

Sammlung Göschen

---

Theoretische Physik

II

von

Prof. Dr. Gustav Jäger

Mit 47 Figuren

## Verzeichnis der erschienenen Bände.

- Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre** von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.
- Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik.** Von Dr. Gust Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
- **Musikalische**, v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.
- Algebra. Arithmetik u. Algebra** v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- Alpen, Die**, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität und an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.
- Altertümer, Die deutschen**, v. Dr. Franz Fuhs, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.
- Altertumskunde, Griechische**, von Prof. Dr. Rich. Maiß, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.
- **Römische**, von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.
- Analyse, Techn.-Chem.**, von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.
- Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung.** Von Dr. Frdr. Junfer, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- — **Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung** v. Dr. Friedr. Junfer, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- — **II: Integralrechnung.** Von Dr. Friedr. Junfer, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.
- — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junfer, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.
- Analysis, Niedere**, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.
- Arbeiterfrage, Die gewerbliche**, von Werner Sombart, Professor an der Universität Breslau. Nr. 209.
- Arbeiterversicherung, Die**, von Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
- Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- — **Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra** v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.
- Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper** von A. S. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. S. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.
- Atrophik.** Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter S. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.
- Aufgabensammlg. 1. Analyt. Geometrie d. Ebene** v. O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.
- **Physikalische**, v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.
- Aufsatzentwürfe** von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.
- Baukunst, Die, des Abendlandes** von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.
- Betriebskraft, Die zweckmäßigste**, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Betriebskraft, Die zweckmäßigste,** von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.
- Bewegungsspiele** von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.
- Biologie der Pflanzen** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
- Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur** v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.
- II: Beziehungen der Tiere zur organ. Natur v. Dr. Heinr. Simroth. Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
- Gleidererei, Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Buchführung, Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung** von Rob. Stern, Oberlehrer der Off. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule 3. Leipzig. Mit vielen Formulare. Nr. 115.
- Buddha** von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.
- Burgenkunde, Abriss der,** von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.
- Chemie, Allgemeine und physikalische,** von Dr. Max Rudolphi, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- **Analitische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
- II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
- **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- — siehe auch: Metalle. — Metalloide.
- Chemie, Geschichte der,** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
- **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.
- — III: Karbocyclische Verbindungen. Nr. 193.
- — IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
- II: Dissimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 241.
- Chemisch-Technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.
- Dampfessel, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.
- Dampfmaschine, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.
- Dampfturbinen, Die,** ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbildungen. Nr. 274.
- Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl m. Einltg u. Wörterb. herausgegeben v. Dr. Herm. Janßen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg t. Pr. Nr. 137.
- Dietschepjen.** Kudrun u. Dietschepjen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

# Sammlung Götschen Jeden elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagsbuchhandlung, Leipzig.

- Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsruhgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- **Repetitorium u. Aufgabensammlung** 3. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Professor am Karlsruhgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- Edellieder** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
- Eisenhüttenkunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.
- II. Teil: Das Schmelzeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.
- Elektrizität**. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univerf. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.
- Elektrochemie** von Dr. Heinr. Danneel, Privatdozent in Breslau. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.
- Elektrotechnik**. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.
- II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.
- III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.
- Epigonen, Die, des höchsten Epos**. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Jank, Aktuar der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
- Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht** von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preussischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Tafeln. Nr. 175.
- Ethik** von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.
- Exkursionsflora von Deutschland** zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. I. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 268.
- 2. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 269.
- Färberei**. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei u. ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Krefeld. M. 28 Fig. Nr. 186.
- Fernsprechwesen, Das**, von Dr. Ludwig Reilstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.
- Festigkeitslehre** von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit zahlreichen Figuren. Nr. 288.
- Filzfabrikation**. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Finanzwissenschaft** v. Präsident Dr. R. van der Borghst in Berlin. Nr. 148.
- Fischerei und Fischzucht** v. Dr. Karl Edstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
- Formelsammlung, Mathemat.**, u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.
- **Physikalische**, von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Fortsetzung auf der 4. Vorseite.

Sammlung Göschen

---

*Schubert*

# Theoretische Physik

---

II

## Licht und Wärme

von

**Dr. Gustav Jäger**

Professor der Physik an der Universität Wien

---

Mit 47 Figuren

Dritte, verbesserte Auflage

---

**Leipzig**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1905

---

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

---



141 164

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

D 319/14

# Inhaltsverzeichnis.

Seite

## Die Lehre vom Licht.

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.  | Geradlinige Fortpflanzung — Beleuchtung — Photometrie . . . . .                                   | 5  |
| 2.  | Reflexionsgesetze ebener Spiegel . . . . .  | 7  |
| 3.  | Kugelspiegel — Gegenstands- und Bildweite — Brennpunkt . . . . .                                  | 8  |
| 4.  | Bilder von Kugelspiegeln mit kleiner Öffnung . . . . .  | 11 |
| 5.  | Brechungsgesetz — Brechungsexponent — geometrische Optik —<br>Katoptrik — Dioptrik . . . . .      | 13 |
| 6.  | Der Regenbogen . . . . .  | 14 |
| 7.  | Abbildung eines Punktes durch eine brechende Kugelfläche —<br>Brennpunkte — Brennweiten . . . . . | 19 |
| 8.  | Bildgröße . . . . .   | 21 |
| 9.  | System zweier brechender zentrierter Kugelflächen — Linsen . . . . .                              | 22 |
| 10. | Hauptebenen — Hauptpunkte . . . . .   | 26 |
| 11. | Bikonvexe Linse . . . . .   | 29 |
| 12. | Huygensches Prinzip . . . . .   | 31 |
| 13. | Fermats Satz . . . . .  | 33 |
| 14. | Interferenz . . . . .   | 35 |
| 15. | Fresnels Spiegelversuch . . . . .   | 36 |
| 16. | Farben dünner Blättchen . . . . .   | 39 |
| 17. | Newtons Farbenglas . . . . .  | 46 |
| 18. | Wirkung dünner Blättchen bei schief auffallendem Licht —<br>Talbots Linien . . . . .              | 47 |
| 19. | Beugung des Lichts . . . . .  | 49 |
| 20. | Beugung durch eine Spalte . . . . .   | 52 |
| 21. | Beugung durch zwei Spalten — Interferenzversuche von Young<br>und Arago . . . . .                 | 55 |
| 22. | Fraunhofers Gitter . . . . .  | 57 |
| 23. | Polarisation des Lichts bei der Reflexion — Gleichungen von<br>Fresnel . . . . .                  | 60 |
| 24. | Doppelbrechung . . . . .  | 69 |
| 25. | Elliptische und zirkuläre Polarisation . . . . .  | 72 |
| 26. | Polarisationsapparat — Turmalinzange — senkrecht einfallen-<br>des Licht . . . . .                | 74 |
| 27. | Schief einfallendes Licht . . . . .   | 77 |
| 28. | Totale Reflexion . . . . .  | 80 |
| 29. | Elliptische Polarisation durch totale Reflexion . . . . .   | 82 |

## Die Lehre von der Wärme.

## Wärmeleitung.

|                  |  |     |
|------------------|--|-----|
| <del>§ 30.</del> | Wärmemenge — Temperatur — spezifische Wärme — Wärmekapazität . . . . .   | 85  |
| <del>§ 31.</del> | Gleichung der Wärmeleitung in einem Stab . . . . .   | 87  |
| <del>§ 32.</del> | Stationärer Zustand . . . . .  | 92  |
| <del>§ 33.</del> | Wärmeleitung in einem Ring . . . . .   | 93  |
| <del>§ 34.</del> | Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung unter der Erdoberfläche . . . . .                                  | 96  |
| <del>§ 35.</del> | Gleichung der Wärmeleitung in einem isotropen Körper — Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeitsströmung . . . . . | 99  |
| <del>§ 36.</del> | Gleichung der Wärmeleitung in einer Kugel . . . . .  | 100 |
| <del>§ 37.</del> | Das Temperaturgefälle in der Erdrinde . . . . .  | 100 |
| <del>§ 38.</del> | Abkühlung der Erde . . . . .   | 105 |

## Mechanische Wärmetheorie.

|                  |  |     |
|------------------|--|-----|
| <del>§ 39.</del> | Zustand eines Körpers — Zustandsgleichung idealer Gase — absolute Temperatur . . . . .   | 107 |
| <del>§ 40.</del> | Umwandelbarkeit der Wärme in Arbeit und der Arbeit in Wärme — mechanisches Wärmeäquivalent — äußere und innere Arbeit — erster Hauptsatz . . . . . | 108 |
| <del>§ 41.</del> | Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck . . . . .   | 109 |
| <del>§ 42.</del> | Adiabatische Zustandsänderungen . . . . .  | 111 |
| <del>§ 43.</del> | Kreisprozeß . . . . .  | 113 |
| <del>§ 44.</del> | Entropie — zweiter Hauptsatz . . . . .   | 116 |
| <del>§ 45.</del> | Unabhängigkeit des zweiten Hauptsatzes von der Natur der Körper — thermisches Perpetuum mobile . . . . .   | 118 |
| <del>§ 46.</del> | Anwendung der beiden Hauptsätze . . . . .  | 119 |
| <del>§ 47.</del> | Verdampfungswärme — Schmelzwärme — gesättigter Dampf — Schmelzpunkt . . . . .  | 122 |
| <del>§ 48.</del> | Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Körpers . . . . .  | 125 |
| <del>§ 49.</del> | Temperaturänderung durch Dehnung . . . . .   | 126 |

## Die kinetische Theorie der Gase.

|                  |   |     |
|------------------|---|-----|
| <del>§ 50.</del> | Die Wärmebewegung in Gasen . . . . .  | 128 |
| <del>§ 51.</del> | Boyle-Charlessches Gesetz . . . . .   | 129 |
| <del>§ 52.</del> | Regel von Avogadro — Gesetze von Gay-Lussac und Dalton — Geschwindigkeit der Molekeln . . . . . | 132 |
| <del>§ 53.</del> | Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz — Zustandsgleichung von van der Waals . . . . .      | 133 |
| <del>§ 54.</del> | Kritische Temperatur — kritischer Druck — kritisches Volumen . . . . .                          | 137 |
| <del>§ 55.</del> | Spannungs- und Ausdehnungskoeffizient . . . . .   | 140 |
| <del>§ 56.</del> | Spezifische Wärme . . . . .   | 142 |
| <del>§ 57.</del> | Stoßzahl und mittlere Weglänge der Molekeln . . . . .   | 144 |
| <del>§ 58.</del> | Innere Reibung . . . . .  | 146 |
| <del>§ 59.</del> | Wärmeleitung . . . . .  | 150 |
| <del>§ 60.</del> | Größe der Molekeln . . . . .  | 151 |

1.) Verlauf des Lichtes  
2.) Erzeugung 3.) Ausbreitung / Fortpflanzung

## Die Lehre vom Licht.

### § 1. Geradlinige Fortpflanzung des Lichts — Beleuchtung — Photometrie.

In der Lehre vom Licht, der Optik, behandeln wir die außerhalb unseres Auges liegenden Ursachen der Lichterscheinungen. Es ist hier ähnlich wie bei den Schallerscheinungen (Bd. I). Wie wir dort als die Ursache des Schalls einen schwingenden Körper annahmen, der seine Bewegungen auf die Luft überträgt, die sie dann an unser Ohr abgibt, so müssen wir hier die Ursache des Lichts ebenfalls in Bewegungszuständen der kleinsten Teilchen eines Körpers suchen. Damit diese Bewegung fortgepflanzt werden kann, ist es aber nötig, die Voraussetzung zu machen, daß der ganze Raum mit einem sehr feinen Stoff, dem sogenannten Lichtäther, angefüllt ist, den wir als Träger des Lichts ansehen. Auf diese Weise gelangt das Licht in unser Auge und bewirkt die Gesichtsempfindungen.

Aus dieser Auffassungsweise ergibt sich sofort, daß sich das Licht ebenso wie der Schall, wenn das Fortpflanzungsmedium überall gleichartig beschaffen ist, wegen der allseitigen Symmetrie nur geradlinig fortpflanzen kann, wie es ja auch die Erfahrung bestätigt.

Die Lichtmenge, welche die Flächeneinheit eines Körpers von einem leuchtenden Körper erfährt, können

wir die Beleuchtungsstärke nennen. Ist die Lichtquelle punktförmig, so wird jede Kugel­fläche, welche wir um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt schlagen, gleichviel Licht empfangen. Daraus geht ohne weiteres hervor, daß die Beleuchtungsstärke verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des beleuchteten Körpers von der Lichtquelle sein muß.

Aber es ist auch nicht gleichgültig, ob das Licht senkrecht oder schief die Oberfläche des beleuchteten Körpers trifft. Nennen wir den Winkel der Flächen­normale mit dem auffallenden Lichtstrahl  $\alpha$ , so ist leicht ersichtlich, daß die Beleuchtungsstärke dem  $\cos \alpha$  proportional ist, da sich ja das Licht auf einen um so kleineren Raum zusammendrängt, je kleiner der Winkel  $\alpha$  ist. Wir können demnach für die Beleuchtungsstärke  $B$  einer ebenen Fläche die Formel

$$B = \frac{C \cos \alpha}{r^2}$$

aufstellen, wenn  $r$  die Entfernung der Lichtquelle von der beleuchteten Fläche ist.

