten Außenleitern (Bild 136). Die  $\cos$ -Formeln sind aus dem  $\cos$ -Satz entstanden und können leicht in diesen zurückverwandelt werden. Multipliziert man die oben angegebenen Formeln der Reihe nach mit  $a$ ,  $b$  und  $c$ , so erhält man:

$$a c \cdot \cos \beta + b c \cdot \cos \alpha = c^2$$

$$b c \cdot \cos \alpha + a b \cdot \cos \gamma = b^2$$

$$a b \cdot \cos \gamma + a c \cdot \cos \beta = a^2.$$



Addiert man die beiden ersten Formeln und zieht die dritte von der Summe ab, dann erhält man:

$$2 b c \cdot \cos \alpha = c^2 + b^2 - a^2 \text{ bzw. } a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cdot \cos \alpha.$$

Diese Formel ist der cos-Satz.

Beim Kegeldrehen muß die tg-Funktion zur Berechnung des Einstellwinkels benutzt werden. Aus den Abmessungen der Durchmesser  $D$  und  $d$  (Bild 137 und Band 10 der Deutschen Werkmeisterbücherei „Meßwerkzeuge und Werkstattmessungen“ S. 181 sowie Band 5 der D. W. B. „Betriebsberechnungen“ S. 219) und der Länge  $l$  kann der Einstellwinkel  $\alpha$  aus folgender Beziehung berechnet werden:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D - d}{2l}.$$

Die sog. Konizität  $K$  des Kegels wird ebenfalls aus obiger Beziehung berechnet und zwar ist hier

$$K = 2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{D - d}{l}.$$

Soll diese Formel dargestellt werden, dann zerlegt man diese in zwei Teile und zwar in

$$x = l \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und}$$

$$x = \frac{D - d}{2} \quad \text{bzw.}$$

$$D = d + 2x.$$

Die erste Formel wird man am zweckmäßigsten wieder als N-förmige Leitertafel mit gleichförmig geteilten Außenleitern und die zweite Formel als Additionsleitertafel darstellen (Bild 138). Die tg-Teilung der Mittelleiter wurde auf ähnliche Weise ermittelt wie die cos-Teilung in dem Bilde 136. Die natürlichen Zahlenwerte der tg-Funktion werden im Gegensatz zur sin-Funktion auch größer als 1. Die Mittelleiter ist in diesem Falle in ihrer ganzen Ausdehnung zu teilen.

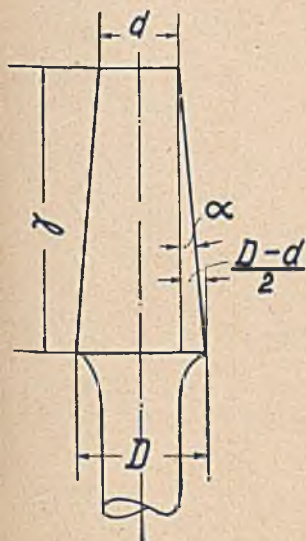


Bild 137.  
Beziehungen im Kegel.

Als letztes Beispiel wollen wir die Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = R_1 : R_2$$

darstellen, wo  $R_1$  und  $R_2$  die Radien zweier Kegelräder und  $\alpha$  bzw.  $\beta$  (Bild 139) ihre Teilkegelwinkel bedeuten. Diese Beziehung wollen wir als Dreileitertafel mit log. Teilung darstellen und bringen sie deshalb auf die Form  $R_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = R_1$ . Für die Konstruktion der Tafel wählen wir das nur nach einer Richtung log. geteilte Papier von Schleicher & Schüll Nr. 369 $\frac{1}{2}$  und

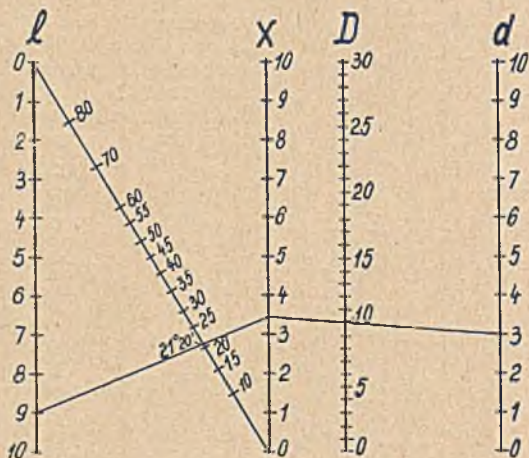


Bild 138. Ermittlung des Kegelstellwinkels  $\alpha$  aus den Grundkreisdurchmessern  $D$  und  $d$  und der Länge  $l$  des Kegels

$$\left( \text{Darstellung der Beziehung: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{D-d}{2} / l \right).$$

zeichnen hier drei Leitern in gleichem Abstände voneinander auf. Die linke Leiter teilen wir unter Benutzung der natürlichen Zahlenwerte der  $\operatorname{tg}$ -Funktion im Bereich  $0,1 - 10 \cong \operatorname{tg} 6^\circ - \operatorname{tg} 84^\circ$ . Auf der rechten Außenleiter werden die  $R_2$ -Werte für den Bereich  $10-1000$  eingetragen. Die Teilungseinheiten der Mittelleiter sind um die Hälfte kleiner als die der Außenleitern. Zur Kontrolle verbinden wir den Wert  $\alpha = 45^\circ = 1$  mit den Werten  $R_2 = 1000, 100$  und  $10$  und erhalten so die entsprechenden Werte auf der  $R_1$ -Leiter, Nach Vervollständigung der Teilung der

Mittelleiter erhalten wir so eine bequem zu handhabende Tafel zur Berechnung eines Teilkegelwinkels. Der Winkel  $\beta$  ergänzt sich in vorliegendem Falle mit dem Winkel  $\alpha$  zu  $90^\circ$ . Dies kann auch in der Bezifferung der  $\text{tg } \alpha$ -Leiter berücksichtigt werden.

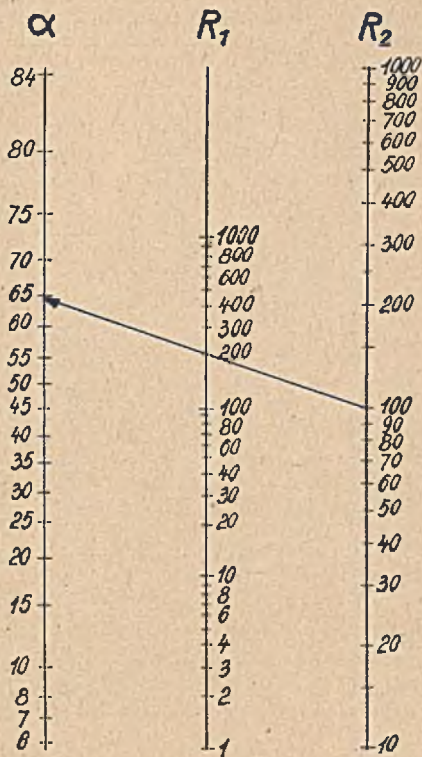


Bild 139. Ermittlung des Teilkegelwinkels, wenn die Radien  $R_1$  und  $R_2$  zweier Kegelräder bekannt sind

(Darstellung der Beziehung  $\text{tg } \alpha = \frac{R_1}{R_2}$ ).

## X. Das Dreiecks- und Kreisnetz

Bei der Besprechung der Dreileitertafel in Dreiecksform im Kap. 5 wurde darauf hingewiesen, daß diese Dreileitertafel zu einer Netztafel ausgestaltet werden kann, wenn Koordinaten, parallel den einzelnen Dreiecksseiten, in die Dreiecksfläche eingezeichnet werden. Dieses Gebilde stellt also eine vereinigte

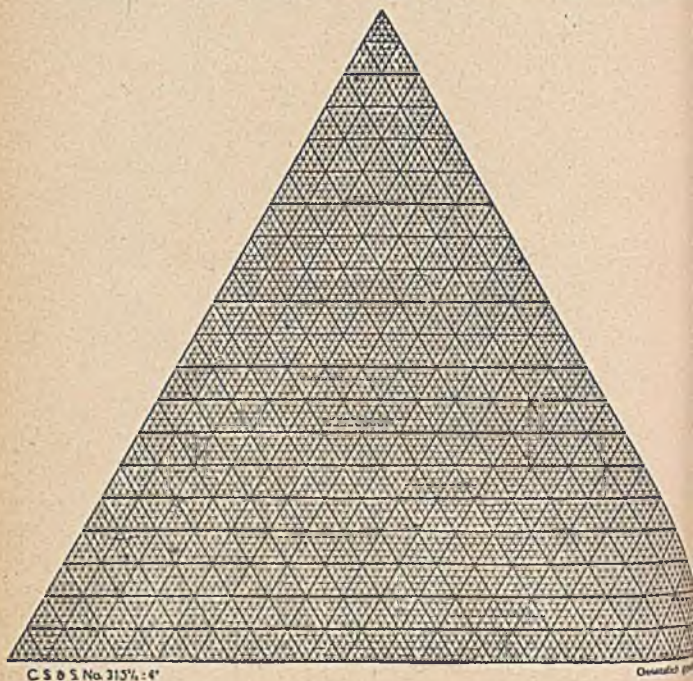


Bild 140. Dreiecksnetzpapier Nr. 315 $\frac{1}{4}$ :4° von Schleicher & Schüll.

Netz-Leitertafel dar. Bei entsprechender Teilung und Bezifferung der Dreiecksseiten wird durch diese die Beziehung

$$a + b + c = s \text{ (siehe S. 156 Kap. 7)}$$

dargestellt. Darüber hinaus dient das schiefwinklige Netz, das von je zwei Koordinatenscharen gebildet wird, genau wie das

rechtwinklige Netz zur Eintragung von Wertepaaren, die den gesetzmäßigen Verlauf irgend welcher Vorgänge kennzeichnen sollen. Bild 140 zeigt ein im Handel erhältliches Dreiecksnetz-  
papier. Um die betreffenden Punkte bzw. Zahlen auf den Drei-

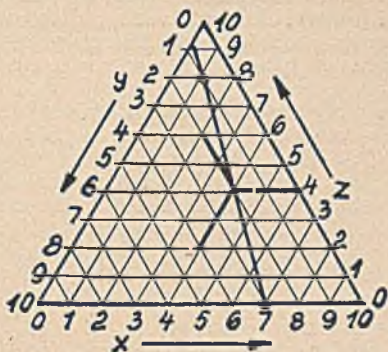


Bild 141 a.

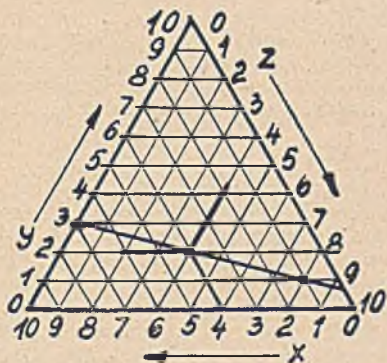


Bild 141 b.

Dreiecksnetze mit verschiedener Bezifferung der Teilungen; verschiedene Lagen der geraden Linien.

ecksseiten aufzufinden, braucht man nur der Koordinaten-  
richtung zu folgen; das Sucherkreuz ist jetzt überflüssig. Genau  
so wie bei der Leitertafel in Dreiecksform ist auch bei der Drei-  
eckstafel der „Drehsinn“ der Bezifferung zu beachten. Bild 141

bringt die Bezifferung und entsprechende Einzeichnung der Koordinatensuchrichtung im Dreiecksnetz zur Darstellung für die Teilung der Dreiecksseiten im Uhr- und Gegenuhrzeigersinne. Die Darstellungsformen im schiefen Netz weichen von denen im rechtwinkligen nicht wesentlich ab. Das Gesetz  $y = m x + n$  z. B. bildet sich sowohl im rechtwinkligen als auch im schiefwinkligen Netz als gerade Linie ab. Allerdings sind von den drei Koordinatenscharen immer nur je zwei zur Darstellung von Gesetzen verwertbar.

Eine Anwendung derartiger Netztafeln in Dreiecksform stellt das sog. Bilanzdreieck der Verbrennung dar (siehe auch: „Feuerungstechnik“, XXIII. Jahrgang, Heft 9, Die Verbrennungsbilanz von Dr. Ing. A. R. Leye). Um den Verbrennungsvorgang beurteilen zu können, muß man die Zusammensetzung des Brennstoffes und des Rauchgases des verbrannten Brennstoffes kennen. Durch Vergleich dieser Angaben ist dann die Güte der Verbrennung zu beurteilen. Drei Werte geben über die Verbrennung Aufschluß:

1. Verbrannter Kohlenstoff ( $\text{CO}_2$ ),
2. Unvollständig verbrannter Kohlenstoff ( $\text{CO}$ ),
3. Zur Verbrennung benötigte Luft- bzw. Sauerstoffmenge ( $\text{O}_2$ ).

Diese Werte erhält man durch die Rauchgasanalyse. Durch theoretische Überlegungen können dann Werte der bestmöglichen Verbrennung errechnet werden; jene versieht man mit dem Zeichen „max“. Zwischen diesen Größen besteht folgende Beziehung:

$$1. \quad \frac{\text{CO}_2}{\text{CO}_2 \text{ max}} + \frac{\text{CO}}{\text{CO max}} + \frac{\text{O}_2}{\text{O}_2 \text{ max}} = 1.$$

Die Summe der Verhältniszahlen aus wirklichen und theoretisch ermittelten Verbrennungswerten ist demnach = 1. Tragen wir diese Werte in ein Dreiecksnetz ein, dann kann man sich sofort ein Urteil über die Verbrennung bzw. richtige Ausnutzung des Brennstoffes bilden. Ein Beispiel wird die Zweckmäßigkeit dieser Darstellung erweisen. Der Kohlenstoffgehalt (C) einer Kohlenart beträgt 86%, der Wasserstoffgehalt ( $\text{H}_2$ ) 6%, der Sauerstoffgehalt ( $\text{O}_2$ ) 8%. Der Kohlenstoffgehalt ( $\text{CO}_2$ ) des Rauchgases wurde zu 12%, der Sauerstoffgehalt zu 4% ermittelt. Der Gehalt an Kohlenoxyd (CO) wird aus folgender Formel berechnet:

$$2. \quad \text{CO} = \frac{21 - e \text{ CO}_2 - \text{O}_2}{e - 0,395}.$$

Hier bedeutet e eine noch zu ermittelnde Zahl. In der Gleichung 1 sind also die Werte für  $\text{CO}_2$ , CO,  $\text{O}_2$  und  $\text{O}_2 \text{ max}$

(maximaler Sauerstoffgehalt der Verbrennungsluft = 21 %, die restlichen 79 % = Stickstoff) bekannt. Unbekannt sind die Werte für  $\text{CO}_2 \text{ max}$  und  $\text{CO max}$ , aber auch sie lassen sich durch folgende Gleichungen leicht ermitteln:

$$3. \quad \text{CO}_2 \text{ max} = \frac{21}{e} \quad \text{wo}$$

$$4. \quad e = 0,79 s + 0,21 \quad \text{und}$$

$$5. \quad s = 1 + 3 \frac{\text{H}_2 - \frac{\text{O}_2}{8}}{c}.$$

Setzen wir die gegebenen Werte in diese Formeln ein, erhalten wir:

$$5. \quad s = 1 + 3 \frac{6 + \frac{8}{8}}{86} = 1,17$$

$$4. \quad e = 0,79 \cdot 1,17 + 0,21 = 1,13$$

$$3. \quad \text{CO}_2 \text{ max} = \frac{21}{1,13} = 18,6$$

$$2. \quad \text{CO} = \frac{21 - 1,13 \cdot 12 - 4}{1,13 - 0,395} = 4,68.$$

Der Wert für  $\text{CO max}$  errechnet sich aus der Formel

$$6. \quad \text{CO}_{\text{max}} = \frac{21}{e - 0,395} = 28,6.$$

Wir setzen jetzt alle Werte in die Gleichung (1) ein und erhalten:

$$\frac{12}{18,6} + \frac{4,68}{28,6} + \frac{4}{21} = 0,645 + 0,1636 + 0,19 = 0,9986 \sim 1.$$

Tragen wir diese Werte in das Dreiecksnetz ein (Teilung der Dreiecksseiten im Gegenuhrzeigersinne), so erhalten wir den Punkt P (Bild 142).

Die Verbrennung wird schließlich beurteilt durch die Luftmenge, die bei der Verbrennung im Überschuß zugeführt wird. Die Luftüberschußzahl

$$\lambda = \frac{L}{L_{\text{min}}} = \frac{O}{O_{\text{min}}}$$

ist das Verhältnis der wirklich zugeführten Luft-(Sauerstoff-)Menge zur Mindestluft-(Sauerstoff-)Menge. Es wäre zweckmäßig, im Dreieckskoordinatensystem Kurvenscharen einzutragen, die konstante Luftüberschußzahlen kennzeichnen. Betrachten wir einmal den Punkt P' im Dreieckssystem, der gekennzeichnet ist durch

$$\frac{O_2}{O_{2 \max}} = 0,25, \quad \frac{CO}{CO_{\max}} = 0,35 \quad \text{und} \quad \frac{CO_2}{CO_{2 \max}} = 0,4.$$

Aus diesen Verhältniszahlen ergeben sich:

$$O_2 = 5,25 \quad CO = 10,01 \quad CO_2 = 7,44.$$

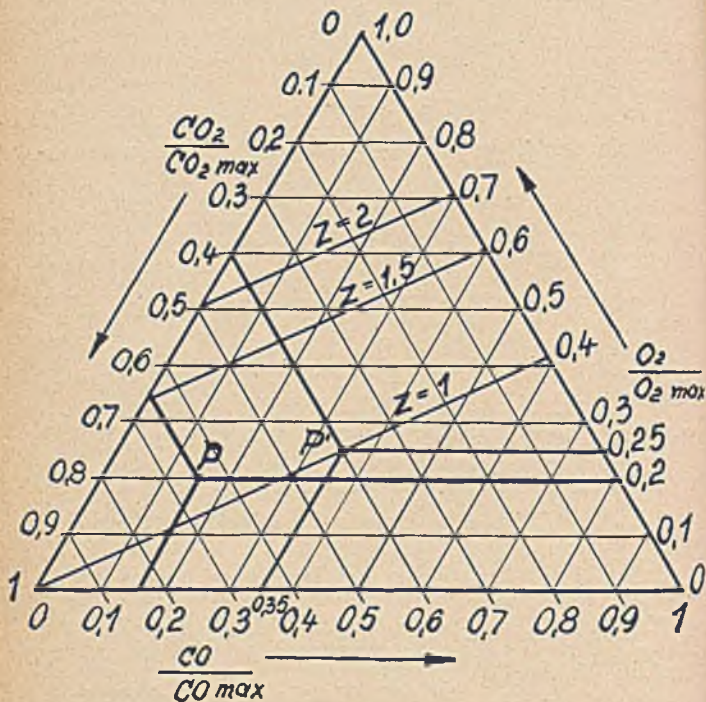


Bild 142. Bilanzdreieck der Verbrennung.

Die Luftüberschußzahl  $\lambda$  ist durch die Formel:

$$\lambda = \frac{O_2 - \frac{CO}{2}}{s(CO_2 + CO)} + 1$$

zu berechnen. Setzen wir hier unsere Zahlenwerte ein, so ist

$$\lambda = \frac{5,25 - 5,005}{1,17(7,44 + 10,01)} + 1 = 1,01 \sim 1.$$



Dieser Punkt kennzeichnet eine nahezu vollkommene Verbrennung. Auch im Koordinatenanfangspunkt ist  $\lambda = 1$ , da

$$\frac{\text{CO}_2}{\text{CO}_{\max}} = 1, \quad \frac{\text{O}_2}{\text{O}_2_{\max}} = 0, \quad \frac{\text{CO}}{\text{CO}_{\max}} = 0.$$

Die Gerade, die diese beiden Punkte verbindet, kann also im Bilanzdreieck als Gerade der vollkommenen Verbrennung bezeichnet werden, da für alle auf ihr liegenden Kennwerte  $\lambda = 1$  ist. Alle Geraden konstanter Luftüberschußzahl sind untereinander parallel. In Bild 142 sind die Geraden mit den Kennziffern  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 1,5$  und  $\lambda = 2$  eingetragen.

Als zweites Beispiel eines Dreiecksnetzes wollen wir das sog. Farbdreieck besprechen. Es sei zum besseren Verständnis ganz kurz auf die Methode, eine Farbe zu messen und sie im Farbdreieck festzulegen, eingegangen. Die beiden Physiker Young und Helmholtz stellten fest, daß sich alle Farben aus drei Grundfarben Rot, Grün und Blau zusammensetzen lassen. Wenn es gelang, die einzelnen Farben des Spektrums durch Mischung dieser drei Eichfarben herzustellen, dann konnte man jede Spektralfarbe nach den anteiligen Bestandteilen der Grundfarben bestimmen. Mit Hilfe von farbtüchtigen Versuchspersonen kennzeichneten Guild und Wright nach dieser Methode die einzelnen Farben und trugen die gemessenen Werte als Kurve in das Farbdreieck ein (Bild 143). Die einzelnen mit Zahlen versehenen Punkte dieser Kurve stellen die Wellenlängen des sichtbaren Spektralgebietes dar, gemessen in  $m\mu$  ( $1 m\mu = \frac{1}{10\,000\,000}$  cm).

So enthält z. B. eine Farbe, die einer Wellenlänge  $\lambda = 530 m\mu$  entspricht, 0,1547 Anteile Rot (x-Achse), 0,8059 Anteile Grün (y-Achse) und 0,0394 Anteile Blau (z-Achse). Die Summe dieser Anteile ist, wie sich leicht nachprüfen läßt, gleich 1.

Außer den im Farbdreieck niedergelegten Messungen benutzt man zur Charakterisierung einer Farbe noch eine zweite Kurventafel (Bild 144), die die sog. Normalreizkurven des Spektrums enthält. Trotzdem diese Kurventafel nur indirekt mit der Dreieckstafel zusammenhängt, sei dennoch gestattet, auch diese Tafel näher zu erläutern. Die Kurven der Bild 144 begrenzen Flächen, die als Anteile der drei Grundfarben am Farbenspektrum gedeutet werden können. In Übereinstimmung mit dem gleichseitigen Farbdreieck müssen diese drei Flächen einander gleich sein. Die Normalreizkurven haben aber auch noch eine andere Bedeutung: Sie geben an, wieviel Mengen der drei festgelegten Eichfarben nötig sind, um die Farbe des Lichtes einer bestimmten Wellenlänge zu erzeugen. Die Normalreizkurve für die Farbe Grün (y-Kurve) wurde zuerst ermittelt, da dieser Kurvenzug gleichzeitig ein Maßstab für die Hellempfindlichkeit

des Auges ist. Mit dieser Kurve war in großen Zügen auch die  $\bar{x}$ -Kurve für rotes Licht und die  $\bar{z}$ -Kurve für blaues Licht festgelegt, da die von den Kurven umschlossenen Flächen unter sich gleich sein mußten. Da Körper, die nicht selbst leuchten, durch Licht angestrahlt werden müssen, um ihre Farbe zu messen, ist auch die Helligkeit der Beleuchtung zu berücksich-

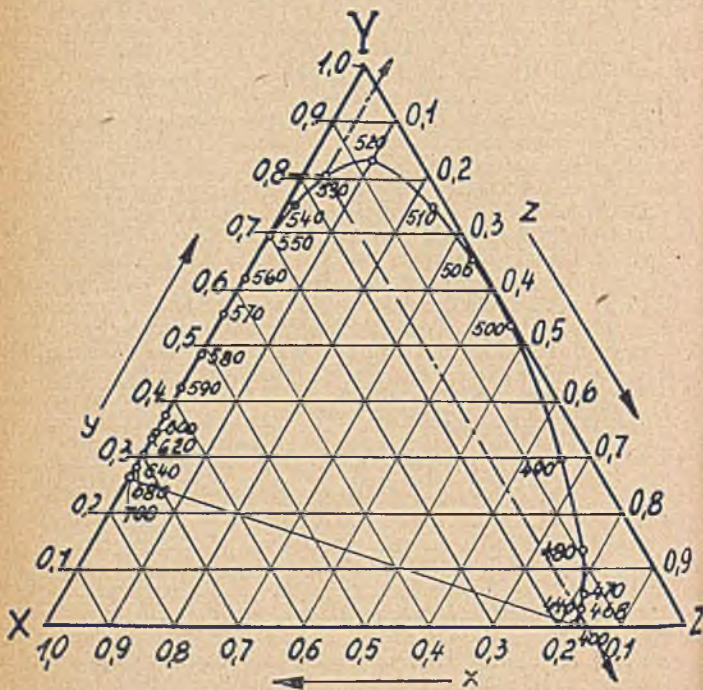


Bild 143. Farbdreieck.

tigen (genormte Normalbeleuchtung A, B, C). In den Tabellen des DIN-Blattes 5033 findet man die zur Berechnung notwendigen Zahlenwerte. Ist z. B. die Farbe einer Glasscheibe im Farbdreieck anzugeben, dann geht man folgendermaßen vor:

1. Man mißt die Durchlässigkeit des farbigen Glases für die einzelnen Spektralfarben mittels Spektralphotometer (Spalte 1 der Tabelle).

2. Man stellt dann die Farbwirkung der gemessenen Strahlung auf das Auge durch Multiplikation der Normalreizbeträge  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit den Beträgen der Normalbeleuchtung fest (gewählt: Normalbeleuchtung A, Spalte V—VII der Tabelle).
3. Berechnung der Farbanteile durch punktweise Bestimmung der Kurven unter Berücksichtigung der spektralen Durchlässigkeit  $D_\lambda$  und Ermittlung der Flächen, die diese Kurven einschließen (Bild 144, schraffierte Flächen).

Tabelle 31.

$\lambda$	I	II	III	IV	V
$m\mu$	$D_\lambda$	$x$	$\bar{y}$	$z$	$E \cdot x$
500	0,03	0,0049	0,3230	0,2720	0,0136
550	0,07	0,4334	0,9950	0,0087	1,8660
600	0,19	1,0622	0,6310	0,0008	6,3518
650	0,75	0,2835	0,1070	0,0000	2,1681
700	0,86	0,0114	0,0041	0,0000	0,1047

$\lambda$	VI	VII	VIII	IX	X
$m\mu$	$E \cdot y$	$E \cdot z$	$D_\lambda E \cdot x$	$D_\lambda E \cdot y$	$D_\lambda E \cdot z$
500	0,8960	0,7545	0,0004	0,0268	0,0226
550	4,2641	0,0375	0,1306	0,2998	0,0026
600	3,7733	0,0048	1,2068	0,7169	0,0009
650	0,8183	0,0000	1,6260	0,6137	0,0000
700	0,0377	0,0000	0,0900	0,0324	0,0000

Die Zahlenwerte der Spalten II—VII der Tabelle wurden den Normtabellen entnommen. Der Inhalt der von den neu entstandenen Kurven umschlossenen Flächen beträgt  $40,5 \text{ cm}^2$  für  $D_\lambda \cdot E \cdot x$  und  $17,8 \text{ cm}^2$  für  $D_\lambda \cdot E \cdot y$ . Den Anteil der Fläche  $D_\lambda \cdot E \cdot z$  wurde vernachlässigt. Einer Fläche von  $40,5 \text{ cm}^2$  entspricht ein Anteil von 69 % Rot und einer Fläche von  $17,8 \text{ cm}^2$  ein Anteil von 31 % Grün. Jetzt erst haben wir die  $x$ - $y$ -Werte ermittelt und können die Farbe des Glases in das Farbdreieck eintragen; diese würde also (Bild 143) einer Farbe der Wellenlänge  $620 \text{ m}\mu$  im Spektrum entsprechen.

In den beiden besprochenen Fällen war das Dreiecksnetz gleichförmig geteilt. Ein drittes Beispiel soll die Möglichkeiten

des log. geteilten Netzes aufzeigen. Durch ein nach drei Richtungen log. geteiltes Netz, in dem die begrenzenden Dreiecksseiten in nicht unterbrochenem Zuge geteilt sind, kann das Gesetz  $x y z = \text{const}$  dargestellt werden. Außerdem können durch Gerade oder Kurvenzüge Beziehungen zwischen je zwei Variablen anschaulich gemacht werden. In Kap. 7 S. 152 wurde

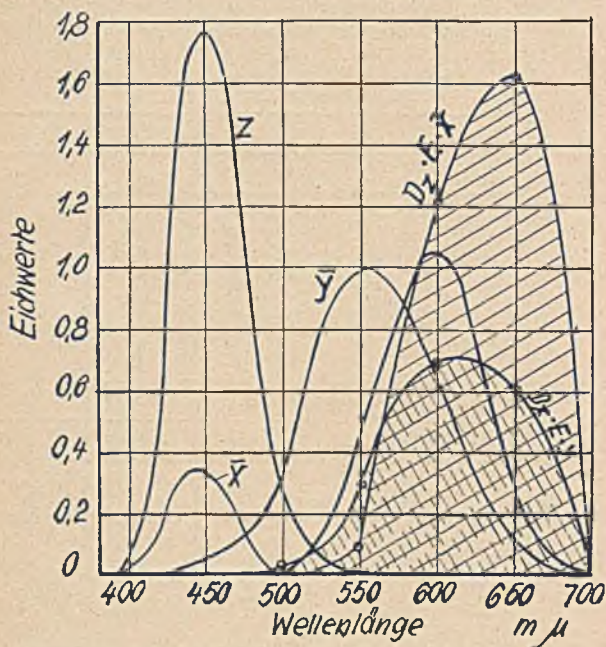


Bild 144. Tafel der sog. Normalkreiskurven des Spektrums.

die Beziehung  $x y z = 10 = V$  als Volumen eines Vierkants mit den Seiten  $x, y, z$  gedeutet. Im Netz selbst können noch die Flächen des Vierkants, d. h. also die Beziehungen

$$x y = F_1 \quad x z = F_2 \quad y z = F_3$$

vertafelt werden. Bild 145 zeigt ein log. geteiltes Dreiecksnetz, in das einige Gerade eingezeichnet wurden, die sich schon äußerlich von den Netzlinien unterscheiden. Diese Geraden zeigen den Verlauf der Beziehungen  $x y = 4, x y = 8, x y = 10$  usw., be-

zeichnen also Flächen gleichen Flächeninhalts eines Vierkants. Die Kennziffern der einzelnen Linien geben die verschiedenen Flächeninhalte an. Ist die Seite  $x = 4,5$  eines Vierkants mit dem Rauminhalt 10 gegeben, dann sind die zugehörigen Werte  $y = 1,73$  z. B. und  $z = 1,3$  auf den Dreiecksseiten abzulesen, denn  $4,5 \cdot 1,73 \cdot 1,285$  ergibt 10.

Vielfach erweist es sich als notwendig, Meßwerte nicht in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, sondern den wirklichen Verhältnissen entsprechend in ein Kreiskoordinatensystem einzutragen. Soll jedoch eine Formel im Kreisnetz dargestellt werden,

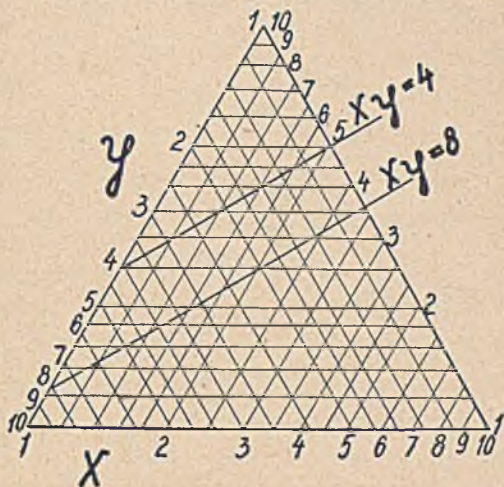


Bild 145. Log. geteiltes Dreiecksnetz mit eingezeichneten Geraden:  $x y = 4$  und  $x y = 8$ .

so ist es notwendig, sie umzuwandeln. Fällt der Pol oder der Mittelpunkt des Kreisnetzes mit dem Nullpunkt des rechtwinkligen Netzes zusammen und ebenfalls auch die Polarachse mit der positiven  $x$ -Achse, dann werden die rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$  in die Kreiskoordinaten  $r$  und  $\varphi$  übergeführt. Hier bedeutet also  $r$  die Länge des Radius oder Leitstrahles und  $\varphi$  den Winkel, den der Leitstrahl mit der Polarachse bildet. Die Beziehungen zwischen rechtwinkligen Koordinaten und Polarkoordinaten lauten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi.$$

Kreisnetz-papiere sind im Handel erhältlich; Abb. 146 zeigt ein solches Papier. I. a. werden Kreisnetze dazu benutzt, um experimentell gewonnene Werte einzutragen und so die technisch wichtigen Vorgänge der Wirklichkeit entsprechend darzustellen. Ist z. B. die Fehlerkurve eines runden Werkstückes z. B. eines Zahnrades zu ermitteln, dann wird man zweck-

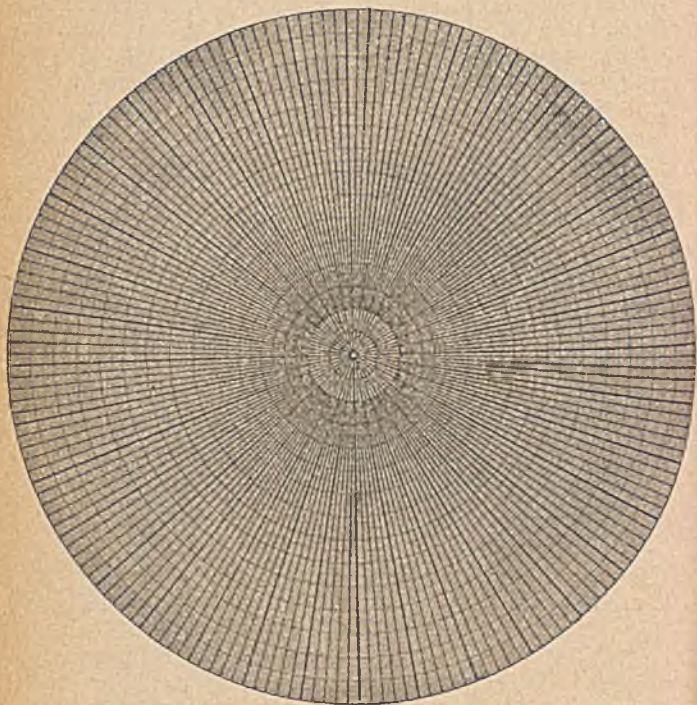


Bild 146. Kreisnetz- oder Polarkoordinatenpapier Nr. 316½.

mäßigerweise Polarkoordinatenpapier verwenden. In vielen registrierenden Apparaten werden ebenfalls derartige Kreisnetz-papiere verwendet. Das Geschwindigkeits-Schaubild eines Diesel-Triebwagens aufgenommen mit dem Tachograf der Firma Kienzle zeigt Abb. 147. Der Polarkoordinaten-Oszillograph nach Manfred von Ardenne benutzt zur Aufzeichnung von elektri-

schen Schwingungen usw. ebenfalls Kreisnetzpapier. Bild 148 gibt das Oszillogramm einer synchronisierten, nahezu sinusförmigen Meßspannung wieder, das der eben erwähnte Oszillograph aufzeichnete. Schwingungen und andere periodische Vorgänge stellt man dagegen zweckmäßigerweise auf rechtwinkligen Netzpapier her. Der gesetzmäßige Verlauf derartiger Vor-

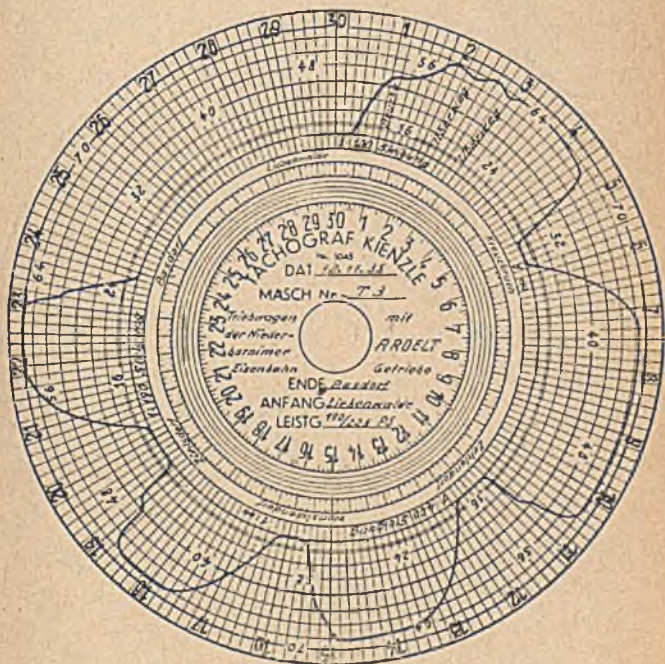


Bild 147. Geschwindigkeits-Schaubild eines Diesel-Triebwagens, aufgenommen mit dem Tachograf der Firma Kienzle.

gänge wird mit Hilfe verschiedener Instrumente aus der zeichnerischen Darstellung ermittelt. Verwendet man zur Auflösung zusammengesetzter Schwingungen den sog. harmonischen Analysator nach Martens (Bild 149), dann sind allerdings die verschiedenen Wertepaare des Kurvenzuges aus dem rechtwinkligen Netz in das Kreisnetz zu übertragen. In so gelagerten Fällen

ist es allerdings besser, die betreffenden Kurvenzüge sofort in ein Kreisnetz einzutragen.