Die Größe  $C$  hängt nur von der Natur der Licht­quelle ab. Hiefür lehrt nun die Erfahrung, daß auch die Menge des ausgesandten Lichts dem Kosinus des Winkels  $\beta$  proportional ist, welchen der ausgesandte Strahl mit der Normalen jenes Flächenstücks einschließt, von wo er seinen Ausgang nimmt. Die Beleuchtungs­stärke wird sich daher durch folgende Gleichung dar­stellen lassen:

$$B = \frac{L \cos \alpha \cos \beta}{r^2},$$

wobei wir  $L$  die Lichtstärke der Flächeneinheit des leuchtenden Körpers nennen können.

Durch die Wahl der Entfernung der Lichtquelle und der Neigung des auffallenden Lichts ist es leicht, eine Beleuchtung von bestimmter Stärke herzustellen. Es beruht darauf die Vergleichung der Intensitäten verschiedener Lichtquellen, die Photometrie.

## § 2. Reflexionsgesetze ebener Spiegel.

Einen sehr dünnen Lichtkegel nennt man ein Strahlenbündel. Denken wir uns den Lichtkegel unendlich dünn, so haben wir einen Lichtstrahl. Es ist vorteilhaft, diese Begriffe zur bequemen Darstellung des Gangs des Lichts einzuführen.

Trifft ein Lichtstrahl auf eine glatte Fläche, so wird er nach bestimmten Gesetzen, den Reflexionsgesetzen, zurückgeworfen. Es sei  $AB$  (Fig. 1) eine Ebene.

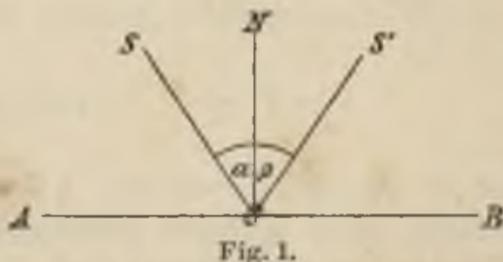


Fig. 1.

Im Punkt  $O$  treffe ein Lichtstrahl  $SO$  auf. Wir nennen ihn den einfallenden Strahl,  $O$  den Einfallspunkt. Im Einfallspunkt errichten wir die Normale  $ON$  zur Ebene  $AB$ . Sie heißt das Einfallslot. Der Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot sei  $\alpha$ , es ist der Einfallswinkel. Der Reflexionswinkel  $\beta$  ist der Winkel zwischen dem Einfallslot und dem reflektierten Strahl  $OS'$ .

Es gelten nun für die Reflexion folgende Gesetze:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

2. Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel,  $\alpha = \beta$ .

Treffen demnach von einem leuchtenden Punkt  $S$  (Fig. 2) Strahlen auf eine glatte ebene Fläche  $AB$ , so werden sie so zurückgeworfen, daß sie nach rückwärts verlängert sich alle im Punkt  $S'$  vereinigen würden. Für ein beobachtendes Auge scheinen demnach die reflektierten Strahlen aus dem Punkt  $S'$  zu kommen, es

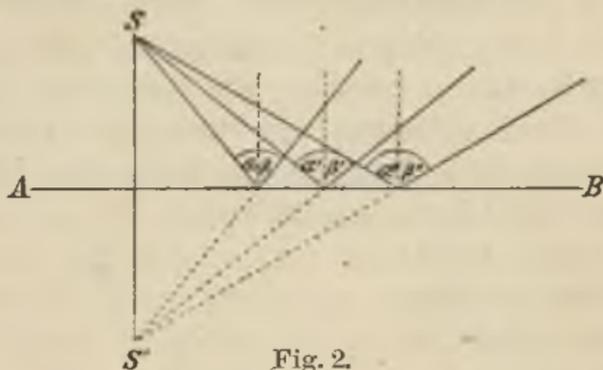


Fig. 2.

ist  $S'$  ein Bild von  $S$ .  $AB$  ist also eine spiegelnde Fläche, ein ebener Spiegel. Ein solcher entwirft Bilder, welche dieselbe Größe wie der Gegenstand haben und zu ihm symmetrisch liegen. Die Spiegelfläche bildet dabei die Symmetrieebene.

### § 3. Kugelspiegel — Gegenstands- und Bildweite — Brennpunkt.

Der leuchtende Punkt  $S$  (Fig. 3) sende Strahlen auf eine polierte Kugelfläche  $KK'$ . Den Strahl  $SA$ , welcher durch den Mittelpunkt  $O$  der Kugel geht, nennen wir den Hauptstrahl. Jedes Lot auf die Spiegelfläche geht durch  $O$ . Es ist daher  $OM$  das Einfallslot für den Strahl  $SM$ . Der reflektierte Strahl  $MB$  schneidet den Hauptstrahl in  $B$ . Dort muß ein Bild des Punktes  $S$  entstehen, da alle Strahlen, welche in einem Kreis um

A herum auftreffen, sich im Punkt B vereinigen. In B ist demnach wiederum die Ausgangsstelle von unendlich vielen Strahlen.

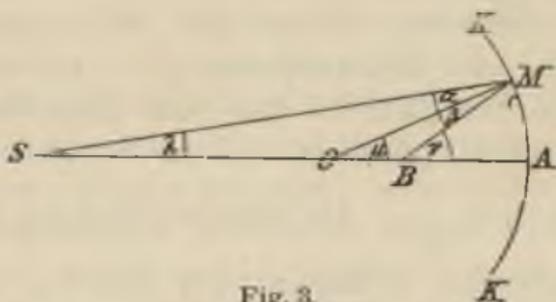


Fig. 3.

Wir wollen den Einfallswinkel mit den gewohnten Buchstaben  $\alpha$  bezgl.  $\beta$  bezeichnen. Ferner seien die Winkel

$$ASM = \lambda, \quad AOM = \mu, \quad ABM = \nu$$

und die Strecken

$$AS = a, \quad AB = b, \quad AO = OM = r.$$

$a$  nennen wir die Gegenstandsweite,  $b$  die Bildweite.  $r$  ist der Radius der Kugel. Es gelten nun folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu - \lambda, \\ \beta &= \nu - \mu, \\ \alpha &= \beta = \mu - \lambda = \nu - \mu, \end{aligned}$$

daher

$$(1) \quad \lambda + \nu = 2\mu.$$

Wir setzen voraus, daß  $M$  nahe bei  $A$  liege, daß also die Winkel  $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu$  klein seien. Wir haben dann

$$AM = a\lambda = r\mu = b\nu$$

und nach Gleichung (1)

$$\frac{AM}{a} + \frac{AM}{b} = \frac{2AM}{r},$$

oder

$$(2) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}.$$

Diese Gleichung drückt die Beziehung zwischen Gegenstands- und Bildweite aus.

Kommen die Strahlen aus dem Unendlichen, d. h. fallen auf unsern Spiegel parallele Strahlen, so wird für  $a = \infty$   $b = \frac{r}{2}$ . Als parallele Strahlen können wir die Sonnenstrahlen auffassen. Da dieselben gleichzeitig wärmen, so wird im Punkt

$$p = \frac{r}{2}$$

eine hohe Temperatur erzeugt, weshalb dieser Punkt auch der Brennpunkt genannt wird, während  $p$  die Brennweite heißt. Mit Benutzung dieser Größe können wir Gleichung (2) auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}$$

schreiben. Liegt der leuchtende Punkt im Mittelpunkt der Kugelfläche, so wird  $a = r$ , mithin auch  $b = r$ . Gegenstand und Bild fallen zusammen. Für  $a < r$  ist  $b > r$ , und es wird  $b = \infty$  für  $a = p$ . Befindet sich also eine Lichtquelle im Brennpunkt, so sendet der Spiegel parallele Strahlen aus. Eine solche Anordnung eignet sich dazu, das Licht auf weite Strecken hinauszusenden, ohne daß es sich erheblich zerstreut, wie es bei den großen elektrischen Scheinwerfern geschieht.

Wird  $a$  noch kleiner als  $\frac{r}{2}$ , so muß  $b$  negativ werden, das heißt: es liegt der Bildpunkt hinter dem Spiegel. Die Strahlen vereinigen sich nicht

wirklich, sondern nur scheinbar. Wir haben kein reelles Bild mehr, sondern ein imaginäres, virtuelles, ähnlich wie wir es bereits beim ebenen Spiegel kennen gelernt haben. Wir können übrigens ohne weiteres vom Kugelspiegel zum ebenen übergehen, wenn wir  $r = \infty$  setzen. Es wird dann  $b$  negativ und ebenso groß wie  $a$ , in Übereinstimmung mit dem Resultat des § 2.

Liegt der Kugelmittelpunkt wie bisher auf der Seite des Gegenstands, so nennen wir den Spiegel einen Hohlspiegel, einen konkaven Spiegel, im entgegengesetzten Fall hingegen einen erhabenen oder Konvexspiegel. Dafür haben wir  $r$  also negativ zu wählen. Es ist daher auch die Bildweite negativ, das Bild liegt hinter dem Spiegel, d. h. es ist nur scheinbar vorhanden, ein virtuelles Bild. Die größte Bildweite ist  $b = \frac{r}{2}$  für  $a = \infty$ . Sie ist also gleich der Brennweite eines Hohlspiegels vom selben Krümmungsradius.

#### § 4. Bilder von Kugelspiegeln mit kleiner Öffnung.

Wir denken uns eine leuchtende Linie  $ST$  (Fig. 4). Der Punkt  $S$  hat sein Bild in  $B$ , der Punkt  $T$  in  $B'$ .

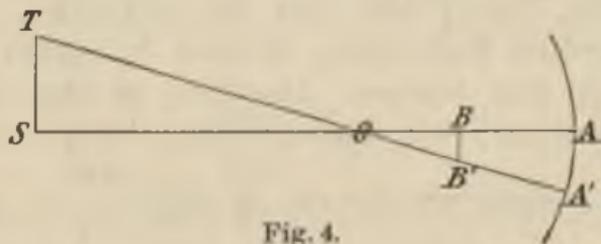


Fig. 4.

Wir erhalten ein verkehrtes Bild  $BB'$  des Gegenstands  $ST$ . Das Verhältnis der Bildgröße  $BB'$  zur Gegenstandsgröße  $ST$  können wir nun leicht finden, da ja

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{OB}{OS} = \frac{r - b}{a - r}$$

ist. Nach Gleichung (2) haben wir

$$b = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}} = \frac{ar}{2a - r}$$

folglich

$$\frac{BB'}{ST} = \frac{r - \frac{ar}{2a - r}}{a - r} = \frac{r}{2a - r}$$

Das Bild wird also je nach der Wahl der Gegenstandsweite sehr verschieden ausfallen.

Für einen unendlich weiten Gegenstand ist es unendlich klein. Es wächst mit der Annäherung des Gegenstands. Wird  $a = r$ , so ist Bild und Gegenstand gleich groß. Für  $a < r$  ist das Bild größer als der Gegenstand. Es wird unendlich groß und rückt in unendliche Entfernung, d. h. es verschwindet für  $a = \frac{r}{2}$ . Wird  $a < \frac{r}{2}$ , so wird  $\frac{BB'}{ST}$  negativ, das Bild

kehrt sich um. Während wir also früher ein verkehrtes Bild hatten, haben wir jetzt ein aufrechtes. Aber es ist kein reelles Bild mehr, da auch  $b$  negativ wird, es liegt hinter dem Spiegel. Das Bild ist aber größer als der Gegenstand, wir haben einen Vergrößerungsspiegel. Setzen wir  $r = \infty$ , so wird  $\frac{BB'}{ST} = -1$ , wir haben wieder den Fall des ebenen Spiegels, für welchen Gegenstand und Bild gleich groß ist.

Wird  $r$  negativ, so liefert unsere Formel die Bildgröße in einem erhabenen Spiegel. Das Bild steht

aufrecht und ist immer kleiner als der Gegenstand.

### § 5. Brechungsgesetz — Brechungsexponent — geometrische Optik — Katoptrik — Dioptrik.

Fällt ein Lichtstrahl auf einen durchsichtigen Körper von glatter Oberfläche, so dringt er in den Körper ein, wird aber dabei im allgemeinen von seinem Wege abgelenkt, er wird gebrochen. Nennen wir analog dem Vorgang bei Spiegeln  $SO$  (Fig. 5) den einfallenden Strahl, welcher im Einfallspunkt  $O$  die Oberfläche  $AB$  des durchsichtigen

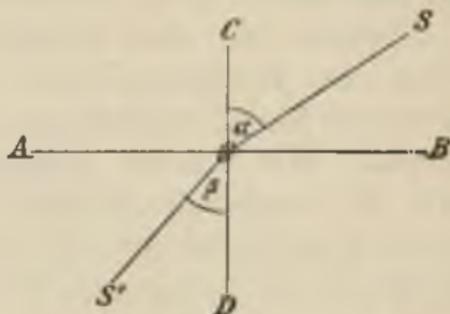


Fig. 5.

Körpers trifft,  $OS'$  den gebrochenen Strahl,  $\alpha$  den Einfallswinkel,  $\beta$  den Brechungswinkel, während  $CD$  das Einfallslot ist, so gelten folgende Gesetze:

1. Einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl liegen in einer Ebene.

2. Das Verhältnis der Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels ist eine konstante Größe, also

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Die Konstante  $n$  nennen wir den Brechungsquotienten oder Brechungsexponenten.

3. Nimmt das Licht seinen Ausgang auf der entgegengesetzten Seite und in entgegengesetzter Richtung, so macht es genau den-

selben Weg. Das heißt: wird der Strahl  $SO$  nach  $S'$  gebrochen, so wird ein Strahl  $S'O$  nach  $S$  abgelenkt.