Kreisnetze werden ebenfalls vielfach in der Licht- und Wärmetechnik verwendet, um die Lichtverteilung von Lampen bzw. Wärmeausstrahlung von Flammen räumlich zu erfassen. Die Lichtausstrahlung der Lampen in Abhängigkeit von der

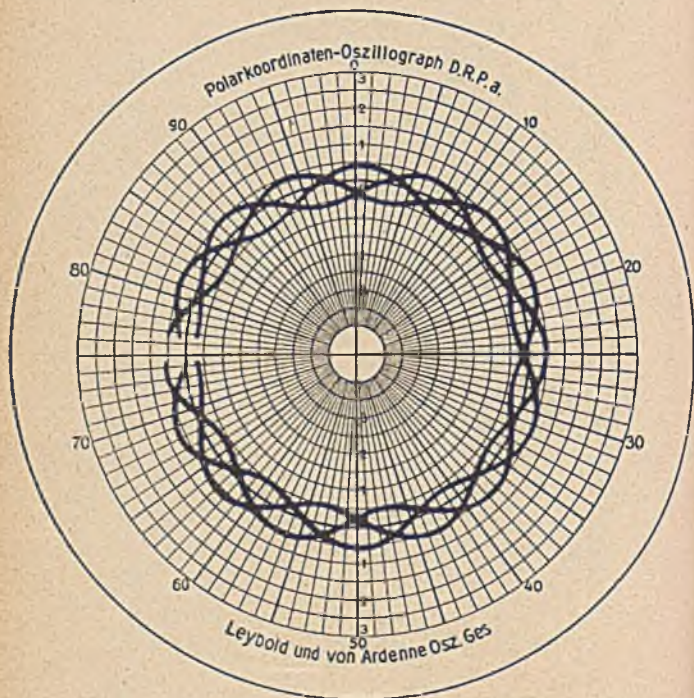


Bild 148. Oszillogramm einer synchronisierten nahezu sin-förmigen Meßspannung.

Ausstrahlungsrichtung wird durch die Lichtverteilungskurve und die Lichtstromkurve gekennzeichnet. Die Lichtverteilungskurve gibt die mittleren Lichtstärken unter den verschiedenen Ausstrahlungswinkeln gegen die Lotrechte an. Sie wird in Polarkoordinaten winkelgetreu und mit gleichmäßig geteilter Licht-



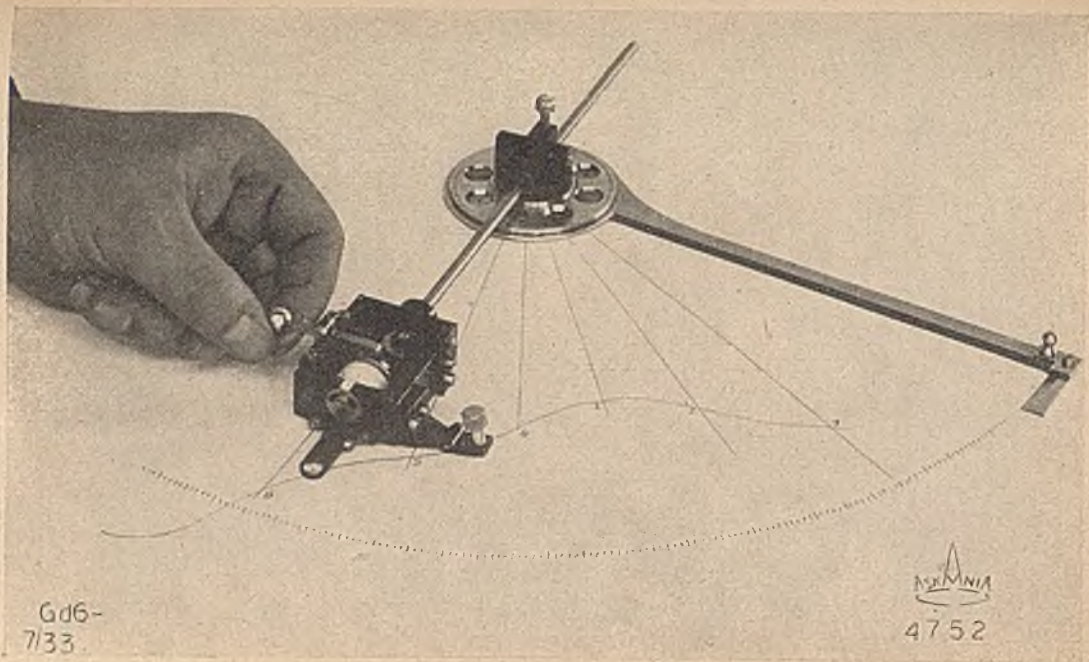


Bild 149. Harmonischer Analysator nach Martens.

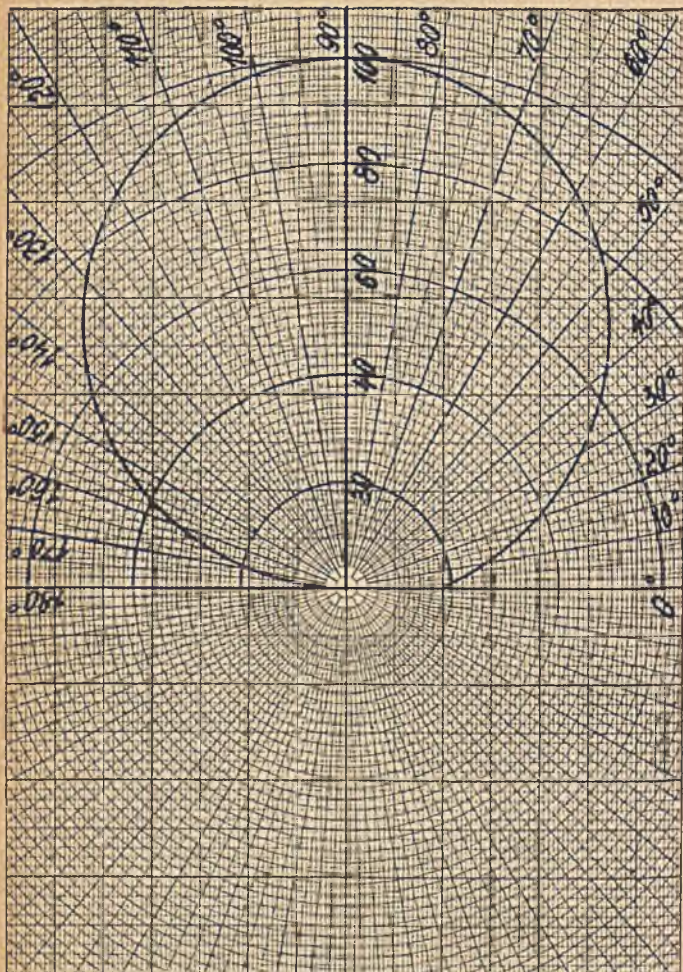


Bild 150. Lichtverteilungskurve für eine normale el. Metalldrahtlampe.

stärkenskala dargestellt; die Ausstrahlungswinkel sind von der nach unten gerichteten lotrechten Achse aus zu rechnen. Eine derartige Lichtverteilungskurve für eine normale elektrische Metalldrahtlampe zeigt Bild 150. In besonderen Fällen können die Lichtstärken auch in log. Maßstab aufgetragen werden. Hierfür benutzt man im Handel erhältliches Kreisnetzpapier, dessen

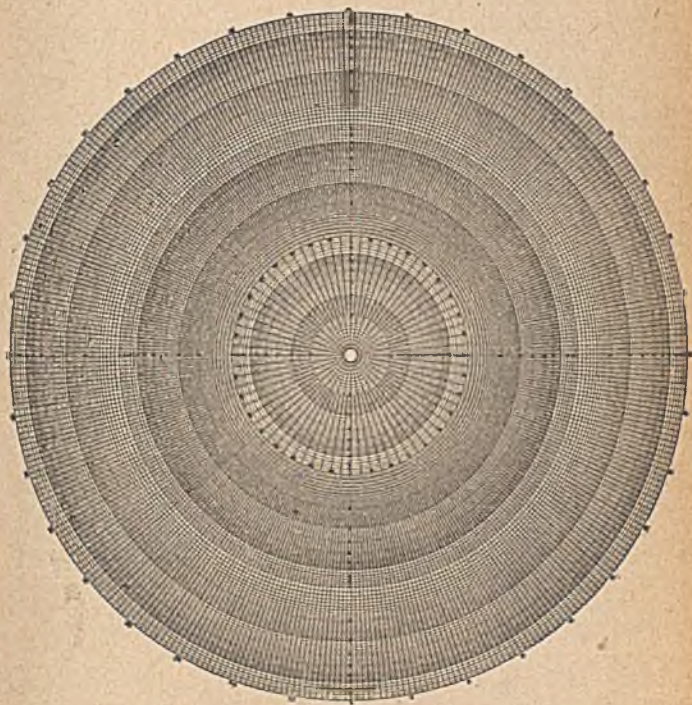


Bild 151. Kreisnetzpapier mit log. Stufung der Kreisdurchmesser Nr. 415  $\frac{1}{2}$  von Schleicher & Schüll.

Durchmesser durch die konzentrischen Kreiskoordinaten nicht mehr gleichförmig sondern log. geteilt sind (Bild 151).

Ebenso wie die ausgestrahlten Lichtmengen können auch die ausgestrahlten Wärmemengen in ein Kreiskoordinatennetz eingetragen und in ihrer Gesamtheit sichtbar gemacht werden.

Hierüber sind in jüngster Zeit neue Untersuchungen angestellt worden (J. Werneburg, Forsch.-Ing.-Wes. Bd. 10 (1939), H. 2 S. 61/79). Es hatte sich gezeigt, daß 3 bis 25 % der Verbrennungswärme einer sichtbaren Flamme durch Wärmestrahlung abgegeben werden. Diese Beträge ermittelt man unter Annahme einer nach allen Richtungen des Raumes gleichmäßig ausgestrahlten Wärmemenge. Hierzu glaubte man sich berechtigt, da Helmholtz an der Flamme eines Schnittbrenners bei Messungen senkrecht zur Flammenachse nach der Schmalseite nahezu die gleiche Ausstrahlung ermittelt hatte wie nach der Breitseite. Die neuen Messungen, die mit einer frei im Raum brennenden Flamme eines Schweißbrenners durchgeführt wurden, ergaben eine erhebliche Abhängigkeit der Strahlung vom Raumwinkel (Bild 152). Für die Ermittlung der Gesamtstrahlung ist aber in der Hauptsache die Ausstrahlung nach Richtungen maßgebend, die in der Nähe der Senkrechten zur Flammenachse verlaufen. Daher ergibt sich nach Bild 152 für die Gesamtstrahlung nur ein um



Bild 152. Darstellung der Wärmestrahlung einer frei im Raume brennenden Flamme eines Schweißbrenners im Kreisnetz.

etwa 5 % kleinerer Wert als nach Messung allein in Richtung der Senkrechten zur Flammenachse und unter Annahme einer nach allen Richtungen des Raumes gleichbleibenden Ausstrahlung (Kurve b des Bildes 152). Als Kreiskoordinaten wurden die Werte  $\frac{E_{\varphi}}{E_{\varphi=0}}$  aufgetragen, wo  $E_{\varphi}$  die Ausstrahlung beim Winkel  $\varphi$  und  $E_{\varphi=0}$  die Ausstrahlung senkrecht zur Flammenachse bedeutet. Diese Messungen sind für die Wärmeübertragung einer Flamme z. B. beim Schweißen von Bedeutung.

## XI. Methoden aus durch Beobachtung ermittelter Wertepaare das Gesetz in algebraischer Form zu ermitteln

Während bisher technische Gesetze oder Formeln in Zahlenpaare verwandelt und somit in eine Form gebracht wurden, die ihre zeichnerische Darstellung ermöglichte, wollen wir jetzt versuchen, den umgekehrten Weg zu gehen und aus bekannten Zahlenpaaren das technische Gesetz ermitteln. Derartige Zahlenpaare sind meist Beobachtungswerte, die durch Meßinstrumente zahlenmäßig genau ermittelt wurden. Das Gesetz kann aber aus bekannten Zahlenpaaren sowohl rechnerisch als auch aus der bildlichen Darstellung ermittelt werden. Während die rechnerischen Methoden eine umfassende Kenntnis der Differential- und Integralrechnung verlangen, sind die graphischen Methoden im Gegensatz dazu einfach in ihrer Anwendung. In der Hauptsache fußen diese Methoden in der Benutzung der Eigenarten log. geteilter Koordinatennetze. Durch Eintragung der experimentell gefundenen Werte in derartige Netze ist es in vielen Fällen möglich, das Gesetz als gerade Linie darzustellen. Die Gleichung bzw. die Formel der geraden Linie aufzustellen ist einfach. In einigen Fällen können wir auch durch Differenzbildung der vorliegenden Werte und durch Interpolieren das Gesetz rein qualitativ ermitteln (siehe Kap. 3 S. 46) und zwar wendet man diese einfache Methode dann an, wenn die im log. geteilten Netz eingetragenen Werte keine Gerade, sondern einen Kurvenzug ergeben.

Die experimentell ermittelten Zahlenpaare lassen sich zwecks Ermittlung des Gesetzes nach dem sich ergebenden Kurvenbild in fünf Gruppen einteilen:

1. Zahlenpaare ergeben nur auf Millimeterpapier eingetragene eine gerade Linie.
2. Zahlenpaare ergeben auf Millimeterpapier ebenso wie auf ganz log. geteiltem Papier eine gerade Linie.
3. Zahlenpaare ergeben nur auf ganzlogarithmisch geteiltem Papier eine gerade Linie.
4. Zahlenpaare ergeben nur auf halblog. geteiltem Papier eine gerade Linie.
5. Zahlenpaare ergeben auf allen Papieren Kurven.

Während die fünfte Gruppe von Zahlenpaaren nur unter Anwendung der Differenzen- und Interpolationsmethode in ein

algebraisches Gesetz verwandelt werden kann, lassen sich die ersten vier Gruppen sowohl mit Hilfe der eben angeführten mehr rechnerischen Methoden als auch der graphischen Darstellung in eine Formel verwandeln.

Wie gewinnen wir nun Zahlenpaare der ersten Gruppe? Nehmen wir z. B. an, wir fahren mit der Eisenbahn längs einer Straße und kontrollieren mit unserer Uhr und durch Ablesen der Kilometerzahl an den Kilometersteinen die zurückgelegte Strecke. Zur Zeit  $t = 0$ , d. h. also zu Beginn der Ablesung zeige der Kilometerstein die Zahl 200; wir können annehmen, der Zug hätte schon die Strecke  $s = 200$  km zurückgelegt. Nach jeder Viertelstunde werde die Kilometerzahl abgelesen. Es ergeben sich folgende Ablesewerte:

$t_0$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2
$s_0$	200	218	230	242	264	275	293	305	322

Nach Auftragen der Werte auf Millimeterpapier erkennt man, daß diese leider nicht auf einer geraden Linie liegen, sondern ziemlich stark streuen. Der Zug hat also seine einmal angenommene Geschwindigkeit nicht beibehalten, oder wir haben die Zahl auf den Kilometersteinen nicht deutlich genug gesehen. Damit nun die Gerade die wahrscheinlich richtigste Lage erhält, muß durch eine Ausgleichsmethode gemittelt werden. Diese Methode beruht darauf, die Ablesewerte so zu verbessern, daß sie auf eine Gerade fallen, von der zwei Punkte mindestens festliegen. Der erste Punkt sei allen möglichen Geraden gemeinsam und heißt der Schwerpunkt. Die Koordinaten des Schwerpunktes erhält man durch das arithmetische Mittel aller Zeit- und Streckenwerte. Den zweiten Punkt erhalten wir folgendermaßen: wir legen durch den gefundenen Schwerpunkt eine Probeergerade, von der wir annehmen können, daß diese die gesuchte Gerade sein kann. Sodann ermitteln wir für jeden Punkt dieser Geraden die Differenzen des Ablesewertes und des entsprechenden, auf der Probeergeraden liegenden Wertes. Bezeichnen wir die Differenzen mit  $\Delta$ , quadrieren sie und addieren sie schließlich, erhalten wir eine Kennziffer, die die Lage der Probeergeraden charakterisiert. Führen wir dieses Verfahren für vier Probeergeraden durch (Bild 153), so erhalten wir vier charakteristische Werte. Diejenige Probeergerade ist wahrscheinlich der Lage nach die richtigste, deren Kennziffer am kleinsten ist. Folgende Tabelle gibt die gewonnenen Zahlenwerte wieder. Die römischen Ziffern bezeichnen die Probeergeraden. Diese Art der Mittelung heißt die Methode der kleinsten Quadrate.

Aus der Tabelle geht hervor, daß Gerade III der Lage nach die wahrscheinlich richtigste der vier gewählten Geraden ist. Die Summenwerte der Differenzenquadrate können wir in Be-

Tabelle 32.

t	I			II			III			IV		
	$\int s$	$\int s$	$\int s^2$	$\int s$	$\int s$	$\int s^2$	$\int$	$\int s$	$\int s^2$	$\int$	$\int s$	$\int s^2$
$\frac{1}{4}$	218—215	+ 3	9	218—218	0	0	218—217	+ 1	1	218—214	+ 4	16
$\frac{1}{2}$	230—230	0	0	230—232	- 2	4	230—232	- 2	4	230—229,5	+ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$	242—246	- 4	16	242—247	- 5	25	242—247	- 5	25	242—244,5	- 2,5	6,25
1	264—261	+ 3	9	264—261	+ 3	9	264—261	+ 3	9	264—261	+ 3	9
$1\frac{1}{4}$	275—277	- 2	4	275—277	- 2	4	275—276	- 1	1	275—277,5	- 2,5	6,25
$1\frac{1}{2}$	293—293	0	0	293—290	+ 3	9	293—291	+ 2	4	293—293,5	- 0,5	0,25
$1\frac{3}{4}$	305—308	- 3	9	305—304	+ 1	1	305—306	- 1	1	305—309	- 4	16
2	322—323	- 1	1	322—318	+ 4	16	322—321	+ 1	1	322—325,5	- 3,5	12,25
Summenwerte: $\Sigma$ 48			$\Sigma$ 68			$\Sigma$ 46			$\Sigma$ 66,25			

ziehung setzen zu den einzelnen Geraden, indem wir auf dem Schnittpunkt der Geraden mit der s-Koordinate, die Senkrechte errichten und diese dem Summenwert entsprechend bemessen. Die Verbindung ergibt eine parabelförmige Kurve, wie aus Bild 153 zu ersehen ist. Der Schwerpunkt ergab für die t-Koordinate:

$$t_0 = \frac{\text{Summe aller } t}{\text{Zahl der Ablesungen}}$$

$$= \frac{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + 2}{9} = 1 \parallel$$

und für die s-Koordinate:

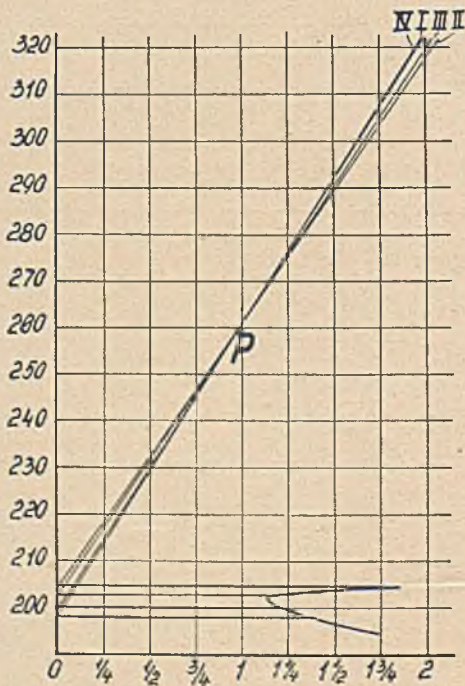


Bild 153. Ermittlung des Gesetzes aus durch Beobachtung erhaltenen Wertepaaren unter Zuhilfenahme der Methode der kleinsten Quadrate.



$$s_0 = \frac{\text{Summe aller Wegstrecken}}{\text{Zahl der Ablesungen}}$$

$$= \frac{200 + 218 + 230 + 242 + 264 + 275 + 298 + 305 + 322}{9}$$

$$= 261 \parallel.$$

Die Schwerpunktskoordinaten sind also  $s_0 = 261$  und  $t_0 = 1$ . Die Gerade III schneidet die  $s$ -Koordinate im Punkte  $s = 202$ . Das Gesetz lautet demnach:

$$s = vt + 202.$$

Da man die  $s$ - und die  $t$ -Werte als Punkte der gefundenen Geraden ablesen kann, ist die Zuggeschwindigkeit leicht zu ermitteln. Da zu  $t = 1$  der Wert  $s = 261$  gehört, erhält man nach Einsetzen dieser Werte in obige Gleichung  $261 = v + 202$  und daraus  $v = 59$ . Der Zug hatte also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 59 km/std. Trägt man die Werte des eben ermittelten Gesetzes:

$$s = 59 t + 202$$

in ein ganzlog. geteiltes Netz ein, ergibt sich beim Verbinden der einzelnen Punkte ein Kurvenzug. Dies war vorauszusehen, da das abgeleitete Gesetz eine Summenformel ist. Allgemein kann man sagen, daß Wertepaare, die aus einer Summenformel entstehen, im ganz- und halblog. geteilten Netz keine geraden Linien ergeben. Würde der Zahlenfaktor 202 in obiger Formel wegfallen, dann hätten wir eine Formel der Gruppe 2 vor uns, deren Wertepaare im Millimeternetz ebenso wie im ganzlogarithmisch geteilten Netz eingetragen sich als gerade Linie abbilden. Die Methode der kleinsten Quadrate kann selbstverständlich auch zur Mittelung von Geraden auf ganz- oder halblog. geteiltem Papier Verwendung finden. Allerdings sind bei der Differenzbildung die betreffenden Werte nicht im logarithmischen sondern im Millimetermaßstab zu messen.

Die Zahlenpaare der dritten Gruppe ergeben auf ganzlogarithmisch geteiltem Papier gerade Linien. Die dieser Gruppe zugehörigen Gesetze haben die Form

$$y = a x^n, \text{ wo } n = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \dots$$

sein kann, d. h. also alle Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$ .

Das Gesetz des freien Falles z. B. hat die Form  $y = a x^2$ . Dieses Gesetz läßt sich durch einen Versuch leicht ermitteln, und zwar braucht man dazu eine Glasplatte und eine Stimmgabel. Berußt man die Glasplatte und bringt an der Stimmgabel einen Schreibstift an und zwar so, daß dieser quer zur Gleitbewegung schwingen kann, dann zeichnet der Stift auf der heruntergleitenden Platte wellenförmige Linien auf. Bezeichnet

man die höchsten Erhebungen dieser Wellenlinien als Wellenberge, so sind die Abstände der Wellenberge untereinander nicht gleich, sondern werden nach unten zu immer kleiner. Da die Stimmgabel zu einer Schwingung stets dieselbe Zeit (Bruchteile von Sekunden) braucht, gibt der Abstand zweier nebeneinanderliegenden Wellenberge die in gleichen Zeiten (beim Heruntergleiten der Glasplatte) zurückgelegten Wege an. Diese Wege werden mit einem Maßstab unmittelbar abgemessen. Beträgt z. B. die Schwingungszahl der benutzten Stimmgabel 128 Hz (1 Hz [Hertz] = 1 Schwingung / sek), so führt sie eine Schwingung in  $\frac{1}{128}$  sek aus. Werden die Abstände von je 4 Amplituden als Einheit der Fallstrecke  $s$  in mm gemessen, dann betragen die zur Beobachtung verwendeten Zeiteinheiten  $T = \frac{1}{32}$  sek. Die gemessenen Werte wurden in der Tabelle 33 zusammengestellt (siehe auch Grimsehl, Lehrbuch der Physik, 6. Auflage, 1. Band S. 31).

Tabelle 33.

T	s	T	s
1	4,8	7	234,9
2	19,2	8	306,8
3	43,2	9	388,2
4	76,7	10	479,3
5	119,9	11	580,0
6	172,6		

Trägt man diese Wertepaare in ein ganzlog. geteiltes Netz ein, erhält man eine gerade Linie. Da die Steigung dieser Linie den Exponenten  $n$  des oben angegebenen Gesetzes bestimmt, ermittelt man diesen, indem man  $s$  und  $t$  ausmißt und das Verhältnis  $\frac{s}{t}$  bildet. Nach Bild 154 ist  $\frac{s}{t} = \frac{2}{1}$ , d. h. der Exponent des Gesetzes  $s = at^n$  ist  $n = 2$ . Um den Zahlenfaktor  $a$  zu finden, verfolgt man die gerade Linie bis zum Punkte  $t = 1$ ,  $s = 4,8$ . Da  $t = t^2 = 1$  ist, erhält man  $s = 4,8 \cdot 1$ . Der Faktor  $a$  ist also mit dem Werte  $4,8 \cong \frac{9}{2}$  gefunden (genau 4,91). Die vollständige Formel, die das Fallgesetz wiedergibt, lautet also

$$s = \frac{g}{2} t^2 \quad \text{wo } g = 9,81 \text{ m/sek}^2.$$

Eine ganz andre Gesetzmäßigkeit liegt dem Abklingen einer Schwingung zugrunde. Wenn wir einen Körper in einer schwingungsdämpfenden Flüssigkeit schwingen lassen, beobachten

wir, daß bei gleichbleibendem Abstand der Amplituden oder Wellenberge diese selbst immer kleiner werden. Das Gesetz der

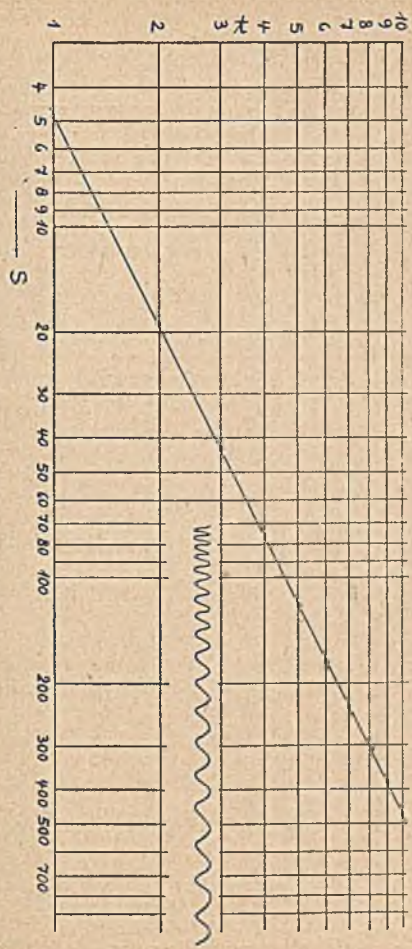


Bild 154. Ermittlung des Beschleunigungswertes  $g = 9,81 \text{ m/sek}^2$  durch Fallversuch.

Größenabnahme der Amplituden verrät uns die graphische Darstellung. Tragen wir nämlich die mittleren Amplitudenwerte

der Reihe nach in ein Netz ein, dessen Ordinatenachse logarithmisch, dessen Abscissenachse gleichförmig geteilt ist (siehe Bild. 155), so erhalten wir ebenfalls eine gerade Linie. In diesem

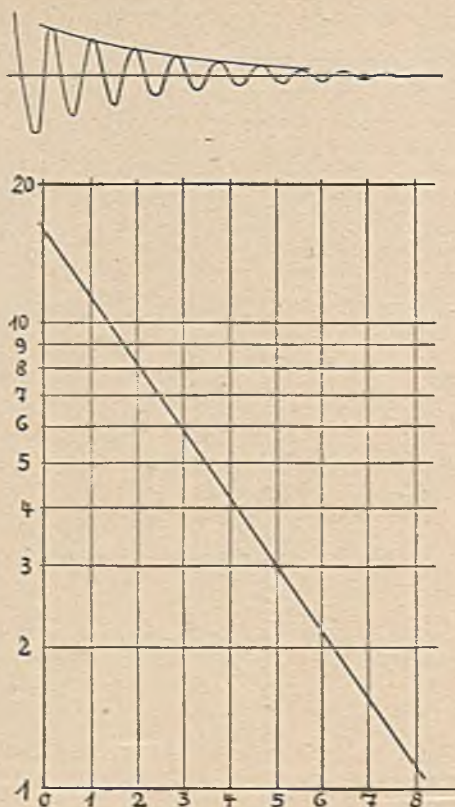


Bild 155. Ermittlung des Gesetzes einer gedämpften Schwingung.

Falle hat das Gesetz die allgemeine Form  $y = a b^x$ . Die Buchstaben  $a$  und  $b$  deuten wieder auf Zahlenfaktoren. Um  $a$  zu finden, verfolgt man die gerade Linie bis  $x = 0$ . Da  $b^0 = 1$  ist,

erhält man für  $y = a$  den Wert 16. Wenn man aus dem dargestellten Gesetz zwei zusammengehörige Werte wählt und diese in die Formel  $y = 16 b^x$  einsetzt, findet man hierdurch  $b$ . Es werden gewählt die Werte  $x = 1$  und  $y = 11,4$ . Dann ist  $11,4 = 16 b$  bzw.  $b = \frac{11,4}{16} = 0,712$ . Das Gesetz lautet also

$$y = 16 \cdot 0,712^x.$$

Zur Kontrolle berechnen wir die Zahlenwerte  $a$  und  $b$  noch einmal durch die sog. Einsetzungsmethode. Wir setzen für  $x$  und  $y$  je zwei Werte in die Gleichung  $y = a b^x$  ein, und zwar wählen wir die Werte  $x = 1$  und  $y = 11,4$ . Es ist dann  $11,4 = 16 b$  und  $b = \frac{11,4}{16} = 0,712$ . Das Gesetz lautet also  $y = 16 \cdot 0,712^x$ .

Zum Vergleich setzen wir noch je zwei Wertepaare in die Gleichung ein und berechnen  $a$  und  $b$  noch einmal aus zwei Gleichungen. Wir wählen hierfür die Werte  $x = 3$  und  $y = 5,9$  sowie  $x = 4$  und  $y = 4,15$ . Die Gleichungen lauten dann  $4,15 = a b^4$  und  $5,9 = a b^3$ . Daraus errechnet sich  $b$  zu  $\frac{4,15}{5,9} = 0,712$ . Den Wert  $a$  erhält man aus der Beziehung

$a = \frac{4,15}{b^4} = \frac{4,15}{0,259} = 16$ . Hierdurch ist erwiesen, daß oben angegebenes Gesetz richtig berechnet wurde. Es sagt aus, daß die logarithmierten Werte aufeinanderfolgender gedämpfter Schwingungsauslässe sich immer um denselben Wert unterscheiden.

In den drei hier angeführten Fällen gelang es uns immer, durch Eintragen der Wertepaare in entsprechend geteilte Netze als graphisches Bild eine gerade Linie zu erhalten. Welches Verfahren gelangt aber dann zur Anwendung, wenn die eingetragenen Zahlenpaare in jedem Netz Kurvenzüge ergeben? In solchen Fällen ist zu versuchen, ob sich durch Differenzbildung zunächst rein qualitativ eine Gesetzmäßigkeit nachweisen läßt. Ist dies der Fall, dann kann durch die Einsetzungsmethode das Gesetz selbst gefunden werden. Die Differenzenmethode ist jedoch nur dann anwendbar, wenn die Zahlen einer Wertegruppe sich immer um einen bestimmten Betrag, am besten um 1 unterscheiden. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, wendet man zweckmäßigerweise die Newtonsche Interpolationsmethode an. Zunächst wollen wir eine Aufgabe behandeln, wo sich durch die Differenzenmethode das Gesetz ermitteln läßt. Zuvor jedoch eine kleine Einführung in das Wesen dieser Methode.

Bildet man die Differenz der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16,

25 usw., so entsteht hieraus die Reihe der ungraden Zahlen 3, 5, 7, 9 usw. Die Differenz dieser Zahlen ist immer 2. Wenn man sich also die Quadratzahlen aus der Formel  $y = x^2$  entwickelt denkt, so gibt der Exponent 2 die Zahl der Differenzbildungen an, die nötig sind, um zu einem konstanten Differenzwert zu gelangen. Bei den Kubikzahlen würde man also dreimal die Differenzwerte zu bilden haben, ehe die Differenz eine sich gleich bleibende Zahl ergäbe. Das Gesetz, nach dem die Kubikzahlen entstehen, heißt  $y = x^3$  und bildet sich in einem doppelt log. geteilten Netz als gerade Linie ab. Wenn jedoch zu diesem Gliede dritten Grades noch je ein Glied zweiten und ersten Grades hinzukommt, dann sind folgende dem Gesetz

$$y = x^3 + x^2 + x$$

entsprechende Zahlenpaare zu bilden:

$x = 1;$	$y = 3$	$x = 4;$	$y = 84$
$x = 2;$	$y = 14$	$x = 5;$	$y = 155$
$x = 3;$	$y = 39$	$x = 6;$	$y = 258$ usw.

Diese Zahlenpaare ergeben, in ein ganzlog. geteiltes Netz eingetragen, nicht mehr eine gerade Linie. Trotzdem kann man durch Rechnung das entsprechende Gesetz finden. Bilden wir von oben angegebenen Zahlen die Differenzwerte, dann ist der 3. Differenzwert ein konstanter Wert. Bei Gesetzmäßigkeiten, die aus der Summe mehrerer Glieder sich zusammensetzen, gilt die Regel, daß der höchste vorkommende Exponent eines Gliedes die Zahl der Differenzbildungen bestimmt, die zu einem sich gleich bleibenden Differenzwert führen. Da in dem oben angeführten Gesetz  $y = x^3 + x^2 + x$  auch beliebige Zahlenfaktoren enthalten sein können, so würde die allgemeinste Form des Gesetzes lauten:

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Da vier unbekannte Zahlenfaktoren  $a, b, c$  und  $d$  in dieser Formel enthalten sind, braucht man zur Ermittlung dieser Werte noch drei weitere Gleichungen. Es entsteht also folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= a x_1^3 + b x_1^2 + c x_1 + d \\ y_2 &= a x_2^3 + b x_2^2 + c x_2 + d \\ y_3 &= a x_3^3 + b x_3^2 + c x_3 + d \\ y_4 &= a x_4^3 + b x_4^2 + c x_4 + d. \end{aligned}$$

Die uns bekannten Wertepaare für  $x$  und  $y$  ergeben also — sinngemäß eingesetzt — 4 lineare Gleichungen, die sich auf elementare Weise durch Erweitern und Subtrahieren lösen lassen. An einem Beispiel möge jene Methode noch genauer erläutert werden.

Bei der Eichung eines Zungenfrequenzmessers erhielt man für die jeweilige freie Länge der schwingenden Blattfeder eine bestimmte Schwingungszahl  $v$  pro Zeiteinheit. Die gemessene Schwingungszahl der immer um 1 cm verkürzten Feder betrug nach unwesentlichen Korrekturen:

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	20	23	28	35	44	57	77	109	160	239.

Hierbei ist zu beachten, daß die größte Federlänge mit 1,

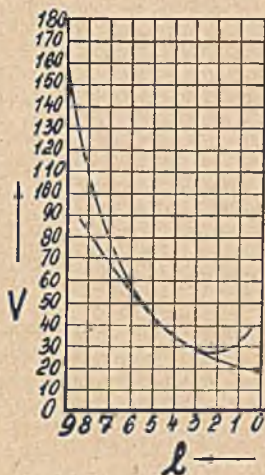


Bild 156. Graphische (und rechnerische) Ermittlung des Gesetzes der Eichkurve eines Zungenfrequenzmessers).

die kleinste mit 10 bezeichnet wurde, nach Maßgabe der Bezeichnung des der Eichung zugrunde gelegten Millimetermaßstabes. Die auf Millimeterpapier eingetragenen Werte ergaben einen Kurvenzug, der an eine Exponentialkurve erinnerte (Bild 156). Auch auf ganzlog. geteiltes Papier eingetragene, bilden sich jene Werte als Kurve ab. Bei Differenzbildung der  $v$ -Werte ergeben sich folgende Zahlenreihen. (Tabelle 34.)