Die Lehre vom Strahlengang bei Vorhandensein reflektierender und brechender Flächen nennt man die geometrische Optik. Diese teilt man wieder in die Katoptrik und Dioptrik ein, je nachdem man es nur mit reflektierenden oder nur mit brechenden Flächen zu tun hat.

Setzen wir den Brechungsexponenten gleich Eins, den Brechungswinkel jedoch gleich dem Supplement des Einfallswinkels, so erhalten wir das Reflexionsgesetz. Wir werden demnach alle Resultate, welche wir für brechende Flächen erhalten, nach obigen Annahmen auf reflektierende Flächen beziehen können. Es gelten so die Gesetze der Dioptrik auch in der Katoptrik.

### § 6. Der Regenbogen.

Bekanntlich hängt der Wert des Brechungsexponenten nicht nur von der Natur der brechenden Substanz, sondern auch von der Art des Lichts ab. Er ist für verschiedene Farben verschieden. In der Regel nehmen die Brechungsexponenten mit der Farbe in folgender Reihenfolge zu: rot, orange, gelb, grün, blau, violett. Es wird daher jeder

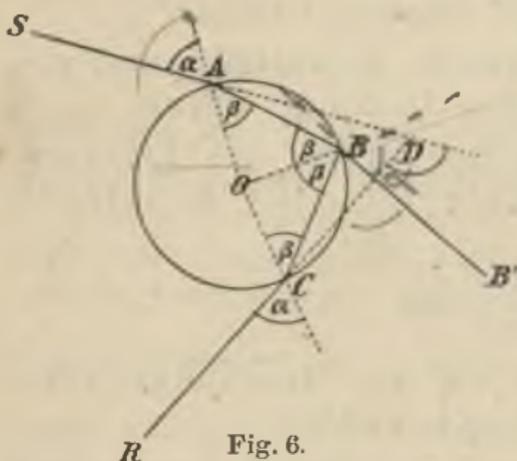


Fig. 6.

Lichtstrahl, der durch Brechung eine Ablenkung erleidet, gleichzeitig in seine Farben zerlegt. Eine

teilweise hierher gehörige Erscheinung ist der Regenbogen, welchen wir im folgenden näher untersuchen wollen.

Der Kreis (Fig. 6) stelle einen Regentropfen dar. Ein Sonnenstrahl SA treffe in A unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  den Tropfen. Er wird nach B gebrochen, wo er teilweise nach C reflektiert, teilweise nach B' gebrochen wird. In C erleidet er wieder eine teilweise Brechung nach R und Reflexion usw. Der Strahl BB' erfährt die Ablenkung

$$D_1 = 2\alpha - 2\beta,$$

der Strahl CR die Ablenkung

$$D_2 = 2\alpha - 2\beta + \pi - 2\beta,$$

da die Ablenkung in B, wie aus der Zeichnung leicht zu ersehen,  $\pi - 2\beta$  ist. Überhaupt wächst bei jeder Reflexion im Innern des Tropfens die Ablenkung um  $\pi - 2\beta$ , so daß ein Strahl, der nach k-maliger Reflexion wieder austritt, die Deviation

$D = 2\alpha - 2\beta + k(\pi - 2\beta) = 2\alpha - 2(k+1)\beta + k\pi$  erfährt.

Je stärker ein Sonnenstrahl gebrochen wird, desto mehr wird auch seine Farbe zerstreut. Wir werden daher das intensivste Licht im Minimum der Ablenkung haben. Wir wollen deshalb den Einfallswinkel fürs Ablenkungsminimum suchen. Wir haben dafür die Gleichung

$$(3) \quad \frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1) \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Differenzieren wir die Gleichung

$$\sin\alpha = n \sin\beta,$$

so erhalten wir

$$\cos\alpha d\alpha = n \cos\beta d\beta,$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta}$$

Dieser Wert, in Gleichung (3) eingesetzt, ergibt

$$\frac{dD}{d\alpha} = 2 - 2(k+1) \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} = 0,$$

was wir noch folgendermaßen umformen können:

$$n \cos \beta = (k+1) \cos \alpha.$$

Diese Gleichung quadriert, ergibt

$$n^2 - n^2 \sin^2 \beta = (k+1)^2 - (k+1)^2 \sin^2 \alpha$$

und wegen  $\sin \alpha = n \sin \beta$

$$[(k+1)^2 - 1] \sin^2 \alpha = (k+1)^2 - n^2,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{(k+1)^2 - 1}}.$$

Setzen wir  $k = 0$ , so erhalten wir für  $\sin \alpha$  einen unmöglichen Wert, jedoch für  $k = 1, 2, 3 \dots$  wird der

Wurzelausdruck für Wasser kleiner als Eins, da  $n < 2$  ist. Wir werden demnach eine Reihe von Regenbogen erhalten, deren lichtstärkster der erste für  $k = 1$  sein wird, da der Lichtstrahl um so

mehr geschwächt wird, je öfter die Reflexionen stattfinden.

Wir fragen nun nach der Form des Regenbogens und wollen uns in unserer Untersuchung auf den ersten, den Hauptregenbogen beschränken, da sie für die weiteren, die Nebenregenbogen, ganz analog durchgeführt werden kann. Zu bemerken ist höchstens, daß für die einzelnen Regenbogen der das

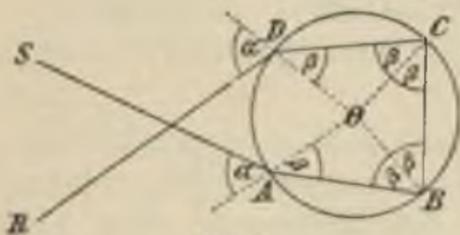


Fig. 7.

Ablenkungsminimum liefernde Sonnenstrahl auch auf der unteren Seite des Regentropfens (Fig. 7) auffallen kann.

Ist AB (Fig. 8) die Erdoberfläche, und bildet der Sonnenstrahl SP mit ihr den Winkel  $\sigma$ , der gebrochene Strahl jedoch den Winkel  $\varrho$ , so ist bei einer einmaligen Reflexion D die Deviation, und es muß

$$D + \varrho + \sigma = \pi$$

sein. Da aber

$$D = 2\alpha - 4\beta + \pi,$$

so ist

$$\varrho + \sigma = \pi - D = 4\beta - 2\alpha.$$

Setzen wir  $\sigma = 0$ , d. h. steht die Sonne im Horizont, oder sehen wir davon ab, daß AB die Erdoberfläche sei, sondern eine zu den Sonnenstrahlen parallele Gerade, so wird um AB herum alles symmetrisch. Der Regenbogen wird also ein Kreis sein vom Öffnungswinkel  $2(\varrho + \sigma)$ . Den vollständigen Kreis können wir nie sehen, wenn wir auf der horizontalen Erdoberfläche stehen, sondern höchstens einen Halbkreis bei Sonnenauf- oder Sonnenuntergang. Etwas anderes ist es jedoch auf einer hohen Bergesspitze oder vom Luftballon aus, wo der vollständige Kreis beobachtet wurde. Die Möglichkeit dazu ist auch vorhanden, wenn nicht die Sonne direkt, sondern ihr Spiegelbild in einem ruhigen Gewässer den Regenbogen erzeugt.

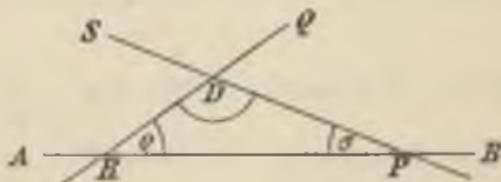
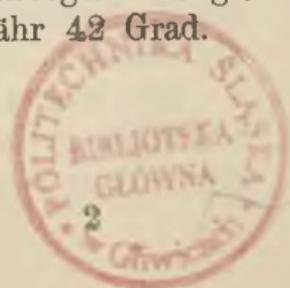


Fig. 8.

Die Winkelsumme  $\varrho + \sigma$  beträgt ungefähr 42 Grad.

Bilden wir den Ausdruck

$$\frac{d\varrho}{dn} = - \frac{dD}{dn},$$



so erhalten wir die Reihenfolge der Farben. Wir haben nun

$$\frac{dD}{dn} = 2 \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{d\beta}{dn} = 2 \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dn} - 4 \frac{\partial \beta}{\partial n},$$

indem wir  $\beta$  als abhängige Veränderliche von  $\alpha$  und  $n$  einführen. Von früher her kennen wir als Bedingung des Deviationsminimums

$$2 - 4 \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

daher wird

$$\frac{dD}{dn} = -4 \frac{\partial \beta}{\partial n}.$$

Den Differentialquotienten  $\frac{\partial \beta}{\partial n}$  gewinnen wir aus der Gleichung

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n},$$

welche differenziert

$$\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial n} = - \frac{\sin \alpha}{n^2}$$

ergibt. Demnach ist

$$\frac{d\varrho}{dn} = - \frac{dD}{dn} = - \frac{4 \sin \alpha}{n^2 \cos \beta}.$$

Der Differentialquotient  $\frac{d\varrho}{dn}$  ist negativ, d. h. mit wachsendem  $n$  nimmt  $\varrho$  ab. Es wird also die rote Farbe den äußersten Rand des Regenbogens bilden, gegen die Mitte zu folgen dann die übrigen Farben.

Die hier gegebene Theorie trifft strenge nur für unendlich große Regentropfen zu, indem die Entstehung der Farben von der Tropfengröße nicht unabhängig ist,

was jedoch an dieser Stelle nicht näher erörtert werden kann. Daß die Farben nicht bloß durch Lichtbrechung entstehen, hat zur Folge, daß der Regenbogen nicht aus dem gewöhnlich genannten siebenfarbigen Band besteht, sondern wir können bei manchem Regenbogen eine ganz andere Farbenfolge beobachten.

### § 7. Abbildung eines Punktes durch eine brechende Kugelfläche — Brennpunkte — Brennweiten.

KK' (Fig. 9) sei eine brechende Kugelfläche. Es ist dies der Fall, wenn sich links von ihr etwa Luft,

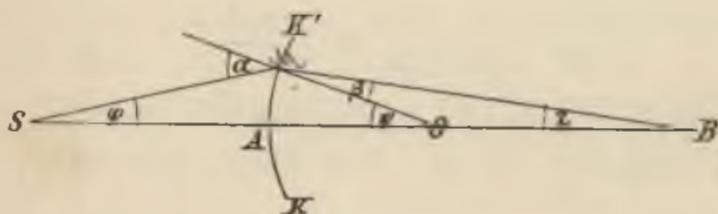


Fig. 9.

rechts Glas befindet. Der Strahl SA, welcher gegen den Krümmungsmittelpunkt O der Kugelfläche gerichtet ist, wird nicht gebrochen, da er mit dem Einfallslot zusammenfällt. Wir nennen ihn den Hauptstrahl. Ein Strahl SM wird nach dem Gesetz  $\sin \alpha = n \sin \beta$  gebrochen und schneidet den Hauptstrahl in B. Wir wollen unsere Untersuchung nur auf kleine Einfallswinkel ausdehnen, können dann den Sinus mit dem Bogen vertauschen und schreiben

$$\alpha = n \beta .$$

Wir haben nun

$$\alpha = \varphi + \psi, \quad \beta = \psi - \zeta,$$

mithin

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi + \psi &= n\psi - n\chi, \\ \varphi + n\chi &= (n-1)\psi. \end{aligned}$$

Die verschiedenen Winkel können wir folgendermaßen darstellen:

$$\varphi = \frac{MA}{SA}, \quad \psi = \frac{MA}{OA}, \quad \chi = \frac{MA}{BA}.$$

Wir setzen ferner

$$SA = a, \quad OA = r, \quad BA = b$$

und nennen  $a$  die Gegenstandsweite,  $r$  den Krümmungsradius,  $b$  die Bildweite. Wir erhalten dann aus Gleichung (4) ohne weiteres

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r}.$$

Es vereinigen sich also in der Tat alle Strahlen, welche von  $S$  ausgehen, in  $B$ . Wir haben hier ein reelles Bild.

Lassen wir  $S$  ins Unendliche rücken, d. h. setzen wir  $a = \infty$  oder, was dasselbe bedeutet, lassen wir parallele Strahlen auffallen, so vereinigen sie sich in einem Punkt, den wir  $F_1$  nennen wollen. Es ist der hintere Brennpunkt und

$$\parallel \quad F = b = \frac{nr}{n-1}$$

die hintere Brennweite. Das ist auch gleichzeitig die kleinste mögliche Bildweite. Lassen wir  $S$  näher rücken, so wird  $b$  größer und wir erreichen schließlich einen Punkt  $f_1$ , für welchen  $b$  unendlich wird. Die Gegenstandsweite ist dann

$$f = a = \frac{r}{n-1}.$$

Wir nennen  $f$  die vordere Brennweite,  $f_1$  den vorderen Brennpunkt. Die beiden Brennweiten stehen also in der Beziehung

$$F = n f .$$

Wird nun  $a$  noch kleiner, so wird  $b$  negativ, d. h. die Strahlen vereinigen sich nicht mehr, wohl aber ihre rückwärtigen Verlängerungen in einem Punkt, welcher vor der Kugelfläche liegt. Wir erhalten ein imaginäres Bild.

Lassen wir  $r$  unendlich werden, so erhalten wir eine ebene brechende Fläche. Es wird dann

$$b = - n a .$$

Wird  $r$  negativ, haben wir also den Krümmungsmittelpunkt  $O$  links von der brechenden Fläche, so wird auch die Brennweite negativ. Es vereinigen sich dann die Strahlen nur virtuell. Wir erhalten kein reelles Bild mehr.

### § 8. Bildgröße.

Gleicherweise wie der Punkt  $S$  (Fig. 10) in  $B$ , bildet sich  $T$  in  $B'$  ab. Wir erhalten von dem Gegen-

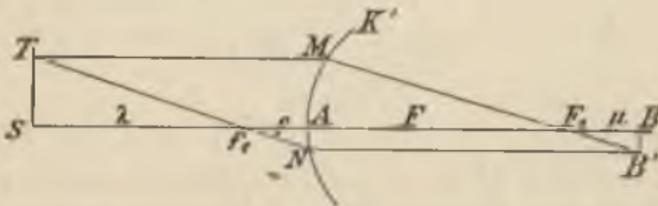


Fig. 10.

stand  $ST$  das verkehrte Bild  $BB'$ , dessen Größe wir leicht finden können. Wir wollen die Bezeichnungen

$$S f_1 = \lambda , \quad F_1 B = \mu$$

einführen und haben dann

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{ST}{AN} = \frac{\lambda}{f},$$

aber auch

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{AM}{BB'} = \frac{F}{\mu}.$$

Rückt also der Gegenstand aus dem Unendlichen bis in die vordere Brennweite, so wächst das Bild von der Größe Null bis zur Größe Unendlich. Es ist reell und umgekehrt. Rückt der Gegenstand noch näher, so wird  $\lambda$  negativ, wir erhalten ein aufrechtes vergrößertes virtuelles Bild. Für eine konkave brechende Fläche wird  $r$  negativ. Es wird dann auch  $f$  und gleicherweise  $F$  negativ und für alle Fälle  $\lambda > f$ . Wir haben also dann immer ein virtuelles aufrechtes verkleinertes Bild.

### § 9. System zweier brechender zentrierter Kugelflächen — Linsen.

Kugelflächen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, nennt man zentriert. Zwei brechende Kugel-

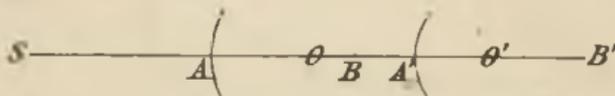


Fig. 11.

flächen,  $A$  und  $A'$  (Fig. 11), sind demnach immer zentriert. Das Bild  $B$  des Punktes  $S$ , welches die erste brechende Fläche entwirft, wird für die zweite brechende Fläche zum leuchtenden Punkt und sie entwirft davon ein Bild in  $B'$ . Für die brechende Fläche  $A$  gilt nun die Gleichung

$$(5) \quad \frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r},$$

für die zweite  $A'$  analog

$$\frac{1}{a'} + \frac{n'}{b'} = \frac{n'-1}{r'}.$$

Ist nun das Medium rechts von  $A'$  gleich jenem links von  $A$ , so ist  $n' = \frac{1}{n}$ . Ferner ist

$$a' = AA' - AB = e - b,$$

wenn  $e$  die Entfernung der beiden Kugelflächen ist. Darnach wird die Gleichung für den Strahlengang in der zweiten Fläche

$$\frac{n}{e-b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'}.$$

Wir nehmen noch an,  $e$  sei so klein, daß wir es gegenüber den anderen vorhandenen Größen vernachlässigen können. Wir haben dann eine dünne Linse vor uns. Unsere letzte Gleichung wird jetzt

$$-\frac{n}{b} + \frac{1}{b'} = -\frac{n-1}{r'},$$

was zur Gleichung (5) addiert

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = (n-1) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

ergibt. Es ist dies die sogenannte Linsenformel.

Ist  $\frac{1}{a} - \frac{1}{r'}$  positiv, so haben wir eine Sammellinse, im entgegengesetzten Fall eine Zerstreuungslinse. Im ersten Fall vereinigen sich parallel auffallende Strahlen, für welche  $a = \infty$  ist, in der Entfernung  $p$  hinter der Linse nach der Gleichung

$$\frac{1}{p} = (n - 1) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right),$$

und es ist  $p$  die Brennweite der Linse, weshalb wir die Linsenformel auch

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{p}$$

schreiben können. Diese Gleichung hat dieselbe Form wie jene für den Kugelspiegel (§ 3), weshalb wir uns hier ihre weitere Diskussion ersparen können.

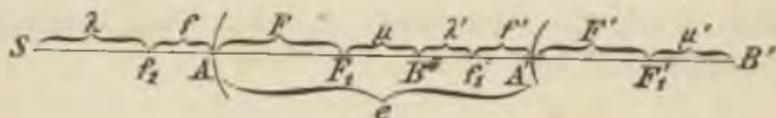


Fig. 12.

Im vorhergehenden Paragraphen fanden wir für das Verhältnis des Gegenstands zum Bild die Gleichung

$$\frac{ST}{BB'} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F}{\mu}.$$

Es gilt demnach für eine brechende Fläche die Beziehung

$$(6) \quad \lambda \mu = f F,$$

welche wir auch auf mehrere brechende Flächen ausdehnen können. Für die beiden Kugelflächen A und A' (Fig. 12) haben wir also die Gleichung (6) nebst der zweiten

$$(7) \quad \lambda' \mu' = f' F',$$

wenn wir das Bild B zum Gegenstand für die zweite brechende Fläche werden lassen. Die Entfernung beider Flächen ist also

$$(8) \quad e = F + \mu + \lambda' + f'.$$

Wir finden den vorderen Brennpunkt des Systems, wenn

nach der zweiten Brechung die Strahlen parallel laufen, also  $\mu' = \infty$  wird. Dann muß nach Gleichung (7)  $\lambda' = 0$  werden, während aus Gleichung (8)

$$\mu = e - F - f'$$

und aus Gleichung (6)

$$\lambda = \frac{fF}{e - F - f'}$$

folgt.

Wir rechnen die vordere Brennweite  $\varphi$  von der ersten Kugelfläche aus. Sie wird also

$$\varphi = \lambda + f = \frac{fF}{e - F - f'} + f = f \frac{e - f'}{e - F - f'}$$

Und in ganz derselben Weise finden wir für die hintere Brennweite unseres Systems

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'}$$

wobei diese Brennweite von der hinteren Linsenfläche aus gezählt ist.

Wir wollen als ein Beispiel für die gewonnenen Gleichungen die plankonvexe Linse behandeln. Der Krümmungsradius der vorderen Fläche sei  $r$ , für die hintere Fläche ist er demnach  $\infty$ . Wir haben dann (§ 7)

$$f = \frac{r}{n - 1}, \quad F = \frac{nr}{n - 1}, \quad f' = F' = \infty,$$

daher

$$\varphi = f \frac{e - f'}{e - F - f'} = f \cdot \frac{-f'}{-f'} = f,$$

da ja  $e$  und  $F$  gegen  $\infty$  wegfällt. Ferner haben wir

$$\Phi = F' \frac{e - F}{e - F - f'} = n' f' \frac{e - F}{-f'} = \frac{F - e}{n} = f - \frac{e}{n} = \varphi - \frac{e}{n}.$$

Die hintere Brennweite ist also um  $\frac{e}{n}$  kleiner als die vordere.

### § 10. Hauptebenen — Hauptpunkte.

Durch die Einführung der Brennweiten  $\varphi$  und  $\Phi$  können wir wiederum zwei brechende Flächen wie eine einzige behandeln, und es ist leicht einzusehen, daß wir auf dieselbe Weise jetzt drei, vier usw. brechende Flächen kombinieren können, vorausgesetzt, daß sie ein zentriertes System sind, d. h. daß die Krümmungsmittelpunkte der Kugelflächen alle in einer Geraden liegen. Nicht so einfach wie bei einer unendlich dünnen Linse ist aber jetzt die Konstruktion der Bilder. Zu dem Zweck führen wir den Begriff der zwei Hauptebenen ein. Diese haben die Eigenschaft, daß jeder Strahl, welcher durch die erste geht, in derselben Höhe auch die zweite passiert. Wir sehen wegen der allseitigen Symmetrie sofort ein, daß diese beiden Ebenen senkrecht auf dem Hauptstrahl stehen müssen. Ihre Schnittpunkte mit ihm nennen wir die Hauptpunkte.

Wir haben also zwei Ebenen von der Eigenschaft zu suchen, daß der Gegenstand in der einen kongruent dem Bild in der andern ist. Wir verfolgen dabei wieder die Methode, die gestellte Aufgabe erst für zwei brechende Flächen zu lösen, da ja die Rechnung für mehrere Flächen nach demselben Schema vor sich geht. Wir haben nach dem vorhergehenden Paragraphen für das Verhältnis des Gegenstands  $G$  zum Bild  $B$  bei der ersten Brechung

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{f} = \frac{F}{\mu},$$

für die zweite

$$\frac{G'}{B'} = \frac{\lambda'}{f'} = \frac{F'}{\mu'}.$$

Nun ist aber der Gegenstand bei der zweiten Brechung das von der ersten Brechung gelieferte Bild, also

$$G' = B,$$

folglich, wenn wir die obigen Gleichungen miteinander multiplizieren,

$$\frac{G}{B'} = \frac{\lambda \lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu \mu'}.$$

Da das Bild sich bei jeder Brechung umkehrt, so ist das zweite wieder aufrecht. Soll es daher mit dem Gegenstand kongruent sein, so muß Gegenstand und Bild im Verhältnis Eins stehen. Wir haben also

$$(9) \quad \frac{\lambda \lambda'}{f f'} = \frac{F F'}{\mu \mu'} = 1.$$

Aus Gleichung (8) ergibt sich

$$(10) \quad \mu + \lambda' = e - F - f' = \delta.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $\lambda$ , so erhalten wir mit Zuziehung der Gleichungen (6) und (9)

$$\begin{aligned} f F + f f' &= \delta \lambda, \\ \lambda &= \frac{f F + f f'}{\delta}. \end{aligned}$$

Ganz analog ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung (10) mit  $\mu'$

$$\begin{aligned} F F' + f' F' &= \delta \mu', \\ \mu' &= \frac{F F' + f' F'}{\delta}. \end{aligned}$$

Damit ist die Lage der beiden Hauptebenen bestimmt,

doch ist es bequemer, ihren Abstand von der ersten bezgl. zweiten brechenden Fläche zu wissen. Für die erste Hauptebene ist er

$$h = \lambda + f = f \left( \frac{F + f'}{\delta} + 1 \right) = \frac{f}{\delta} (F + f' + e - F - f') = \frac{ef}{\delta}.$$

Für den Abstand der zweiten Hauptebene von der zweiten brechenden Fläche findet sich gleicherweise

$$H = \frac{eF'}{\delta}.$$

Es ist noch angezeigt, die Brennweiten von den

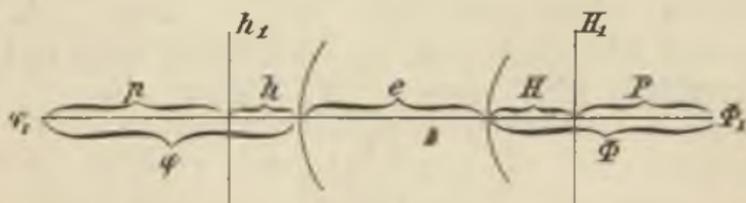


Fig. 13.

Hauptpunkten an zu zählen. Wir haben dann (Fig. 13) die vordere Brennweite

$$p = \varphi - h = f \frac{e - f'}{\delta} - h = - \frac{ff'}{\delta},$$

für die hintere

$$P = \Phi - H = F' \frac{e - F}{\delta} - H = - \frac{FF'}{\delta}.$$

Da nun

$$F = n f, \quad F' = n' f',$$

so

$$P = - \frac{n n' f f'}{\delta} = n n' p.$$

Ist links und rechts vom optischen System dasselbe

Medium, so  $n' = \frac{1}{n}$ , folglich

$$P = p.$$

Die Konstruktion des Bildes ist nun sehr einfach. Wir errichten in den beiden Hauptpunkten  $h_1$  und  $H_1$  (Fig. 14) die beiden senkrechten Ebenen  $h$  und  $H$ . Ein Strahl, welcher parallel zum Hauptstrahl von  $T$  ausgeht und die erste Hauptebene in  $A$  trifft, muß in gleicher Höhe bei  $A'$  die zweite Hauptebene verlassen und dann durch den hinteren Brennpunkt  $P_1$  gehen. Ein Strahl,

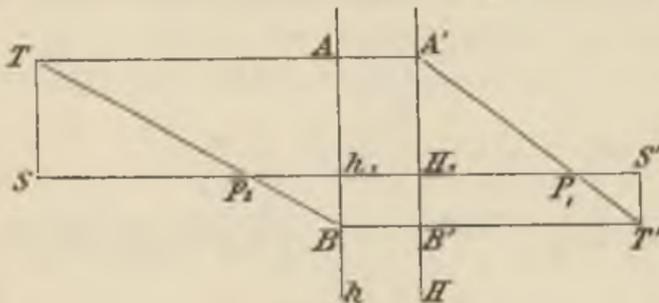


Fig. 14.

welcher durch den vorderen Brennpunkt  $p_1$  geht und in  $B$  die erste Hauptebene trifft, verläßt ebenfalls in gleicher Höhe in  $B'$  die zweite und geht dann parallel zum Hauptstrahl weiter. In  $T'$  schneiden sich beide Strahlen; es ist dort das Bild des Punktes  $T$ .