Der erste Teil der Wertepaare entspräche also einer Summenformel zweiten Grades der allgemeinen Form  $y = ax^2 + bx + c$ , der zweite Teil aber einer Summenformel vierten Grades der allgemeinen Form  $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ . Will man nun die Gesetze, die diesen beiden Teilen zugrunde liegen, er-

Tabelle 34.

l	v	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz	4. Differenz
1	20				
2	23	3			
3	28	5	2		
4	35	7	2		
5	44	9	2		
6	57	13	4	3	
7	77	20	7	5	2
8	109	32	12	7	2
9	160	51	19	9	2
10	239	79	28		

mitteln, braucht man im 1. Falle 3 Wertepaare, im 2. Falle 5 Wertepaare. Setzen wir in die 1. Gleichung die ersten drei Werte für  $l$  und  $v$  ein ( $y = v, x = l$ ) dann erhält man folgende 3 lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1a + 1b + 1c &= 20 & \text{oder} & & a_1 a + b_1 b + c_1 c &= d_1 \\ 4a + 2b + 1c &= 23 & & & a_2 a + b_2 b + c_2 c &= d_2 \\ 9a + 3b + 1c &= 28 & & & a_3 a + b_3 b + c_3 c &= d_3 \end{aligned}$$

Um die Zahlenwerte für  $a, b$  und  $c$  zu errechnen, führt man das Gleichungssystem mit 3 Unbekannten auf ein solches mit zwei Unbekannten ( $a, b$ ) zurück. Aus diesem Gleichungssystem können dann leicht die Unbekannten  $a$  und  $b$  berechnet werden. Durch Einsetzen dieser Werte in irgend eine Gleichung des Dreiglieders erhält man die 3. Unbekannte  $c$ . Wir führen diese Rechnung einmal durch:

$$\begin{array}{r} 1a + 1b + 1c = 20 \\ 4a + 2b + 1c = 23 \\ \hline 3a + b = 3 \\ 6a + 2b = 6 \\ 8a + 2b = 8 \\ \hline 2a = 2 \\ \hline \underline{a = 1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1a + 1b + 1c = 20 \\ 9a + 3b + 1c = 28 \\ \hline 8a + 2b = 8 \\ 6 + 2b = 6 \quad 1 + c = 20 \\ \hline b = 0 \qquad \qquad \underline{c = 19} \end{array}$$



Bequemer wäre es allerdings, wenn wir die betreffenden Zahlenfaktoren sofort in bestimmte Lösungsformeln einsetzen könnten. Diese lauten in allgemeiner Schreibweise:

$$a = \frac{d_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 + d_2 b_3 c_1 - c_1 b_2 d_3 - b_1 d_2 c_3 - c_2 b_3 d_1}{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - c_2 b_3 a_1}$$

$$b = \frac{a_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 d_3 - c_1 d_2 a_3 - c_2 d_3 a_1 - d_1 a_2 c_3}{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - c_2 b_3 a_1}$$

$$c = \frac{a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + a_2 b_3 d_1 - d_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 d_3 - b_3 d_2 a_1}{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + a_2 b_3 c_1 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - c_2 b_3 a_1}$$

Setzen wir für  $a_1, b_1, c_1, a_2$  usw. die betreffenden Zahlenwerte ein, so erhält man die Werte für  $a, b$  und  $c$ :

$$a = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 28 + 23 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 28 - 1 \cdot 23 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$b = \frac{1 \cdot 23 \cdot 1 + 20 \cdot 1 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 28 - 1 \cdot 23 \cdot 9 - 1 \cdot 28 \cdot 1 - 20 \cdot 4 \cdot 1}{-2} = 0$$

$$c = \frac{1 \cdot 2 \cdot 28 + 1 \cdot 23 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 20 - 20 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 28 - 3 \cdot 23 \cdot 1}{-2} = \frac{-38}{-2} = 19.$$

Die Schreibweise der allgemeinen Lösungsformeln ist ziemlich umständlich und unübersichtlich. Wir ersetzen diese daher durch sog. Determinanten:

$$a = \frac{D_1}{D} \quad b = \frac{D_2}{D} \quad c = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

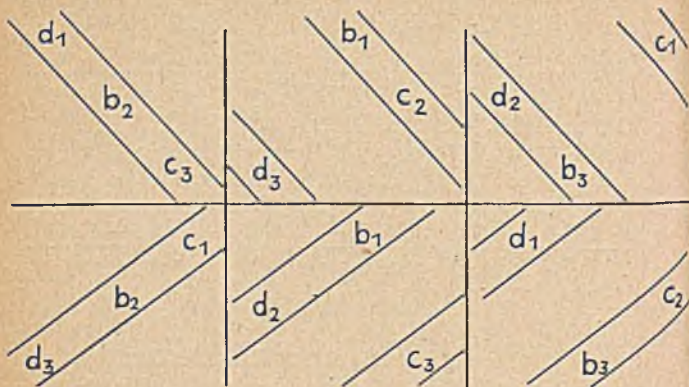
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Durch gliedweisen Vergleich dieser einfachen und übersichtlichen Darstellung mit den allgemeinen Lösungsformeln wird klar, in welcher Weise die einzelnen Werte miteinander zu multiplizieren sind. Bei einer Determinante nennen wir die waagerechten Zahlenreihen Zeilen, die senkrechten Spalten. Eine Determinante, die wie vorliegende aus 3 Reihen und 3 Spalten besteht, läßt sich also in 6 Produktglieder auflösen, von denen 3 positiv und 3 negativ gezählt werden je nach der Rich-

tung, in welcher sie innerhalb der Determinante ausmultipliziert werden. Die Determinante  $D_1$  z. B. ist in folgender Weise aufzulösen:



Bei der Aufstellung des Gleichungssystems mit 5 Unbekannten, das zur Ermittlung der Zahlenfaktoren der Gleichung 4. Grades führen soll, wird man von vornherein auf die Darstellung der Unbekannten durch eine Lösungsformel verzichten und sofort die Determinantenschreibweise anwenden. Allgemein werden die Faktoren a, b, c, d und e durch folgende Determinanten ermittelt:

$$a = \frac{D_1}{D}; \quad b = \frac{D_2}{D}; \quad c = \frac{D_3}{D}; \quad d = \frac{D_4}{D}; \quad e = \frac{D_5}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ f_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ f_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ f_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & f_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & f_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & f_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & f_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & f_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & f_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & f_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & f_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & f_5 & e_5 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & f_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & f_5 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Durch Einsetzen der in der Tabelle angegebenen Zahlenwerte erhält man die 5 Gleichungen, die die Faktoren  $a_1$ ;  $b_1$ ;  $c_1$ ;  $d_1$ ;  $e_1$ ;  $f_1$  usw. enthalten:

$$a \cdot 5^4 + b \cdot 5^3 + c \cdot 5^2 + d \cdot 5 + e = 44$$

$$a \cdot 6^4 + b \cdot 6^3 + c \cdot 6^2 + d \cdot 6 + e = 57$$

$$a \cdot 7^4 + b \cdot 7^3 + c \cdot 7^2 + d \cdot 7 + e = 77$$

$$a \cdot 8^4 + b \cdot 8^3 + c \cdot 8^2 + d \cdot 8 + e = 109$$

$$a \cdot 9^4 + b \cdot 9^3 + c \cdot 9^2 + d \cdot 9 + e = 160 \text{ oder:}$$

$$625 a + 125 b + 25 c + 5 d + e = 44$$

$$1296 a + 216 b + 36 c + 6 d + e = 57$$

$$2401 a + 343 b + 49 c + 7 d + e = 77$$

$$4096 a + 512 b + 64 c + 8 d + e = 109$$

$$6561 a + 729 b + 81 c + 9 d + e = 160$$

oder allgemein geschrieben

$$a_1 a + b_1 b + c_1 c + d_1 d + e_1 e = f_1$$

$$a_2 a + b_2 b + c_2 c + d_2 d + e_2 e = f_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_5 a + b_5 b + c_5 c + d_5 d + e_5 e = f_5.$$

Durch Vergleich der letzten beiden Systeme können die Zahlenfaktoren bestimmt und in Determinantenform geschrieben werden. Man erhält also für

$$a = \frac{1}{12}, \quad b = -\frac{16}{12}, \quad c = \frac{113}{12}, \quad d = -\frac{302}{12}, \quad e = \frac{588}{12}.$$

Das Gesetz des ersten Teiles des abgebildeten Kurvenzuges (Bild 156) lautet dann

$$\text{I} \quad l^2 + 19 = v$$

das des zweiten Teiles

$$\text{II} \quad \frac{1}{12} l^4 - \frac{16}{12} l^3 + \frac{113}{12} l^2 - \frac{302}{12} l + \frac{388}{12} = v.$$

Durch die algebraische Formulierung des Gesetzes können jetzt auch Zwischenwerte berechnet werden, die sonst nur mittels der Schlüsselkurve gefunden werden können. Ergänzt man jetzt die Wertepaare des ersten Kurventeiles unter Benutzung der ersten Formel, erhält man folgende Zahlenreihe:

$$l = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$$

$$v = 20 \quad 23 \quad 28 \quad 35 \quad 44 \quad 55 \quad 68 \quad 83.$$

Ebenso kann durch die zweite Formel die Wertereihe des zweiten Kurvenzuges sinngemäß erweitert werden. Man erhält folgende Werte:

$$l = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

$$v = 32 \quad 27 \quad 29 \quad 35 \quad 44 \quad 57 \quad 77 \quad 109 \quad 160 \quad 239.$$

Das Bild 156 zeigt deutlich den Übergang der beiden Kurven-

züge bzw. ihre Weiterführung. Eine derartige Bestimmung der Gesetzmäßigkeiten zeigt jedoch meist nicht die tieferen Gründe technischer Zusammenhänge auf, sondern beschränkt sich darauf, Abhängigkeiten rein formaler Natur aufzudecken. Die tieferen Ursachen des Verhaltens der Blattfeder z. B. in schwingungstechnischer Hinsicht kann aus den entwickelten Gesetzen nur der geübte Fachmann erkennen.

Die Differenzenmethode läßt sich nur dann anwenden, wenn die Werte der einen Zahlenreihe dadurch gekennzeichnet sind, daß sie sich untereinander durch einen gleichen Betrag unterscheiden. In dem eben behandelten Beispiel bildeten die Werte für  $l$  eine natürliche Zahlenreihe, deren Glieder sich immer um 1 unterschieden. Sind die Differenzen der zu untersuchenden Werte jedoch unregelmäßig, dann sucht man entweder durch Schlüsselkurve die Zwischenwerte zu ermitteln, um dann die Differenzenmethode anzuwenden oder man bedient sich zur Feststellung der algebraischen Formel der Newtonschen Interpolationsmethode. Ein Beispiel soll jene Methode näher erläutern.

Es seien folgende Wertepaare gegeben:

$$\begin{array}{rcccccc} x & = & 6 & 9 & 11 & 15 & 19 \\ y & = & 123 & 264 & 388 & 708 & 1124. \end{array}$$

Diese Werte ergeben auf Millimeterpapier als auch auf log. geteiltes Papier eingetragene Kurven, d. h. die Formel, die jene Werte hervorbringt, ist wahrscheinlich eine Summenformel: sie setzt sich aus mehreren Gliedern zusammen. Die Zwischenwerte lassen sich aus der graphischen Darstellung nur ungenau ermitteln (Bild 157). Nach der Interpolationsmethode berechnet man aus den angegebenen Werten die Steigungen der Kurve in den einzelnen Punkten und zwar aus den Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} m_1' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & m_3' = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} \\ m_2' = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} & m_4' = \frac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1} \end{array}$$

Diese Werte finden sich in Spalte III der unten stehenden Tabelle. Aus der Reihe der Steigungswerte  $m'$  kann auf dieselbe Weise eine zweite Reihe von Steigungswerten berechnet werden durch die Beziehungen

$$m_1'' = \frac{m_2' - m_1'}{x_3 - x_2}; \quad m_2'' = \frac{m_3' - m_1'}{x_4 - x_2}; \quad m_3'' = \frac{m_4' - m_1'}{x_5 - x_2}$$

Aus der 2. Reihe der Steigungswerte kann eine 3. Reihe gebildet werden usw. Man erhält also folgende Tabelle:

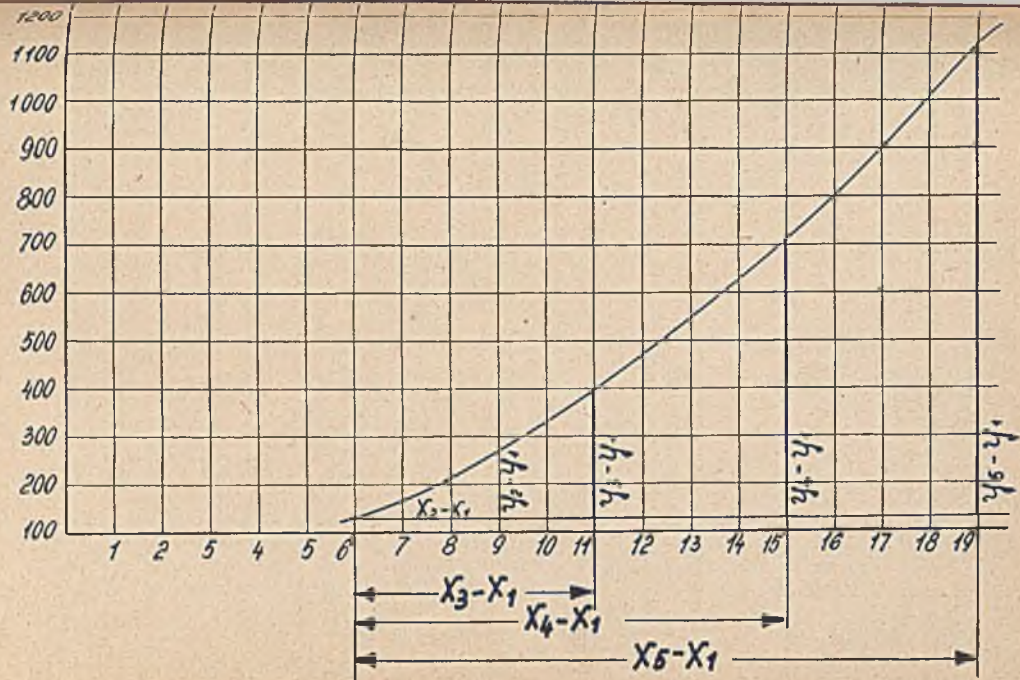


Bild 157. Ermittlung des Gesetzes durch Betrachtung der Steigungswerte.

Tabelle 35.

I	II	III	IV	V
x	y	m'	m''	m'''
6	123			
9	264	47		
11	388	53	3	
15	708	65	2	-0,25
19	1124	77	1,2	-0,2

Die eingerahmten Kopfwerte der einzelnen Spalten werden zur Berechnung des algebraischen Gesetzes verwendet. Man setzt sie in folgende Beziehung ein:

$$y = y_1 + m_1'(x - x_1) + m_1''(x - x_1)(x - x_2) - m_1'''(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Setzen wir in diese Beziehung die betreffenden Tabellenwerte ein, so erhält man:

$$y = 123 + 47(x - 6) + 3(x - 6)(x - 9) - 0,25(x - 6)(x - 9)(x - 11).$$

Unter Berücksichtigung der ersten 3 Glieder dieser Näherungsformel findet man folgendes Gesetz:

$$y = 3x^2 + 2x + 3.$$

Kontrollieren wir dieses Gesetz durch Einsetzen der bekannten Werte, dann erkennen wir, daß schon durch diese dreigliedrige Formel die einzelnen Wertepaare richtig herauskommen. Das 4. Glied braucht in der Formel also nicht mehr berücksichtigt zu werden. Man erhält durch Ablesung (Bild 157) folgende Zwischenwerte:

$$y_7 = 160; \quad y_8 = 208; \quad y_{10} = 325; \quad y_{12} = 465; \quad y_{13} = 538.$$

Die entsprechenden berechneten Werte sind

$$y_7 = 164; \quad y_8 = 211; \quad y_{10} = 323; \quad y_{12} = 459; \quad y_{13} = 536.$$

Die berechneten Werte sind bestimmt richtiger als die abgelesenen, so daß die sich ergebende Abweichung als Ablesefehler bezeichnet werden muß. In einem solchen Falle lohnt es sich, nach der Interpolationsmethode das Gesetz aufzustellen und nach diesem die Zwischenwerte zu berechnen.

## XII. Darstellungen einiger Formeln

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Eigenarten im Aufbau und in der Benutzung einzelner Tafelformen, wie Leitertafel, Netztafel, Dreieckstafel usw. gesondert behandelt. An einigen Beispielen wurde gezeigt, wie sich die verschiedenen Tafeltypen auch zu Verbundtafeln zusammenfassen lassen. So wurde z. B. auf S. 121 ff. besprochen die Vereinigung von Leiter- und Netztafel, auf S. 197 die Vereinigung einer allgemeinen Leitertafel mit Leiter- und Netztafel, auf S. 176 endlich die Verbindung von Nomogrammen in N- und Quadratform mit einer allgemeinen Leiter- bzw. Netztafel. Durch derartige Tafelgefüge können Formeln und Formelgruppen mit fünf und mehr Veränderlichen dargestellt werden.

Die in diesem Abschnitt zu behandelnden Aufgaben sollen in der Hauptsache zeigen, nach welchen Gesichtspunkten derartige Verbindungen vorgenommen werden. Die Methode der Einordnung von Einzeltafeln in ein Tafelgefüge gestattet die Mannigfaltigkeit der rechentechnischen Möglichkeiten voll auszunutzen. Es werden in diesem Kapitel Formeln folgender Gebiete behandelt:

1. Kalkulation (Berücksichtigung der AWF-Tabellen usw.),
  2. Festigkeitslehre (Trägheitsmomente einiger Querschnitte),
  3. Werkstatttechnik (Riemenlänge offener und gekreuzter Riemen, Schnecke und Schneckenrad).
1. Kalkulation.

In Abschnitt IV zeigte Bild 58 eine Tafel, in der die beiden Hauptformeln der Kalkulation dargestellt waren. Für die Bestimmung der Schnittzeit  $T$  ist aber außer der Schnittgeschwindigkeit  $v$ , dem Wellendurchmesser  $d$ , der Umdrehungszahl  $n$  und der Länge  $l$  der zu drehenden Welle auch noch die Leistung  $N$  der Drehbank und der Spanquerschnitt  $F$  zu berücksichtigen. Außerdem ändert sich auch die Antriebsleistung bei verschiedenen Materialien, d. h. es sind noch Materialzahlen bei der Ermittlung der Schnittzeit zu berücksichtigen. Die wirtschaftliche Leistung errechnet sich nach der Beziehung:

$$N_w = \frac{v \cdot K_s \cdot F}{60 \cdot 75} \cdot \eta \text{ [PS]}.$$

Hier bedeutet:

$v$  = Schnittgeschwindigkeit in m/min

$K_s$  = spez. Schnittdruck oder spez. Schnittwiderstand in kg/mm<sup>2</sup>

$\eta$  = Wirkungsgrad in %

$F$  = Spanquerschnitt in mm<sup>2</sup>.

Der Spanquerschnitt wieder wird aus Vorschub  $s$  und Span-

tiefe  $t$  berechnet nach der Beziehung  $F = s \cdot t$ . Die Zahl, die für den spez. Schnittdruck in Rechnung gesetzt wird, ist für jedes zu bearbeitende Material eine andere. In Taschenbüchern, Kalendern usw. findet man diese Schnittwiderstandszahlen für verschiedene Materialien in Tabellen zusammengefaßt. Da der Schnittdruck bei größer werdendem Spanquerschnitt steigt, werden die spez. Schnittwiderstände auch für verschiedene Spanquerschnitte angegeben. Im DAF-Kalender des Deutschen Metallarbeiters für das Jahr 1940 findet sich ebenfalls eine derartige Tabelle, aus der wir im folgenden einige Werte wiedergeben:

Tabelle 35.

Werkstoff	spez. Schnittdruck $K_s$ in $\text{kg/mm}^2$ bei Spanquerschnitt $F$ in $\text{mm}^2$	
	$F = 1 \text{ mm}^2$	$F = 5 \text{ mm}^2$
St 60	$K_s = 160 \text{ kg/mm}^2$	$K_s = 135 \text{ kg/mm}^2$
St 70	= 190 „	= 160 „
VCN 35 (90—105 $\text{kg/mm}^2$ )	= 235 „	= 190 „
VCN 45 (140 $\text{kg/mm}^2$ )	= 350 „	= 260 „
Mangan Hartstahl	= 480 „	= 370 „
Stg (50—60 $\text{kg/mm}^2$ )	= 150 „	= 125 „
Ge (HB = 220 $\text{kg/mm}^2$ )	= 200 „	= 170 „
Ms 58	= 75 „	= 65 „
Al Cu Mg (Duralumin)	= 80 „	= 70 „

In einem Rechnungsbeispiel für St. 60 wurde dann  $F=3 \text{ mm}^2$  gewählt und mit  $K_s = 150 \text{ kg/mm}^2$  gerechnet. Warum gerade diese Zahl gewählt wurde, ist an dieser Stelle nicht angegeben. Wir wollen diese Frage im folgenden noch klären, vorher jedoch sei noch eine andre Tabelle angegeben, die auf einem von der Rechenschieberfabrik Iwa, Eßlingen a. N., entwickelten Tabellenschieber zur Ermittlung der Antriebsleistung aufgedruckt ist. Diese Tabelle enthält ebenfalls Zahlenwerte für den (spez.!) Schnittwiderstand bei verschiedenen Spanquerschnitten  $F$  in  $\text{mm}^2$ .

Auch hier ist nichts angegeben über die Abhängigkeit des Wertes  $K_s$  vom Spanquerschnitt. Die Wahl von  $K_s$  bei Zwischenwerten von  $F$  scheint hier ganz dem Gutdünken des jeweiligen Bearbeiters überlassen. Die Abhängigkeit des spez. Schnittdruckes vom Spanquerschnitt ist jedoch schon vor über einem Jahrzehnt von Kronenberger durch die Beziehung

$$K_s = \frac{K}{F^{\epsilon}}$$



Tabelle 36.

Werkstoff	Keilwinkel $\beta$	$F = 1$	$F = 2,5$	$F = 5$
St 37-11	55°	190	160	145
St 50-11	62°	260	225	200
St 70-11	68°	340	295	270
Stg 50—81	68°	275	250	220
Ge 18—91	68°	130	110	100
VCN 15 w	74°	360	310	285
VCN 35 h	77°	380	330	305
Rotguß	74°	70	60	55
Messing MS 58	68°	80	70	65
Aluminium gegossen	46°	55	50	45
Elektron	40°	24	23	22

festgelegt worden. Hier wird die Abhängigkeit des spez. Schnittdruckes vom Spanquerschnitt und vom Material —  $K$  und  $\epsilon$  sind Materialkonstanten — eindeutig festgelegt. Es ist vielleicht demnach zweckmäßiger die Leistungsformel folgendermaßen zu schreiben:

$$N_w = \frac{v K \cdot F^{1 - \frac{1}{\epsilon}}}{4500} \cdot \eta \text{ [PS]}.$$

Mit der oben hingeschriebenen Beziehung für  $K_s$  kann dann rückwärts aus den angegebenen Tabellen die Materialkonstante  $K$  und der Faktor  $\epsilon$  berechnet werden. Da zwei Werte, nämlich  $K$  und  $\epsilon$  zu berechnen sind, braucht man zwei Gleichungen bzw. zwei Werte für  $K_s$  und  $F$ , welche der angegebenen Tabelle zu entnehmen sind. Wir wollen diese Werte für St 60 einmal berechnen:

$$160 = \frac{K}{1^{\frac{1}{\epsilon}}}; \quad 135 = \frac{K}{5^{\frac{1}{\epsilon}}}$$

$$160 = \frac{K}{1}; \quad K = 160; \quad 135 = \frac{160}{5^{\frac{1}{\epsilon}}}$$

$$\log 135 = \log 160 - \frac{1}{\epsilon} \log 5; \quad \epsilon = \frac{\log 5}{\log 160 - \log 135} = 9,5.$$

Damit wären also die Werte für  $\epsilon$  und  $K$  für St 60 gefunden. Tabelle 37 enthält die Werte für  $\epsilon$  und  $K$ , die aus den  $K_s$ - und  $F$ -Werten der Tabelle 36 für verschiedene Metalle errechnet und nach steigenden  $K$ -Werten geordnet wurden.

Tabelle 37.

Ms	Al-Cu-Mg	Stg	St 60	St 70	Ge	VCN 35	VCN 45	MnHSt
$\epsilon$ 11,2	12,1	8,82	9,5	9,4	9,9	7,57	5,42	6,2
K 75	80	150	160	190	200	235	350	480

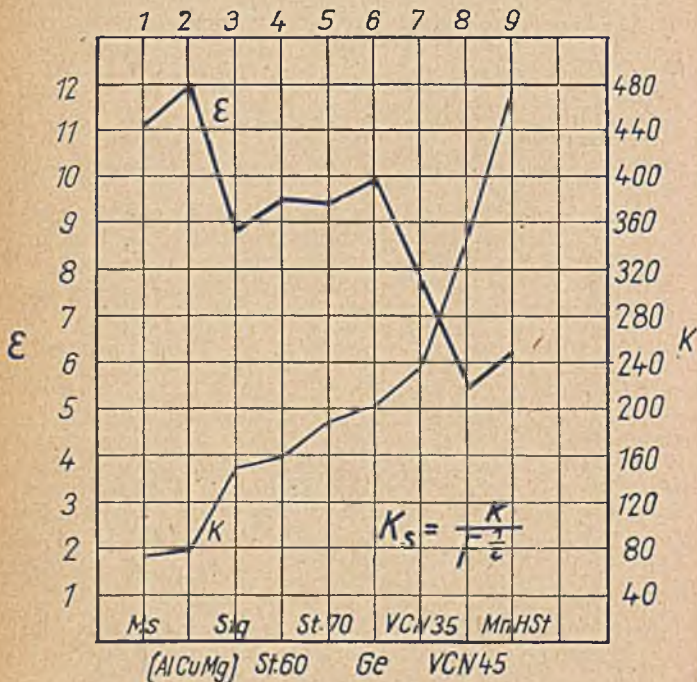
Bild 158. Die Materialkonstanten  $K$  und  $\epsilon$  für verschiedene Werkstoffe in einer Verbund-Schaufel dargestellt.

Bild 158 zeigt ein Schaubild, in dem der Verlauf der  $K$ - und  $\epsilon$ -Zahlen klar zu erkennen ist. Diese Werte sind jetzt zum Entwurf einer  $F$ - $v$ -Tafel zu verwenden. Eine derartige Tafel kann allerdings nur für einen Leistungswert  $N_w$  aufgestellt werden. Es wurde gewählt  $N_w = 3,1$  PS bzw. bei einem Maschinenwir-

kungsgrad von 70%  $N_w \cong 2,2$  PS. Die Leistungsformel wird also zur Erzeugung von Tabellenwerten nach  $v$  entwickelt und erhält die Gestalt

$$v = \frac{2,2 \cdot 4500}{K F^{1-\varepsilon} \cdot 0,7}$$

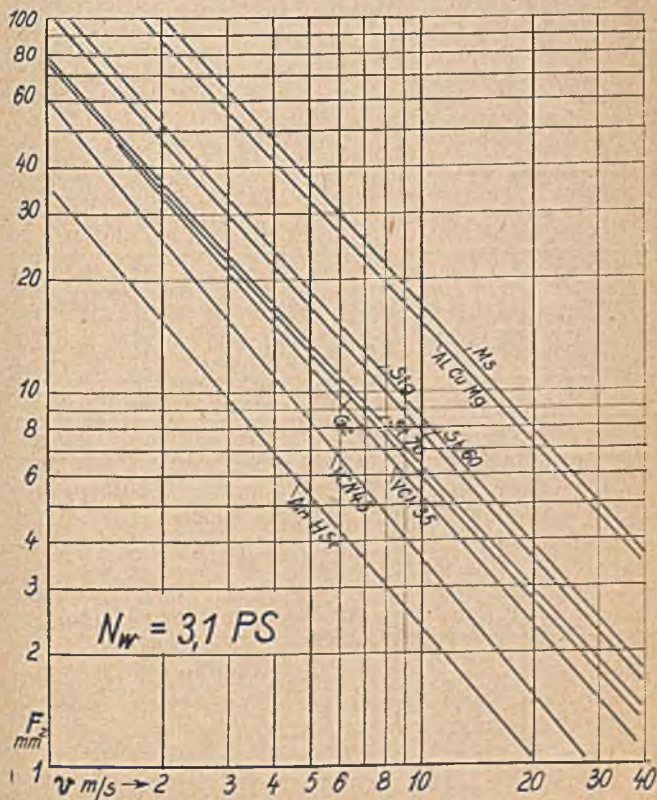


Bild 159. Spanquerschnitt abhängig von der Schnittgeschwindigkeit für verschiedene Werkstoffe bei  $N_w = 3,1$  PS.

In diese Beziehung sind wieder für die einzelnen Werkstoffe die entsprechenden  $K$ - und  $\epsilon$ -Werte einzusetzen. Für die Darstellung verwenden wir doppelt log. geteiltes Papier und erhalten eine Schar von geraden Linien, die jedoch nicht parallel zueinander verlaufen, da der Exponent von  $F$  für jede Linie sich ändert (Bild 159). Da dieser jedoch nur wenig von 1 abweicht, so weichen auch die Richtungen der einzelnen Linien nur wenig voneinander ab. Der Steigungswinkel der einzelnen Linien gegen die  $v$ -Achse ist also nicht viel von  $135^\circ$  verschieden. Da die Darstellung gerade Linien ergibt, so brauchen nur zwei Werte für  $v$  und  $F$  errechnet werden. Zur Kontrolle allerdings könnte noch ein dritter Wert berechnet werden. Tabelle 38 enthält die für die Konstruktion wichtigen Werte:

Tabelle 38.

Ms		Al-Cu-Mg		Stg		St 60		St 70	
F	v	F	v	F	v	F	v	F	v
5,10	30	4,69	30	2,44	30	2,24	30	1,89	30
7,97	20	7,30	20	3,85	20	3,55	20	2,91	20
17,08	10	15,55	10	8,43	10	7,71	10	6,34	10

Ge		VCN 35		VCN 45		MnHSt	
F	v	F	v	F	v	F	v
1,74	30	1,47	30	1,52	20	1,03	20
2,73	20	2,35	20	3,54	10	2,36	10
5,89	10	5,24	10	8,25	5	5,39	5

Die Abhängigkeit des spez. Schnittdruckes von den zwei Faktoren  $K$  und  $\epsilon$  ist also für die Darstellung nicht sehr bequem. Hierfür günstiger ist die Formel nach Hippler, wonach

$$K_s = K \cdot F^{-1/4} \quad \text{bzw.} \quad N_w = \frac{K \cdot F^{3/4} \cdot v}{4500} \quad \text{ist.}$$

Für die Materialkonstanten  $K$  werden dann allerdings andre Werte angegeben. Da jedoch die vom Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung veröffentlichten Kalkulations- und Bearbeitungsunterlagen (AWF-Blätter) auf der Formel von Kronenberger aufgebaut sind, wollen wir auch hier an dieser bei der Darstellung festhalten.

In vielen Fällen jedoch erscheint es zweckmäßiger, die  $v - F$ -Tafel nur für ein Material aufzustellen und die Werte

der Leistung  $N_w$  zu verändern. Eine derartige Tafel soll z. B. für das Drehen von Magnesiumlegierungen mit Schnellarbeitsstahl entworfen werden unter Benutzung der Richtwerte, die vom Ausschuß für Leichtmetallbearbeitung beim AWF<sup>1</sup> auf-

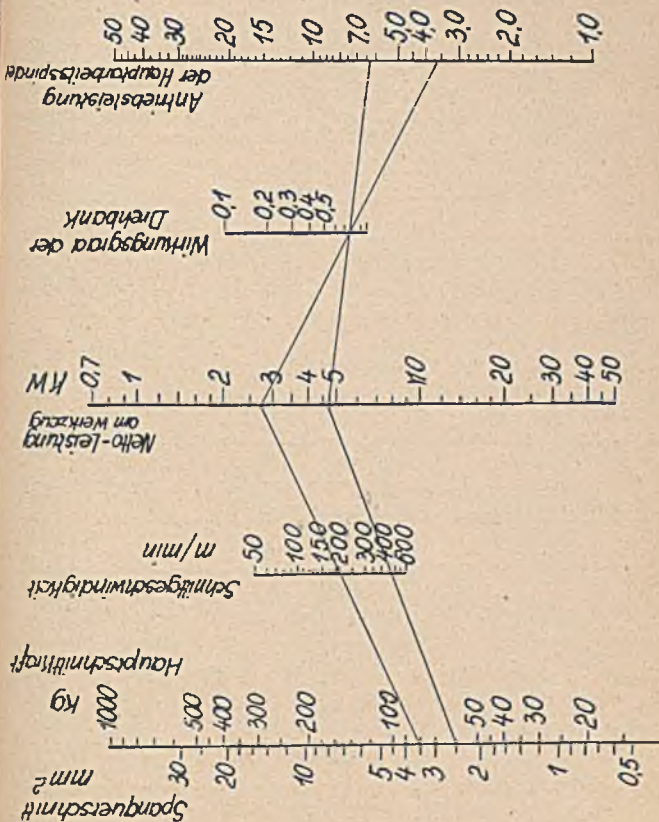


Bild 160. Leitertafel zur Ermittlung der Leistung (AWF 141).

gestellt wurden (AWF 141). Dieses Tabellenblatt enthält die  $K$ - und  $\varepsilon$ -Werte ebenfalls nur indirekt. Wir wollen diese daher aus den Werten der Leitertafel, die den Tabellen beigegeben ist, ermitteln. Hierzu sind wieder zwei Wertepaare notwendig. Bild 160 zeigt die Leitertafel bzw. die durch Verbindung ent-

sprechender Leiterpunkte erhaltenen  $N_w$ -Werte in KW. Für die Werte  $F = 2,5$  und  $3,5 \text{ mm}^2$ ,  $v = 455$  und  $200 \text{ m/min}$ ,  $N_w = 6,3$  und  $3,6 \text{ KW}$  bei einem Maschinenwirkungsgrad  $\eta = 0,75$  erhält man folgende  $K_s$ -Werte:

$$K_s = \frac{6,3 \cdot 4500}{455 \cdot 2,5 \cdot 0,736 \cdot 0,75} = 45 \quad \text{und}$$

$$K_s = \frac{3,6 \cdot 4500}{200 \cdot 3,5 \cdot 0,736 \cdot 0,75} = 42.$$

Diese Zahlen in die Beziehung  $K_s = K \cdot F^{-\varepsilon}$  eingesetzt, gibt

$$45 = \frac{K}{2,5^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad \text{und} \quad 42 = \frac{K}{3,5^{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen ergibt sich  $\varepsilon = 5$  und  $K = 54$ . Die Formel, die wir zur Konstruktion der  $v - F$ -Tafel verwenden, hat also jetzt die Gestalt  $v = \frac{150 N}{F^{0,8}}$ .

Die Leistungswerte wurden in Übereinstimmung mit dem AWF-Blatt 141 gewählt. Um zu sehen, inwieweit sich die Lage der Linien im  $v - F$ -Netz verändert, wurden neben den Werten für  $K$  und  $\varepsilon$  des AWF-Blattes auch die Tabellenwerte des Kalenders des Deutschen Metallarbeiters und des erwähnten Tabellenschiebers zur Berechnung von Tafelwerten benutzt. Diese Werte sind in Tabelle 39 zusammengefaßt.

Tabelle 39.

	N = 1,6						N = 2,5					
	F	v	F	v	F	v	F	v	F	v	F	v
I	1	240	5	66,4	10	38,1	1	375	5	103,5	10	59,4
II	1	163	5	37,3	10	19,7	1	255	5	58,2	10	30,8
III	1	237	5	57,5	10	31,2	1	370	5	89,6	10	48,6

	N = 4						N = 6,3					
	F	v	F	v	F	v	F	v	F	v	F	v
I	1	600	5	165	10	95	1	945	5	260	10	150
II	1	408	5	93,4	10	49,3	1	642	5	147	10	77,6
III	1	592	5	143	10	78	1	934	5	226	10	122

	N = 10						N = 16					
	F	v	F	v	F	v	F	v	F	v	F	v
I	1	1500	5	414	10	238	1	2400	5	663	10	381
II	1	1020	5	233	10	126	1	1630	5	372	10	197
III	1	1480	5	358	10	195	1	2370	5	572	10	310

	N = 25					
	F	v	F	v	F	v
I	1	3750	5	1035	10	594
II	1	2540	5	580	10	308
III	1	3700	5	895	10	486

In obiger Tabelle bedeuten die römischen Ziffern die  $\epsilon$ - und K-Werte verschiedener Herkunft und zwar ist:

I  $\epsilon = 5$ ,  $K = 54$  [Drehen von Magnesiumlegierungen mit Schnellarbeitsstahl] AWF 141,

II  $\epsilon = 12,1$ ,  $K = 80$  [Al-Cu-Mg, Duralumin] Deutscher Metallarbeiter-Kalender 1940,

III  $\epsilon = 8,4$ ,  $K = 55$  [Al gegossen] Tabellenschieber von IWA.

Alle drei Linienscharen zeigen erhebliche Abweichungen voneinander wie aus Bild 161 hervorgeht.

Sind die Werte der anderen AWF-Blätter (AWF 100—111) darzustellen, so muß auch hier  $K$  und  $\epsilon$  ermittelt werden und zwar geschieht das wieder durch Benutzung der Leistungswerte. Die AWF-Tafeln enthalten Werte für die Riemenbreite  $B$  und die Riemengeschwindigkeit  $v_R$ . Aus diesen beiden Werten ist zunächst die übertragene Leistung zu ermitteln. Soll z. B. aus den Werten des AWF-Blattes 101 e (Drehen von St 7011 DIN 1611) eine Leistungskarte aufgebaut werden, so wird man für zwei Wertepaare von  $F_s$  und  $v$  die Leistung ermitteln. Zu diesen Werten gehören wieder zwei Werte für Riemenbreite und Riemengeschwindigkeit. Aus einer Tabelle (Uhland-Kalender 1927) könnte man die Leistung bei gegebener Riemenbreite bzw. -Dicke und Riemengeschwindigkeit die Anzahl der übertragenen PS ermitteln. Diese Tabelle sei hier (im Auszug) mitgeteilt.

Tabelle 40.

Riemen-			Anzahl der von einem Riemen übertragenen PS bei einer Riemen- geschwindigkeit von							
Breite [mm]	Dicke [mm]	Querschnitt [mm <sup>2</sup> ]	8 m/sek	10 m/sek	12 m/sek	14 m/sek	16 m/sek	18 m/sek	20 m/sek	22 m/sek
50	4	200	2,7	3,3	4,0	4,7	5,3	6,0	6,7	7,3
60	4	240	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2	8,0	8,8
70	5	350	4,6	5,7	6,9	8,0	9,2	10,3	11,5	12,6
80	5	400	5,3	6,7	8,0	9,3	10,7	12,0	13,3	14,7
90	5	450	6,0	7,5	9,0	10,4	11,9	13,4	14,9	16,2
100	6	600	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	22,0



Leider beginnt die Tabelle mit PS-Werten, die einer Riemen-  
geschwindigkeit von 8 m/sek entsprechen, während für unsere  
Berechnungen Werte für  $v_R = 2$  und 4 m/sek in Frage kommen.  
Durch die Darstellung obiger Werte in einem entsprechend  
geteilten Netz läßt sich obige Tabelle nach der Seite der kleinen

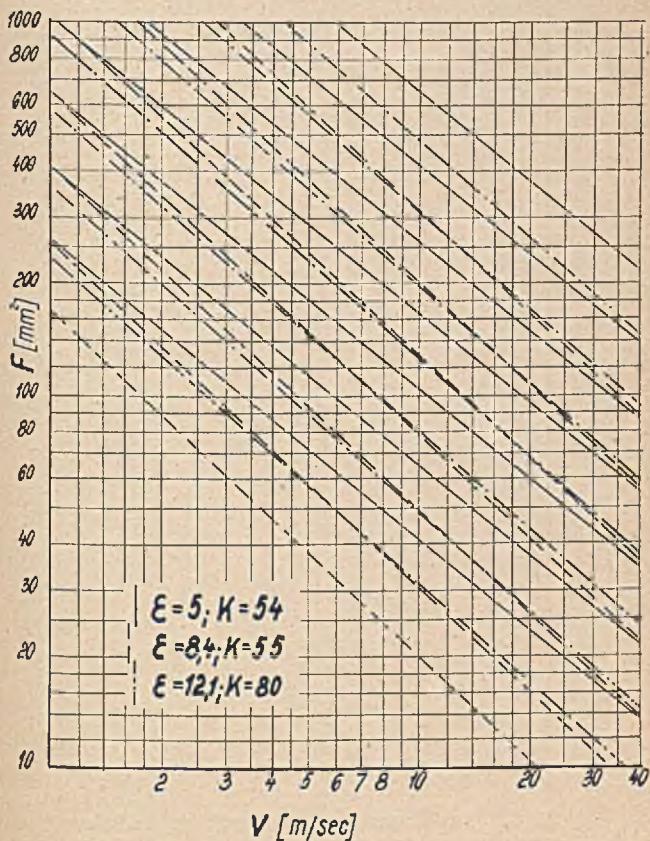


Bild 161. Spanquerschnitt abhängig von der Schnittgeschwindigkeit  
unter Berücksichtigung 3 verschiedener Materialien.