### § 11. Bikonvexe Linse.

Die beiden brechenden Flächen einer bikonvexen Linse sollen denselben Krümmungsradius haben. Es gilt also die Beziehung

$$f' = F = n f.$$

Die Lage der ersten Hauptebene ist daher gegeben durch

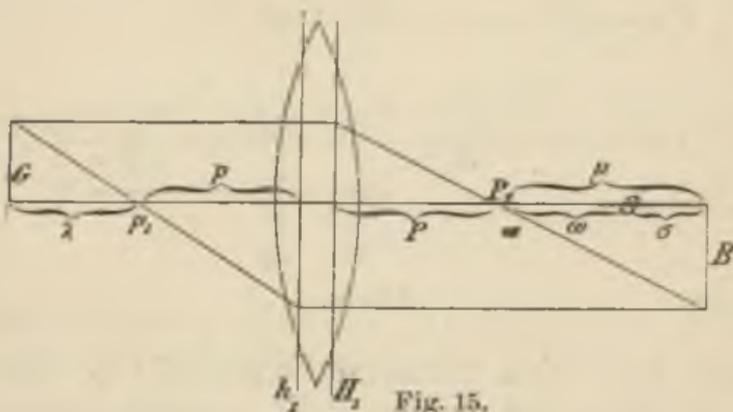
$$h = \frac{ef}{e - F - f'} = \frac{ef}{e - 2nf}.$$

Ist die Linse nicht sehr dick, so können wir  $e$  gegen  $2nf$  vernachlässigen und erhalten

$$h = -\frac{e}{2n} = -\frac{e}{3},$$

wenn wir, wie es bei Glas ungefähr zutrifft,  $n = \frac{3}{2}$  setzen.

$h$  ist negativ, d. h. es liegt die erste Hauptebene  $h_1$  (Fig. 15) hinter der Linsenfläche, symmetrisch dazu die



zweite Hauptebene  $H_2$ . Die beiden Brennweiten  $p$  und  $P$  sind einander gleich. Für das Verhältnis des Gegenstands zum Bild haben wir daher

$$\frac{G}{B} = \frac{\lambda}{p} = \frac{p}{\mu},$$

woraus folgt:

$$\lambda \mu = p^2.$$

Wir versetzen nun unser Auge in den Punkt  $O$ , welcher die Strecke  $\mu$  so teilt, daß

$$\mu = \omega + \sigma.$$

Wir wollen die Linse als Lupe benutzen. Die Entfernung des Bildes vom Auge muß also in der deutlichen Sehweite  $s$  und negativ sein. Wir haben demnach

$$\sigma = -s$$

zu setzen. Darnach wird

$$\mu = \omega - s,$$

wobei  $s > \omega$ ,  $\mu$  also negativ ist. Desgleichen wird

$$\lambda = -\frac{p^2}{s - \omega}$$

negativ, d. h. der Gegenstand muß innerhalb der Brennweite  $p$  liegen. Unter der Vergrößerung verstehen wir das Verhältnis des Bildes zum Gegenstand

$$V = \frac{B}{G} = \frac{p}{\lambda}.$$

In unserm gegebenen Fall wird somit

$$V = -\frac{s - \omega}{p}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß wir ein aufrechtes Bild erhalten. Je weiter wir das Auge von der Linse entfernen, desto größer wird  $\omega$ , desto kleiner das Bild. Denken wir uns das Auge in der zweiten Hauptebene, so  $\omega = -p$  und

$$V = -\frac{s + p}{p} = -\left(\frac{s}{p} + 1\right),$$

was die gewöhnlich in Verwendung kommende Vergrößerungsformel ist. *Mittheilung*

## § 12. Huygenssches Prinzip.

Wir haben das Licht nach Huygens Theorie als Wellenbewegung aufgefaßt. Von Huygens rührt

folgendes Prinzip her: Einen jeden Punkt einer Welle kann man als einen Erregungspunkt neuer Wellen betrachten. Die gemeinschaftliche Umhüllende dieser Wellen, der Elementarwellen, stellt die wirkliche Welle, die Hauptwelle, dar. Denken wir uns z. B. eine Kugelwelle, welche von einem leuchtenden Punkt ausgeht. Werden alle Punkte der Kugelfläche als Erregungspunkte neuer Wellen aufgefaßt, so entstehen unendlich viele kongruente Kugelwellen, deren

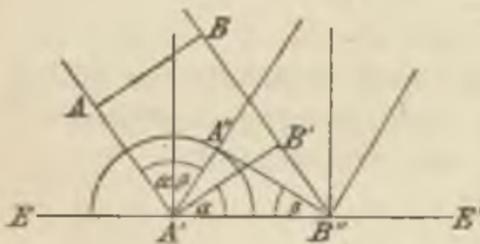


Fig. 16.

Umhüllende tatsächlich die Hauptwelle darstellt.

Aus diesem Prinzip läßt sich leicht das Gesetz der Reflexion und Brechung ableiten. Es falle ein paralleles Strahlenbündel  $AB$  (Fig. 16) auf die Ebene  $EE'$  unter dem Einfallswinkel  $\alpha$ . Im Punkt  $A'$  entsteht eine Elementarwelle der Planwelle  $A'B'$  und so der Reihe nach in allen Punkten der Strecke  $A'B''$ . Kommt schließlich der Punkt  $B'$  in  $B''$  an, so haben wir als Hauptwelle  $A''B''$ . Da nun

$A'A'' \perp A''B''$ ,  $A'B' \perp B'B''$ ,  $A'A'' = B'B''$ ,  
so muß auch  $\alpha = \beta$  sein, womit das Reflexionsgesetz als eine Folge der Wellentheorie erscheint.

Das Brechungsgesetz können wir folgendermaßen erhalten.  $AB$  (Fig. 17) sei die Trennungsfläche zweier Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , im unteren  $c'$ , und es sei  $c > c'$ . Trifft die ebene Welle  $CD$  in  $C'$  auf, so entsteht da eine Elementarwelle mit der Geschwindigkeit  $c'$ . Dasselbe geschieht der Reihe nach in allen übrigen Punkten der Strecke  $C'D''$ . Während

C nach C'' gelangt, kommt D nach D''. Es ist daher C''D'' die neue Welle. Nun ist

$$C'D'' \cdot \sin \alpha = D'D'',$$

$$C'D'' \cdot \sin \beta = C'C'',$$

folglich

$$\frac{D'D''}{C'C''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n.$$

Damit ist das Brechungsgesetz abgeleitet, und es zeigt sich, daß der Brechungs-exponent nichts anderes als das Verhältniß der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien ist.

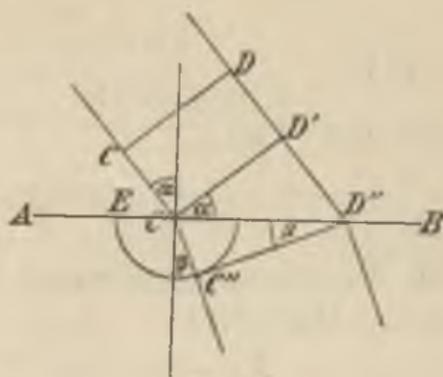


Fig. 17.

### § 13. Fermats Satz.

Fermat stellte folgendes Prinzip auf: Jeder Lichtstrahl pflanzt sich so fort, daß die zur Zurücklegung des Wegs erforderliche Zeit ein Minimum wird. Auch dieses Prinzip ergibt das Reflexions- und Brechungsgesetz in derselben Form wie das Huygenssche. Soll das Licht vom Punkt A

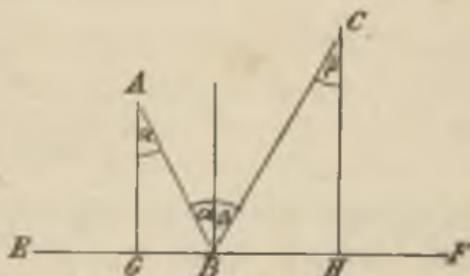


Fig. 18.

(Fig. 18) ausgehend von der Fläche EF in B nach C reflektiert werden, so wird die Reflexion so von statten gehen, daß die Zeit der Fortpflanzung, folglich auch der Weg ABC ein Minimum wird. Nach unserer Zeichnung ist

$$GH = AG \cdot \operatorname{tg} \alpha + HC \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

was durch Differentiation ergibt

$$(11) \quad \frac{AG \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha} = - \frac{HC \cdot d\beta}{\cos^2 \beta}$$

Soll der Weg

$$AB + BC = \frac{AG}{\cos \alpha} + \frac{HC}{\cos \beta}$$

ein Minimum werden, so muß sein Differential Null sein. Daß ergibt

$$(12) \quad \frac{AG \cdot \sin \alpha \, d\alpha}{\cos^2 \alpha} = - \frac{HC \cdot \sin \beta \, d\beta}{\cos^2 \beta}$$

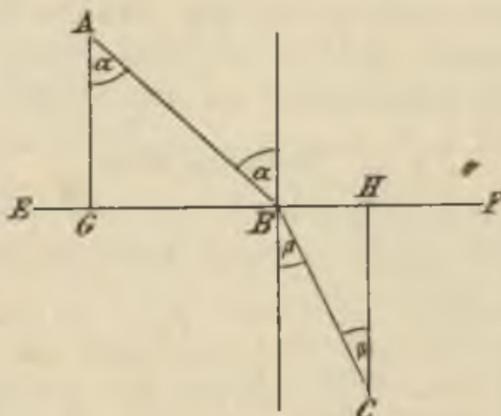


Fig. 19.

Dividieren wir Gleichung (12) durch (11), so resultiert  $\sin \alpha = \sin \beta$  oder  $\alpha = \beta$ . Wir erhalten also in der Tat das Reflexionsgesetz.

Auf ganz demselben Weg ergibt sich auch das Brechungsgesetz. ABC (Fig. 19) stelle uns den Strahlenweg durch die brechende Ebene EF dar. Oben sei die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , unten  $c'$ . Die Zeit

$$t = \frac{AB}{c} + \frac{BC}{c'} = \frac{AG}{c \cos \alpha} + \frac{HC}{c' \cos \beta}$$

soll ein Minimum werden, d. h. es muß das Differential

$dt = 0$  sein, was

$$(13) \quad \frac{\overline{AG} \cdot \sin \alpha \, d\alpha}{c \cos^2 \alpha} = - \frac{\overline{HC} \cdot \sin \beta \, d\beta}{c' \cos^2 \beta}$$

ergibt. Ferner folgt wiederum aus dem Differential der konstanten Strecke GH die Gleichung (11). Gleichung (13) durch (11) dividiert, ergibt sodann

$$\frac{\sin \alpha}{c} = \frac{\sin \beta}{c'}$$

oder

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n,$$

das Brechungsgesetz. Es stimmen also die Folgerungen aus dem Huygensschen und dem Fermatschen Prinzip vollständig überein.

#### § 14. Interferenz.

Nach dem Früheren müssen wir das Licht als eine schwingende Bewegung des Äthers auffassen. Diese Bewegung pflanzt sich in ähnlicher Weise fort wie die Schallbewegung in der Luft. Eine befriedigende Vorstellung von der Bahn, welche die Ätherteilchen bei der Lichtbewegung beschreiben, ist jedoch bis jetzt noch nicht geliefert worden. Sicher ist nur das eine, daß die Ätherteilchen eine periodische Bewegung machen müssen, d. h. eine solche, bei welcher sie nach einer bestimmten Zeit immer wieder eine bestimmte Lage passieren. Dieser Bewegungszustand pflanzt sich in Wellenform fort und hat die Eigenschaft, daß er nach Verlauf einer halben Wellenlänge gerade entgegengesetzte Bewegungen darstellt. Zwei gleichartige Strahlen, welche um eine halbe Wellenlänge gegen-

einander verschoben sind, werden daher die Äthertheilchen gar nicht in Bewegung setzen können, da die Kräfte, welche von den beiden Lichtstrahlen ausgeübt werden, gleich und entgegengesetzt sind. Das Licht muß verschwinden. Die beiden Strahlen werden sich aber in ihrer Wirkung unterstützen, wenn sie ohne Phasenverschiebung den Äthertheilchen begegnen. Wir haben hier also ganz analoge Vorgänge wie bei der Interferenz des Schalls (Bd. I § 73) und belegen sie daher auch mit dem Namen „Interferenz des Lichts“.

### § 15. Fresnels Spiegelversuch.

Strahlen, welche mit Phasenunterschied in einem Punkt ankommen sollen, müssen ihren Weg in verschiedenen Zeiten zurücklegen. Dies ermöglicht eine

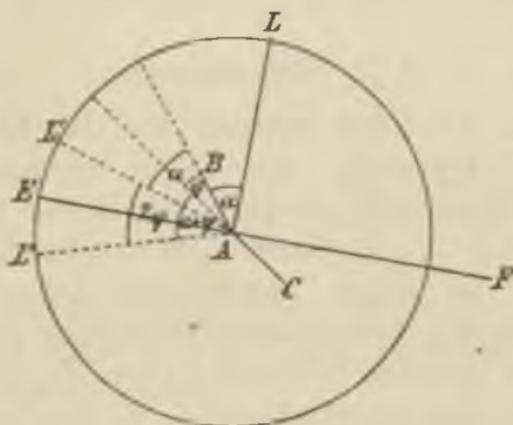


Fig. 20.

Anordnung von Spiegeln, welche von Fresnel, dem hervorragenden Pfadfinder auf dem Gebiet der Optik, gefunden wurde. Zwei ebene Spiegel AB und AC (Fig. 20) stoßen unter einem sehr spitzigen Winkel  $\varphi$  in A zusammen. Der leuchtende Punkt L liege so,

daß AL mit der Spiegelfläche AB den Winkel  $\alpha$  einschließt. Beschreiben wir daher mit dem Radius AL um A als Mittelpunkt einen Kreis, so liegen auf dem Kreisumfang die beiden Bilder  $L'$  und  $L''$ , welche die Spiegel AB und AC von L entwerfen. Halbieren wir  $L'L''$  in E, so ist die Gerade EAF eine Symmetrielinie zwischen  $L'$  und  $L''$ . Die Strahlen, welche von den beiden Bildern  $L'$  und  $L''$  ausgehen, werden daher Interferenzerscheinungen liefern, welche zu EF symmetrisch liegen.

Wir stellen in F (Fig. 21) einen Schirm auf und fragen nun, welche Lichterscheinungen sich in einem

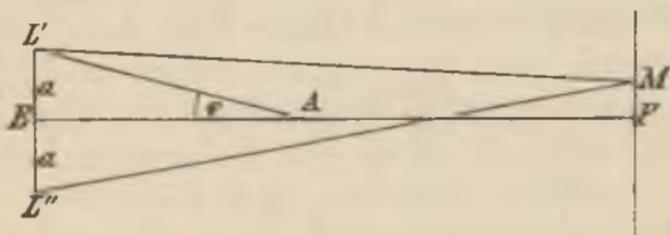


Fig. 21.

beliebigen Punkt M zeigen werden. Wir wollen die Strecken

$$L'L'' = 2a, \quad EF = b, \quad FM = y$$

setzen. Es handelt sich also darum, den Zeitunterschied, oder was hier dasselbe ist, den Wegunterschied der beiden Strahlen  $L'M$  und  $L''M$  kennen zu lernen. Wir haben

$$\begin{aligned} \overline{L''M}^2 &= b^2 + (a + y)^2, \\ \overline{L'M}^2 &= b^2 + (a - y)^2, \end{aligned}$$

daher

$$\overline{L''M}^2 - \overline{L'M}^2 = (L''M - L'M)(L''M + L'M) = 4ay.$$

Wir können nun mit sehr kleiner Vernachlässigung

$$L''M + L'M = 2b$$

setzen und erhalten so

$$L''M - L'M = \frac{2ay}{b}$$

Haben wir Licht von der Wellenlänge  $\lambda$ , so wird für alle  $y$ , wo der Gangunterschied der beiden Strahlen  $\frac{\lambda}{2}$ ,  $\frac{3\lambda}{2}$ ,  $\frac{5\lambda}{2}$  ... ist, Dunkelheit eintreten, da sich dort beide Strahlen infolge der Interferenz auslöschen. Es ist dies also für

$$(14) \quad y = \pm \frac{(2k + 1)b\lambda}{4a}$$

der Fall, wenn  $k = 0, 1, 2 \dots$  ist.

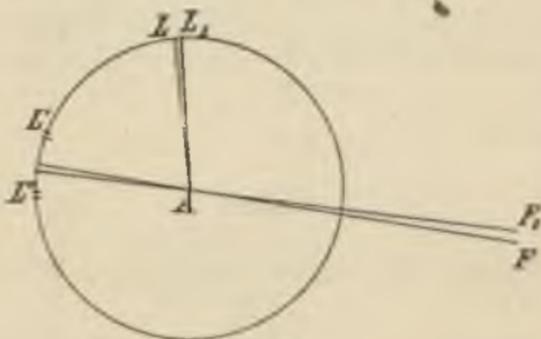


Fig. 22

In Wirklichkeit steht uns nun ein mathematischer Lichtpunkt nicht zur Verfügung, sondern wir müssen eine schmale Spalte  $LL_1$  (Fig. 22) anwenden, durch welche wir das Licht eintreten lassen. Die Folge davon ist, daß die beiden Spiegelbilder ebenfalls eine gewisse Ausdehnung haben, so daß die Bilder des Punktes  $L$  die Gerade  $AF$ , hingegen die Bilder von  $L_1$  die Gerade  $AF_1$  zur Symmetrielinie haben. Es kann daher vorkommen, daß auf eine dunkle Stelle des Schirms,

die von L herrührt, gerade eine lichte, durch  $L_1$  erzeugt, zu fallen kommt, so daß wir keine Interferenzstreifen wahrnehmen können. Es darf somit die Spalte  $LL_1$  eine gewisse Breite nicht übersteigen. Unsere Aufgabe läuft darauf hinaus,  $FF_1$  möglichst klein zu machen. Es ist  $FF_1 = \overline{AF} \cdot \beta$ , wenn wir den  $\sphericalangle LAL_1 = \beta$ , setzen.

Wir haben somit  $\beta = \frac{LL_1}{AL}$ , folglich

$$FF_1 = \frac{\overline{AF} \cdot LL_1}{AL}.$$

Wir erzielen also eine möglichst gute Wirkung, wenn wir die Spiegel möglichst weit von der Spalte aufstellen und diese selbst sehr schmal machen, während wir den Winkel  $\varphi$  der beiden Spiegel sehr klein wählen.

Die Größe  $a$  in der Gleichung (14) ist durch den Winkel der beiden Spiegel und ihre Entfernung vom Lichtpunkt gegeben. Da wir  $b$  und  $y$  ebenfalls messen können, so haben wir in Fresnels Spiegelversuch ein Mittel, die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts und sodann aus der bekannten Lichtgeschwindigkeit die Schwingungszahl zu bestimmen.

### § 16. Farben dünner Blättchen.

Von dem leuchtenden Punkt S (Fig. 23) falle ein Strahl SA auf die planparallele Platte PP'. Im Punkt A wird er teilweise nach C reflektiert, teilweise nach B gebrochen. Dort findet ebenfalls Reflexion und Brechung statt; ein Teil geht nach E, der andere nach A', und das geht so fort, so daß eine Reihe von Strahlen nach oben, eine andere nach unten von der Platte weggeht. Das Auge wird daher sowohl von oben als von unten in der Platte Interferenzerscheinungen

der nebeneinander verlaufenden Strahlen sehen können, welche man mit dem Namen „Farben dünner Blättchen“ belegt, da für den Fall, daß vom Punkt *S* weißes Licht oder sonst eine Mischfarbe ausgeht, an einer bestimmten Stelle der Platte nur Licht von bestimmter Wellenlänge, d. h. von bestimmter Farbe verlöschen wird,

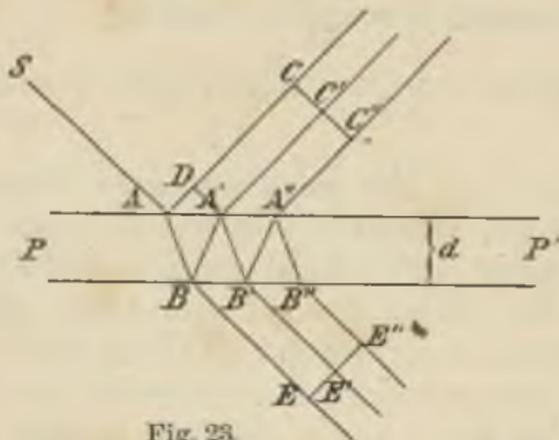


Fig. 23.

so daß wir dann die Mischfarbe des übrigen Lichts in der Platte sehen.

Wir wollen den Schwingungszustand des Äthers durch

$$\sigma = a \sin \frac{2 \pi t}{\tau}$$

darstellen. Welcher Art von periodischer Bewegung dieser Schwingungszustand  $\sigma$  ist, wissen wir bekanntlich nicht, doch ist das für die folgenden Untersuchungen auch nicht nötig. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei außerhalb der Platte  $c$ , innerhalb  $c'$ . Der Schwingungszustand  $\sigma$  in *A* wird daher nach der Zeit  $\frac{AC}{c}$  in *C* sein, nur mit dem Unterschied, daß er dort mit geringerer

Stärke auftritt, da er ja nur teilweise reflektiert wird. Wir können daher den Bewegungszustand in C

$$\sigma_1 = \alpha a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AC}{c} \right)$$

nennen, wobei  $\alpha$  ein echter Bruch ist, der die Verminderung der Stärke des Schwingungszustands andeutet, oder wenn wir wollen, der das Verhältnis zwischen der neuen und alten Amplitude der Schwingung darstellt. In ähnlicher Weise können wir nun weiter schließen. Wir werden in C' den Zustand

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \alpha' \beta' \beta a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AB}{c'} - \frac{BA'}{c'} - \frac{A'C'}{c} \right) \\ &= \alpha' \beta' \beta a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{2AB}{c'} - \frac{A'C'}{c} \right) \end{aligned}$$

haben. Wir haben hier durch  $\alpha'$  dem Lichtverlust bei der Brechung in A, durch  $\beta$  jenem bei der Reflexion in B, durch  $\beta'$  dem bei der Brechung in A' Rechnung getragen. Auf ganz dieselbe Weise finden wir nun weiter

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \alpha' \beta^3 \beta' a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{4AB}{c'} - \frac{A''C''}{c} \right), \\ \sigma_4 &= \alpha' \beta^5 \beta' a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{6AB}{c'} - \frac{A'''C'''}{c} \right), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} A'C' &= AC - AD, \\ A''C'' &= AC - 2AD, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

wenn A'D das Lot auf AC ist. Wir setzen jetzt

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AC}{c} \right) = \varphi,$$

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{2AB}{c'} - \frac{AD}{c} \right) = \psi$$

und erhalten dann für die Summe sämtlicher  $\sigma$  den Ausdruck

$$\Sigma = a [\alpha \sin \varphi + \alpha' \beta' \beta \sin(\varphi - \psi) + \alpha' \beta' \beta^3 \sin(\varphi - 2\psi) + \alpha' \beta' \beta^5 \sin(\varphi - 3\psi) + \dots].$$

Diese Summe wird uns also das Resultat darstellen für die Lichterscheinung, welche unser Auge in der dünnen Platte  $PP'$  im reflektierten Licht erblickt. Um die Summierung durchführen zu können, führen wir folgende Hilfssummen ein:

$$S = \sin(\varphi - \psi) + \beta^2 \sin(\varphi - 2\psi) + \beta^4 \sin(\varphi - 3\psi) + \dots,$$

$$R = \cos(\varphi - \psi) + \beta^2 \cos(\varphi - 2\psi) + \beta^4 \cos(\varphi - 3\psi) + \dots$$

und bilden

$$R + Si = e^{(\varphi - \psi)i} + \beta^2 e^{(\varphi - 2\psi)i} + \beta^4 e^{(\varphi - 3\psi)i} + \dots$$

$$= e^{(\varphi - \psi)i} (1 + \beta^2 e^{-\psi i} + \beta^4 e^{-2\psi i} + \beta^6 e^{-3\psi i} + \dots)$$

$$= e^{(\varphi - \psi)i} (1 + n + n^2 + n^3 + \dots),$$

wenn wir  $\beta^2 e^{-\psi i} = n$  setzen. Die geometrische Reihe hat nun eine bekannte Summenformel, wonach wir erhalten

$$R + Si = e^{(\varphi - \psi)i} \cdot \frac{1}{1 - n} = \frac{e^{(\varphi - \psi)i}}{1 - \beta^2 e^{-\psi i}} \cdot \frac{1 - \beta^2 e^{\psi i}}{1 - \beta^2 e^{\psi i}}$$

$$= e^{(\varphi - \psi)i} \frac{1 - \beta^2 e^{\psi i}}{1 - 2\beta^2 \cos \psi + \beta^4} = \frac{e^{(\varphi - \psi)i} (1 - \beta^2 e^{\psi i})}{N}$$

$$= \frac{\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \cos \varphi - i \beta^2 \sin \varphi}{N},$$

wobei wir

$$1 - 2\beta^2 \cos \psi + \beta^4 = N$$

gesetzt haben. Der imaginäre Teil der Summe ergibt

$$S = \frac{\sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \sin \varphi}{N},$$

somit

$$\Sigma = \alpha a \sin \varphi + \alpha' \beta' \beta a \frac{\sin(\varphi - \psi) - \beta^2 \sin \varphi}{N}.$$

Wir wollen hier die Glieder mit den Faktoren  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  noch trennen, erhalten somit

$$\Sigma = a \sin \varphi \left( \alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right) - \cos \varphi \cdot \alpha' \beta' \beta \frac{\sin \psi}{N}.$$

Es ist also das Resultat wiederum eine schwingende Bewegung von derselben Schwingungsdauer, aber von verschiedener Amplitude und Phase.

Wir finden das Quadrat der Amplitude der resultierenden Schwingung aus der Gleichung

$$A^2 = a^2 \left( \alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right)^2 + a^2 \alpha'^2 \beta'^2 \beta^2 \frac{\sin^2 \psi}{N^2}.$$

(Siehe Bd. I § 73.) Dieser Größe setzen wir die Lichtstärke proportional. Sie gibt uns also ohne weiteres Aufschluß über die Intensität des reflektierten Lichts.