$v_R$ -Werte ergänzen. Zu diesem Zweck tragen wir die Wertepaare für  $v = 8$  und  $16$  m/sec in ein ganzlog. geteiltes Netz ein, wo sie gerade parallel zueinander laufende Linien ergeben. Auf der senkrechten Netzachse wurden die Werte für den Querschnitt des Riemens in  $\text{mm}^2$ , auf der waagerechten diejenigen für die Leistung  $N_w$  aufgetragen. Dieses Parallelenpaar kann also, da

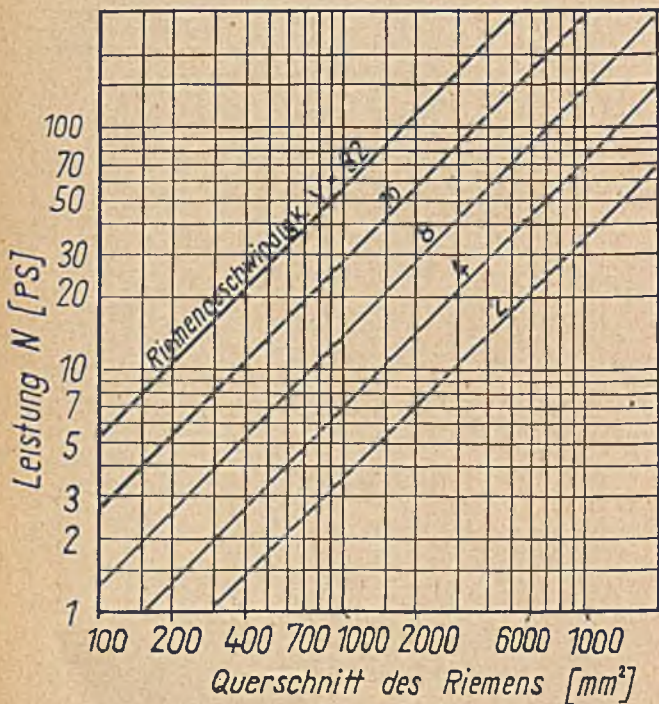


Bild 162. Leistung abhängig vom Riemenquerschnitt für verschiedene Riemen­geschwindigkeiten.

Richtung und gegenseitiger Abstand der Geraden bekannt ist, leicht zu einer Parallelschar vervollständigt werden. Die zugehörigen Kennwerte stufen sich dann nach der geometrischen Reihe  $v_R = 2, 4, 8, 16$ , so daß die PS-Werte, die einer Riemen­geschwindigkeit  $v_R = 2$  und  $4$  m/sec entsprechen, leicht aus

dieser Tafel (Bild 162) abgelesen werden können. Zu den Werten  $b = 70 \text{ mm}$  ( $q = 350 \text{ mm}^2$ ) und  $v_R = 2$  gehört  $N = 1,17 \text{ PS}$ , zu den Werten  $b = 80 \text{ mm}$  ( $q = 400 \text{ mm}^2$ ) und  $v_R = 4$  dagegen  $N = 2,65 \text{ PS}$ . Setzt man die erhaltenen Werte in die auf S. 240 angegebene Leistungsformel ein, dann erhält man:

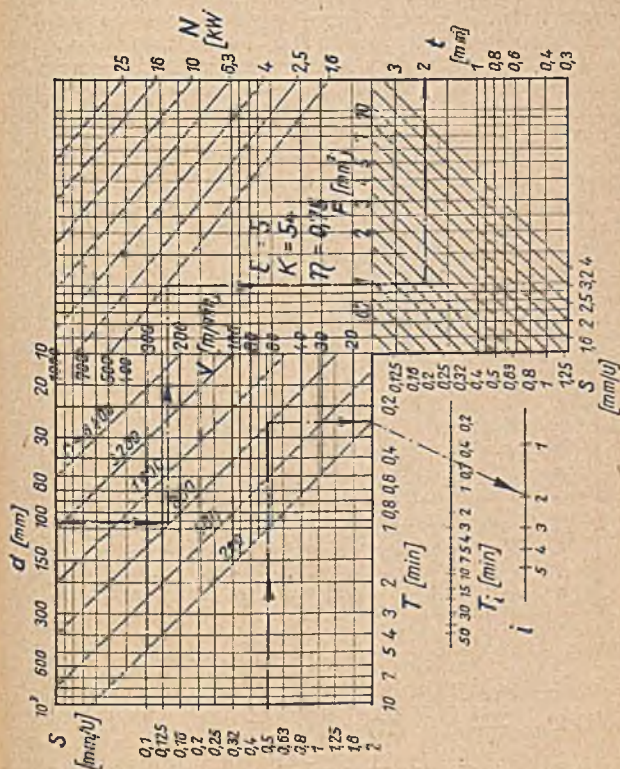


Bild 163. Tafel zur Ermittlung der Schnittzeit unter Berücksichtigung der Leitung der Maschine, der Spantiefe und des Spanquerschnittes.

$$1,17 = \frac{2,5^{1-\frac{1}{\epsilon}} \cdot K \cdot 12,2}{4500} \quad \text{und} \quad 2,65 = \frac{16^{1-\frac{1}{\epsilon}} \cdot K \cdot 5,7}{4500}$$

Aus diesen beiden Gleichungen errechnet sich für  $K$  der

Wert 198 und für  $\epsilon$  der Wert 6,7. Der Wert für K stimmt also mit dem in der Tabelle 37 angegebenen ganz gut überein. Zum Schluß ist die Leistungstafel durch das Anfügen des vereinigten T—s- und d—v-Netzes und des F—a-Netzes zu vervollständigen. Bild 163 zeigt die vollständig aufgebaute Tafel. Links an die v—F-Tafel wurde die T—s—d—v-Tafel angebaut, die, wie schon erwähnt, in Bild 58 dargestellt wurde. Hier ist es zweckmäßig, die Tafel unter Benutzung der vorgedruckten Teilungseinheiten zu beziffern und so zu drehen, daß die v-Achse des d—v-Netzes (allerdings in der richtigen Auftragsrichtung der Teilungseinheiten) mit der v-Achse des v—F-Netzes zusammenfällt. Unten an das v—F-Netz schließt sich das a—F-Netz an. Die in der AWF-Tabelle angegebenen Werte für den Vorschub s stufen sich, wie Bild 163 zeigt, auch geometrisch, so daß eine übersichtliche Darstellung gewährleistet ist. Die Schnittzahl i kann durch eine an die T-Leiter angeschlossene Leitertafel ebenfalls berücksichtigt werden. Auf der T<sub>1</sub>-Leiter kann dann die endgültige Schnittzeit abgelesen werden. In dieser Tafel fanden Formeln mit insgesamt 9 Variablen ihre Darstellung.

Als zweites Beispiel sei die Vertafelung der Formel für die Bearbeitungszeit bei Hobelmaschinen gewählt. Diese lautet:

$$T = i \frac{b}{s} h \left( \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r} \right) [\text{min}].$$

Hier bedeutet:

b = Breite des Arbeitsstückes in mm

i = Schnittzahl

s = Vorschub oder Schnittbreite in mm

h = Hub des Hobeltisches in m; er wird um etwa 40 mm größer als die Länge des Arbeitsstückes gewählt

v<sub>a</sub> = Schnittgeschwindigkeit in m/min beim Arbeitsgang

v<sub>r</sub> = Rücklaufgeschwindigkeit des Hobeltisches in m/min.

Ersetzt man  $\left( \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r} \right)$  durch  $\frac{1}{v_m}$  und wählt man zunächst i = 1, so lautet obige Formel, schon für die Darstellung zerlegt:

$$\text{I) } T = \frac{b \cdot x}{s} \quad \text{II) } x = \frac{h i}{v_m}.$$

Teilformel I ist eine ganz normale Produktgleichung  $s T = b x$  bzw. Proportion  $\frac{T}{b} = \frac{x}{s}$ , die sich einmal als Doppelleitertafel und zweitens als Kreuzfluchttafel darstellen läßt. Das halbe harmonische Mittel  $\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r} = \frac{1}{v_m}$  wird durch eine Dreileiter-

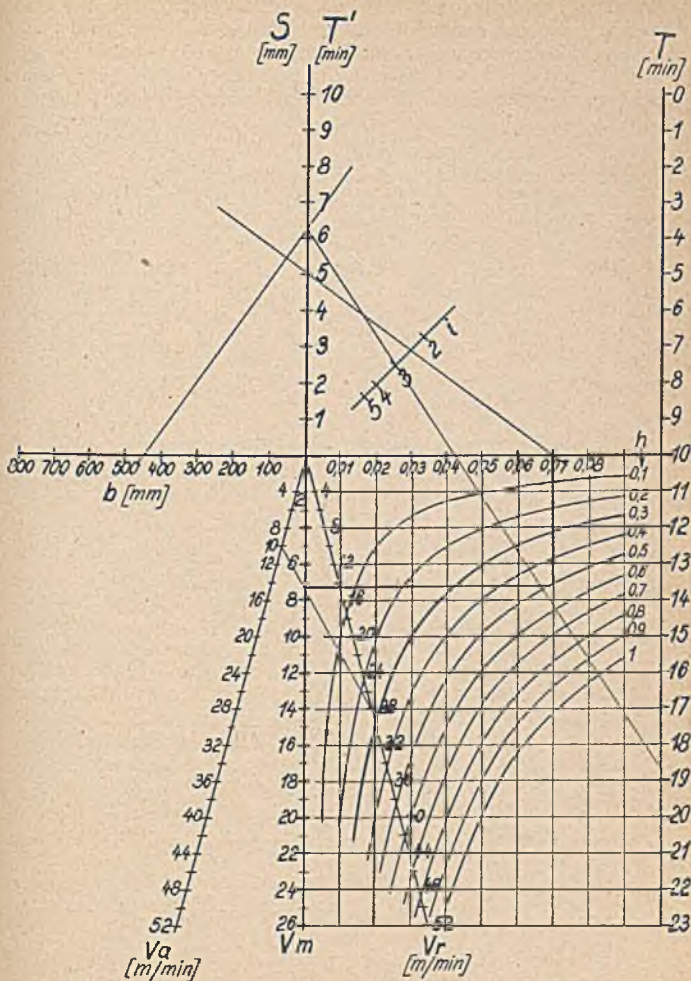


Bild 164. Tafel zur Ermittlung der Schnittzeit für Hobelmaschinen  
 (Darstellung der Formel  $T = i \frac{b}{s} h \left( \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_r} \right)$ ).

tafel dargestellt, deren gleichförmig geteilte Leitern sämtlich durch einen Punkt gehen (Siehe S. 137). An die gleichförmig geteilte  $v_m$ -Leiter kann jetzt ein Netz angeschlossen werden, in dem die Beziehung  $x = \frac{h}{v_m}$  vertafelt ist und zwar sind die Werte

für  $h$  die Kennziffern von Hyperbeln einer Hyperbelschar. Da die  $x$ -Achse gleichförmig geteilt ist, wird man als Anschluß eine Kreuzfluchttafel erster Art (siehe S. 144) wählen, wo durch Weiserkreuz der Wert für  $T$  leicht ermittelt werden kann (Bild 164). Durch Anfügung einer Leitertafel in N-Form kann endlich auch die Schnittzahl  $i$  berücksichtigt werden. Ist z. B.  $v_a = 10$  m/min und  $v_r = 28$  m/min,  $h = 0,5$  m,  $s = 5$  mm,  $b = 450$  mm und  $i = 3$ , so wird man zunächst  $v_m$  ermitteln, um dann nach links bis zur Hyperbel mit der Kennziffer  $h = 0,5$  m und von da nach oben zu gehen. Mit Hilfe des Weiserkreuzes wird  $T = 6,2$  min gefunden. Verbindet man diesen Punkt mit  $i = 3$ , dann erhält man auf der  $T_i$ -Leiter den Wert 18,6 min.

Wählt man für die Darstellung der Beziehung  $T = \frac{b}{s} \cdot x$  eine Kreuzfluchttafel zweiter Art oder eine Leitertafel, dann sind die Leitern dieser Tafeltype log. zu teilen und der Übergang von der gleichförmig geteilten  $x$ -Leiter zur log. geteilten  $x$ -Leiter der Anschlußtafel ist durch eine Zwischentafel zu schaffen, wie aus Bild 165 zu ersehen ist. An die  $T$ -Leiter kann leicht eine Dreileitertafel angeschlossen werden, wodurch auch die Schnittzahl  $i$  berücksichtigt werden kann. Der Symmetrie halber wird man in diesem Falle die  $i$ -Leiter mit der  $s$ -Leiter zusammenfallen lassen und die  $T_i$ -Leiter in die Quadratmitte setzen. Die Leitern der quadratischen Kreuzfluchttafel zweiter Art sind so beziffert, daß der „Drehsinn“ (durch Pfeile angedeutet) nicht unterbrochen wird. Zur Konstruktion der Quadrattafel benutze man das Papier von Schleicher & Schüll Nr. 365½, dessen Zehnerereinheit gerade = 10 cm ist und die sich deshalb bequem an die gleichförmig geteilte Achse des  $x - v_m$ -Netzes angliedern läßt. Die Einheiten der gleichförmig geteilten  $x$ -Achse sind = 1 cm.

## 2. Darstellung von Trägheitsmomenten.

Das Trägheitsmoment eines rechteckigen Querschnittes wird durch die Formel

$$J = \frac{B H^3}{12} [\text{cm}^4]$$

wiedergegeben. (Siehe „Betriebsberechnungen“ der D.W.B. S. 130). Hier bedeutet  $H$  die größere Seite (Höhe) des Rechtecks und  $B$  die kleinere Seite (Breite). Diese Formel wird durch

eine Dreileitertafel dargestellt, deren Leitern log. geteilt sind (Bild 166). Die Außenleitern (B- und H-Leitern) haben gleiche Teilung. Die Lage der Mittelleiter findet man am bequemsten durch den Schnittpunkt zweier Verbindungslinien entsprechender Punkte der Außenleitern. Verbindet man z. B. B = 3 mit H = 1,59 und B = 4 mit H = 1,44, so gibt der Schnittpunkt

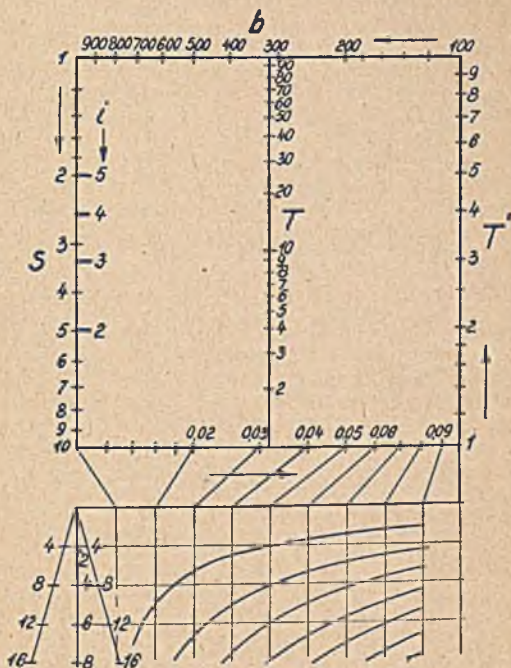


Bild 165. Tafel zur Ermittlung der Schnittzeit für Hobelmaschinen

(andre Darstellung der Teilformel  $T = i \frac{b}{s} \cdot x$ ).

dieser beiden Linien die Lage der Mittelleiter an. Durch die Mittelleiter wird die Fläche zwischen den Außenleitern im Verhältnis 3:1 geteilt. Der erhaltene Punkt ist der 1-Punkt. Etwa in der gleichen Weise erhält man den 10-Punkt der Mittelleiter. Die Zehnerereinheit der Mittelleiter läßt sich auf der Zehnerereinheit

der Außenleiter mit dem Stechzirkel etwa 4 mal abtragen. Die Einheiten der Außenleitern sind also 4 mal so groß wie die Einheiten der Innenleiter. Die Darstellung des Trägheitsmomentes eines rechteckigen Querschnittes bietet also keine Schwierigkeiten. Soll jedoch das Trägheitsmoment eines  $\square$ -förmigen Querschnittes vertafelt werden, so muß hier das Trägheits-

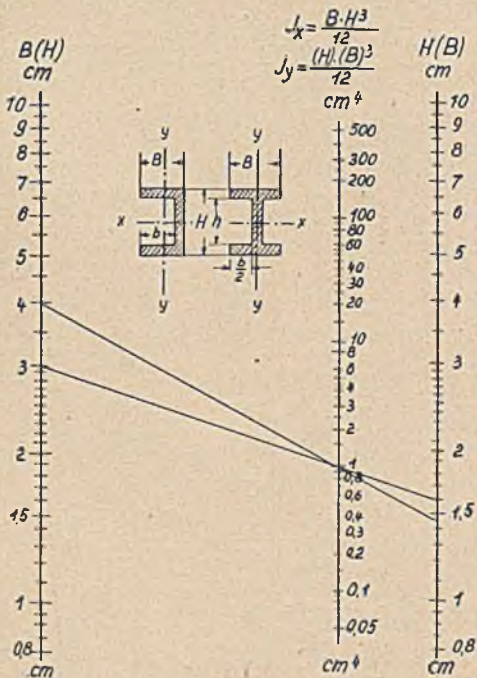


Bild 166. Darstellung des Trägheitsmomentes eines rechteckigen Querschnittes durch Dreileitertafel.

moment des kleineren Rechtecks von dem Trägheitsmoment des größeren Rechtecks abgezogen werden, d. h. es ist die Formel zu vertafeln:

$$J = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12}$$

Bei Benutzung der Dreileitertafel kann man sich folgender-



maßen helfen: man ermittelt beide Trägheitsmomente einzeln und zieht die Teilresultate voneinander ab. Diese Lösung ist jedoch nur als Notbehelf anzusprechen: das Endresultat läßt

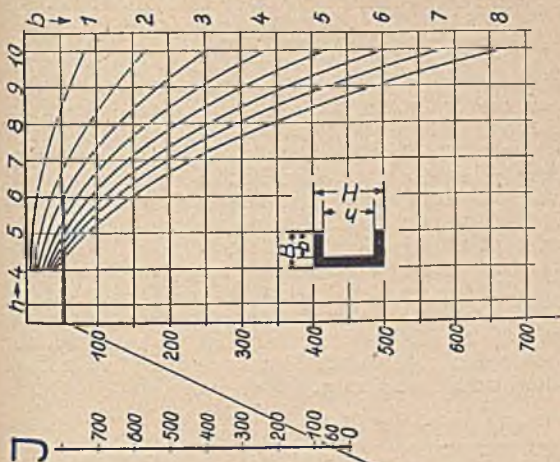
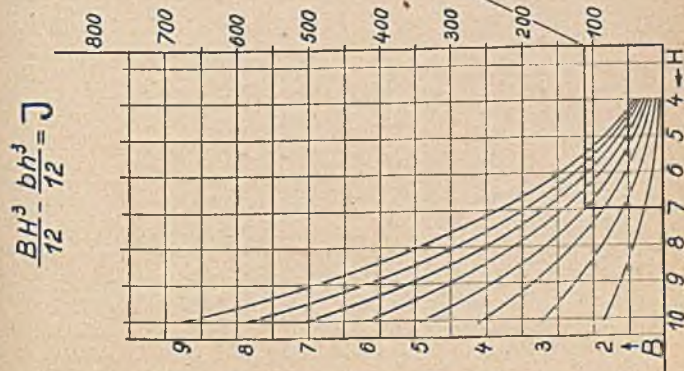


Bild 167. Ermittlung des Trägheitsmomentes eines  $\square$ -Profils

(Darstellung der Formel  $J = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$ .)



sich aus dieser Tafel nicht ablesen. Will man dies erreichen, muß eine ganz andre Lösung gefunden werden. Oben angegebene Formel ist eine Differenzformel, sie kann zerlegt werden in

$$\text{I) } J = y - x \quad \text{II) } y = \frac{B H^3}{12} \quad \text{III) } x = \frac{b h^3}{12}$$

Die Teilformel I ergibt in der Darstellung eine Dreileitertafel, deren Leitern gleichförmig geteilt sind (siehe S. 98). Die Teilformeln  $y = \frac{B H^3}{12}$  und  $x = \frac{b h^3}{12}$  sind dann in gleichförmig geteilten Netzen darzustellen. Diese Netze schließen sich rechts und links an die Leitertafel an. Die senkrechten Achsen der Netztafel fallen mit der x- bzw. y-Leiter zusammen (Bild 167). Auf den waagerechten Achsen sind die H- und h-Werte eingetragen. Man erhält dann in beiden Netzen Hyperbelscharen; die Kennziffern der einzelnen Hyperbeln bezeichnen die B- bzw. b-Werte. Beide Netze sind vollkommen gleich, jedoch um 180° gegeneinander verdreht, weil die Außenleitern der Dreileitertafel nach beiden Richtungen verschieden geteilt sind. Die Netztafel wurde mit den in der Tabelle 41 zusammengefaßten Werten aufgebaut. Dieser Aufbau gestaltet sich insofern recht einfach, weil die Abstände der Kurvenpunkte in senkrechter Richtung unter sich gleich sind. Man kann also den Aufbau mit dem Stechzirkel vornehmen.

Tabelle 41.

	B = 1	B = 2	B = 3	B = 4	B = 5
H	x	x	x	x	x
5	10,4	20,8	31,2	41,6	52,0
6	17,9	35,8	53,7	71,6	89,5
7	28,5	57,0	85,7	114,0	142,5
8	42,6	85,2	127,8	170,4	213,0
9	60,7	121,4	182,1	242,8	303,5
10	83,4	166,8	250,2	333,6	417,0

	B = 6	B = 7	B = 8	B = 9
H	x	x	x	x
5	62,4	72,8	83,2	93,6
6	107,4	125,3	148,6	171,1
7	171,0	199,5	228,0	256,5
8	255,6	298,2	340,8	383,4
9	364,2	424,9	485,6	546,3
10	500,4	583,8	667,2	750,6

Eine fließende Ablesung ist in dieser Tafel leider nicht mög-

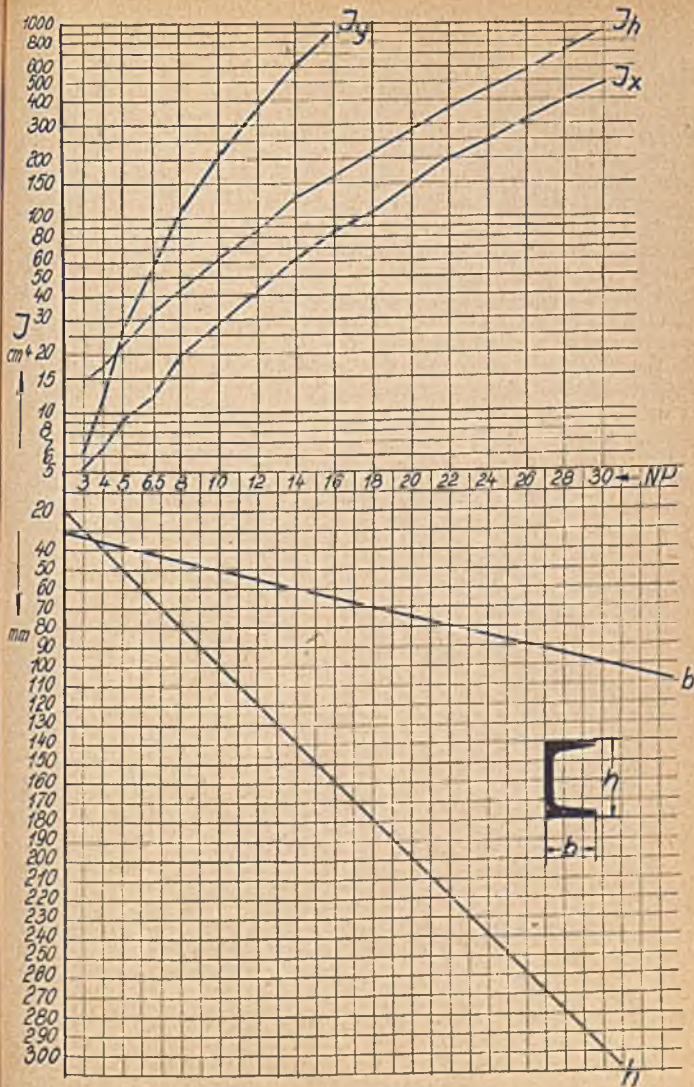


Bild 168. Schaubild der Höhen und Breiten normaler  $\square$ -Profile sowie der zugehörigen Trägheitsmomente.

lich, da zunächst in beiden Netzen die Teilträgheitsmomente  $x$  und  $y$  gefunden werden müssen. Dann erst kann auf der Mittel-leiter die Differenz der Trägheitsmomente ermittelt werden.

Sollen die Werte der Trägheitsmomente der Normalprofile in einer Schautafel zusammengestellt werden, dann wählt man zweckmäßigerweise zur Vertafelung der Werte für  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_h$  halblog. geteiltes Papier, für die Vertafelung der Werte für  $h$  und  $b$  dagegen Millimeterpapier (Bild 168). Die Bedeutung von  $J_x$ ,  $J_y$  und  $J_h$  läßt Bild 169 erkennen. Folgende Tabellenwerte sind also zu vertafeln.

Bei Betrachtung der Werte der Trägheitsmomente sieht man leicht ein, daß hier ein halblog. geteiltes Netz allein am Platze ist, da sich die Werte über beinahe 4 Zehnerpotenzen erstrecken. Die Verbindungslinien der einzelnen Punkte im halblog. geteilten Netz ergeben drei ziemlich steil ansteigende Linienzüge. Die Werte für  $b$  und  $h$  bilden sich auf dem Millimeter-

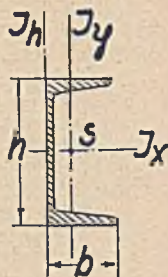


Bild 169.  
Beziehungen am  
□-Profil.

Tabelle 42.

Prof.-Nr.	Höhe $h$ mm	Breite $b$ mm	Trägheitsmomente		
			$J_h$ cm <sup>4</sup>	$J_x$ cm <sup>4</sup>	$J_y$ cm <sup>4</sup>
3	30	33	14,7	5,33	6,39
4	40	35	17,7	6,68	14,1
5	50	38	22,5	9,12	26,4
6½	65	42	32,3	14,1	57,5
8	80	45	42,5	19,4	106
10	100	50	61,7	29,3	206
12	120	55	86,7	43,2	364
14	140	60	125	62,7	605
16	160	65	167	85,3	925
18	180	70	217	114	1354
20	200	75	278	148	1911
22	220	80	368	197	2690
24	240	85	458	248	3598
26	260	90	586	317	4823
28	280	95	740	399	6276
30	300	100	924	495	8026

papier als gerade Linien ab. Das Schaubild besteht also hier aus zwei verschieden geteilten Netzen, die sich zu einer einheitlichen Tafel zusammenfassen lassen.

3. Darstellung der Formeln der Riemenlänge für offene und gekreuzte Riemen.

Die Länge  $L_0$  eines offenen Riemens kann nach folgender Näherungsformel (siehe „Betriebsberechnungen“ der D. W. B. S. 190) ermittelt werden:

$$L_0 = \pi (R + r) + 2A + \frac{(R - r)^2}{A}.$$

Hier bedeutet

$R$  = Radius der großen Scheibe,

$r$  = Radius der kleinen Scheibe,

$A$  = Abstand der Mittelpunkte der beiden Scheiben.

Zwecks Darstellung bringt man die Formel auf die Form:

$$A^2 + A \left[ \frac{3,14}{2} (R + r) - \frac{L_0}{2} + \frac{(R + r)^2}{2} \right] = 0 \quad \text{oder:}$$

$$A^2 + Ap + q = 0 \quad \text{wo } p = 1,57 (R + r) - \frac{L_0}{2} \quad \text{und } q = \frac{(R + r)^2}{2}.$$

Den Kern der Tafel bildet auch hier die Darstellung der quadratischen Gleichung  $A^2 + Ap + q = 0$  durch ein allgemeines Leiternomogramm (Bild 170). Die Einheiten der  $p$ -Leiter wurden viermal so groß gewählt wie die der  $q$ -Leiter, um die Einheiten der  $A$ -(Kurven-)Leiter so groß wie möglich zu machen und damit eine genaue Ablesemöglichkeit zu schaffen. Rechts an die  $p$ -Leiter schließt sich eine Doppelleitertafel an, deren Leitern ebenfalls gleichförmig geteilt sind. Durch diese

Tafel werden die Teilformeln  $p = x - \frac{L_0}{2}$  und  $x = 1,57 (R + r)$

dargestellt. Der Aufbau dieser Doppelleitertafel geht so vor sich, daß man zunächst in beliebigem Abstand von der  $p$ -Leiter

die  $\frac{L_0}{2}$ -Leiter hinzeichnet und die Teilungseinheiten der  $\frac{L_0}{2}$ -

Leiter genau so groß macht, wie die der  $p$ -Leiter. Die Einheiten der in der Mitte zwischen den beiden erwähnten Leitern stehenden  $x$ -Leiter sind dann nur halb so groß wie die der Außenleitern. Mit der  $x$ -Leiter bzw. ihren Teilungseinheiten sind dann auch die beiden Außenleitern (für  $r$  und  $R$ ) mit ihren Teilungen festgelegt. Bei der Teilung ist der Faktor 1,57 zu berücksichtigen.

Zum Schluß zeichnet man in der  $\frac{L_0}{2}$ -Leiter nicht die halben,

sondern die ganzen Werte ein, mit denen man ja auch rechnet. Die Bezifferungen der  $p$ - und  $x$ -Leitern sind nach Fertigstellung

der Konstruktion wegzulassen. Um dem Leser das Verständnis der Konstruktion zu erleichtern, wurden in dem Bild 170 die wirklich geltenden Zahlen stark, die zur Konstruktion benötigten dagegen schwach eingetragen. Die  $q$ -Leiter enthält zunächst die  $\frac{(R+r)^2}{2}$ -Werte; die stark eingetragenen Werte bezeichnen dann die  $(R+r)$ -Werte, die aus den  $\frac{(R+r)^2}{2}$ -Werten berechnet wurden. Ist z. B.  $q = 0,6$ , dann ist  $R+r = \sqrt{1,2} = 1,098 \cong 1,1$ .

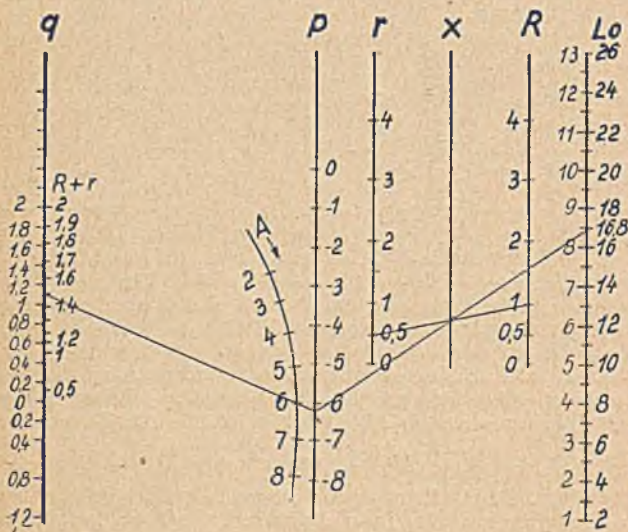


Bild 170. Ermittlung der Riemenlänge für offene Riemen  
 (Darstellung der Beziehung  $L_0 = \pi(R+r) + 2A + \frac{(R-r)^2}{A}$ ).

Da jetzt die Teilung der  $(R+r)$ -Leiter eine Quadratwurzeltelung d. h. also eine ungleichförmige Teilung geworden ist, kann an diese Leiter ohne weiteres kein andres Leiternomogramm mit gleichförmig geteilten Leitern angeschlossen werden. Die Werte der beiden Scheibenradien sind also vorher zu summieren und dieser errechnete Wert ist auf der  $(R+r)$ -Leiter aufzusuchen.

Die Näherungsformel zur Berechnung der Länge der gekreuzten Riemen ist:

$$L_K = \pi (R + r) + 2 A + \frac{(R + r)^2}{A}.$$

Hier erweist es sich als zweckmäßig, die Formel für die Darstellung so umzugestalten, daß man eine quadratische Gleichung für  $(R + r)$  erhält. Man multipliziert also die Formel zunächst mit  $A$ :

$$A L_K = A \pi (R + r) + 2 A^2 + (R + r)^2.$$

Diese Gleichung auf die Normalform gebracht ergibt:

$$(R + r)^2 + (R + r) A \pi - (A L_K - 2 A^2) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(R + r)^2 + (R + r) p - q = 0, \quad \text{wo also}$$

$$p = A \pi \text{ und } q = A L_K - 2 A^2 \quad \text{ist.}$$

Diese umgewandelte Formel kann in vierfacher Weise vertafelt werden, je nachdem man die eine oder andre Teilformel als Leiter- oder Netztafel ausbildet.

Wir wollen zwei Möglichkeiten der Darstellung erläutern, die die beiden andern Möglichkeiten in sich schließen, die Doppelnetz- und die Doppelleitertafel.

In dem einen Netz der Doppelnetztafel bildet sich die Teilformel  $(R + r)^2 + (R + r) p - q = 0$  ab. Es entsteht eine Geradenschar. Die Kennziffern der einzelnen Geraden bezeichnen die  $(R + r)$ -Werte. Da es sich um die Einzeichnung einer Reihe von geraden Linien ins Netz handelt, bietet diese Konstruktion keine Schwierigkeit. Auf der  $p$ -Achse sind als Einheiten nicht die  $A\pi$ -Werte, sondern nur die  $A$ -Werte einzutragen. Rechts an das  $A - q$ -Netz schließt sich dann das  $q - L$ -Netz an. Da diese hier zu vertafelnde Teilformel gleichfalls die Form einer quadratischen Gleichung aufweist, diesmal für  $A$ , setzt man auch hier für  $A$  Zahlenwerte ein und erhält eine Abhängigkeit von  $q$  und  $L$  in Form einer Geradenschar; die Kennziffern der einzelnen Geraden sind die Werte für  $A$ . Bei dieser Lösung ist also  $A$  zweimal aufzusuchen. Man liest fließend von links nach rechts ab. Bild 171 zeigt die ausgeführte Doppelnetztafel. Für die Ablesung nicht angenehm ist es, daß die Geraden des  $q - L$ -Netzes sich teilweise überschneiden. Die  $q$ -Leiter ist in der endgültigen Fassung wegzulassen. Eine geschicktere Lösung ist bestimmt die Darstellung als Doppelleitertafel. In der linken Teiltafel des Bildes 172 ist die Teilformel  $(R + r)^2 + (R + r) p - q = 0$  vertafelt. Es handelt sich hier um die allgemeine Leitertafel mit zwei parallelen Geradenleitern und einer Kurvenleiter. Auf der Kurvenleiter sind die  $(R + r)$ -Werte eingetragen. Die auf der  $p$ -Leiter befindlichen  $A\pi$ -Werte sind in die  $A$ -Werte zu verwandeln. Die Teilformel  $q = A L_K - 2 A^2$  wird zur bequemen Darstellung auf die Normalform

$$\Lambda^2 - A \cdot \frac{L_K}{2} + \frac{q}{2} = 0$$

gebracht. Diese Gleichung wird ebenfalls als allgemeines Leiter-  
nomogramm vertafelt und schließt sich rechts an die erste Teil-

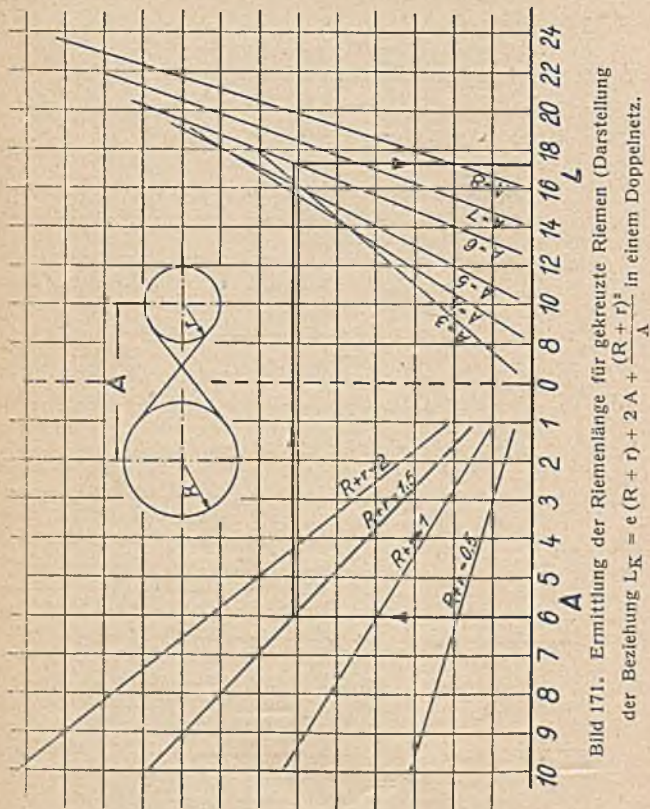


Bild 171. Ermittlung der Riemenlänge für gekreuzte Riemen (Darstellung  
der Beziehung  $L_K = e(R+r) + 2A + \frac{(R+r)^2}{A}$  in einem Doppelnetz.

tafel an. Auf der Kurvenleiter sind die A-Werte, auf der rechten  
Geradenleiter die  $\frac{L_K}{2}$  bzw. die  $L_K$ -Werte aufgetragen. Auch  
bei dieser Lösung muß leider der Wert A zweimal aufgesucht  
werden. Diese Darstellung ist vor allem der ersten deshalb vor-



zuziehen, weil für  $(R + r)$  bzw. für  $A$  alle möglichen Werte aufgesucht werden können.