In ganz derselben Weise wie für das reflektierte können wir nun die Rechnung auch für das durchgehende Licht machen. Wir erhalten in E den Schwingungszustand

$$\sigma' = \alpha' \beta' a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c} \right),$$

in E'

$$\sigma'' = \alpha' \beta' \beta^2 a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{3AB}{c'} - \frac{B'E'}{c} \right)$$

usw. Wir führen

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{AB}{c'} - \frac{BE}{c} \right) = \chi$$

ein und können so für die Summe sämtlicher  $\sigma$  schreiben

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \alpha' \beta' a \sin \chi + \alpha' \beta' \beta^2 a \sin (\chi - \psi) \\ &+ \alpha' \beta' \beta^4 a \sin (\chi - 2\psi) + \dots, \end{aligned}$$

was nach dem früheren Vorgang

$$\Sigma' = \alpha' \beta' a \frac{\sin \chi - \beta^2 \sin (\chi + \psi)}{N}$$

ergibt.

Es handelt sich für uns jetzt darum, die Beziehung zwischen  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  und  $\beta'$  zu ermitteln. Wir benützen dazu die Erfahrungstatsache, daß von einem unendlich dünnen Blättchen kein Licht reflektiert wird, sondern alles durchgeht. Für ein solches wird  $\psi = 0$ , folglich

$$\Sigma = 0 = a \sin \varphi \left( \alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4} \right),$$

$$\Sigma' = a \sin \chi = a \alpha' \beta' \sin \chi \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4}.$$

Es muß somit

$$\alpha + \frac{\alpha' \beta' \beta}{1 - \beta^2} = 0,$$

$$\alpha' \beta' \frac{1 - \beta^2}{1 - 2\beta^2 + \beta^4} = \frac{\alpha' \beta'}{1 - \beta^2} = 1$$

sein. Danach reduziert sich die vorletzte Gleichung auf  $\alpha + \beta = 0$  oder

$$\alpha = -\beta.$$

Das besagt, daß sich die Amplitude bei einer Reflexion umkehren muß. Es bleibt jedoch unentschieden, ob dies bei der äußeren oder bei der inneren Reflexion geschieht.

Jetzt können wir uns auch eine Vorstellung von dem Quadrat der resultierenden Amplitude im reflek-

tierten und durchgehenden Licht machen. Der Ausdruck

$$\left( \alpha + \alpha' \beta' \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right)^2 = \left[ -\beta + (1 - \beta^2) \beta \frac{\cos \psi - \beta^2}{N} \right]^2$$

$$= \frac{\beta^2 (1 + \beta^2)^2 (1 - \cos \psi)^2}{N^2},$$

was sich durch Ausmultiplizieren leicht finden läßt. Wir haben somit

$$\frac{A^2}{a^2 \beta^2} = \frac{(1 + \beta^2)^2 (1 - \cos \psi)^2 + (1 - \beta^2)^2 \sin^2 \psi}{N^2}$$

$$= \frac{2(1 - \cos \psi)}{N}.$$

Wird demnach  $\cos \psi = 1$ , d. i. für  $\psi = 0, 2\pi, \dots$ , so wird kein Licht reflektiert, für  $\psi = \pi, 3\pi, \dots$  werden wir hingegen das Maximum der Lichtstärke erhalten.

Verfahren wir mit dem durchgelassenen Licht  $\Sigma'$  genau so wie mit dem reflektierten, so finden wir für das Quadrat der Amplitude

$$B^2 = \frac{a^2 (1 - \beta^2)^2}{N}.$$

Hier kann also nie völlige Dunkelheit eintreten, wohl gibt es aber auch ein Minimum der Lichtstärke, d. i. für  $\cos \psi = 0$ , also für  $\psi = \pi, 3\pi, \dots$ . Haben wir also im reflektierten Licht das Maximum der Intensität, so ist im durchgelassenen das Minimum und umgekehrt. Man sagt, die Erscheinungen im reflektierten und durchgelassenen Licht sind zueinander komplementär. Beide Intensitäten geben zusammen die ursprüngliche; denn es ist

$$A^2 + B^2 = a^2.$$

Wir haben noch zu erklären, weshalb wir die

Lichtintensität proportional dem Quadrat der Amplitude der schwingenden Bewegung setzen. Die Lichtstärke ist offenbar proportional der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung. Ändert sich nun der Schwingungszustand nach der Gleichung

$$\sigma = a \sin \frac{2 \pi t}{\tau},$$

so wird die jeweilige Geschwindigkeit der sich bewegenden Teilchen dem Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2 \pi}{\tau} a \cos \frac{2 \pi t}{\tau}$$

proportional sein. Die lebendige Kraft ist demnach der Größe  $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$  und damit  $a^2$  proportional. Da wir die

Schwingungsdauer als unabhängig von der Intensität halten, so ändert sich der Mittelwert der lebendigen Kraft tatsächlich nur mit dem Quadrat der Amplitude.

### § 17. Newtons Farbenglas.

Legen wir auf eine planparallele Glasplatte eine sehr flache konvexe Linse (Fig. 24), so begrenzen wir damit eine Luftschicht von veränderlicher Dicke, welche in der Mitte unendlich dünn wird. Man nennt diese Anordnung „Newtons Farbenglas“. Eine solche Luftschicht muß nach dem vorhergehenden Paragraphen sowohl im durchgehenden als reflektierten Licht Interferenzerscheinungen zeigen. An einer bestimmten Stelle vom Radius  $x$  hat die Luftschicht die Dicke

$$MN = AB = R - \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x^2}{2R},$$

wenn wir den Krümmungsradius  $R$  der Linse gegen-

über  $x$  sehr groß annehmen. Wir erhalten nach § 16 für  $\psi = 0, 2\pi \dots$  im reflektierten Licht Dunkelheit. Lassen wir das Licht senkrecht auffallen, so wird  $AB = d$  (Fig. 23), wenn wir unter  $d$  die Dicke der Schicht verstehen,  $AD = 0$ . Mithin ist

$$\psi = \frac{4\pi d}{c'\tau}.$$

Es ist aber  $c'\tau = \lambda'$  die Wellenlänge des Lichts in der Platte. Wir haben demnach Dunkelheit für  $d = 0, \frac{\lambda'}{2}, \frac{2\lambda'}{2}, \frac{3\lambda'}{2} \dots$ , das ist für  $x^2 = 0, \lambda'R, 2\lambda'R, \dots$ . Wir erhalten demnach in unserm Farbenglas dunkle

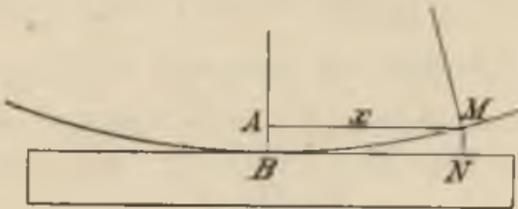


Fig. 24.

Kreise, deren Radien sich der Reihe nach wie  $0 : 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} \dots$  verhalten. Bei Licht, welches aus mehreren Farben zusammengesetzt ist, entstehen natürlich entsprechende farbige Ringe.

### § 18. Wirkung dünner Blättchen bei schief auffallendem Licht — Talbots Linien.

Auf ein Blättchen von der Dicke  $d$  (Fig. 25) falle Licht unter dem Winkel  $\alpha$  auf, welches unter dem Winkel  $\beta$  im Blättchen weitergeht. In der Formel

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{2AB}{c'} - \frac{AD}{c} \right)$$

(§ 16) wollen wir  $AB$  und  $AD$  durch Blättchendicke, Einfallswinkel und Brechungswinkel ausdrücken. Wir haben

$$d = AB \cdot \cos \beta,$$

ferner

$$AD = AA' \cdot \sin \alpha = 2 AB \cdot \sin \beta \sin \alpha = \frac{2 d \sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta},$$

folglich

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{2d}{c' \cos \beta} - \frac{2d \sin \alpha \sin \beta}{c \cos \beta} \right) \\ &= \frac{4\pi d}{c' \tau \cos \beta} \left( 1 - \frac{c'}{c} \sin \alpha \sin \beta \right) \\ &= \frac{4\pi d}{\lambda' \cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4\pi d}{\lambda'} \cos \beta, \end{aligned}$$

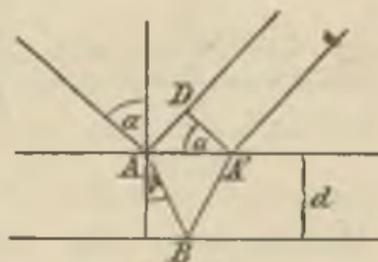


Fig. 26.

indem ja  $\frac{c'}{c} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{n} = \sin \beta$  ist. Für  $\psi = 0, 2\pi, \dots$

haben wir wiederum Dunkelheit im reflektierten Licht. Indem die Strahlen schief auffallen, erzielen wir also den Effekt, als würde das Blättchen dünner.

Wir setzen nun voraus, unser Blättchen sei so dick, daß die Formel

$$\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos \beta = 2m\pi,$$

nach welcher wir Dunkelheit erhalten, erst für ein größeres  $m$  erfüllt ist. Gehen wir vom roten zum violetten Licht über, so wird die Wellenlänge etwa halb so groß. Es muß daher wiederum für den Fall der Dunkelheit  $m$  sich etwa verdoppeln. Haben wir daher weißes Licht, so werden durch unser Blättchen in demselben alle jene Lichtsorten verlöschen, deren Wellenlängen obige Gleichung erfüllen, wenn wir der Reihe nach anstatt  $m$  die Werte  $m + 1, m + 2 \dots 2m$  einsetzen. Wir können dies dadurch nachweisen, daß wir das Licht nach der Reflexion durch ein Prisma gehen lassen. Wir erhalten dann ein Spektrum mit  $m$  dunklen Streifen, welche nach ihrem Entdecker den Namen Talbotsche Linien führen.

§ 19. Biegung des Lichts.

Fresnel machte vom Huygensschen Prinzip folgende Anwendung. Er sagt: Von allen Punkten einer

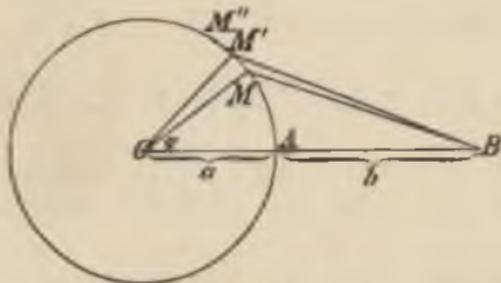


Fig. 26.

Kugelwelle (Fig. 26) gelangt Licht nach dem Punkt B. Derselbe erscheint aber nur deshalb nicht heller, als würde er von einem geraden Strahl von O aus getroffen, weil die Strahlen MB, M'B usw. verschiedene Wege zurücklegen, sich infolgedessen durch Interferenz gegenseitig auslöschen.

Wir denken uns auf der Kugel durch M einen Kreis gezogen, indem wir die Kugel einfach um OB rotieren lassen. Die Fläche der Kugelkalotte zwischen A und M ist dann

$$F = 2 \pi a^2 (1 - \cos \varphi).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \overline{BM}^2 &= a^2 + (a + b)^2 - 2 a (a + b) \cos \varphi \\ &= b^2 + 2 a (a + b) (1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

folglich

$$1 - \cos \varphi = \frac{\overline{BM}^2 - b^2}{2 a (a + b)}.$$

Wir erhalten sonach

$$F = \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}^2 - b^2)$$

und analog

$$F' = \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}'^2 - b^2)$$

usw. Wir setzen nun

$$F' - F = f = \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}'^2 - \overline{BM}^2),$$

$$f' = \frac{\pi a}{a + b} (\overline{BM}''^2 - \overline{BM}'^2)$$

usf. Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß  $\overline{BM}' - \overline{BM} = \overline{BM}'' - \overline{BM}' = \overline{BM}''' - \overline{BM}'' = \dots = p$  ist. Dann wird

$$f = \frac{\pi a p}{a + b} (\overline{BM}' + \overline{BM}),$$

$$f' = \frac{\pi a p}{a + b} (\overline{BM}'' + \overline{BM}'),$$

$$f'' = \frac{\pi a p}{a + b} (BM''' + BM''),$$

. . . . .

Daraus folgt nun

$$f - 2f' + f'' = 0.$$

Die Fläche einer jeden derartigen Kugelzone ist also gleich der halben Flächensumme der beiden benachbarten Zonen, oder es wird vom

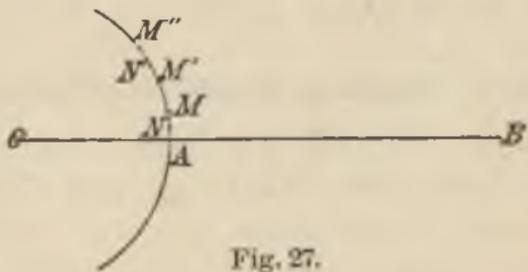


Fig. 27.

Punkt O aus durch jede Zone gerade halb so viel Licht gehen als durch ihre beiden Nachbarzonen zusammen.

Wählen wir nun die Punkte M, M', ... so, daß

$$MB - AB = M'B - MB = \dots = \frac{\lambda}{2},$$

so wird sämtliches Licht, welches durch MM' (Fig. 27) geht, durch jenes, welches bei MN und M'N' passiert, aufgehoben; und so geht es über die ganze Kugelfläche fort. Also nur jenes Licht, welches durch den kleinen Kreis AN geht, wird in B nicht vernichtet.