4. Darstellung der Formeln zur Berechnung der Schnecke und des Schneckenrades.

Für die Berechnung des Schneckenrades sind folgende Formeln heranzuziehen:

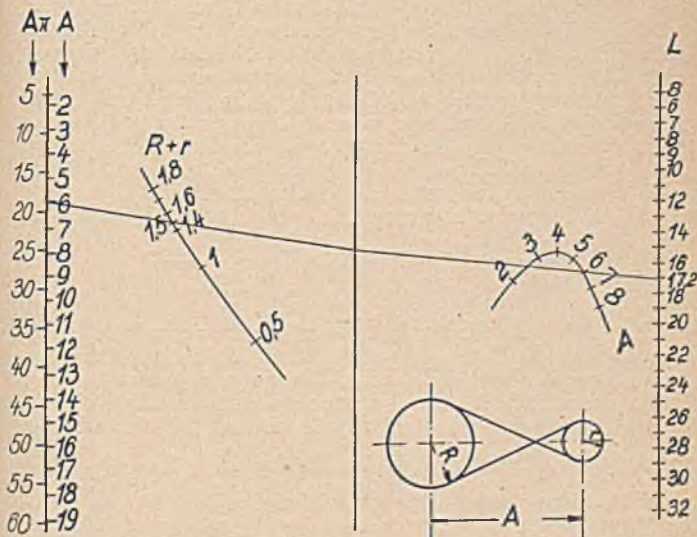


Bild 172. Ermittlung der Riemenlänge für gekreuzte Riemen (Darstellung durch eine allgemeine Doppelleitertafel).

1.  $T_R = m Z$
2.  $K = T_R + 2 m$
3.  $a = \frac{T_R + T_s}{2}$
4.  $\text{tg } \beta = \frac{c}{\frac{T_s}{\pi m} + 0,6}$

Hier bedeuten:

$T_R$  = Teilkreisdurchmesser des Schneckenrades

$T_s$  = Teilkreisdurchmesser der Schnecke

$m$  = Modul

- $Z$  = Zähnezahl  
 $K$  = Kopfkreisdurchmesser  
 $\beta$  = Zentriwinkel  
 $c$  = Funktion der Zähnezahl.

Die beiden ersten Formeln werden in einer Verbundtafel dargestellt, und zwar die erste Formel durch eine Dreileitertafel in N-Form, die zweite Formel durch eine gewöhnliche Additionstafel (Bild 173). In beiden Formeln kommt der Teilkreisdurchmesser  $T_R$  vor, die  $T_R$ -Leiter ist deshalb beiden Teiltafeln gemeinsam. Da die Einheiten der  $m$ -Leiter sich zu den Einheiten der  $T_R$ -Leiter wie 20:1 verhalten, rückt die  $K$ -Leiter ziemlich nahe an die  $T_R$ -Leiter heran, was jedoch wegen der  $m$ -Leiter erwünscht ist. Da auch die dritte Formel die Größe  $T_R$  enthält, wurde diese Leiter als Anschlußleiter einer Additionstafel gewählt, die sich rechts an die N-Tafel anschließt.

Die 4. Formel wird zerlegt in

$$\frac{T_s}{m} = x \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{c}{\frac{x}{\pi} + 0,6}$$

Die Multiplikationsformel  $T_s = m \times x$  wird in derselben Weise vertafelt wie die Formel  $T_R = m Z$ . Auch hier befinden sich auf der Mittelleiter die Modulwerte. Die ungleichförmige Teilung stört hier deshalb nicht, weil ja nur ganz bestimmte durch Norm festgelegte Modulwerte in Frage kommen. An die  $x$ -Leiter schließt sich ein Netz an, in dem die Formel  $\operatorname{tg} \beta = \frac{c \pi}{x + 0,6 \pi}$  zur Darstellung gelangt. Die in der folgenden Tabelle zusammengefaßten Werte wurden zum Bau der Hyperbelschar benutzt; als Kennziffern der einzelnen Hyperbeln wurden die  $c$ - bzw. die  $z$ -Werte gewählt. Auf der waagerechten Netzachse wurden die  $\operatorname{tg} \beta$  bzw. die  $\beta$ -Werte eingetragen.

Tabelle 43.

$z$	28	36	45	56	62	68	76	84	92	100
$c$	1,9	2,1	2,3	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	3,1
$x$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{tg} \beta$
5	0,865	0,96	1,05	1,14	1,18	1,23	1,27	1,32	1,37	1,41
10	0,502	0,554	0,606	0,66	0,686	0,71	0,74	0,765	0,792	0,815
15	0,354	0,39	0,428	0,464	0,483	0,502	0,52	0,536	0,557	0,577
20	0,273	0,30	0,33	0,358	0,374	0,388	0,402	0,414	0,431	0,446
25	0,222	0,245	0,268	0,292	0,304	0,315	0,33	0,337	0,35	0,362

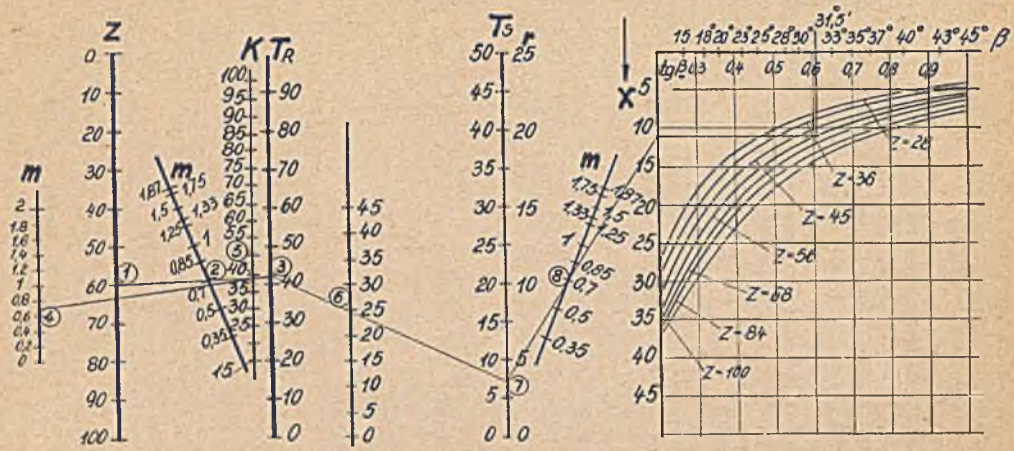


Bild 173. Ermittlung der Beziehungen am Schneckenrad

Darstellung der Formeln  $T_R = m Z$ ,  $K = T_R + 2 m$ ,  $a = \frac{T_R + T_s}{2} \tan \beta = \frac{c}{\frac{1s}{\pi m} + 0,6}$ .

Ein eingezeichnetes Beispiel gibt (durch Zahlen) an, in welcher Reihenfolge die einzelnen Werte nacheinander aufzusuchen sind. Die Werte des Teilkreisdurchmessers der Schnecke  $T_s$  entnimmt man den jetzt zu besprechenden Tafeln zur Bestimmung der Schneckenkennziffern. Ein Nachteil der Tafel ist das dreimalige Aufsuchen der  $m$ -Werte, was jedoch nicht zu vermeiden war. Es kann fließend von links nach rechts abgelesen werden.

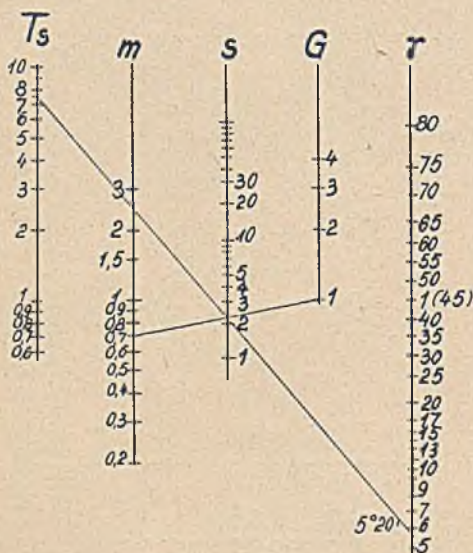


Bild 174. Ermittlung der Beziehungen an der Schnecke  
 (Darstellung der Formeln  $s = m G \pi$  und  $T_s = \frac{m G}{\operatorname{tg} \gamma}$ )

Zur Berechnung der Schnecke werden folgende Formeln verwendet:

$$1. \quad S = m G \pi$$

$$2. \quad T_s = \frac{m G}{\operatorname{tg} \gamma}$$

$$3. \quad K = T_s + 2 m \cos \gamma; \quad K = T + x; \quad x = 2 m \cos \gamma.$$

Hier bedeuten:

S = Steigung

m = Modul

G = Gangzahl

Ts = Teilkreisdurchmesser der Schnecke

$\gamma$  = Steigungswinkel

K = Kopfkreisdurchmesser.

Die zwei ersten Formeln werden als Multiplikationsformeln durch eine Doppelleitertafel mit log. geteilten Leitern vertafelt

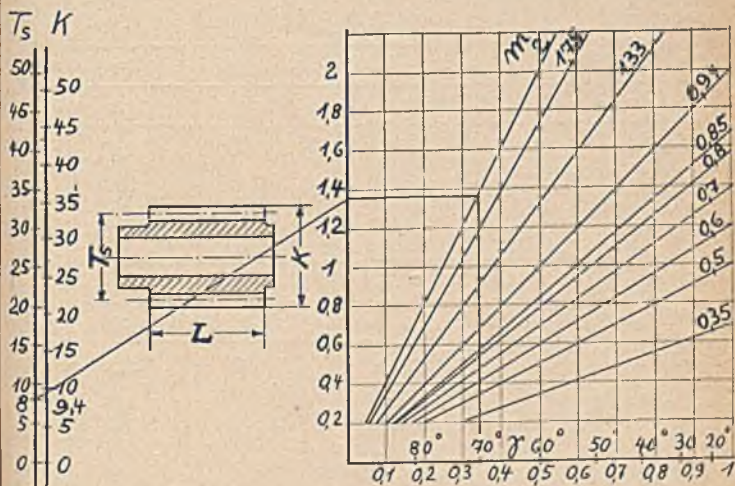


Bild 175. Ermittlung der Beziehungen an der Schnecke  
(Darstellung der Formeln  $K = T_s + 2 m \cos \gamma$ ;  $K = T + x$ ;  
 $x = 2 m \cos \gamma$ .)

(Bild 174). Die erste Formel wird in der Form  $\frac{s}{\pi} = m G$  dargestellt. Dem entsprechend lautet dann die zweite Formel

$T_s = \frac{s}{\pi \operatorname{tg} \gamma}$  bzw.  $T_s \operatorname{tg} \gamma = \frac{s}{\pi}$ . Die Mittelleiter, die also dies-Werte trägt, dient einmal als Zapfenlinie und zweitens als normale Leiter. Auf den anderen Außenleitern sind die Werte für  $T_s$  und  $\operatorname{tg} \gamma$  bzw.  $\gamma$  aufgetragen. Die dritte Formel kann als Addi-

tionsformel leider nicht so ohne weiteres an die Leitertafel mit log. geteilten Leitern angeschlossen werden, sie wird zweckmäßigerweise durch eine Leiter-Netztafel dargestellt (Bild 175). Um eine genaue Ablesung zu gewährleisten, wurden die  $x$ - bzw.  $\cos \gamma$ -Einheiten möglichst groß gewählt. Aus diesem Grunde rückt die  $k$ -Leiter ziemlich nahe an die  $Ts$ -Leiter heran. Die Formel  $x = 2 m \cos \gamma$  ergibt eine Geradenschar; die Kennziffern der einzelnen Geraden sind die  $m$ -Werte. An die  $\cos \gamma$ -Achse wurden die betreffenden Winkelwerte angeschrieben. Folgende Tabelle diene zum Aufbau der Netztafel.

Tabelle 44.

		$m = 0,35$	$m = 0,5$	$m = 0,6$
$\cos \gamma$	$\gamma$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0,94	20°	0,657	0,94	1,13
0,5	60°	0,35	0,5	0,6
0,173	80°	0,121	0,173	0,212

$m = 0,7$	$m = 0,8$	$m = 0,85$	$m = 1$	$m = 1,25$
$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1,32	1,5	1,6	1,88	2,35
0,7	0,8	0,85	1	1,25
0,242	0,277	0,294	0,346	0,432

### XIII. Bewegliche Rechensysteme (Rechenschieber und Schiebeblätter)

Der Rechenschieber ist die Weiterentwicklung eines starren Rechensystems, also z. B. der Leitertafel, zu einem beweglichen. Ein Rechenschieber ist aus verschiebbaren Skalen aufgebaut. Durch diese Anordnung fallen die sonst zur Ermittlung des Lösungswertes benötigten Rechenhilfen wie Lincal, Faden, Sucherkreuz usw. fort.

Multipliziert man mit dem gewöhnlichen Rechenschieber zwei Zahlen miteinander (siehe „Betriebsberechnungen der D. W. B. S. 57), geht man bekanntlich so vor, daß man zu der

log. geteilten Skala des feststehenden Teiles des Schiebers ein Stück der unteren log. geteilten Skala des verschiebbaren Teiles, der Zunge, hinzuaddiert, um das Ergebnis wieder auf der Skala des feststehenden Teiles abzulesen. Um also eine Aufgabe der Form  $x y = z$ , also eine Beziehung mit drei Veränderlichen, mit dem Rechenschieber zu lösen, sind zwei gleiche logarithmisch geteilte Strecken notwendig, die in Teilung und Richtung der aufgetragenen Werte vollkommen miteinander übereinstimmen. Zur Darstellung desselben Gesetzes durch eine Leitertafel waren dagegen (siehe Kap. 5) drei log. geteilte Leitern notwendig. Allerdings ist eine Leitertafel so wie sie in Zeitschriften, Büchern oder Rechentafeln zu finden ist, sofort als Rechenhilfe verwendbar. Ein Rechenschieber dagegen ist anzufertigen und für den täglichen Gebrauch herzurichten. Ehe wir auf die sog. Sonderrechenstäbe zu sprechen kommen, wollen wir hier noch einmal einige Aufgaben behandeln, die mit Hilfe eines einfachen normalen Rechenschiebers, etwa dem System Rietz, gelöst werden können.

Multiplikationen und Divisionen können sowohl unter Benutzung der Hauptskalen als auch der Quadratskalen ausgeführt werden. Um jedoch möglichst genau zu rechnen, sind vorzugsweise die Hauptskalen zu benutzen. Der Rechenschieber erweist sich erst bei der Benutzung mehrgliedriger Ausdrücke als rationelle Rechenhilfe. Sind Aufgaben der allgemeinen Form

$$\frac{a \times b \times c \times d}{e \times f \times g \times h}$$

zu lösen, geht der Anfänger am besten so vor, daß er erst sämtliche Zahlen multipliziert, die zu multiplizieren sind, und das Endprodukt nacheinander durch die Zahlen  $e, f, g, h$  dividiert. Die einzelnen Operationen sind also in folgender Reihenfolge durchzuführen:

$$a \times b \times c \times d : e : f : g : h.$$

Geübtere Rechner können allerdings, um einen Arbeitsgang zu sparen, abwechselnd multiplizieren und dividieren:

$$a : e \times b : f \times c : g \times d : h.$$

Die Stellenzahlermittlung geschieht im engsten Anschluß an die log. Methode der Stellenzahlangabe. Es sei eine Aufgabe der oben angegebenen allgemeinen Form einmal durchgerechnet. Aufgabe 1.

$$\frac{4350 \times 0,00379 \times 63}{0,0000865 \times 789 \times 3600}$$

Der Lösungsweg sei in drei Arbeitsgänge zerlegt:

1. Ausführung der Rechnung mittels Rechenschieber,

2. Verwandlung sämtlicher Zahlen in einstellige Zahlen, Anschreiben der Stellenzahlen als Zehnerpotenzen,
3. Überschlägige Ermittlung der Stellenzahl der sich aus der Berechnung der einstelligen Zahlen ergebenden Lösung und Berücksichtigung der sich aus den Zehnerpotenzen ergebenden Stellenzahl.

Zu 1. Die oben angegebene Aufgabe ergibt eine Zahl 423. Die Stellenzahl ist hierbei noch nicht berücksichtigt; das Resultat ist deshalb nicht als Vierhundertunddreiundzwanzig sondern als vier, zwei, drei, anzugeben.

$$\text{Zu 2.} \quad \frac{4,35 \cdot 10^3 \times 3,8 \cdot 10^{-3} \times 6,3 \cdot 10^1}{8,65 \cdot 10^{-5} \times 7,9 \cdot 10^2 \times 3,6 \cdot 10^3}$$

$$\text{Zu 3.} \quad \frac{4,35 \cdot 3,8 \cdot 6,3}{8,65 \cdot 8 \cdot 3,6} \cdot 10^{3-3+1+5-2-3}$$

Vereinfachung durch Kürzen

$$\frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 6,3}{8 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{4}} = \frac{3}{8} \cong 0,4 \cdot 10^1 \cong 4.$$

Es ergibt sich also eine Zahl 4,23.

Bei der Ermittlung der Stellenzahl ist also darauf zu achten, daß beim Sammeln der Zehnerpotenzen (Arbeitsgang 3) das negative Vorzeichen der unter dem Bruchstrich stehenden Zehnerpotenzen in das positive zu verwandeln ist und umgekehrt. Die früher übliche Stellenzahlermittlung bezog sich meist auf die Multiplikation bzw. Division nur zweier Zahlen. Sollte z. B. die Aufgabe  $45000 \times 785$  hinsichtlich der sich ergebenden Stellenzahl gelöst werden, so wurde

1. die Summe der Stellenzahlen der beiden Zahlen ermittelt,
2. die endgültige Stellenzahl von der Stellung der betreffenden Lösung links oder rechts vom Zungenendstrich abhängig gemacht.

Die Summe der Stellenzahlen obiger Zahlen ist 8, die sich ergebende Zahl steht auf dem Rechenschieber links vom Zungenendstrich, also bleibt sie 8. Befände sie sich rechts vom Zungenendstrich, müßte von der Summe die Zahl 1 abgezogen werden. Eine derartig verwickelte Stellenzahlbestimmung ist für zusammengesetzte Ausdrücke unbrauchbar. Die Stellenzahlbestimmung durch Festlegung der Zehnerpotenzen zeigt deutlich die Einfachheit ihrer Anwendung, wir brauchen oben angegebene Aufgabe einmal mit glatten Tausendern, Hundertern und Zehnern durchzuführen, d. h. wir schreiben

$$\frac{4000 \times 0,003 \times 60}{0,00008 \times 700 \times 3000} = \frac{4 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^{-3} \times 6 \cdot 10^1}{8 \cdot 10^{-5} \times 7 \cdot 10^2 \times 3 \cdot 10^3}$$



Die Zehnerpotenzen sind genau die gleichen wie oben, man erkennt aber aus dieser Schreibweise, daß hier nur die Nullen gezählt werden, bei ganzen Zahlen als „positive“, bei Dezimalzahlen als „negative“. Die Stellenzahl hinter oder vor dem Komma bleibt unberücksichtigt.

Als zweite Aufgabengruppe wollen wir die Berechnung der zweiten und dritten Potenz mittels Rechenschieber besprechen. Zur Berechnung der zweiten Potenz (Quadrieren) geht man von der Haupt- oder Grundskala ohne Betätigung der Zungenskalen mittels Läufermarke auf die Quadratskala. Die Quadratskala wird also hier sozusagen als Vergleichsskala benutzt. Den Zahlen 2, 3, 4, 5 . . . . . der Hauptskala entsprechen also die Zahlen 4, 9, 16, 25 der Quadratskala. Die Quadratzahlermittlung ist also sehr einfach. Bei der Stellenzahlermittlung gehen wir ganz ähnlich vor, wie beim Multiplizieren und Dividieren. Auch die Rechenoperation des Quadrierens soll in zwei Arbeitsgänge zerlegt werden und zwar

1. Verwandeln der zu quadrierenden Zahl in eine einstellige Zahl und Hinzufügen der Stellenzahl als Zehnerpotenz,
2. Quadrieren der einstelligen Zahl und der Zehnerpotenz.

Aufgabe 2.  $7350^2$ .

1.  $[7,35 \cdot 10^3]^2 = 7,35^2 \cdot 10^6$ .

Die Potenzen sind jetzt miteinander zu multiplizieren. Damit diese Operation richtig ausgeführt wird, versieht man die einstellige Zahl mit der Potenz 1.

2.  $54 \cdot 10^6 = 5,4 \cdot 10^{1+6} = 5|4000000|$  (7 Stellen).

Während die Grundskala nur einstellige Zahlen enthält, können auf der Quadratskala auch zweistellige Zahlen abgelesen werden. Man ermittelt dort als Quadratzahl von 7,35 die Zahl 54. Um jeden Fehler bei der endgültigen Stellenzahlermittlung zu vermeiden, wurde die Resultatzahl 54 noch einmal in eine einstellige Zahl verwandelt.

Aufgabe 3.  $0,00397^2$ .

1.  $(3,97 \cdot 10^{-3})^2 = 3,97^2 \cdot 10^{-6}$ .

2.  $15,8 \cdot 10^{-6} = 1,58 \cdot 10^{-5} = |0,0000|158$  (5 Nullen!).

Auf ganz ähnliche Weise ermittelt man die 3. Potenzen sowie ihre Stellenzahl.

Aufgabe 4.  $5870^3$ .

1.  $(5,87 \cdot 10^3)^3 = 5,87^3 \cdot 10^9$ .

2.  $202 \cdot 10^9 = 2,02 \cdot 10^{11} = 2|02000000000|$  (11 Stellen).

Aufgabe 5.  $0,00267^3$ .

1.  $(2,67 \cdot 10^{-3})^3 = 2,67^3 \cdot 10^{-9}$ .

2.  $19,03 \cdot 10^{-9} = 1,903 \cdot 10^{-8} = |0,0000000|1903$  (8 Nullen).

Die dritte Aufgabengruppe soll das Wurzelziehen behandeln und zwar das Ziehen der Quadrat- und Kubikwurzel. Beim Ausziehen der Quadratwurzel gehen wir von der Quadratskala zur Grundskala. Den Zahlen 9, 16, 25, 36 . . . . . der Quadratskala entspricht also jetzt die Zahl 3, 4, 5, 6 . . . . . der Grundskala. Bei der Ermittlung der Stellenzahl ist die auszuwurzelnde Zahl nicht so ohne weiteres in eine einstellige, sondern sie ist in eine ein- oder zweistellige Zahl zu verwandeln, so daß die sich ergebende Zehnerpotenz durch zwei teilbar ist. Man wendet also hier zweckmäßigerweise die Schreibweise von Bruchexponenten an. Auch hier zerlegen wir die Rechenoperation in zwei Arbeitsgänge:

1. Verwandeln der auszuwurzelnden Zahl in eine Zehnerpotenz mit einem durch zwei teilbaren Exponenten und eine ein- oder zweistellige Zahl, die auf der Quadratskala abzulesen ist.

2. Auswurzeln der Zahl und der Zehnerpotenz:

Auch hier sollen einige Aufgaben zur Erläuterung der Arbeitsgänge beitragen.

Aufgabe 6.  $\sqrt[2]{786900}$ .

1.  $(78,69^1 \cdot 10^1)^{\frac{1}{2}} = 78,69^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{2}}$ .

2.  $8,87 \cdot 10^2 = 887$ .

Aufgabe 7.  $\sqrt[2]{0,00317}$ .

1.  $(31,7^1 \cdot 10^{-4})^{\frac{1}{2}} = 31,7^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-2}$ .

2.  $5,64 \cdot 10^{-2} = 0,0564$ .

Das Ziehen der Kubikwurzel erfolgt in derselben Weise wie das der Quadratwurzel, indem man von der betreffenden (ein- bis dreistelligen Zahl der Kubikskala zur Grundskala heruntergeht. Man verwandelt aber jetzt die auszuwurzelnde Zahl in eine solche, deren Zehnerpotenz durch drei teilbar ist. Durch diesen Vorgang verwandelt sich die Zahl in eine ein- bis dreistellige, die auf der Kubikskala aufzusuchen ist. Auch hier wieder Unterteilung der Rechenoperation in zwei Arbeitsgänge:

1. Verwandeln der auszuwurzelnden Zahl in eine Zehnerpotenz mit einem durch drei teilbaren Exponenten und eine ein- bis dreistellige Zahl, .

2. Auswurzeln der Zahl und der Zehnerpotenz.

Aufgabe 8.  $\sqrt[3]{37954}$ .

1.  $(37,95^1 \cdot 10^3)^{\frac{1}{3}} = 37,95^{\frac{1}{3}} \cdot 10^1$ .

2.  $3,36 \cdot 10 = 33,6$ .

Aufgabe 9.

$$\sqrt[3]{0,000000288}.$$

1.  $(288^1 \cdot 10^{-9})^{\frac{1}{3}} = 288^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{-3}.$

2.  $6,6 \cdot 10^{-3} = 0,0066.$

In den früher üblichen Anweisungen zur Stellenzahlermittlung der Wurzeln wurde die Anwendung der sog. Gruppenregel empfohlen. Nach dieser Regel ist die Stellenzahl der Quadratwurzel einer ganzen Zahl gleich der Anzahl der Zweiergruppen, die vom Komma aus gerechnet nach links gebildet werden können. Wir betrachten noch einmal Aufgabe 6 und teilen die Zahl in Zweiergruppen. Die letzte Gruppe ist unvollständig:

$$\sqrt[2]{5|35|00,0}.$$

Die auszuwurzeln Zahl ist  $\sqrt[2]{5,35}$ , die Stellenzahl der ausgewurzelten Zahl ist 3. Man erhält daraufhin die richtige Lösung 231. Bei Dezimalbrüchen teile man die Zahl vom Komma aus nach rechts in Zweiergruppen. Jeder vollständigen Nullenzweiergruppe nach dem Komma entspricht nach dieser Regel eine Null (nach dem Komma) im Ergebnis. Wir nehmen uns noch einmal Aufgabe 7 vor und teilen die Zahlen bzw. Nullen

in Zweiergruppen:  $\sqrt[2]{0,|00|31|7} = 0,0564.$  Auch diese Regel führt zum Ziel. Ist aber keine vollständige Zweiernullengruppe

nach dem Komma vorhanden, wie z. B.  $\sqrt[2]{0,04}$  bzw.  $\sqrt[2]{0,4}$ , dann können dem Ungeübten schon einige Zweifel in Bezug auf die Stellenzahlermittlung kommen.

Wir wollen jetzt anschließend an die laufend mit dem Rechenschieber zu lösenden Aufgaben uns mit der Anfertigung von Sonderrechenstäben beschäftigen. Wir knüpfen an die Lösung der Multiplikationsaufgabe  $xy = z$  an, zu deren Lösung zwei gleiche log. geteilte Strecken notwendig sind. Soll jetzt eine Multiplikationsaufgabe gelöst werden der allgemeinen Form  $axy = z$ , wo  $a$  ein Zahlenfaktor bedeutet, so ist diese Aufgabe unter Benutzung des normalen Rechenschiebers mit zwei Einstellungen zu lösen. Wenn jedoch häufig Aufgaben der oben angegebenen allgemeinen Form zu lösen sind, kann man sich für diesen Zweck einen Rechenstab anfertigen, dessen  $z$ -Skala ebenfalls verschiebbar angeordnet ist, wie Bild 176 zeigt. Hat man z. B. die Mantelflächen  $M$  der geraden Kreiszyylinder aus den Halbmessern  $r$  der Grundflächen und den Höhen  $h$  zu berechnen, braucht man nur die  $z$ -Skala auf den Wert  $2\pi = 6,28$  einzustellen und die gegebenen Werte für  $r$  und  $h$  (Einstellung des Bildes 176:  $r = 2,3$ ;  $h = 7,1$ ) miteinander zu multiplizieren. Alle

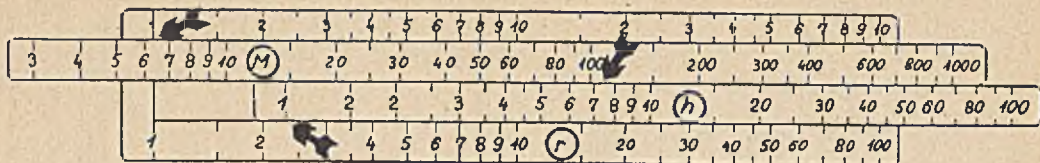


Bild 176. Rechenschieber zur Lösung von Aufgaben der allgemeinen Form  $a x y = z$   
 (Beispiel:  $M = 2 r \pi \cdot h = 2 \cdot 2,3 \cdot \pi \cdot 7,1 = 102$ ).

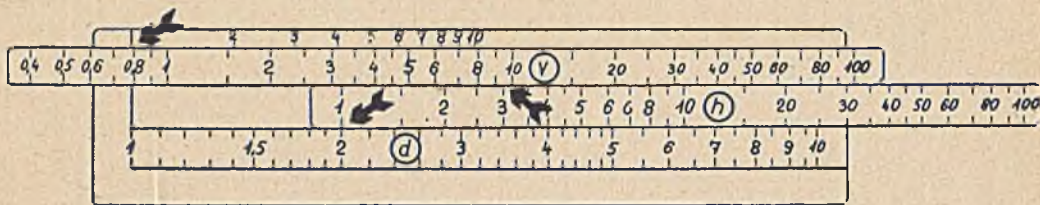


Bild 177. Rechenschieber zur Lösung von Aufgaben der allgemeinen Form  $y^2 \cdot x^1 = z$   
 (Beispiel:  $V = \frac{d^2 h}{1,27} = 0,786 \cdot 2^2 \cdot 3 = 9,4$ ).

Lösungen jener Aufgaben werden dann nur mit einer Einstellung erzielt. Die Lösung ist jetzt auf der z-Skala abzulesen und zwar ist hier  $M = 102$ . Bei Berücksichtigung eines Faktors  $\frac{1}{a}$  ist die z-Skala sinngemäß nach rechts einzustellen. Wer sich mit dem Aufbau derartiger Sonderrechenstäbe vertraut machen will, der benutze das halblog. geteilte Papier von Schleicher & Schüll, das in Streifen geschnitten, beziffert und aufeinandergelegt wird. Die Bilder 176—181 sind auf diese Weise entstanden. Gegebenenfalls können diese Skalen auf starkes Papier aufgeklebt und in entsprechende Fassungen gebracht schon als Sonderrechenstab verwendet werden.

Wenn wir jetzt einen Schritt weitergehen und die Formel  $y^2 \cdot x^1 = z$  als verschiebbares Rechensystem darstellen wollen, so verändern sich die Teilungseinheiten zweier Skalen, und zwar verhalten sich die Teilungseinheiten der feststehenden Grundskala (y-Skala) zu den Teilungseinheiten der verschiebbaren x-Skala wie 2:1, sind also proportional den Exponenten der Faktoren bemessen. Genau dasselbe Verhältnis der Teilungseinheiten zeigt auch die z-Skala, so daß die Teilungen der x- und z-Skalen übereinstimmen. Aufgaben, wie die zuletzt erwähnten, können auch mit einem gewöhnlichen Rechenschieber z. B. dem System Rietz, und zwar mit einer Einstellung gelöst werden. Als y-Skala benutzt man in diesem Fall die untere Teilung des feststehenden Teiles, als x-Skala die Quadratteilung der Zunge und als z-Skala die Quadratteilung wieder des feststehenden Teiles des Schiebers. Bei Berücksichtigung eines Zahlenfaktors a kann die Lösungsskala wieder als Schiebeleiter ausgebildet werden. Bild 177 zeigt eine Einstellung des eben beschriebenen Systems für die Berechnung des Volumens

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h = \frac{1}{1,27} d^2 h = 0,786 d^2 h$$

des geraden Kreiszyllinders. Die verschiebbare z-Skala ist so eingestellt, daß die Zahl 0,786 auf der 1-Marke steht, so daß wir bei  $d = 2$  und  $h = 3$  für V auf der z-Skala den Wert 9,4 ablesen können. Die Verwendung einer verschiebbaren Lösungswertskala ist hier insofern zweckmäßig, als viele Formeln die eben angegebene Form aufweisen. So ist z. B. das Volumen des Ringes  $V = 2,467 d^2 D$ , wo D = mittlerer Ringdurchmesser und d = Durchmesser des Ringwulstes oder das Volumen des Kegels ist  $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ , wo r = Radius des Grundkreises und h = Kegelhöhe.

Wir bilden jetzt als nächste Formel  $y^2 x^3 = z$  als verschieb-

bares Rechensystem aus. Auch hier ist zunächst einmal das Verhältnis der Teilungen der einzelnen Skalen in Bezug auf eine Grundteilung zu klären. Da sich nach obigen Ausführungen die Teilungen der y- und x-Skala wie die Exponenten der Faktoren verhalten, teilen wir diese Skalen im Verhältnis zwei zu drei, d. h. wir teilen die Grundskala zunächst einmal in zwei, das andre Mal in drei gleiche Teile (Bild 178). Jeder einzelne Teil wird für sich wieder logarithmisch unterteilt. Verschieben wir jetzt die y-Skala gegen die feststehende x-Skala, und zwar so, daß wir einmal den Wert 10000, dann den Wert 100000 auf der z-Skala erhalten und vergleichen die so gewonnene Teilungseinheit der z-Skala mit der Teilungseinheit der x- bzw. der Grundskala, dann erkennen wir, daß sich die Teilungseinheiten der z-Skala zu denen der x-Skala wie 2:1 und zu denen der Grundskala wie 6:1 verhalten. Die Zahl 6 erhält man aber als das Produkt der Exponenten von x und y. Jede Skala ist also verschieden geteilt, und wir haben keine Möglichkeit, wie bei der Leitertafel, die Teilungseinheiten der einzelnen Skalen irgendwie zu vereinheitlichen. Bei der Konstruktion der Dreileitertafel erreichten wir dadurch, daß wir die Mittelleiter an eine leicht bestimmbare Stelle zwischen die Außenleitern setzten, daß die Teilungen der Außenleitern gleich wurden (vgl. Kap. 5 S. 107).

Während wir es bisher mit Beziehungen mit 3 Veränderlichen zu tun hatten, gelingt es uns leicht, auch Systeme mit vier und mehr Veränderlichen aufzubauen. Man hilft sich hier so, daß man Verhältniswerte zu anderen Verhältniswerten in Beziehung bringt. In allen diesen einfachen Fällen kommen wir mit Skalen gleicher Teilung aus, von denen, wie Bild 179 zeigt, je zwei auf dem feststehenden und dem zu verschiebenden Teil des Rechensystems angeordnet sind. Stellen wir mit dem unteren Skalenpaar ein bestimmtes Verhältnis z. B. 2:5 her, so entspricht diesem Verhältnis der unteren Skalen ein bestimmtes Verhältnis der oberen Skalen z. B. 2:5, 4:10, 8:20 usw. Man kann also, wenn drei Variable der Beziehung  $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$  gegeben sind, die vierte ablesen. Zur Ausführung dieses Rechenvorganges genügen auch zwei Skalen (z. B. die eines im Handel erhältlichen Rechenschiebers). Anders ist es dagegen bei den weiter unten aufgeführten Beispielen.

Wird die Teilung der w-Skala z. B. in entgegengesetzter Richtung wie die der x-y-z-Skala aufgetragen, dann ist hierdurch die Verhältnisgleichung  $\frac{x}{y} = \frac{z}{w^{-1}}$  dargestellt. Einem derartigen Formeltyp begegneten wir z. B. bei der Ermittlung der

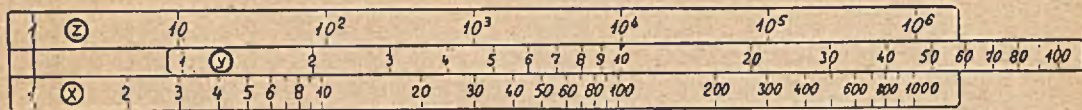


Bild 178. Rechenschieber zur Lösung von Aufgaben der allgemeinen Form  $y^2 x^3 = z$ .

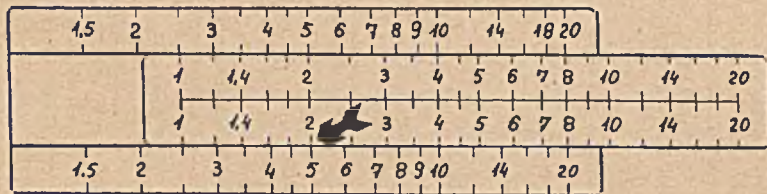


Bild 179. Rechenschieber mit 4 Skalen zur Darstellung von Proportionen.

Schnittzeit und zwar ist es die schon mehrfach erwähnte Formel  $T = \frac{l}{n s}$ , die wir sofort in die Verhältnisgleichung  $\frac{T}{n^{-1}} = \frac{l}{s}$  umwandeln können. Bild 180 zeigt dieses System für eine Einstellung  $l = 60$  mm,  $n = 50$  U/min und  $s = 0,4$  mm Vorschub pro Umdrehung. Für  $T$  liest man eine Zeitdauer von 3 Minuten ab. Auch diese Aufgabe läßt sich selbstverständlich leicht mit einem normalen Rechenschieber durchführen. Bei einem Sonderrechenschieber hat man aber die Möglichkeit, den Wertebereich der Skalen den vorkommenden Aufgaben anzupassen.

Ebenso wie für die Darstellung von Gleichungen mit vier Veränderlichen kombinierte Systeme von Leitertafeln, sog. Doppelleitertafeln entworfen wurden, ganz ebenso können wir

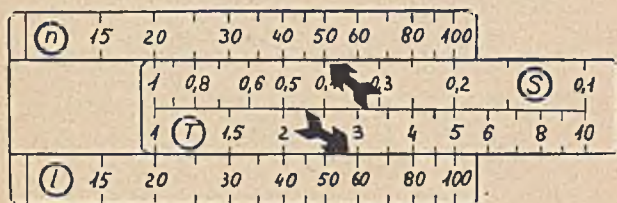


Bild 180. Rechenschieber zur Ermittlung der Schnittzeit

$$\left( T = \frac{l}{n s} \right).$$

zwei Systeme verschiebbarer Skalen zu einem einheitlichen Gebilde vereinigen. Durch Verschmelzen der Verhältnisgleichungen  $\frac{x}{y} = \frac{z}{n}$  und  $\frac{z}{a} = \frac{b}{c}$  erhalten wir die Beziehung  $\frac{x}{y} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{n}$ . Die Verbindung stellt hier das z-Glied her, das allerdings nur rein rechnerisch bei der Konstruktion des Skalensystems in Erscheinung tritt. Auch Formeln dieser Form sind in der Praxis nicht selten. Die Berechnung z. B. der Wechselräder beim Gewindeschneiden erfolgt durch die Beziehung:

$$\frac{Z_1}{Z_2} \times \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{\text{Steigung der Leiterspindel}}{\text{Steigung des zu schneidenden Gewindes}},$$

wo  $z_1, z_2, z_3$  und  $z_4$  die Zähnezahlen der Wechselräder bedeuten. Wie aus Bild 181 zu ersehen, enthält ein derartiger Rechenschieber zwei Zungen, deren Skalen doppelt ausgenutzt werden.



In Beziehung gesetzt mit der darüberliegenden Skala wird die Zähnezahl des einen Wechselrades, verbunden mit der darunterliegenden Skala die des zweiten Wechselrades dargestellt. Die Zahlen der feststehenden Skalen bedeuten die Steigungen der Leitspindel (L) und des zu schneidenden Gewindes (G). Ist z. B. ein Gewinde mit einer Steigung von 2" bei einer Leitspindelsteigung von 6,35 cm ( $2\frac{1}{2}$ "') zu schneiden und hat man Wechselräder mit den Zähnezahlen  $z_1 = 40$ ,  $z_2 = 20$ ,  $z_3 = 95$  zur Verfügung, so stellt man den Schieber zur Ermittlung des vierten Zahnrades folgendermaßen ein: Die Zahl  $z_1 = 40$  auf der oberen Zunge ( $z_1$ ) unter die Zahl 6,35 der L-(Leitspindel)-Skala einstellen. Bei festgestellter oberer Zunge die Zahl  $z_3 = 95$  der unteren Zunge ( $z_2$ ) unter die Zahl  $z_3 = 20$  der oberen Zunge schieben; über dem Wert 2" der G-(Gewinde)-Skala die Zähnezahl des vierten Zahnrades  $z_3 = 150$  ablesen.

Die Sonderrechenschieber haben also den Zweck, für bestimmte Aufgaben die Schiebezeit herunterzusetzen. Dies wird u. a. dadurch erreicht, daß die evtl. auftretenden Zahlenkonstanten in der Anordnung der Schieberskalen schon enthalten sind, so daß sie bei der Rechnung nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Jene Aufgaben können allerdings bei etwas größerem Zeitaufwand auch mit einem gewöhnlichen Rechenschieber gelöst werden. Der Fehler, der beim Rechnen mit gewöhnlichem Rechenschieber durch Berücksichtigung der Zahlenkonstanten entsteht, kann vernachlässigt werden. Diese Behauptung wollen wir durch eine Untersuchung erhärten, die uns gleichzeitig darüber unterrichtet, wie groß der beim Rechenschieberrechnen entstehende Fehler ist. Zu diesem Zweck lösen wir einige zusammengesetzte Multiplikations- und Divisionsaufgaben mittels Rechenschieber und Logarithmentafel. Die genauere Lösung wird ohne Zweifel bei Benutzung der Logarithmen erzielt, weshalb die Abweichung der beiden Lösungswerte als der beim Rechnen mit Rechenschieber auftretende Fehler gelten kann. Die Aufgaben sind so gewählt, daß die Zahl der Faktoren von 3 bis 7 anwächst. Die Resultate zeigen, ob und wie der Fehler mit Zunahme der Faktoren anwächst.

$$\text{Aufgabe 11. } \frac{3681 \cdot 7635}{1679} = \underline{16750} \text{ (durch Rechenschieber ermittelt!)}$$

$$\log 3,56597$$

$$+ \log 3,88281$$

$$\log 7,44878$$

$$\log 3,22505$$

$$\log 4,22373 = \underline{16739} \text{ (durch Logarithmen ermittelt!)}$$

$$\begin{array}{r} 16750 \\ - 16739 \\ \hline \end{array}$$

11 Differenz bzw. Fehler  $\cong 0,66\%$ .

Aufgabe 11. 
$$\frac{2938 \cdot 6798 \cdot 5343}{2989 \cdot 3159} = 11310 \text{ (durch Rechenschieber ermittelt!)}$$

$$\begin{array}{r} \log 3,46805 \\ + \log 3,83238 \\ + \log 3,72779 \\ \hline \log 11,02822 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 3,47553 \\ - \log 3,49955 \\ \hline \log 6,97508 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 11,02822 \\ - \log 6,97508 \\ \hline \log 4,05314 \end{array}$$

= 11302 (Durch Logarithmen errechnet!)

$$\begin{array}{r} 11310 \\ 11302 \\ \hline \end{array}$$

8 Differenz bzw. Fehler  $\cong 0,73\%$ .

Aufgabe 12.

$$\frac{3798 \cdot 7876 \cdot 4532 \cdot 7989}{2579 \cdot 2159 \cdot 3636} = 53400 \text{ (durch Rechenschieber errechnet!)}$$

$$\begin{array}{r} \log 3,57955 \\ + \log 3,89631 \\ + \log 3,65629 \\ + \log 3,90249 \\ \hline \log 15,03464 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 3,41145 \\ \log 3,33425 \\ \log 3,56062 \\ \hline \log 10,30632 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 15,03464 \\ - \log 10,30632 \\ \hline \log 4,72832 \end{array}$$

= 53496 (durch Logarithmen errechnet!)

$$\begin{array}{r} 53496 \\ - 53400 \\ \hline \end{array}$$

96 Differenz bzw. Fehler  $\sim 1,8\%$ .

Man erhält also bei Aufgaben mit

3	Faktoren	einen Fehler	von etwa	$0,7\%$	
5	"	"	"	"	$0,7\%$
7	"	"	"	"	$1,8\%$

Aus dieser Aufstellung ist zu ersehen, daß der Fehler, der im Mittel etwa  $1\%$  ausmacht, nicht unbedingt gleichmäßig mit der Zahl der Faktoren ansteigen muß. Vielfach hebt der Fehler sich innerhalb der Ausführung der Rechenoperationen auch wieder auf. Das Ergebnis der Untersuchung, das eine Abweichung von etwa  $1,8\%$  (bei 7 vierstelligen Zahlenfaktoren) des Istwertes gegenüber dem Sollwerte brachte, zeigt, daß die Berechnung von Aufgaben durch Rechenschieber als sehr genau und für die Praxis als völlig ausreichend angesehen werden kann.

Außer den bisher behandelten eindimensionalen Rechen-

systemen gibt es auch zweidimensionale Rechenhilfen sog. Flächenschieber, die sich aus Grundblatt und Schiebblatt zusammensetzen. Dabei kann die äußere Form der gegenseitig zu verschiebenden Tafeln ganz verschieden ausfallen, je nachdem man die eine oder andere mathematische Gesetzmäßigkeit zu ihrem Aufbau benutzt. In dem jetzt folgenden Abschnitt wollen wir zwei verschiedene Lösungen einer aus dem Behälterbau stammenden Aufgabe behandeln. Hier wird oft folgende Frage gestellt. Welche Größe muß der aus einem kreisrunden Blech herauszuschneidende Sektor haben, damit beim Zusammenfügen der Schnittkanten ein Kegel entstehen kann, der eine bestimmte Höhe hat. Die mathematischen Zusammenhänge dieser Aufgabe sind bald aufgezeigt. Stellt man sich den erzeugten Kegel als gleichschenkliges Dreieck vor, in dem die Höhe gefällt ist, so ist die Seitenlinie des Kegels = dem Radius des Kreisbleches. Der Umfang  $2 r \pi$  des Grundkreises des Kegels ist = dem Umfang  $2 R \pi$  des Kreisbleches vermindert um den Bogen  $s$ , der den herausgeschnittenen Sektor begrenzt. Es besteht also folgende Beziehung zwischen der Höhe  $h$  des Kegels, dem Radius  $R$  des Kreisbleches und dem Bogen  $s$  des herausgeschnittenen Kreissektors:

$$h^2 = R^2 - \left( R - \frac{s}{2\pi} \right)^2.$$

Wir wollen diese Beziehung auf die Normalform

$$x^2 - a x + b = 0$$

bringen. Es ergibt sich eine quadratische Gleichung der Form:

$$s^2 - 4 R \pi s + (2 \pi h)^2 = 0,$$

die leicht als allgemeine Leitertafel ausgebildet werden kann. Diese Tafel hat aber den Nachteil, daß sich nur ein kleiner Bereich für  $s$  gut ablesen läßt. Um eine bequeme Ablesung auch für einen größeren Bereich von  $s$  zu erhalten, wollen wir einen Flächenschieber entwerfen. Die gewöhnliche Methode, quadratische Gleichungen graphisch zu lösen (siehe Kap. 8 S. 163), weist uns hier einen gangbaren Weg. Wählt man in obiger Beziehung für  $R$  und  $h$  einen bestimmten Wert, erhält man eine quadratische Gleichung für  $s$ . Um  $s$  zu ermitteln, geht man bekanntlich so vor, daß man für  $s$  verschiedene Werte einsetzt und feststellt, ob der gewählte  $s$ -Wert dem richtigen Lösungswert nahekommt. Bei der Durchrechnung der einzelnen Fälle wird man auf der rechten Seite der Gleichung nicht 0, sondern einen Differenzwert  $\Delta$  erhalten. Die gewählten  $s$ -Werte werden in Abhängigkeit von den  $\Delta$ -Werten in ein Koordinatensystem eingetragen. Die so erhaltenen Punkte liefern zu einem stetig verlaufenden Kurvenzug verbunden eine Parabel. Dort, wo die

Parabel die in s-Einheiten geteilte Achse schneidet, kann der Lösungswert für s abgelesen werden, der also zu einem ganz bestimmten Wert für R und h gehört. Wählen wir andere Werte für R und h und lösen diese neue Gleichung auf dieselbe Weise wie vorher, dann erkennen wir, daß der Kurvenzug derselbe geblieben ist, lediglich seine Lage im Koordinatensystem hat sich geändert. Diese Erkenntnis führt uns dazu, das Koordinatenkreuz auf ein durchsichtiges Stück Millimeterpapier aufzuzeichnen und dieses als Schiebblatt auf dem Grundblatt, das die Parabel trägt, hin- und herzuschieben. Auf dem Schiebblatt sind die zu den gegebenen R- und h-Werten gehörigen Verschiebungskordinaten  $x'$  und  $y'$  einzutragen, welche also einen Punkt bezeichnen und dieser Punkt ist der sog. Parabelsichtelpunkt. Man verschiebt also das Koordinatenkreuz auf dem Grundblatt solange, bis Verschiebungspunkt und Parabelsichtelpunkt zusammenfallen. Den Schnittpunkt der Parabel in dieser Lage mit der s-Achse des Koordinatenkreuzes gibt genau, wie oben besprochen, die Lösung für s an. Wie findet man nun aber die Verschiebungs-Kordinaten des Parabelsichtelpunktes? Durch Hinzufügen des quadratischen Ergänzungsgliedes in der Gleichung

$$s^2 - 4 R \pi s + (2 \pi h)^2 = 0$$

sind diese schon gefunden. Man erhält dann nämlich:

$$(s - 2 R \pi)^2 = 4 \pi^2 (R^2 - h^2).$$

Hier bedeuten die Werte  $2 R \pi$  und  $4 \pi^2 (R^2 - h^2)$  die Verschiebungskordinaten  $x'$  und  $y'$ .



Bild 181. Rechenschieber zur Berechnung von Wechselträdern.

Die Werte der  $y'$ -Koordinaten lassen sich leicht aus dem in Bild 182 a wiedergegebenen Rechenschieber mit Quadratteilung ermitteln. Diese Teilung ist hier unter Benutzung der Kreisteilung des Polarkoordinatenpapiers von Schleicher & Schüll entstanden, und zwar entspricht auf der  $r$ - und  $h$ -Skala  $1^0 = 2$  Teilungseinheiten, dagegen ist die Teilungseinheit der  $y'$ -Skala mit dem Betrag  $4\pi^2 = 39,5$  zu multiplizieren. Auf eine Teilungseinheit der  $r$ - und  $h$ -Skala kommen also 39,5 Teilungseinheiten der Skala der Lösungswerte. Die Benutzung dieses Kreisrechenschiebers mit Quadratteilung ist ganz ähnlich wie die des gewöhnlichen Rechenschiebers. Die Werte für  $r$  und  $h$  werden so eingestellt, daß sie übereinanderstehen. Das Resultat ist dann über der Pfeilmarke (Zahl 5) auf der feststehenden Skala der Lösungswerte abzulesen. Bild 181 und Bild 182 zeigen die Einstellungen am Flächen- und Kreisschieber für  $r = 21$  und  $h = 17$ . Um  $s$  zu finden sind also folgende drei Arbeitsgänge erforderlich:

1. Ermittlung der  $y'$ -Koordinate durch Drehen der  $h$ -Skala bis die Zahl 17 der  $h$ -Skala über der Zahl 21 der  $r$ -Skala steht. Rechts neben der Zahl 5 der  $h$ -Skala liest man den Wert  $y' = 6 \cdot 10^3$  ab.

2. Die  $x'$ -Koordinate wird gefunden, indem man von Punkt  $r = 21$  des Schiebeblattes parallel zur  $s$ -Achse bis zur Schlüssel­linie geht. Durch diesen Punkt geht zunächst die Symmetrielinie der Parabel des Grundblattes. Das Schiebeblatt ist jetzt solange nach oben oder unten zu verschieben, bis der Parabels­cheitel mit dem Punkt  $y' = 6000$  zusammenfällt.

3. Ablesen des Wertes  $s = 55$  auf der  $s$ -Skala des Schiebe­blattes.

Da wir es mit der Lösung einer quadratischen Gleichung zu tun haben, erhalten wir zwei Werte für  $s$ , von denen aber nur einer in Frage kommen kann. Für oben angegebene Werte erhält man

$$s_1 = 209,5 \quad \text{und} \quad s_2 = 54,5.$$

Der Wert  $s_1$  kann nicht richtig, bzw. nur mathematisch richtig sein, da der Umfang des Kreisbleches nur 132 cm beträgt. Da also nur die kleineren Werte berücksichtigt werden dürfen, kann man sich mit einem Parabelast als Lösungskurve begnügen.

Eine andre Lösung nimmt Bezug auf die Beziehungen der beiden Lösungswerte  $x_1$  und  $x_2$  der quadratischen Gleichung und den Konstanten  $a$  und  $b$  der Normalform. Es ist nämlich

$$x_1 x_2 = b \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = a \quad \text{für} \quad x^2 - ax + b = 0.$$

Das Produkt  $x_1 x_2 = b$  kann auch in der Form geschrieben werden

$$x_1 : \sqrt{b} = \sqrt{b} : x_2.$$

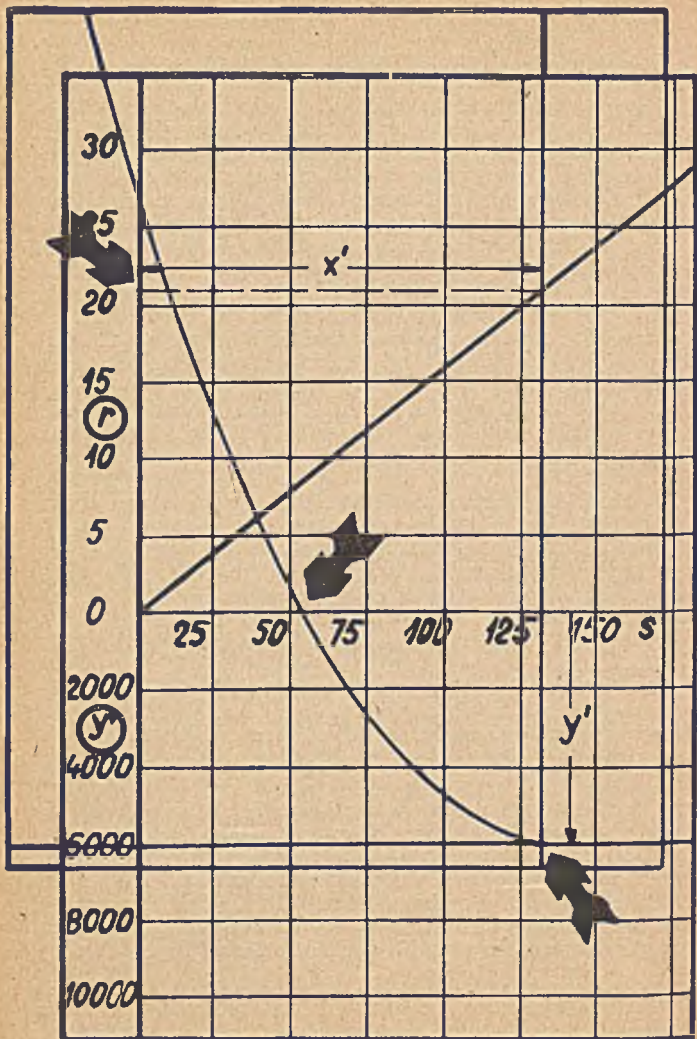


Bild 182. Anordnung von Grundblatt und Schiebblatt: Ermittlung von  $s$  (Bogen des aus dem Kreise herausgeschnittenen Kreissektors) durch die Verschiebungskoordinaten  $2 R \pi$  und  $4 \pi^2 (R^2 - h^2) = \varphi'$

wo also  $\sqrt{b}$  das geometrische Mittel von  $x_1$  und  $x_2$  ist. Diese Beziehung läßt sich leicht im rechtwinkligen Dreieck darstellen. Macht man den Durchmesser eines Halbkreises gleich dem Werte  $a = x_1 + x_2$  und zieht zu diesem Durchmesser eine Parallele im Abstände  $\sqrt{b}$ , dann erhält man zwei Schnittpunkte. Durch die Verbindung eines dieser Schnittpunkte mit den End-

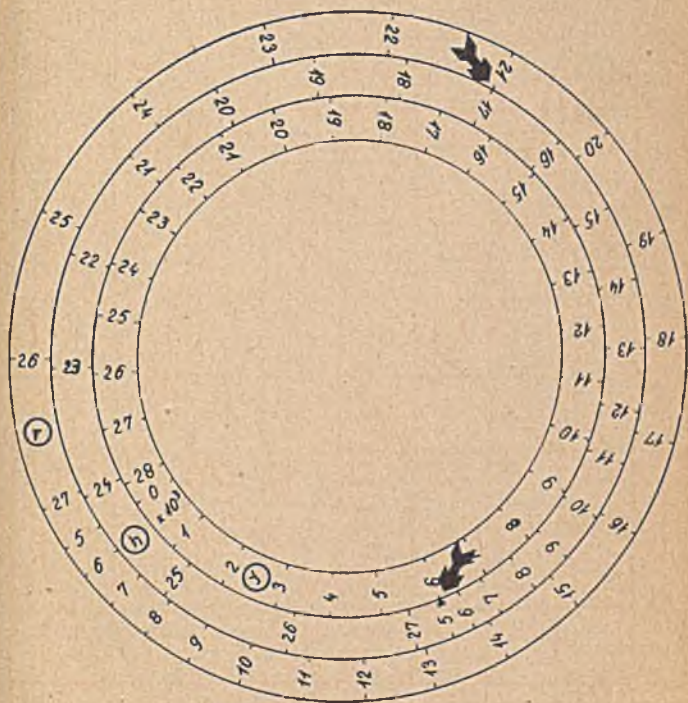


Bild 182a. Kreisrechenschieber mit Quadrattellung zur Ermittlung der Verschiebungs koordinaten  $y' = 4 \pi^2 (R^2 - h^2)$ .

punkten des Kreisdurchmessers entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Das Lot von der Dreieckspitze auf den Durchmesser  $a = x_1 + x_2$  teilt diese Strecke in die Strecken  $x_1$  und  $x_2$ . Diese Darstellung führt ebenfalls zu einem Flächenschieber. Dieser

kann allerdings nur verwendet werden, wenn es sich um Kreisbleche handelt, deren Durchmesser irgendwie gestuft sind. In dem Bilde 183 wurden gewählt Kreisbleche mit den Radien  $r = 15, 18, 21, 24$ . Es wurden also gezeichnet Kreise mit dem Durchmesser  $a = 4 \cdot 15 \pi = 188,4$ ;  $a = 4 \cdot 18 \pi = 226$  usw., deren Mittelpunkte auf einer geraden Linie liegen, und die sich alle im Punkte  $a$  berühren. Die Tangente an die Kreise (Berührungspunkt  $a$ ) ist aber  $y =$  Koordinate und ist als solche in  $\sqrt{b} = 2 \pi h =$  Einheiten zu teilen. Die Zahlen der Teilungseinheiten beziehen sich hierbei auf die  $h$ -Werte. Tragen wir nun auf einem durchsichtigen Stück Millimeterpapier eine Skala ein und beziffern sie, dann läßt sich dieses Schiebeblatt auf dem

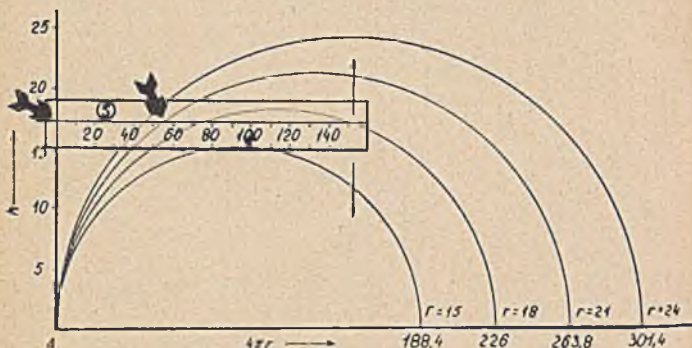


Bild 183. Darstellung der Tafel 115 durch einen Flächenschieber zur Ermittlung des Bogenwertes  $s$ .

Grundblatt so einstellen, daß ein bestimmter Kreis von der mit einem bestimmten  $h$ -Wert zur Deckung gebrachten Skala in einem Punkt geschnitten wird. Der diesem Schnittpunkt entsprechende Skalenwert ist der gesuchte Wert für  $s$ . Auch hier sind nur die Viertelkreisbögen aus demselben Grunde wie oben angegeben zu benutzen. Die in Bild 183 eingestellten Werte sind genau dieselben der ersten Lösung ( $r = 21, h = 17, s = 55$ ). Ein Nachteil dieser Lösung gegenüber der ersten liegt in der etwas ungenaueren Ablesemöglichkeit an einigen Stellen des Grundblattes. Außerdem werden nur Kreisbleche mit bestimmtem Durchmesser berücksichtigt. Da jedoch in der Praxis der Blechbearbeitung meist nur Kreisbleche mit einer festgelegten Durchmesserstufung verwendet werden, dürfte die zuletzt angegebene Lösung in den meisten Fällen schon wegen der leichten



Herstellung des Grund- und Schiebeblattes der ersten vorgezogen werden. Soll ein möglichst großer Durchmesserbereich der Kreisbleche berücksichtigt werden oder ist die Reihe der Durchmesser feiner zu unterteilen, dann wird es sich empfehlen die den verschiedenen Durchmessern entsprechenden Halbkreise

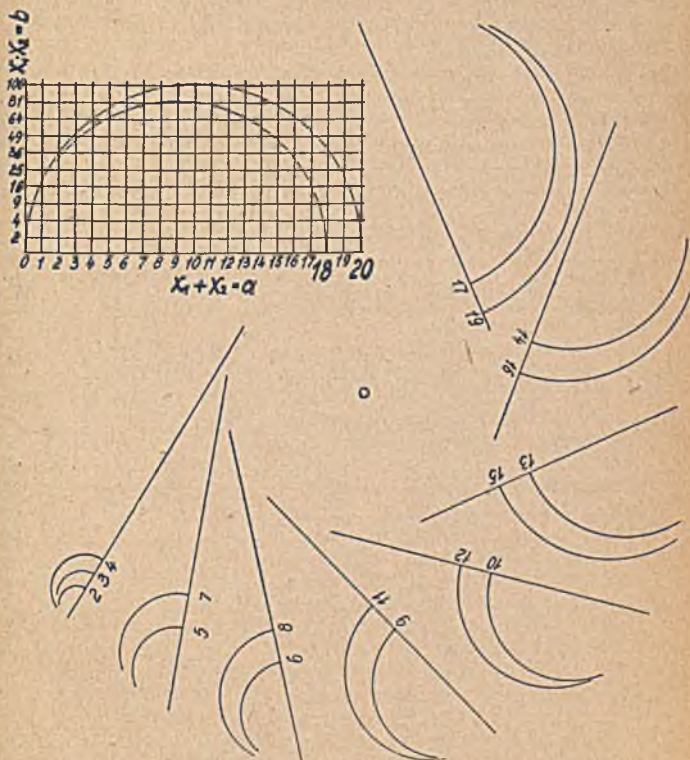


Bild 184. Auflösung der Tafel 115: Halbkreise auf Schiebeblatt angeordnet.

des Bildes 183 auf einem drehbaren Schiebeblatt einzeln einzuzeichnen, so daß diese durch Drehung des Schiebeblattes in die Gebrauchsstellungen gebracht werden können. Eine derartige Anordnung (Bild 184) gewährleistet eine sichere und deutliche Ablesung.

Als Abschluß unseres Kapitels folge eine kleine Auswahl der von den einschlägigen Firmen herausgebrachten Sonderrechenstäbe. Der Betriebs- und Kalkulations-Rechenschieber System „Kresta“ ermöglicht die Bestimmung der günstigsten Schnittgeschwindigkeiten, Umdrehungen, Doppelhübe, Vorschübe, Laufzeiten, Maschinenbelastungen usw. Der Rechenschieber System „Dr.-Ing. Winkel“ wird in erster Linie von Werkmeistern und Betriebskalkulatoren benutzt. Mit diesem Schieber lassen sich die Laufzeiten für alle Arbeitsvorgänge an Drehbänken, Bohrwerken, Fräs-, Bohr-, Schleif-, Hobel- und Stoßmaschinen ermitteln. Bild 185 zeigt den sehr einfach zu handhabenden Gewichts-Rechenschieber, System „Stockhusen“, mit dem sich die Gewichte von Eisen- oder Stahlplatten, Winkel-Flacheisen, Quadrat- und Rundeisen ermitteln läßt. Der Materialprüfungs-Rechenschieber, System „Weißkopf“ ermöglicht bei nur einmaliger Einstellung der Zunge nach Feststellung der betreffenden Belastungen die Elastizitätsgrenze und die Festigkeit in mm direkt abzulesen. Die Brinellskalen erleichtern die Auswertung der Materialprüfungen mit Kugeldruckprobe. Mit dem Eisenbeton-Rechenschieber System „Nestler-Dr.-Ing. Schäfer“ kann man einmal die Kubikzahlen und Wurzeln direkt ablesen, zum andern dient er zur Dimensionierung von Eisenbetonkonstruktionen. Mit dem Rohrleitungs-Rechenschieber System „Baurat Behrens“ ist die Berechnung von Kalt- und Warm-Wasserleitungen von 11 bis 1000 mm l. D. für Warmwasser- und Dampfheizungen von 11 bis 302 mm l. D., für Luft- und Gasleitungen von 50 bis 2500 mm l. D. für Leistungen bis zu 30 Mill. W. E. bzw. Liter/Std. oder 300 000 m<sup>3</sup> Luft bzw. Gas/Std. leicht durchzuführen. Ein Spezialrechenschieber für Holzfachleute dient



Bild 185. Gewichtsrechenschieber System Stockhusen.

zur Berechnung von Rund- und Kantholz usw. bei Taxationen, Holzkäufen, Holzversteigerungen usw. Einige der aufgeführten Rechenschiebertypen werden übrigens nicht mehr aus Holz sondern aus einem neuartigen Kunststoff hergestellt. Bevor man daran ging, aus dem neuen „Aristo“-Werkstoff Rechenschieber herzustellen, wurde dieser erst einer eingehenden Prüfung seiner Formbeständigkeit unterzogen. Es ist von Interesse zu erfahren, daß an 2 mm dicken Tafeln dieses Werkstoffes folgende Versuche ausgeführt wurden:

1. Natürliche Bewitterung: 9 Tage.  
Künstliche Bewitterung: 159 Stunden  
auf dem Gardner-Rad (Bogenlicht 750 W — Hei-  
sonne — Brause — Wasserbad — Bogenlicht 750 W.).
2. Kälte und Wärme.  
Je zwei Stunden im Bereich von  $-16^{\circ}\text{C}$  bis  $+40^{\circ}\text{C}$ .
3. 100% relative Luftfeuchtigkeit.  
Lagerung bei 100% relativer Luftfeuchtigkeit bei etwa  $20^{\circ}\text{C}$ , Feststellungen der Abmessungsänderungen nach 8 und nach 23 Tagen.

Bei all diesen Versuchen waren die auftretenden Änderungen



Bild 186. Querschnitt durch einen Rechenschieber aus Holz.

der linearen Abmessungen kleiner als 0,1%, nur bei dem letzten erreichten sie die Größe von 0,2 bis 0,3%. Diese an sich sehr geringen Änderungen werden bei Rechenschiebern darüber hinaus vollständig kompensiert, da bei diesen Rechenschieberkörper und Zunge aus dem gleichen Werkstoff bestehen. Die aus Holz hergestellten Rechenschieber mußten um ihrer Formbeständigkeit willen nach besonderen Grundsätzen gestaltet werden. Außer der Anwendung des Sperrholzprinzipes (Bild 186) wurde darüber hinaus zur Verhinderung von Formänderungen in der Querrichtung des Körpers dieser der Länge nach ge-



Bild 187. Querschnitt durch einen Rechenschieber aus Aristo-Material.

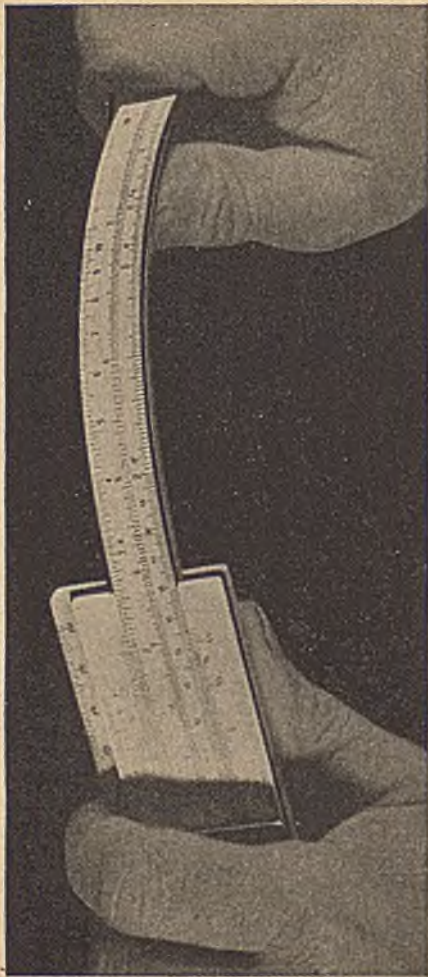


Bild 188. Mechanische Beanspruchung eines Aristo-Rechenschleibers.



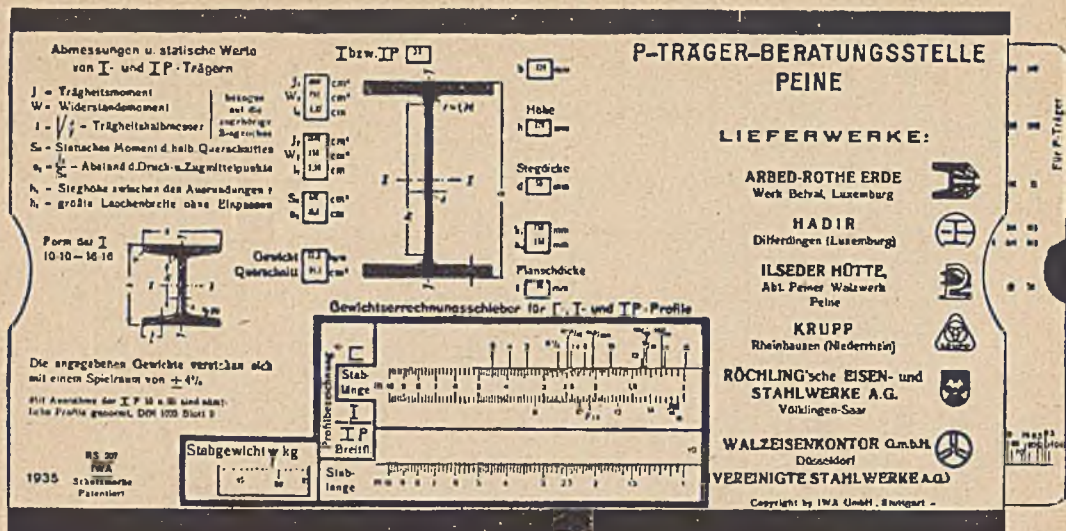


Bild 190. Tabellenschieber zur Ermittlung der Abmessungen und statischen Werte der Deutschen I- und T-Stahl-Profile.

$M_s$ , das Drehmoment  $M_d$ , das Spannungsverhältnis  $K_o$  und die zulässige Biegungsspannung  $K_b$  bekannt sind.

Zur Ermittlung der Gewichte aller genormten Profile bedient man sich des SR 725.

Der SR 740 dient zur Bestimmung von Schnittgeschwindigkeit, Vorschub, Schnitttiefe, Antriebsleistung und Drehzahl unter dem Gesichtspunkt der wirtschaftlichen Ausnutzung von Werkzeug und Maschine. Er gilt für das Drehen von Stählen verschiedener Festigkeiten (zwischen 50 und 130 kg/mm<sup>2</sup>) mit Hartmetall, wobei alle deutschen Hartmetalle für die Stahlbearbeitung berücksichtigt sind (Bild 189).

Mit den Rechenschiebern verwandt sind die Tabellenschieber, die z. T. die Tabellen für den praktischen Gebrauch handlich machen sollen. Bild 190 zeigt einen derartigen Schieber zur Ermittlung der Abmessungen und statischen Werte der Deutschen I- und C-Stahl-Profile. Der Gewichtserrechnungsschieber, der sich auf dem unteren Teil der P-Träger-Seite befindet, wird wie ein normaler Rechenschieber gehandhabt.

An dieser Stelle soll nicht versäumt werden, den vorzüglichen Einheits-Rechenschieber System „Darmstadt“ zu erwähnen, der im Institut für praktische Mathematik der T. H. Darmstadt (Prof. Dr. Walther, V. D. I.) entstanden ist. Alle Teilungen des Normal-Rechenschiebers sind auch hier zu finden, jedoch in viel besserer Anordnung als bei diesem. Die Potenzteilung ist gegenüber der bisher üblichen um 25 cm verlängert, sie reicht von 1,01 bis 10,5 und ist auf die Schieberrückseite verlegt. Die trigonometrischen Teilungen sind dafür auf der Vorderseite zu finden, wo sie bequemer benutzt werden können als auf der Rückseite. Vielfach ist auch noch der Rechenschieber System „Cuntz“ in Gebrauch, der trotz seiner Länge von nur 160 mm die Genauigkeit eines 375 mm langen Rechenschiebers besitzt. Außer den normalen Teilungen für die 2. und 3. Wurzel bzw. für die 2. und 3. Potenz trägt dieser Rechenschieber (Bild 191) noch eine Teilung für Kreisumfänge und Kreisinhalte. In neuester Zeit setzt sich der Rechenschieber System „Klawun“ immer mehr durch. Die Quadrate (siehe Bild 192) werden hier auf einer besonderen Skala abgelesen, die mit dem unteren Hauptskalenpaar korrespondiert. Das obere Skalenpaar trägt versetzt die gleiche Teilung wie die untere Hauptskala, wodurch bei zusammengesetzten Aufgaben jede Neueinstellung der Zunge (Zungenrückschlag) vermieden wird.

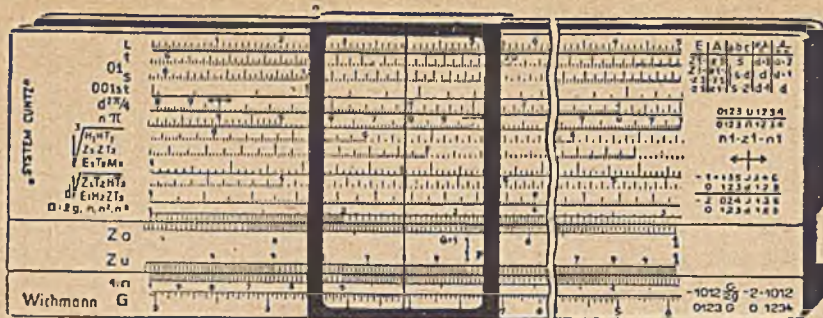


Bild 191. Rechenschieber System Cuntz.



Bild 192. Rechenschieber System Klawun.



## XIV. Mechanisierte Rechentafeln, Rechenmaschinen, Rechengetriebe

In dem letzten Kapitel wollen wir uns zunächst mit Rechentafeln befassen, die sich ohne Mühe in mechanische Rechenhilfen verwandeln lassen. Eine mechanisierte Multiplikationstafel erwähnten wir schon im Kap. 3 auf S. 65. Dort wurde die Geradenschar durch eine um den Mittelpunkt des Koordinaten-Systems schwenkbare Gerade ersetzt, die auf Cellon eingeritzt war. Weiter ist der im vorigen Kapitel ausführlich behandelte Rechenschieber eine mechanisierte Leitertafel. Allerdings ist es manchmal nicht möglich, die Leitertafel durch einen Rechenschieber zu ersetzen, zumal wenn durch sie Beziehungen von 5 und mehr Veränderlichen dargestellt werden. Durch geschickte Anordnung eines die einzelnen Leiterpunkte verbindenden Mittels (Lineal, Schnur usw.) können die Leitertafeln leicht in ein mechanisiertes Recheninstrument verwandelt werden. Dies ist z. B. im Ringbuch-Rechenschieber geschehen, in dem die verschiedenen Leitertafeln eines bestimmten Formats (Kosmos-Nomogramme) eingespannt werden können. Zwei durchsichtige, auf Gleitschienen laufende und an ihren Gleitschiebern schwenkbare Lineale werden auf die Fluchten der Nomogramme eingestellt, so daß das Ergebnis sofort abgelesen werden kann. Bild 193 zeigt den Ringbuch-Rechenschieber mit einem eingelegten Nomogramm zur Benutzung für Ankerwickler, Installateure, Radiofachleute usw. Es kann u. a. mit Hilfe der abgebildeten Leitertafel Durchmesser und Anzahl der Drähte einer Ständerwicklung bestimmt werden. An einem Beispiel soll die Benutzung dieses Instrumentes gezeigt werden.

Es wird ein Motor geliefert mit einer Läuferlänge  $L_1 = 15$  cm und einem Läuferdurchmesser  $D = 20$  cm. Der Motor soll für eine Leerlaufdrehzahl von  $n = 1000$  (6 Pole) und für 380/220 Volt hergerichtet werden. Es ist zu untersuchen, welche Leistung aus dem Modell entnommen werden kann, außerdem ist der Drahtdurchmesser der Ständerwicklung zu bestimmen.

Lösung: Man legt zunächst das grüne Strich-Lineal des Rechenschiebers über den Punkt  $L_1 = 15$  cm an Skala 6 und über den Punkt  $n = 1000$  an Skala 9, wodurch der Schieber des Lineals auf einen bestimmten Punkt des rechten Schieberrahmens zu liegen kommt. Dann schwenkt man das Lineal um diesen Punkt so, daß die grüne Linie über den Punkt  $D = 20$  an Skala 4 nach der Skala 2 geht, wo man am Schnittpunkt den Wert 5,7 abliest. Damit ist festgestellt, daß dem Motor 5,7 PS entnommen werden können. Jetzt stellt man den grünen Strich vom Punkt 5,7 der Skala 2 aus waagrecht und findet an der

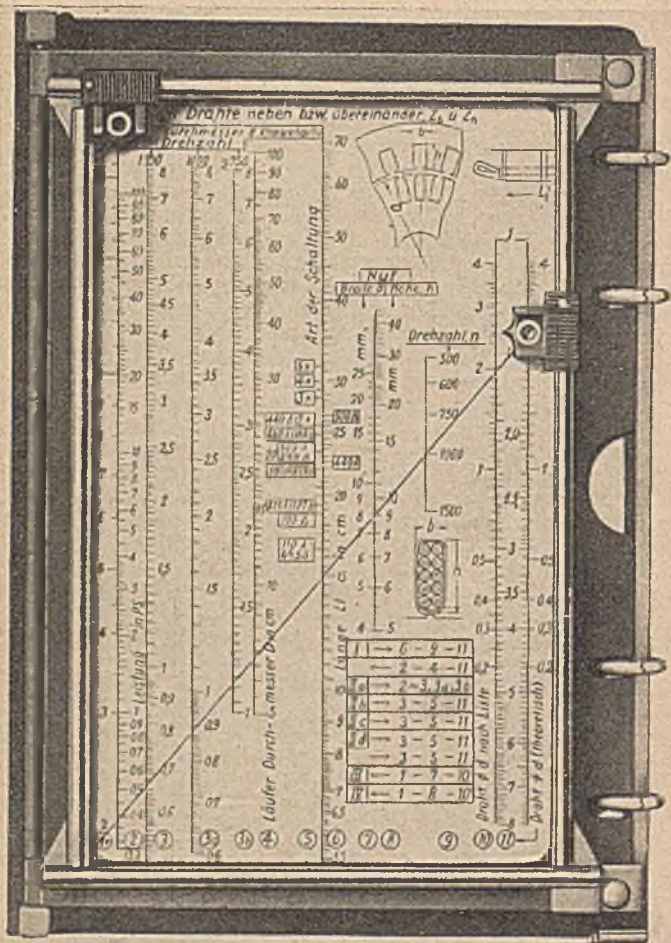


Bild 193. Ringbuch-Rechenschieber mit einem eingelegten Nomogramm zur Benutzung für Ankerwickler, Installateure, Radiofachleute usw.

Skala 3a den Wert  $d = 2$ , was also besagt, daß der Drahtdurchmesser der Wicklung 2 mm werden muß (Bild 194).

Aus dem in Bild 195 wiedergegebenen Kosmos-Nomogramm können folgende 5 Variablen ermittelt werden:

1. Spanquerschnitt aus Vorschub und Schnitttiefe,
2. Drehbankleistung in PS,
3. wirtschaftlichste Schnittgeschwindigkeit,
4. Drehzahl der Drehbank,
5. Schnittzeit.

Die in das Nomogramm eingezeichneten Linien, die den einzustellenden Linealen entsprechen, führen zur Ermittlung der ersten 3 Variablen. Die Reihenfolge der Einstellungen wurde durch die Anzahl der Verbindungspunkte in den einzelnen Linien gekennzeichnet. Bei der ersten Einstellung führt man die Lineallinie durch die Schnitttiefe 3 mm an der oberen der beiden unteren Skalen und durch den Vorschub an der mittleren Skala = 2 mm je Umdrehung, so daß sich der Drehpunkt des Linealschiebers auf der oberen Skala einstellt und die Nase des Schiebers sofort den Spanquerschnitt = 6 mm<sup>2</sup> angibt.

Jetzt schwenkt man das Lineal so, daß die Lineallinie entsprechend der mit 2 Punkten eingezeichneten Geraden durch die nicht umkreiste Marke „Grauguß“ geht, und liest an ihrem Schnittpunkt mit der oberen der beiden unteren Skalen die entsprechende Drehbankleistung = rund 1,5 PS ab.

Darauf schwenkt man das Lineal entsprechend der eingezeichneten 3. Linie durch die umkreiste Marke „Grauguß“ und liest ebenfalls an den oberen der beiden unteren Skalen die wirtschaftlichste Schnittgeschwindigkeit = rund 15 mm/min ab.

Nach der ersten Einstellung bleibt der Drehpunkt an derselben Stelle, so daß nur eine Schwenkung vorgenommen zu werden braucht. Ganz ähnlich wird die 4. und 5. Variable ermittelt.

Den Betriebsmann interessieren folgende Kosmosnomogramme, die in den Ringbuch-Rechenschieber eingespannt werden können:

1. Schraubenauswahl,
2. Riemenantriebe,
3. Federermittlung,
4. Durchbiegen von Trägern,
5. Leistung, Drehmoment, Drehzahl,
6. Fräsen. Schnittgeschw. spez. Schnittdruck usw.,
7. Rundschleifen, Schleifhübe, Schleifzeit,
8. Drehen (Bild 195),
9. Reck- und Freiformschmieden,
10. Fräsen von Zahnrädern.

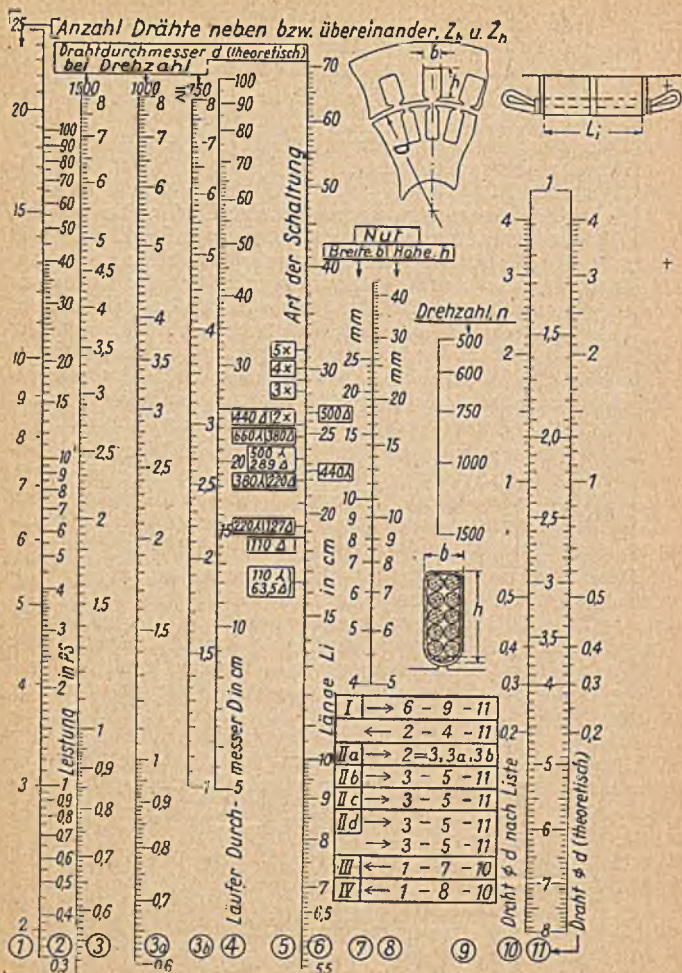


Bild 194. Nomogramm aus dem Ringbuch-Rechenschieber herausgenommen.

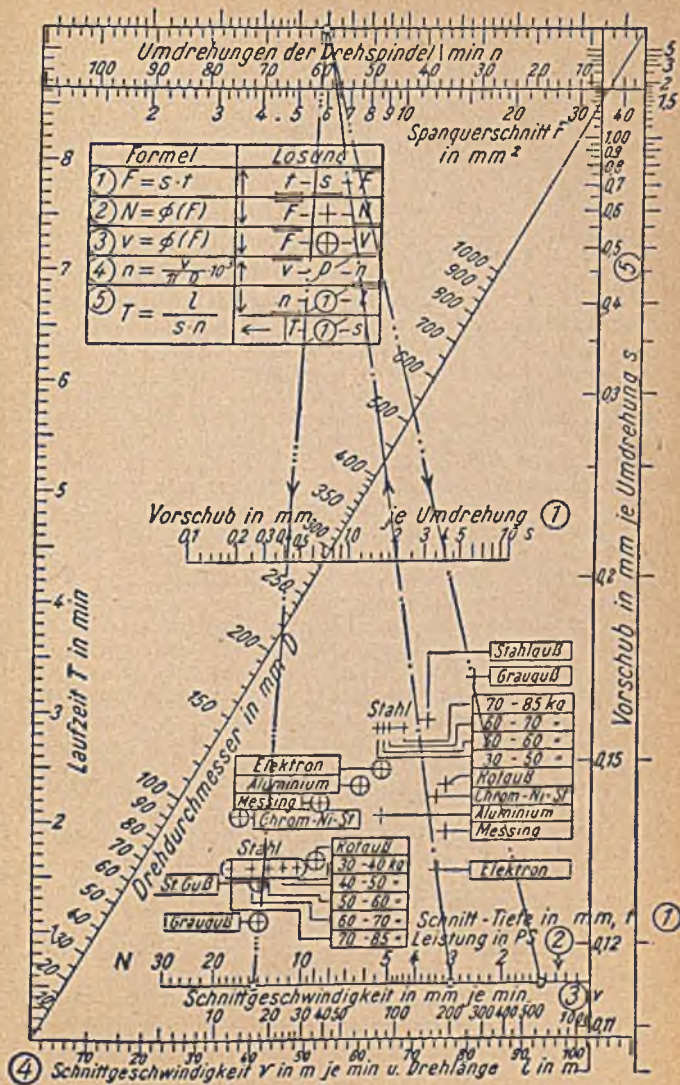


Bild 195. Kalkulations-Nomogramm für den Ringbuch-Rechenschleber.

Während also der Ringbuchrechenschieber Nomogramme aus den verschiedensten Gebieten aufnehmen kann, dient der Zeitrechner „Kalkulus“ (Bild 196) speziell zur Zeitbestimmung der Spanabnahme bei Werkzeugmaschinen. Auch hier können durch entsprechende Vorrichtungen Leitertafelwerte zueinander in Beziehung gebracht werden. Der Zeitrechner „Kalkulus“ besteht aus einer in einem Eichenholzkasten eingebauten Leichtmetallplatte, in welcher sich die Schlitzes I—V befinden. In diesen Schlitzes sind Schieber mit Zeigern und Handgriffen verstellbar angeordnet. Die Schieber sind unter der Platte durch Führungsstücke verbunden. Das Anzeigen der für die Rechnung maßgebenden Werte geschieht mittels Zeiger, die auf die entsprechenden Skalen eingestellt werden. Die linke Skala c zeigt die einfache Hublänge in mm an, sie kommt nur in Frage bei der geradlinigen hin- und hergehenden Bewegung, bei der die Spanabnahme nur beim Vorwärtsgang erfolgt, wie dies bei Hobel-, Shaping- und Stoßmaschinen der Fall ist. Die Hublänge umfaßt außer der Arbeitslänge des Werkstückes noch den zum Auslauf des Stahles notwendigen Weg. Auf der Skala d wird der Durchmesser des Werkstückes bei Drehbankarbeiten, oder der Durchmesser des Fräasers oder des Bohrers in mm eingestellt. Die Skala v kommt für die Schnittgeschwindigkeit in m/min bei der rotierenden Bearbeitung oder für die mittlere Tischgeschwindigkeit bei der geradlinigen Bearbeitung in Frage. Die Skala n enthält die Werte für die Umdrehungszahlen pro min für die Arbeitsspindel der Drehbank, für die Frässpindel der Fräsmaschine oder für die Bohrspindel der Bohrmaschine und bei der geradlinigen Bewegung die Anzahl der Doppelhübe pro min, d. h. des Vor- und Rückganges der Hobel-, Shaping- oder Stoßmaschine. Die Skala t gibt die Arbeitszeit in Minuten und in Bruchteilen davon an. Die Skala a zeigt die Werte für den Vorschub in mm pro Umdrehung bei der rotierenden und die Schaltung in mm pro Doppelhub bei der geradlinigen Bewegung an. Die Skala l gibt die Länge des rotierenden Werkstückes oder die Bohrtiefe in mm, bei der geradlinigen Hobel- oder Stoßbewegung dagegen die Breite des Werkstückes in mm an.

Einen geometrischen Rechenschieber nach Dr.-Ing. P. Altbürger gibt Bild 197 wieder. Mit diesem Schieber können Spannungsabfallrechnungen sowie geometrische Additionen ausgeführt werden. Durch zwei Schiebereinstellungen, die aus einer Zahlentafel ersichtlich sind, werden auf graphischem Wege zeitraubende Rechenarbeiten erspart.

Ein Gerät zum Bestimmen der Winkelfunktionen zeigt Bild 198. Es gestattet Berechnungen leicht zu überprüfen. Die Vorteile dieser Anordnung lassen sich in 4 Punkten zusammenfassen:

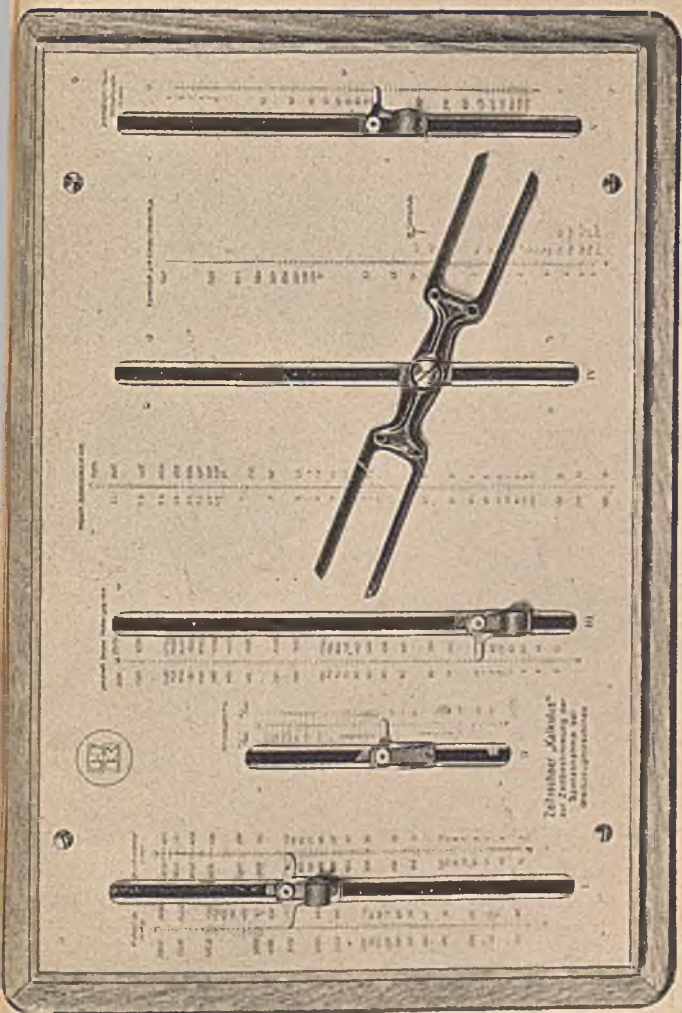


Bild 196. Zeitrechner Kalkulus zur Zeitbestimmung der Spanabnahme bei Werkzeugmaschinen.

1. Die geometrische Bedeutung der Winkelfunktionen als Strecken am Einheitskreis bleibt ersichtlich.

2. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen desselben Winkels sowie zwischen Funktionen und co-Funktionen bleibt anschaulich.

3. Eine Einstellung liefert gleichzeitig  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\operatorname{tg}$  bzw.

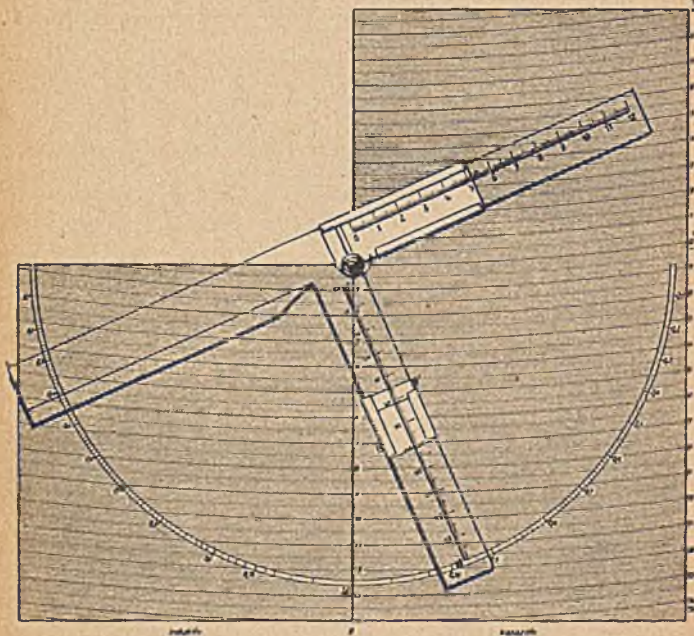


Bild 197. Geometrischer Rechenschieber nach Dr.-Ing. P. Altbürger.

$\cotg$ , so daß die Werte nacheinander, wie sie etwa in der Rechnung benötigt werden, bequem dem Diagramm entnommen werden können, ohne neues Aufsuchen oder Umblättern wie bei Tafeln bzw. ohne neues Einstellen wie beim Rechenschieber.

4. Für viele Zwecke ist die Genauigkeit ausreichend und die Werte können ohne unnötige Dezimalen entnommen werden. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß für Winkel unter  $10^\circ$  etwa



bzw. über etwa  $80^\circ$  die Werte für  $\sin$  und  $\text{tg}$  bzw.  $\cos$  und  $\text{cotg}$  sich gegenseitig vertreten können.

In dem Bild 198 ist die Diagonale des Schiebeblattes auf die  $60^\circ$  der Kreisteilung geschoben worden. Man liest auf der linken Skala am Schnittpunkt mit dem Kreis  $\sin 60^\circ = 0,866$ , auf der unteren Skala am Schnittpunkt mit dem Kreis  $\cos 60^\circ = 0,5$

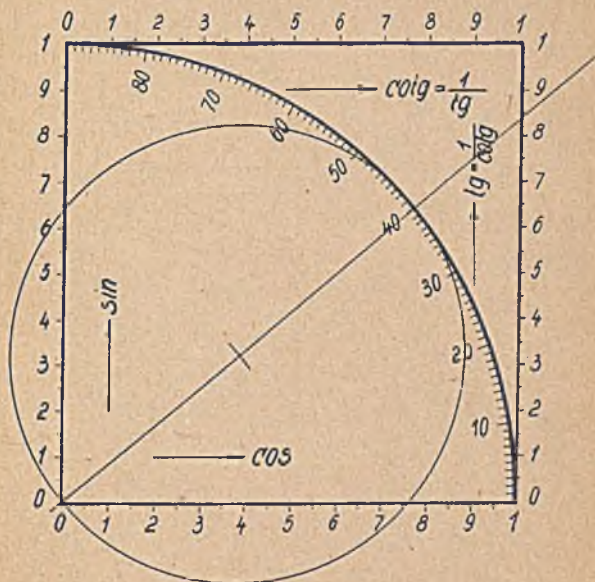


Bild 198. Gerät zum Bestimmen der Winkelfunktionen.

ab. Die obere Skala schneidet die Diagonale im Punkt  $\text{cotg } 60^\circ = 0,577$ . Der Wert  $\text{tg } 60^\circ$  wird nach der Formel

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{1}{\text{cotg } 60^\circ} = \frac{1}{0,577} = 1,732$$

berechnet.

Ein Gerät zur Ermittlung der Anstrengung aus den gemessenen Dehnungen zeigt Bild 199. Zum Verständnis dieses Gerätes sei folgendes vorausgeschickt. Um sich in schwierigen Fällen von der Größe und der Verteilung der Spannungen ein Bild machen zu können, mißt man die auftretenden Dehnungen des Materials mit dem sog. Dehnungsmesser. Man zeichnet hierzu



ellipse festgestellt. Die Ellipse entsteht aus einem Kreis, der um einen im spannungslosen Zustande befindlichen Meßpunkt gezogen wurde (Bild 200). Bei der Auswertung der Meßwerte geht man so vor, daß vom Umfang eines Kreises aus entsprechend der Richtung der untersuchten Meßstrecke, die abgelesenen Anschläge des Dehnungsmessers aufgetragen werden. Die einzelnen Punkte des Netzes werden dann einerseits sich voneinander entfernen, andererseits sich einander nähern, so daß die Ellipsen-

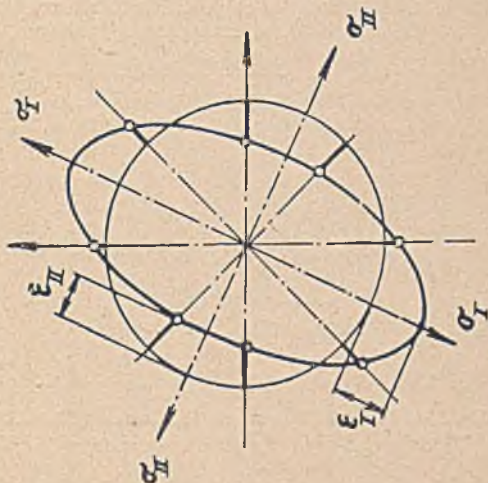


Bild 200. Mit Hilfe der Spannungsellipse werden die Hauptdehnungen festgestellt.

form entsteht. Die Hauptachsen der Ellipsen geben dann die Richtung der Hauptspannungen an. Die gemessenen Dehnungswerte können dann dazu benutzt werden, die Hauptspannungen nach den Grundgleichungen zu berechnen:

$$\sigma_I = \frac{m}{m^2 - 1} E (m \epsilon_I + \epsilon_{II})$$

$$\sigma_{II} = \frac{m}{m^2 - 1} E (\epsilon_I + \epsilon_{II} \cdot m).$$

Hier bedeuten:

$\sigma_I$  = erste Hauptspannung,

$\sigma_{II}$  = zweite Hauptspannung,

$E$  = Elastizitätsmodul,

$m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon q}$  (Poissonsche Konstante),

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  = Dehnung,

$\varepsilon q$  = Quersammenziehung.

Die Beurteilung der Bruchgefahr ist nur möglich, wenn man außer den Hauptspannungen auch die sog. Anstrengung des Materials berücksichtigt. Diese Anspannung, mit  $\sigma_{\text{Red}}$  (Red = Reduziert) bezeichnet, ist

$$\sigma_{\text{Red}} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{II}}.$$

Der Ermittlung des Wertes der Anstrengung dient nun der

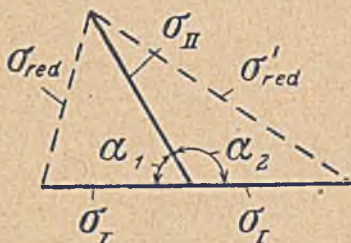


Bild 201. Prinzipbild zum Verständnis des in Bild 199 dargestellten Gerätes zur Ermittlung der Anstrengung.

in Bild 199 dargestellte Rechenapparat. Man stellt den Wert der ersten Hauptspannung  $\sigma_I$  mittels des Läufers (a) der unteren Skala (b) ein, legt die Kante des Armes (c) an den betreffenden Zahlenwert der zweiten Hauptspannung  $\sigma_{II}$ , die auf dem Schenkel (d) aufgetragen ist und liest an dem Maßstab des Armes (c) den Wert der Anstrengung  $\sigma_{\text{Red}}$  ab. Dabei ist lediglich zu beachten, daß der Wert der ersten Hauptspannung  $\sigma_I$  bei gleichen Vorzeichen beider Hauptspannungen auf der linken Seite und bei ungleichen Vorzeichen auf der rechten Seite der unteren Skala (b) mittels Läufer (a) eingestellt wird.

Der Aufbau des Schiebers beruht auf folgenden geometrischen Beziehungen (Bild 201):

$$\sigma_{\text{Red}} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2 \sigma_I \sigma_{II} \cdot \cos \alpha_1}$$

$$\sigma'_{\text{Red}} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2 \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \cos \alpha_2}.$$

Um mit dem Apparat den Wert  $\sigma_{\text{Red}} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}}$  darstellen zu können, muß er so eingerichtet werden, daß bei gleichen Vorzeichen der beiden Hauptspannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  der Winkel  $\alpha_1 = 60^\circ$  wird. Es ergibt sich aus  $\cos 60 = +0,5$

$$\sigma_{\text{Red}} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2 \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot 0,5} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{II}}$$

Werden die Werte  $\sigma_I$  für gleiches Vorzeichen von  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  auf einer Geraden vom Scheitelpunkt des Winkels nach links, für ungleiches Vorzeichen nach rechts aufgetragen, so wird bei Wahl des Winkels  $\alpha_1 = 60^\circ$  der Winkel  $\alpha_2 = 120^\circ$ . Setzt man diesen Wert in obige Gleichung ein, so erhält man, da  $\cos 120^\circ = -0,5$

$$\begin{aligned} \sigma'_{\text{Red}} &= \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2 \sigma_I \cdot (-) \sigma_{II} \cdot (-) 0,5} \\ &= \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{II}}, \end{aligned}$$

d. h. bei ungleichen Vorzeichen von  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  ist der Wert für  $\sigma_I$  rechts einzustellen. In dem Apparat vom Bilde 199 sind folgende Werte eingestellt: erste Hauptspannung  $\sigma_I = 62$ , zweite Hauptspannung  $\sigma_{II} = -70$ . Die Anstrengung  $\sigma_{\text{Red}}$  ergibt, auf dem Arm (c) abgelesen, einen Wert von 114,4.

Bei gleichzeitigem Auftreten von Normal- und Schubspannungen ergibt sich die Anstrengung nach der Gleichung:

$$\sigma_{\text{Red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2},$$

wo  $\tau$  die Verdrehbeanspruchung und  $\sigma$  eine Zug- bzw. Druckspannung vorstellt.

Zur Ermittlung der Werte der Anstrengung nach oben angegebener Beziehung besitzt der Rechenapparat eine weitere Skala e auf der Läuferführung sowie eine Skala f, die einen rechten Winkel mit der Skala e bildet und auf der die Werte von  $\tau \sqrt{3}$  aufgetragen sind. In Bild 199 ist der Läufer auf eine Zug- bzw. Druckbeanspruchung von  $\sigma = 180$  und die Kante des Armes c auf eine Verdrehbeanspruchung  $\tau = 66$  eingestellt. Man liest eine Anstrengung von  $\sigma_{\text{Red}} = 214$  ab.

Ist der Verdrehbeanspruchung gleichzeitig noch eine Zug- bzw. Druckbeanspruchung überlagert, so liegt die Richtung der Hauptspannungen unter einem bestimmten Winkel zur Achse der Zug- und Druckbelastung. Zwischen diesem Winkel und dem Verhältniswert der Verdreh- und Druckspannung besteht die einfache Beziehung:

$$\text{tg } \beta = \frac{2 \tau}{\sigma},$$

wo  $\beta$  der Winkel zwischen Zug- oder Druckbelastung und der Richtung der Hauptspannungen ist.

Auch diese Werte lassen sich mittels Schiebers rasch ablesen, wenn man einen Winkelmesser  $h$  und einen Zeiger  $i$  an dem Drehpunkt des Armes  $c$  anbringt. Der Winkelmesser ist mit dem Schieber  $a$  und der Zeiger mit dem Arm  $e$  fest verbunden. Soll aus dem bekannten Winkel  $\beta$  und der Zug- bzw. Druckbeanspruchung  $\sigma$  der Wert der Drehbeanspruchung  $\tau$  ermittelt werden, so wird der Schieber auf den Wert  $\sigma$  der oberen Skala  $e$  und der Zeiger auf den betreffenden Winkelmesswert eingestellt. Man liest auf der rechten der beiden Skalen  $g$  des senkrechten Schenkels den Wert der Verdrehbeanspruchung ab. In dem Apparat ist der Wert  $\beta = 32,3^\circ$ , die Zug- bzw. Druckspannung  $\sigma = 180$  eingestellt; abgelesen wird die Verdrehbeanspruchung  $\tau = 57$ . (Siehe: „Gerät zur Ermittlung der Anstrengung aus den gemessenen Dehnungen“ von Ing. Rich. Schulz, Beilage B des „Deutschen Technikers“ Nr. 5, 1938; ebendort auch weitere Literaturhinweise.)

Ein Spezialgebiet besonderer Eigenart stellt der Askania-Kreisrechenschieber dar (Bild 202). Dieses Gerät dient zur Auswertung der mit dem Kinotheodoliten gemessenen Winkel und zwar können mit ihm Aufgaben folgender Grundform gelöst werden:

$$z_1 = a b \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$z_2 = \frac{a \cos \alpha}{b \cdot \sin \beta}$$

$$z_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - e^2}$$

Was bei gewöhnlichen geraden Rechenschiebern die festen Teilungen übernehmen, nämlich die Einstellung der ersten Zahl und des Resultates, ist hier durch Teilungen auf einem Kreis und auf einer Spirale ersetzt, die eine Ringscheibe von 1 m größtem Durchmesser mehrmals umläuft. Auf der einen Seite der Ringscheibe ist außer einer logarithmischen Teilung für die Zahlen von 10—100 längs des Kreises eine Quadrattteilung längs der Spirale angebracht und nach den Wurzelwerten von 0—100 bzw. 0—50 beziffert. Die andere Seite oder eine zweite Ringscheibe trägt statt der Quadrattteilung eine Teilung nach den log. Werten der sin- und cos-Funktion. Zwei beliebig miteinander klemmbare Schwenkarme mit Marken, die über die Skalen gleiten, ersetzen die Zunge des gewöhnlichen Rechenschiebers. Denn im Skalenraum zwischen den beiden Armen kann eine zweite Zahl eingestellt und an die erste Zahl angetragen werden, wie man es beim gewöhnlichen Rechenschieber zu tun pflegt. Der große Kreisumfang gestattet Quadratzahlen zu addieren und Multiplikationen der Winkelfunktionen mit größtmöglicher Genauigkeit durchzuführen.

Als Hilfsapparate zur graphischen Rechentechnik seien einige Rechenmaschinen besprochen. Es ist vielfach zweckmäßig, zur Ausrechnung der Tabellenwerte, die zum Aufbau der Rechentafeln dienen, eine Rechenmaschine zu benutzen.

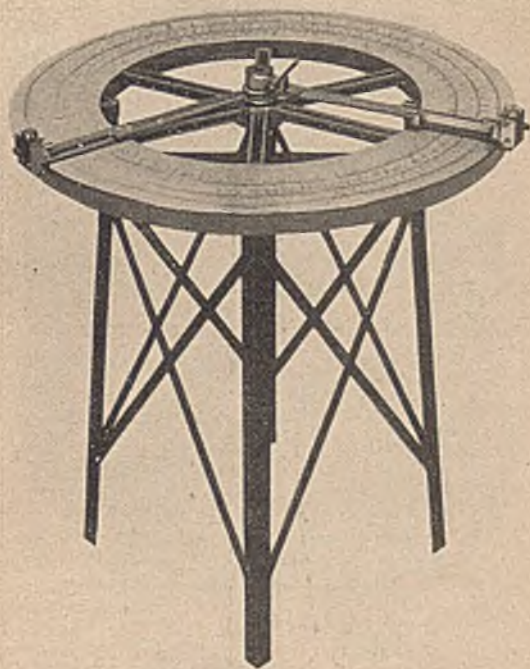


Bild 202. Askania-Kreisrechenschieber zur Lösung von Aufgaben der

$$\text{Grundform } z_1 = a b \sin \alpha \cdot \cos \beta; \quad z_2 = \frac{a \cdot \cos \alpha}{b \cdot \sin \beta};$$

$$z_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - e^2}.$$

Die Rechenmaschinen führen sämtliche Rechenoperationen durch Addition bzw. Subtraktion von Zahlen aus, liefern also auch dementsprechend genaue Resultate. Bild 203 zeigt eine

Astra-Addiermaschine. Beim Addieren z. B. geht man hier so vor, daß zunächst die erste Zahl ins Rechenwerk gebracht wird, indem ihre einzelnen Ziffern der Reihe nach von links nach rechts, wie man sie liest, auf den Tasten angeschlagen werden. Nun ist ein Kurbelzug auszuführen, wodurch die Zahl auf ein Papierband gedruckt wird. Um 35,46 zu schreiben, schlägt man die Tasten 3, 5, 4, 6 in dieser Reihenfolge an. Jetzt erfolgt der



Bild 203. Astra-Addiermaschine.

Kurbelzug und die Zahl 35,46 steht sofort gedruckt auf dem Papier und befindet sich im Zählwerk. Bei 1,50 schlägt man die Tasten 1, 5, 0 an und führt wieder einen Kurbelzug aus, wodurch diese Zahl unter die vorige gedruckt und zu der ersten im Zählwerk enthaltenen hinzugezählt wird. Soll nach dem Niederschreiben der Zahlen die Summe gebildet werden, die Summe also allein gedruckt auf dem Papier erscheinen, so ist



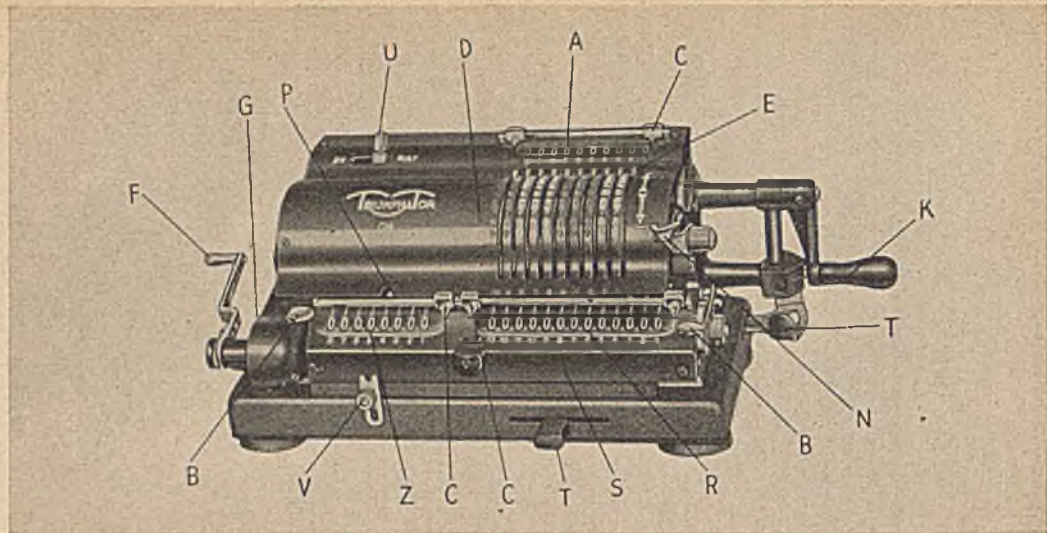
zunächst ein Kurbelzug auszuführen und die mit „\*“ bezeichnete Summentaste niederzudrücken und wieder die Kurbel zu ziehen. Die Gesamtsumme erscheint sodann gedrückt auf dem Papier mit dem Kennzeichen „\*“ dahinter, und gleichzeitig stellt sich das Zählwerk selbsttätig wieder auf Null ein. Ein Vorteil dieses Maschinentyps ist der, daß man sich beim Anschlagen der Zifferntasten nicht darum zu kümmern braucht, ob Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter, Tausender unter Tausender usw. kommen, Alle der Reihe nach in der Maschine eingestellten Zahlen stellen sich automatisch richtig untereinander. Auch Multiplikationen lassen sich mit dieser Rechenmaschinentype leicht ausführen. Es handelt sich hierbei um ein vielfaches Zusammenzählen von Zahlen. Soll z. B. multipliziert werden

$$324 \times 345,63,$$

dann lasse man den Vervielfältiger einmal 324 schreiben und drücke dabei die „//“-Taste nieder. Hierdurch wird verhütet, daß dieser Faktor ins Zahlenwerk gelangt und bei der Rechnung hinzugezählt wird. Darauf stelle man die Zahl 345,63, die vervielfältigt werden soll, ein und drücke sie durch Betätigung der Kurbel viermal für den Einer 4 nacheinander ab, wobei die Wiederholungstaste R durch die Verriegelung niedergehalten wird. Nun schlage man die 0-Taste an. Die eingestellte Zahl 345,63 wird dabei eine Stelle nach links gerückt. Jetzt sind für den Zehner zwei Kurbelzüge auszuführen. Darauf muß wieder die 0-Taste angeschlagen werden, um die Zahl 345,63 eine weitere Stelle nach links zu bringen. Für den Hunderter des Faktors 324 werden zum Schluß noch 3 Kurbelzüge ausgeführt. Bis dahin, d. h. also bis zum vorletzten Kurbelzug bleibt die R-Taste verriegelt. Das Ergebnis der Rechnung befindet sich im Zählwerk und wird zum Abdruck gebracht, indem man die Summentaste niederdrückt. Man erhält also auf dem Zahlenstreifen folgendes Zahlenbild:

$$\begin{array}{r}
 * \\
 3,24// \\
 345,63 \\
 345,63 \\
 345,63 \\
 345,63 \\
 3456,30 \\
 3456,30 \\
 34563,00 \\
 34563,00 \\
 34563,00 \\
 111984,12*
 \end{array}$$

Eine andre Rechenmaschine (Triumphator, Bild 204) ge-



Deckplatte D, mit dem Einstellhebel E, den Schaulöchern A und dem Nullsteller N für die Einstellhebel. Oben Kommaschieber C mit Leitschiene. Kurbel K in Grundstellung, Umschalthebel U, Ausschnitt P als Stellenanzeiger, Schlitten S mit dem Umdrehungszählwerk Z, dem rechten Schlittenwerk R (meist für das Resultat) und der Schlittenverschiebung T, Kommaschieber C mit Signalglöckchen G, Löschebel für beide Schlittenwerke F, die beiden Schalthebel B und Transportsicherungsschraube V.

Bild 204. Triumphator-Rechenmaschine.

stattet neben Addieren und Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren auch Potenzieren und Radizieren. Beim Radizieren (Wurzelziehen) geht man davon aus, daß sich die zu radizierende Zahl aus der Reihe der ungeraden Zahlen aufbauen läßt (siehe auch S. 229). Man schlägt also hier gerade den umgekehrten Weg ein, den wir bei der Differenzenmethode gegangen sind. Die zu suchende Wurzel ist gleich der aufeinanderfolgenden ungeraden mit 1 beginnenden Ziffern, die sich nacheinander vom Radikanden abziehen lassen.

Beispiel 1.  $\sqrt{16} = 4$

	im ganzen abgezogen	Anzahl der abgezogenen Zahlen = radizierte Zahl
16		
— 1	1	1
<u>15</u>		
— 3	4	2
<u>12</u>		
— 5	9	3
<u>7</u>		
— 7	16	4
<u>0</u>		

Die Ausrechnung mit der in Bild 204 wiedergegebenen Maschine erfolgt so, daß man zunächst die Zahl 16 in die Schaulöcher 11 und 10 des rechten Schlittenwerks bringt. Nach Stellung des Umschalthebels auf Div. stellt man das Umdrehungszählwerk und Einstellwerk auf Null. Der Ausschnitt P steht über Schauloch 6. Nun ist über der Einerzahl 6 oben im 5. Schauloch die Zahl 1 einzustellen. Nacheinander sind dann die Zahlen 1, 3, 5, 7 durch Minusdrehungen abzuführen. Im rechten Schlittenwerk erscheint die Zahl 0, im Umdrehungszählwerk eine 4, welche Zahl die ausgewurzelte Zahl darstellt.

Beispiel 2.  $\sqrt{74529} = 273$ .

Die Zahl wird eingestellt, als wenn durch sie dividiert werden sollte, d. h. die Maschine ist genau wie bei der Division einzustellen. Der Ausschnitt P liegt über dem 6. Schauloche. Nun denke man sich die Zahl

	7	4	5	2	9
in den Schaulöchern	11	10	9	8	7

von rechts nach links in Zweiergruppen geteilt, genau wie wir es beim Radizieren mittels Rechenschieber zu tun pflegen und beginnen aus der 1. Gruppe links (7) die Wurzel zu ziehen. Es wird also zunächst über der 7 (Schauloch 11) eine 1 (Einstellhebel 6) eingestellt und durch eine Minusdrehung abgezogen,

dann mit Hebel 6 eine 3 eingestellt und nochmals eine Minusdrehung ausgeführt. Da die nächste Ziffer der arithmetischen Reihe (= 5) von dem unter ihr verbleibenden Rest (= 3) nicht mehr abgezogen werden kann, wird der Schlitten um eine Stelle nach links verschoben.

Hierdurch machen wir aus der bisher errechneten Wurzelzahl 2 (im Umdrehungszählwerk) eine 20 und aus der oben eingestellten Zahl 3 eine 30. Da wir hier mit der arithmetischen Reihenfolge ungerader Zahlen rechnen, ist die dezimale Ergänzung unrichtig. Wir müssen daher, ehe wir die Drehungen fortsetzen, die der Wurzelzahl 20 entsprechende 20. Zahl der arithmetischen Reihe feststellen und die auf diese Zahl folgende ungerade Zahl oben einstellen. In der arithmetischen Reihenfolge ist

die 1. Zahl	1	
2. „	3	$(2 \times 2 - 1)$
3. „	5	$(2 \times 3 - 1)$
4. „	7	$(2 \times 4 - 1)$
5. „	9	$(2 \times 5 - 1)$
10. „	19	$(2 \times 10 - 1)$
20. „	39	$(2 \times 20 - 1)$ usw.

Da die 20. Zahl der arithmetischen Reihe 39 ist, müssen wir nun die nächst höhere ungerade Zahl, das ist 41, einstellen, und zwar in die Schaulöcher 6 und 5. Rein mechanisch bewerkstelligt man diese Neueinstellung durch die Befolgung der einfachen Regel, daß bei jedem Weiterrücken des Wagens die bisher eingestellte Zahl um 1 erhöht und rechts eine 1 angefügt bzw. mit dieser 1 eine neue arithmetische Reihe begonnen wird. Aus der bisherigen 3 ist also eine 4 geworden und rechts ist eine 1 neu eingestellt (41). Die Maschine zeigt jetzt das nachstehende Bild; die Ausschnitt P zeigt auf 6.

Umdrehungszählwerk:

Bisheriges Ergebnis	20	Einstellhebel Nr.	76
Schaulöcher	76	der jetzige Subtrahent	41
		der Minuend	3 45 29
		Schaulöcher	13 12 11 10 9

Wir ziehen nun nacheinander 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53 ab und rücken, da inzwischen der darunter stehende Rest kleiner geworden ist als 53 (16), den Wagen um eine weitere Stelle nach links. Genau wie bei der vorhergehenden Stelle ist die bisherige Zahl (53) im Einstellwerk um eine Einheit, d. h. auf 54, zu erhöhen, um mit dem nächsten Einstellhebel (5) eine neue arithmetische Reihe mit 1 zu beginnen. Die Maschine zeigt nun nachstehendes Bild, der Ausschnitt P zeigt auf 5.

Umdrehungszählwerk:

Bisheriges Ergebnis	270	Einstellhebel Nr.	7	6	5
Schaulöcher	765	der jetzige Subtrahend	5	4	1
		der Minuend	1	6	2
		Schaulöcher	12	11	10
			9		9

Wir ziehen nun durch Minusdrehungen 541, 543, 545 ab. Die Maschine zeigt jetzt im rechten Schlittenwerk ausschließlich Nullen (d. h. Rest = 0) und im Umdrehungszählwerk das Ergebnis 273.

Man sieht, die Auswurzelung großer Zahlen ist nach dieser Methode reichlich umständlich. Einfacher kommt man mit der Näherungsmethode zum Ziel. Man dividiert die auszuwurzelnde Zahl durch die (angenäherte) Resultatzahl und zwar solange bis der Divisor und die Resultatzahl übereinstimmen. Die ungefähre Resultatzahl stellt man durch Rechenschieber fest.

Beispiel 1.  $\sqrt{16} \quad 16 : 4 = 4$

Beispiel 2.  $\sqrt{74529}$

74529 : 270 = 276,03

74529 : 271 = 274,94

74529 : 272 = 273,97

74529 : 273 = 273,00

Die Division mit der Maschine beruht auf der Feststellung, wie oft man von dem Dividenten 74529 den Divisor 273 (bzw. 270, 271 usw.) abziehen kann.

Neuerdings wird ein Rechenschieber auf den Markt gebracht, der auf der Rückseite eine kleine Rechenmaschine zum Addieren und Subtrahieren trägt (Bild 205, Castell-Addiator). Die Rechenmaschine, ein sog. Addierwerk, besteht aus zwei Feldern, dem Feld für Addition und dem Subtraktionsfeld. In jedem Felde ist neben der Zahlenreihe in einem Schlitz eine verschiebbare Zahnstange angeordnet, die zum Einstellen der Summanden dient. Die Bedienung erfolgt einfach so, daß man mit einem Einstellstift in diejenige Zahnücke eingreift, die neben der Zahl steht, die man zu addieren oder subtrahieren wünscht. Dann zieht man je nachdem, ob das Feld, in das man den Einstellstift eingeführt hat, weiß oder farbig ist, die Zahnstange zur Mitte oder zum Rand des Einstellfeldes bis zum Anschlag. Die Resultate erscheinen, wenn sie positiv sind, im mittleren Resultatfenster, wenn sie negativ sind, im unteren Resultatfenster. In manchen Fällen ist es notwendig, eine besondere Verschiebung der Zahnstange durchzuführen. Darauf macht ein in den Resultatfenstern erscheinender roter Pfeil aufmerksam. Da die Ma-

schine bei fehlerhafter Handhabung selbsttätig sperrt, sind Fehlresultate so gut wie ausgeschlossen. Zur Nullstellung dient ein herausziehbarer Hebel.

Eine ganz andre Art von Maschinen, wie die beschriebenen Rechenmaschinen sind die mathematischen Maschinen. Bei der

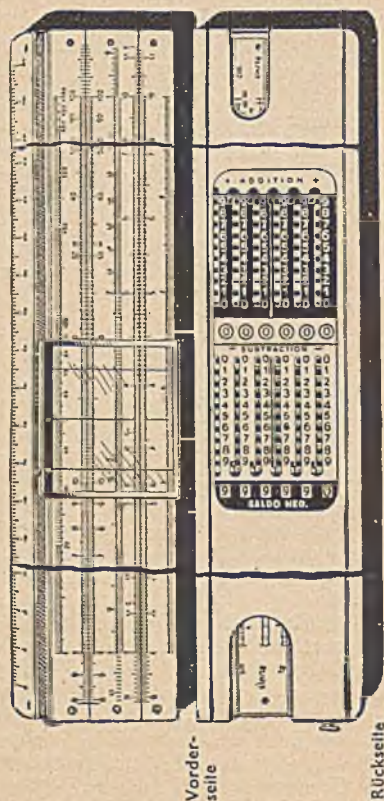


Bild 205. Castell-Addiator auf der Rückseite eines Rechenschiebers befestigt.

Ermittlung des Gesetzes aus experimentell gewonnenen Werten (Kap. XI S. 220 ff.) sahen wir, welch Aufwand dazu nötig ist, ein Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten fehlerlos zu lösen. Solche Gleichungssysteme wurden schon früher auf maschinellern Wege zu lösen versucht und zwar so, daß man

für ein Gleichungssystem eine entsprechende elektrische Schaltung mit Widerständen, Transformatoren usw. vorsieht. Bei Lösung eines Systems nur weniger Gleichungen ist dieser Weg erfolgreich; sollen jedoch Gleichungssysteme mit 5, 6 oder mehr Unbekannten gelöst werden, treten große Schwierigkeiten besonders meßtechnischer Art auf.

Eine Maschine, die auf rein mechanischem Wege solche Gleichungssysteme löst, wurde von John B. Wilbur konstruiert. Das Prinzip, nach welchem diese Maschine arbeitet, ist aus Bild 206 ersichtlich: Über nebeneinander befindliche in senkrechter Richtung verschiebbar angeordnete Rollen läuft ein Draht, der durch Umlenkrollen immer in senkrechter Lage gehalten wird. Die Rollen lassen sich längs drehbaren Hebeln ver-

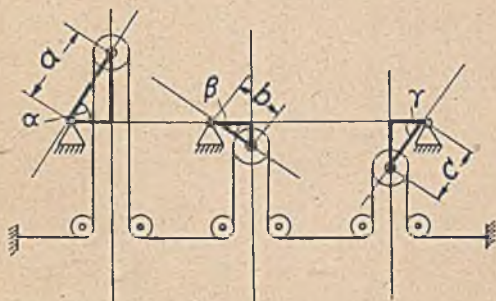


Bild 206. Prinzipbild der mathematischen Maschine nach Wilbur zur Lösung von Gleichungssystemen mit 5,6 oder mehr Unbekannten.

schieben und zwar sind diese Hebel als Metallplatten ausgebildet, in denen Schlitzte ausgespart sind. In diesen Schlitzten laufen die Rollenträger, die auf 0,01 mm genau eingestellt werden können. Die Entfernungen A, B und C der Rollenmittelpunkte von der Linie, die die Drehpunkte der Hebel miteinander verbindet, sind nun so einzustellen, daß die Summe der Entfernungen = 0 wird. Hierbei ist zu berücksichtigen, ob die Abstände oberhalb oder unterhalb der Verbindungslinie gelegen sind. Es gilt also die Beziehung:

$$A + B + C = 0.$$

Aus den im Bilde 206 eingezeichneten Dreiecken lassen sich die betreffenden Entfernungen als Produkte aus den Hebel-drehwinkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  und den Hebellängen  $a_1$ ,  $b_1$  und  $c_1$  schreiben, Man erhält also:

$$a_1 \sin \alpha + b_1 \sin \beta + c_1 \sin \gamma = 0.$$

Durch Ablesen der Drehwinkel- bzw. der Sinuswerte und durch Division der ganzen Gleichung durch  $\sin \gamma$  ist also die eine Gleichung des Systems festgelegt:

$$a_1 x + b_1 \varphi + c_1 = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$a_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + b_1 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + c_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = 0 \quad \text{wo also}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = x \quad \text{und} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = y.$$

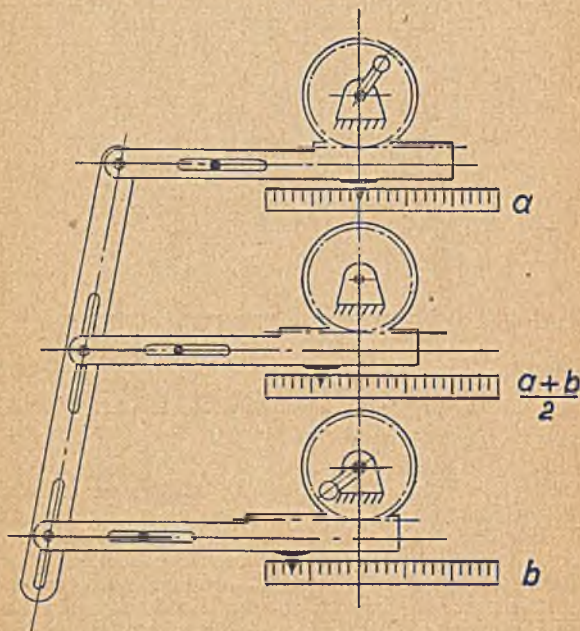


Bild 207. Rechengetriebe auf Dreileitertafel zurückgehend.

Hierbei können zwei von den drei Drehwinkeln willkürlich gewählt werden, der dritte stellt sich dann zwangsläufig ein. Die zweite Gleichung benötigt zu ihrer Darstellung ein zweites Rollen-Drahtsystem mit gleichen Hebeln. Jetzt läßt sich nur noch ein Hebel willkürlich drehen, die beiden andern werden



mitgenommen. Für jede weitere Gleichung muß ein weiterer Hebel- und Rollensatz vorgesehen werden.

Die Wilbursche Maschine löst bis zu neun Gleichungen mit neun Unbekannten und vierstelligen Koeffizienten  $a_1, b_1, c_1, \dots$  in ein bis drei Stunden, wobei der Fehler höchstens 1% der größten Unbekannten beträgt (siehe auch den Aufsatz: „Neuzeitliche mathematische Maschinen“ von A. Walther, Darmstadt; Elektrotechnische Zeitschrift, 61. Jahrgang Heft 2 vom 11. Jan. 1940).

Abschließend wollen wir noch einige Rechengetriebe behan-

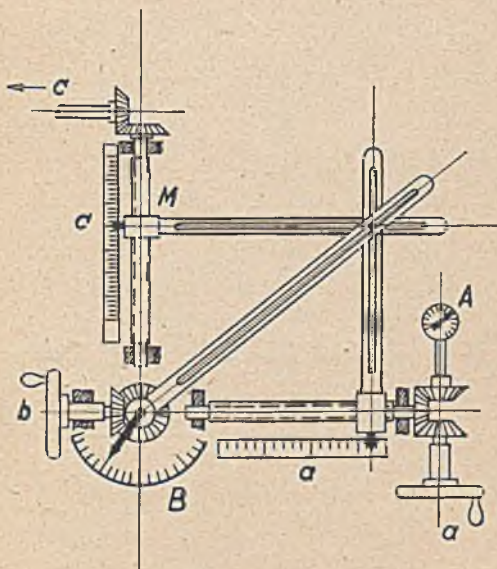


Bild 208. Rechengetriebe zurückgehend auf die in Bild 46 dargestellte Multiplikations-Linientafel.

deln, die durch ihre Verwendung in Feuerleitgeräten gerade heute einiges Interesse beanspruchen. Die Lösungsmethoden der Rechengetriebe sind im wesentlichen denen der graphischen Darstellung entlehnt und bilden insofern eine interessante Ergänzung der Methoden der graphischen Rechentechnik. Der grundlegende Unterschied zwischen mathematischen Maschinen und Rechengetrieben ist der, daß die Lösungswerte von den

Rechengetrieben sofort in Bewegungen umgewandelt und auf das Geschütz übertragen werden. Eine Umwandlung in entsprechende Bewegungen ist nicht Aufgabe der mathematischen Maschinen, die den Lösungswert nur ermitteln aber nicht irgendwie übertragen sollen.

Die Dreileitertafel kann, wie Bild 207 zeigt, auch als Grundlage für ein Rechengetriebe verwendet werden. Da durch Zahnräder, Zahnstangen usw. immer nur gleichförmige Bewegungen

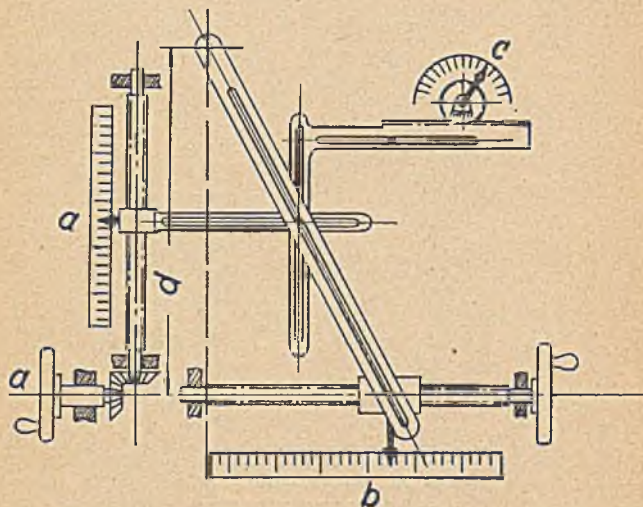


Bild 209. Multiplikations-Rechengetriebe löst Multiplikationsaufgaben durch Veränderung von Streckenwerten.

übertragen werden können, ist durch ein derartiges Rechengetriebe nur die Darstellung des algebraischen Mittels möglich. Die Werte  $a$  und  $b$  werden durch Verschiebung des Gestänges I und II erzielt, das mittlere Gestänge III zeigt dann zwangsläufig den halben Summenwert an.

Bild 208 zeigt ein Multiplikationsgetriebe, mit dem sich Multiplikationsaufgaben in derselben Weise lösen lassen wie mit der in Bild 46 bzw. Bild 47 angegebenen Multiplikationstafel. Durch Handrad wird der Wert  $a$  nach der Folgezeigeranordnung A eingestellt, so daß die waagerechte Führungsstange in die Höhe des Resultatwertes gelangt. Ein Zeiger, der an der Mutter

M befestigt ist, zeigt an der Skala den Wert  $c$  an, der dann über ein Kegelradgetriebe weitergeleitet werden kann.

Ein andres Multiplikationsgetriebe (Bild 209) arbeitet in der Weise, daß durch Drehung einer senkrecht und waagrecht angeordneten Spindel Streckenwerte verändert werden. Die geometrischen Beziehungen, die in dem abgebildeten Getriebe zur Produktbildung führen, sind recht einfach. Ein rechtwinkliges Dreieck (Bild 209 a) wird durch eine Parallele zur Grundlinie

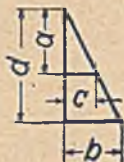


Bild 209 a. Prinzipbild zum Verständnis des in Bild 209 dargestellten Rechengetriebes.

in zwei ähnliche Dreiecke zerlegt. Es besteht dann die Verhältnisgleichung  $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$ . Wenn nun  $d (= 1)$  immer gleich bleibt,

dann wird aus der eben angegebenen Verhältnisgleichung die Produktgleichung  $c = a b$ . Verändert man also  $a$  und  $b$ , dann ändert man damit auch zwangsläufig  $c$ , so daß sich auf diese Weise Multiplikationsaufgaben lösen lassen. Durch Drehen an den Handrädern  $H_a$  und  $H_b$  stellt sich die im Punkt M drehbar gelagerte Schwinge so ein, daß der durch Zahnstange betätigte Zeiger auf einer Skala den Lösungswert anzeigt.

Eine dritte Art von Multiplikationsgetrieben verwirklicht die Multiplikationstafel des Bildes 48. Hier wird die Produktformel  $c = a b$  für verschiedene Lösungswerte  $c$  durch eine Schar gleichseitiger Hyperbeln dargestellt. Soll nach dieser Tafel also ein Multiplikationsgetriebe gebaut werden, dann werden die einzelnen Hyperbeln der Schar derart aneinandergereiht, daß ein sog. Kurvenkörper K (Bild 210) entsteht. Der auf dem Kurvenkörper gleitende Stößel bestimmt dann einen Lösungswert  $c$ , zu dem wieder je ein einstellbarer Wert für  $a$  und  $b$  gehören. Dreht man das Zahnrad  $Z_a$ , so daß die Zahnstange nach links oder rechts wandert, so wird der Stößel durch den festgesetzten Kurvenkörper axial verschoben. Wird das Zahnrad solange verdreht, bis der Zeiger ( $Z_a$ ) den Wert  $a$  anzeigt, dann zeigt zwangsläufig der Zeiger  $Z_b$  den Wert  $b$  an.

Ein im Prinzip sehr einfaches Rechengetriebe zeigt Bild 211. Durch dieses Getriebe werden Streckenwerte in die betreffenden

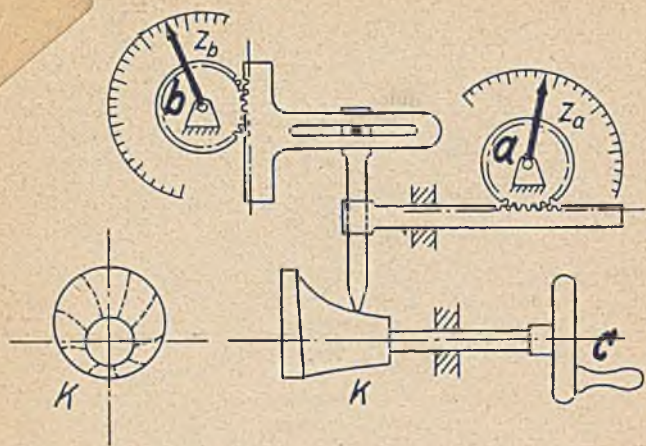


Bild 210. Rechengetriebe zurückgehend auf die in Bild 48 dargestellte Kurven-Multiplikationstafel.

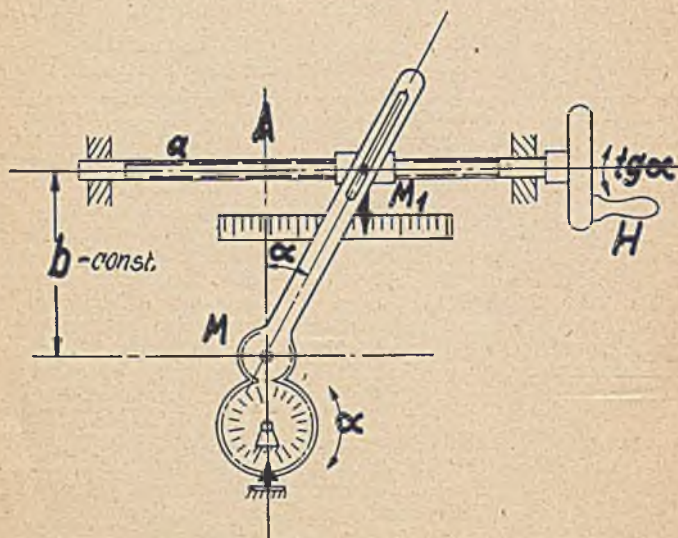


Bild 211. Rechengetriebe zur Ermittlung des  $\text{tg}$ -Funktion.

tg  $\alpha$ -Werte verwandelt und umgekehrt. Dreht man am Handrade H, so wird über eine Mutter eine Schwinge bewegt. Diese Schwinge ist durch einen in der Mutter befestigten Stift  $M_1$  geführt und in M drehbar gelagert. Durch Drehen am Handrad wird also der Wert a verändert. Da nun die Entfernung vom Drehpunkt M bis zur Spindelmitte ein unveränderlicher Wert b ist, so kann die Strecke a direkt zum Winkel  $\alpha$  in Beziehung gesetzt werden. In dem sich ergebenden Dreiecke  $A M_1 M$  ist

$tg \alpha = \frac{a}{b}$  Setzt man  $b = 1 = const$ , so ergibt sich wirklich

$$tg \alpha = a.$$

Dreht man solange am Handrad H, bis an der Marke der Winkel  $\alpha$  angezeigt wird, so ist die Verdrehung des Handrades in Beziehung zu setzen zum tg-Werte des Winkels  $\alpha$ .



## Schrifttumsnachweis

- Balogh, A. Beitrag zur Nomographie, 2. ergänzte Auflage 1938.
- Balogh, A. Die Dreieck- und Hexagonaltafel 1940.
- Bergmann, L. Nomographische Tafeln für den Gebrauch in der Radiotechnik (8. Band der Bibliothek des Radio-Amateurs, herausgegeben von Dr. Eugen Nesper) 1926, (85 Seiten).
- Bindel, E. Logarithmen für jedermann. Elementare Einführung mit Hinweisen auf höhere Gesetzmäßigkeit.
- Grosse, W. Graphische Papiere und ihre vielseitige Anwendung. Düren 1918 (179 Seiten).
- Hammer, E. Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch, 5. Auflage; Stuttgart 1918 (74 Seiten).
- Happach, V. Technisches Rechnen, 1933 (60 Seiten). Werkstattbücher, Heft 52.
- Konorski, B. M. Hilfsbuch für Betriebsberechnungen mit besonderer Berücksichtigung nomographischer Methoden 1930 (137 Seiten).
- Konorski, B. M. Die Grundlagen der Nomographie (72 Abbildungen. 86 Seiten).
- Krauß, F. Die Nomographie oder Fluchtlinienkunst, Berlin 1922 (56 Seiten).
- Laemann, O. Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln (100 Seiten).
- Lohse, O. Tafeln für numerisches Rechnen mit Maschinen. 2. Auflage, Neubearbeitung von P. V. Neugebauer 1935 (113 Seiten).
- Lötzbeyer, Ph. Der Rechenschieber und sein Gebrauch in Beruf, Schule und Leben (32 Seiten).
- Luckey, P. Nomographie; praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik. 3. verb. Auflage 1937 (107 Seiten.)
- Mayer, N. Nomographie des Bauingenieurs (111 Seiten). Sammlung Göschen.
- Mehmke, R. Leitfaden zum graphischen Rechnen. 2. vermehrte u. verbesserte Auflage 1934 (183 Seiten).

- Pirani, M. v. Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. 2. verb. Auflage besorgt von J. Runge 1931 (149 Seiten), Sammlung Göschen.
- Prölls, O. Graphisches Rechnen 1920 (104 Seiten).
- Rohrberg, A. Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes (49 Seiten), Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe 1, Heft 23.
- Runge, C. Graphische Methoden. 3. Auflage 1928. (130 Seiten). Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher Nr. 18.
- Sanden, H. v. Praktische Analysis, 2. Auflage, Leipzig und Berlin 1923 (213 Seiten).
- Schreiber, P. Grundzüge einer Flächennomographie, gegründet auf graphische Darstellungen in Funktionspapieren mit gleichmäßiger und logarithmischer Teilung, Heft 1 (85 Seiten); Heft 2 (113 Seiten).
- Schwerdt, M. Lehrbuch der Nomographie auf abbildungs-geometrischer Grundlage, 1924 (267 Seiten).
- Schwerdt, H. Einführung in die praktische Nomographie 1927 (122 Seiten).
- Wagener, E. Anwendung der Nomographie in der Wehrwissenschaft, 1936 (75 Seiten).
- Werner, F. Praktische Rechenbildkunde (Nomographic), 1926 (78 Seiten).
- Werkmeister, P. Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (194 Seiten).
- Willer, A. Mathematische Instrumente (144 Seiten). Sammlung Göschen.
- Winkel, A. Arbeitszeitermittlung und industrielles Rechnungswesen in graphischer Behandlung, Berlin 1933.
- Witting, A. Funktionen, Schaubilder und Funktionstabern. Eine elementare Einführung in die graphische Darstellung und die Interpolation (41 Seiten).
- Zühlke, M. Rechentafeln und Sonderrechenstäbe (A. W. F.). 212 Seiten.
- Technik der graphischen Darstellung. Herausgegeben von E. Weidmann, 1938 (60 Seiten).

Verzeichnis der von den einschlägigen Firmen herausgegebenen Gebrauchsanweisungen für Rechenschieber:

Albert Nestler A.-G., Lahr (Baden).

Kurze Gebrauchsanweisung für den einfachen, den Rietz- und den Darmstadt-Rechenschieber.

Kurze Gebrauchsanweisung für den Präzisionsschieber Nr. 27. Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch.

Kurze Gebrauchsanweisung für den Elektro-Rechenschieber  
Nr. 37.

Dennert u. Pape, Hamburg-Altona.

Anleitung zum Aristo-Rechenschieber System Rietz.

Neue Anleitung zum Elektro- und Exponential-Rechenschieber.

Anleitung zu den Schul- und Normalrechenschiebern Aristo.

Kron, A.-W.

Der Aristo-Rechenschieber System Darmstadt D und seine Anwendung 1940.

A. W. Faber, Nürnberg.

Anleitung zum Gebrauch der A. W. Faber „Castell“ Präzisions-Rechenstäbe.

Anleitung zum Präzisions-Rechenstab „Castell 1/54“ System Darmstadt.

J. W. Klawun, Berlin.

Der Rechenstab in Schule und Praxis.

Kurzlehrgang für den Taschen-Rechenstab Klawun.

6 Stunden Stabrechnen mit dem Rechenstab des Kaufmanns.



# Sachverzeichnis

	Seite		Seite
Absolutwerte .....	5	Darstellung im Millimeter-	
Allgemeine Leitertafel zur		netz .....	21
Lösung reduzierter ku-		Determinanten .....	233
bischer Gleichungen ..	180	Differenzenmethode ...	236
Allgem. Leitert. zur Lös.		Dreiecksnetzpapier .....	204
quadr. Gleichungen ..	174	Dreileitertafel (zur	
Anstrengung, Apparat zur		Addition) .....	98
Ermittlung der .....	306	Doppelleitertafel	
Aristo-Material .....	291	Erm. d. Schnittzeit	112
Arithmetisches Mittel,		Erm. d. Drahtstärke	
Darstellung des .....	97	einer Schrauben-	
Askania-Kreisrechen-		feder .....	114
schieber .....	311	Erm. d. Windungszahl	
Astra-Addiermaschine ..	312	e. Schraubenfeder ..	115
A.W.F.-Sonderrechen-		Erm. d. Hohlzylinder-	
schieber .....	293	Volumens .....	117
Bearbeitungszeit bei		Druckverlust in Gasfern-	
Hobelmaschinen .....	252	leitungen .....	95
Beschleunigung .....	227	Eichkurve eines Zungen-	
Bewegungsbilder .....	20	frequenzmessers .....	231
Bewegungsgesetze .....	21	Eichlinie eines zyl. Ge-	
Bezugszahlen teilen Gerade	60	fäßes .....	28
Bilanzdreieck der Ver-		Eichmethoden, Zusam-	
brennung .....	206	menfassung der .....	37
Castell-Addiator .....	317	Eichung von Gefäßen	27 ff.
cos-Linie .....	185	Eigenarten d. Darst. im	
cos-Satz .....	193	Millimeternetz .....	45
cos-Beziehung .....	200	Elemente d. graphischen	
DAF.-Kalender .....	240	Darstellung .....	1
Darmstadt-Rechen-		Fallzeit .....	19
schieber .....	295	Farbdreieck .....	209
Darstellungsmöglichkeit,		Fehler beim Rechen-	
geometrische .....	12	schieberrechnen .....	281

	Seite
Fehler beim Bohren einer Lochreihe .....	45
Fehlerdarstellung der Glieder einer geometr. Reihe .....	52
Fehler bei der Darstellung von Kegeloberflächenwerten .....	55
Flächen von Rechtecken, Bestimmung der ....	17
Flächenmessung .....	63
Flächenschieber .....	288
Fluchtlinienprinzip ....	104
Formelform .....	10
Funktion .....	21
Gauß'sches Fehlergesetz	89
Gedämpfte Schwingung	228
Geometrischer Rechenschieber (nach Altbürger) .....	304
Geometrisches Mittel, Darstellung des .....	101
Geschwindigkeitsschaubild(Diesel-Triebwagen)	215
Gewichtsrechenschieber	290
Gewichtsberechnung zyl. eiserner Körper .....	44
Gleichung der Parallelen zur x-Achse .....	27
Gleichung der geraden Linie .....	21
Grundstufungen im Normalzahlpapier .....	93
Halbkugel, Eichung einer	32
Halbzylinder, Eichung e.	34
harmonischer Analysator	216
harmonisches Mittel, Darstellung des .....	137
Hooksches Gesetz .....	131
Hubvolumen .....	107ff.
Interpolationsmethode ..	235
Isapaßsystem .....	85

	Seite
Kalkulations-Nomogramm f. Ringbuch-Rechenschieber .....	301
Kalkulus .....	302
Kegelwinkel .....	201
Kegel, Eichung eines ...	29
Kennziffer .....	3 u. 5
Kirchhoff'sche Regel ...	139
Kleinste Quadrate, Methode der .....	222
Kreuzfluchttafel 1. Art .	145
Kreuzfluchttafel 2. Art .	147
Kreisnetz-Papier .....	214
Kreisschieber mit Quadratteilung .....	287
Kurvenschar, Definition einer .....	5
Kurvenbahn .....	19
Kurvimeter, s. Meßrädchen	
Lambertsche Regel ....	62
Leistung, Leitertafel zur Ermittlung der ...	245
Leistung, Tafeln z. Leistungsermittlung 83 u.	151
Leitertafel, Konstruktion der .....	96
Leitertafel in $\Delta$ -Form ..	158
Lichtverteilungskurve ..	218
Linie, Gleichung der geraden .....	21
Linie, gerade .....	11
log. Teilung, Herstellung der .....	69
Mantelfläche eines Kegels	126
mathematische M-schine nach Wilbur .....	319
Meßrädchen .....	62
Millimeternetz, Darstellung im .....	73
Multiplikationstafel in N-Form .....	142
in $\Delta$ -Form .....	159
Multiplikations(Linien)-Tafel .....	64

	Seite		Seite
Multiplikationstafel, mechanisierte .....	64	Relativwerte, siehe Absolutwerte	
Multiplikations-(Kurven-)Tafel .....	65	Riemenlänge	
Multiplikationstafel (vollst. log. get. Netz)	83	für offene Riemen ....	262
N-förmige Nomogramme	140	f. gekreuzte Riemen ..	264
Naturgesetz, Beschreibung eines .....	19	Riemenquerschnitt und Riemengeschwindigkeit	250
Normalkreisurven des Spektrums .....	212	Ringbuch-Rechenschieber .....	298
Normungszahlen, Reihe der .....	91	Ruhepunkt s. Nullpunkt	
Nullpunkt .....	12	Sägediagramm .....	76
Oberfläche zyl. Körper ..	129	Schaubild d. mittleren Jahrestemperaturen ..	4
Oszillogramm e. sin-förmigen Meßspannung ..	216	Schlüsselkurven, räumliche .....	59
Parabel, quadratische ...	26	Schneckenrad, Schnecke	267/268
Parabel, kubische ... 11 u. 12		Schwingung, gedämpfte	228
Planimeter .....	63	Sinnbild .....	2
Qualitätszahlen .....	85	sin-Linie .....	184
Querschnitt, Methode des quadratisch geteilte Leitern .....	100	sin-Satz .....	191/192
Quadratische Gleichungen durch Näherungsmethode gelöst .....	163	Spannungselipse .....	307
Quadratische Gleichungen dargestellt durch Kreisleiter .....	166	Spanquerschnitt .....	240
Reihe der natürlichen Zahlen .....	47	Spez. Schnittdruck ....	241
Rechenschieber mit 4 Skalen .....	279	Stellenzahlermittlung beim Rechenschieberrechnen .....	271
zur Erm. d. Schnittzeit	280	Steigungswinkel der geraden Linie .....	23
System Cuntz .....	296	Streckenmessung .....	61
System Klawun .....	296	Stromstärke .....	127
Rechengetriebe .....	320 ff.	Summenformel d. algebr. Reihe .....	47
		Tabellenschieber für Antriebsleistung .....	280
		Stahl-Profile .....	294
		Teilung, quadratische ..	15
		tg-(cotg-)Linie .....	186
		Trägheitsmomente 254 u.	259
		Triumphator-Rechenmaschine .....	314
		Umrechnungsformel für Zähigkeit .....	89

	Seite		Seite
Variable, echte . . . . .	10	Winkelfunktionen, Gerät	
Volumen von Ellipsoiden	176	zum Bestimmen der ..	305
		Wurzelziehen mit Rechen-	
Wärmestrahlung . . . . .	220	maschine . . . . .	315
Wechselräder, Rechen-		Wurzelteilung . . . . .	18
schieber für . . . . .	284	Zahlenquadrat . . . . .	17
Weiskreuz als Leiter-		Zinseszinsformel . . . . .	86
tafel . . . . .	155	Zungenfrequenzmesser,	
Weiskreuz als Leitertafel	156	Eichkurve eines . . . . .	231



BG Politechniki Śląskiej

nr inw.: 102 - 141189



Dyr.1 141189