Der Punkt B wird also bei voller Beleuchtung nicht heller erscheinen, als wenn wir in A einen Schirm mit einer Öffnung vom Radius AN anbringen. Vergrößern wir jetzt die Öffnung, so wird B noch heller werden. Die Helligkeit wird jedoch bei weiterer Vergrößerung wieder schwächer, und wir werden

die schwächste Beleuchtung haben, wenn die Öffnung den Radius  $AM'$  hat. Dann wird das Licht wieder heller usw. Ebenso können wir aber auch nach A einen kleinen kreisförmigen Schirm bringen. Hat er den Radius  $AN$ , so wird in B kein Licht sein; wird er größer, so wird es in B hell. Bei weiterer Vergrößerung wird B wieder dunkel usf. Die Lichtstrahlen erleiden also eine Ablenkung, so oft sie nahe an der Kante eines Schirms vorübergehen. Man nennt diese Erscheinung „Beugung des Lichts“.

### § 20. Beugung durch eine Spalte.

Der Schirm  $OX$  (Fig. 28) besitze eine Spalte  $AA'$ , auf welche unter dem Winkel  $\alpha$  eine Planwelle  $AB$

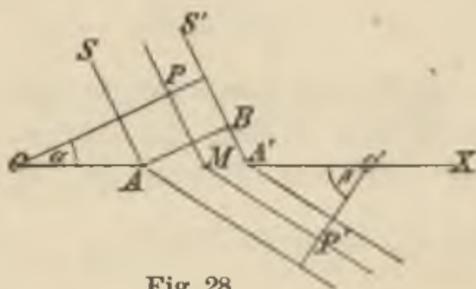


Fig. 28.

fällt. Der Schirm sei gleichzeitig die Grenze zweier verschiedener Medien. Im oberen sei die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , im unteren  $c'$ . Bei P haben wir den Schwingungszustand:

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\tau} t.$$

In  $P'$  haben wir dann

$$\sigma' = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'} \right).$$

Dorthin gelangt das Licht unter dem Winkel  $\beta$  zum Lot, und die gesamte Lichtmenge wird sich darstellen lassen durch

$$I = \gamma a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{PM}{c} - \frac{MP'}{c'} \right) df,$$

wenn wir unter  $df$  ein Flächenelement der Spalte im Punkt  $M$  verstehen, während  $\gamma$  jener Bruchteil des Lichts ist, der in das untere Medium eindringt. Wir setzen nun  $OM = x$ , also

$$PM = x \sin \alpha, \quad MP' = (p - x) \sin \beta,$$

wobei  $OO' = p$  ist. Ferner sei noch  $df = dx dy$ , dann

$$I = \gamma a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin \alpha}{c} - \frac{p \sin \beta}{c'} + \frac{x \sin \beta}{c'} \right) dx dy.$$

Integrieren wir über den ganzen Spalt, so wird aus  $dy$  einfach die Höhe  $h$  des Spalts, und es bleibt uns für die gesamte Lichtmenge  $L$  der Ausdruck

$$\begin{aligned} L &= \gamma a h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin \alpha}{c} - \frac{p \sin \beta}{c'} + \frac{x \sin \beta}{c'} \right) dx \\ &= \gamma a h \int_{x_0}^{x_0+b} \sin(\varphi - mx) dx \\ &= \frac{\gamma a h}{m} [\cos(\varphi - mx_0 - mb) - \cos(\varphi - mx_0)] \\ &= \frac{2\gamma a h}{m} \sin\left(\varphi - mx_0 - \frac{mb}{2}\right) \sin \frac{mb}{2} \\ &= \gamma a b h \sin\left(\varphi - mx_0 - \frac{mb}{2}\right) \frac{\sin \frac{mb}{2}}{\frac{mb}{2}}, \end{aligned} \quad (15)$$

wobei wir

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{p \sin \beta}{c'} \right) = \varphi, \quad \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{\sin \alpha}{c} - \frac{\sin \beta}{c'} \right) = m$$

gesetzt haben und unter  $b = AA'$  die Breite des Spalts verstehen. Die Amplitude der neuen Lichtbewegung ist also

$$A = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}}.$$

Sie ist eine periodische Funktion von  $m$ . Ihr Maximum hat sie für  $m = 0$ . Das ist der Fall, wenn

$$\frac{\sin \alpha}{c} - \frac{\sin \beta}{c'} = 0,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'} = n,$$

wird. Das Maximum der Beleuchtung haben wir demnach dort, wohin der Strahl nach dem Brechungsgesetz zu fallen hat.

Für die Folge wollen wir annehmen, daß auf beiden Seiten des Schirms dasselbe Medium, also  $c = c'$  ist. Ferner sollen die Strahlen senkrecht einfallen. Es muß somit  $\alpha = 0$  sein, und wir haben

$$m = - \frac{2\pi \sin \beta}{\lambda}.$$

Was nun die Lichtintensität für verschiedene  $\beta$  betrifft, so handelt es sich um den Faktor

$$\frac{\sin \frac{(b\pi \sin \beta)}{\lambda}}{\frac{b\pi \sin \beta}{\lambda}}.$$

Das Licht wird also durch unsere Spalte so gebeugt, daß für  $\beta = 0$  die größte Lichtintensität vorhanden ist. Nach links und rechts nimmt sie sodann ab, bis für

$$\sin \beta = \frac{\lambda}{b}$$

Dunkelheit eintritt. Für größere  $\beta$  haben wir dann wieder Licht, hierauf wieder Dunkelheit usw., doch da der Bogen gegenüber dem Sinus rasch wächst, so nimmt mit wachsendem  $\beta$  auch die Intensität der Maxima bald ab.

### § 21. Beugung durch zwei Spalten — Interferenzversuche von Young und Arago.

Der Schirm  $OO'$  (Fig. 29) besitze zwei parallele Spalten  $AA'$  und  $BB'$  von gleicher Breite  $b$  und gleicher

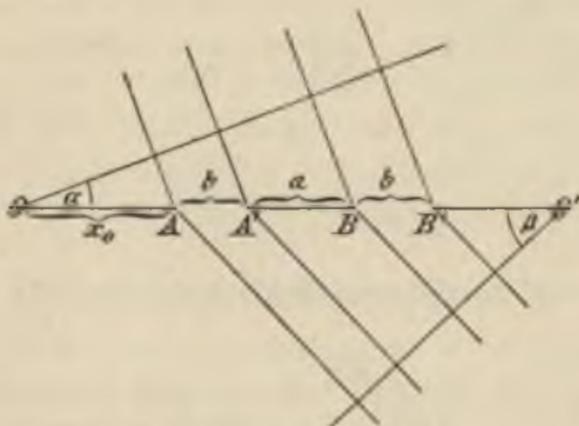


Fig. 29.

Höhe  $h$ . Der Zwischenraum beider Spalten habe die Breite  $B$ . Das Licht falle unter dem Winkel  $\alpha$  auf, und wir fragen nach der Lichtmenge, welche unter dem Winkel  $\beta$  unterhalb des Schirms austritt. Wir brauchen also für die beiden Spalten bloß die Formel des vorigen

Paragraphe anzuwenden und zu addieren. Demnach haben wir für die erste Spalte

$$\sigma = \gamma a b h \sin \left( \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

für die zweite

$$\sigma' = \gamma a b h \sin \left( \varphi - m x_0 - m B - m b - \frac{m b}{2} \right) \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}},$$

indem wir bei der zweiten anstatt  $x_0$  den Wert  $x_0 + B + b$  zu setzen haben. Die Summe beider Lichtmengen ist also

$$\begin{aligned} \sigma + \sigma' &= \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cdot 2 \sin \left( \varphi - m x_0 - \frac{m B + m b}{2} - \frac{m b}{2} \right) \\ &\quad \times \cos \frac{m B + m b}{2}, \end{aligned}$$

für die resultierende Amplitude erhalten wir

$$A = 2 \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cos \frac{m B + m b}{2}.$$

Wiederum sei oben und unten dasselbe Medium und der Einfallswinkel  $\alpha = 0$ , also  $m = -\frac{2 \pi \sin \beta}{\lambda}$ . Mit wachsendem Winkel  $\beta$  erhalten wir wieder Maxima und

Minima der Beleuchtung. Jene, welche von dem Faktor  $\frac{\sin \frac{mb}{2}}{\frac{mb}{2}}$

herrühren, nennt man die Maxima bezgl. Minima erster Klasse, jene des Faktors  $\cos \frac{mB + mb}{2}$  die zweiter Klasse. Die Minima zweiter Klasse werden also eintreten für

$$\frac{mB + mb}{2} = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

das ist für

$$\sin \beta = \pm \frac{\lambda}{2(B + b)}, \pm \frac{3\lambda}{2(B + b)}, \dots$$

Man nennt diese Erscheinung „Youngs Interferenzversuch“, welche Arago dahin abgeändert hat, daß er vor die eine Spalte ein dünnes Blättchen gab. Dadurch wird der Strahlengang verzögert, und die Folge ist, daß die Symmetrielinie der Erscheinung gegen die Symmetrielinie der beiden Spalten verschoben ist.

### § 22. Fraunhofers Gitter.

Bringen wir auf einem Schirm eine Reihe gleichweit voneinander abstehender Spalten an, so erhalten wir ein Fraunhofersches Gitter. Dieses zeigt Interferenzerscheinungen, welche wir nach derselben Methode wie den Youngschen Versuch im vorhergehenden Paragraphen herleiten können. Das Gitter soll  $n$  Spalten besitzen. Wir haben somit  $n$  Gleichungen von der Form der Gleichung (15) zu addieren, welche sich nur dadurch voneinander unterscheiden, daß wir

in der zweiten anstatt  $x_0$  die Größe  $x_0 + B + b$ , in der dritten  $x_0 + 2(B + b)$  usw. zu setzen haben. Ferner führen wir noch die Größen

$$\psi = \varphi - m x_0 - \frac{m b}{2}, \quad \eta = m(B + b)$$

ein und erhalten somit schließlich das Resultat

$$\Sigma = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \left\{ \sin \psi + \sin(\psi - \eta) + \sin(\psi - 2\eta) \right. \\ \left. + \dots + \sin[\psi - (n - 1)\eta] \right\}.$$

Die Summierung dieser Reihe geschieht auf dieselbe Weise wie in § 16. Wir können schreiben

$$\begin{aligned} R + Si &= e^{\psi i} + e^{(\psi - \eta)i} + e^{(\psi - 2\eta)i} + \dots \\ &+ e^{[\psi - (n-1)\eta]i} = e^{\psi i} \frac{1 - e^{-n\eta i}}{1 - e^{-\eta i}} \\ &= \frac{e^{\psi i} (1 - e^{-n\eta i})(1 - e^{\eta i})}{2(1 - \cos \eta)} \\ &= \frac{e^{\psi i} \cdot e^{-\frac{n\eta i}{2}} \left( e^{\frac{n\eta i}{2}} - e^{-\frac{n\eta i}{2}} \right) e^{\frac{\eta i}{2}} \left( e^{-\frac{\eta i}{2}} - e^{\frac{\eta i}{2}} \right)}{2(1 - \cos \eta)} \\ &= \frac{e^{\left(\psi - \frac{n\eta}{2} + \frac{\eta}{2}\right)i} \cdot 2i \sin \frac{n\eta}{2} \cdot -2i \sin \frac{\eta}{2}}{2(1 - \cos \eta)}. \end{aligned}$$

Danach erhalten wir

$$S = \sin \left( \psi - \frac{n\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \frac{2 \sin \frac{n\eta}{2} \sin \frac{\eta}{2}}{1 - \cos \eta}.$$

Die Amplitude des resultierenden Lichts wird nun

$$A = \gamma a b h \frac{\sin \frac{m b}{2}}{\frac{m b}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{n m (B + b)}{2}}{\sin \frac{m (B + b)}{2}}.$$

Es ergeben sich somit wiederum Maxima und Minima erster und zweiter Klasse. Was die Sichtbarkeit anbelangt, so wird die Intensität der Maxima zweiter Klasse um so größer werden, je größer  $n$  ist. Für diese Maxima haben wir nämlich

$$\sin \frac{m (B + b)}{2} = 0,$$

also

$$\frac{m (B + b)}{2} = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

Es wird dann

$$\frac{\sin \frac{n m (B + b)}{2}}{\sin \frac{m (B + b)}{2}} = n.$$

Ist demnach  $n$  groß genug, so werden die Maxima erster Klasse gegenüber jenen zweiter ganz verschwinden.

Erinnern wir uns, daß  $m = -\frac{2\pi \sin \beta}{\lambda}$  ist, so finden

wir ohne weiteres für die Maxima zweiter Klasse

$$\sin \beta = \pm \frac{\lambda}{B + b}, \pm \frac{2\lambda}{B + b}, \dots$$

$$n (B + b) = A$$

ist die Gesamtbreite unseres Gitters. Kennen wir daher die Zahl der Linien, so finden wir aus der Breite des Gitters leicht die Größe  $B + b$ . Damit ist uns die

Möglichkeit gegeben, die Wellenlänge des Lichts aufs genaueste zu bestimmen. Die Winkel, bei welchen die einzelnen Maxima auftreten, werden um so größer sein, je größer die Zahl der Spalten auf der Längeneinheit des Gitters ist. Ist das Licht eine Mischfarbe, so wird es durch das Gitter in die einzelnen Farben infolge der verschiedenen Wellenlängen  $\lambda$  zerlegt. Wir erhalten ein Gitterspektrum.

### § 28. Polarisation des Lichts bei der Reflexion — Gleichungen von Fresnel.

Malus machte die Beobachtung, daß Licht, durch einen Turmalin betrachtet, verschiedene Erscheinungen hervorruft, je nachdem es direkt oder erst nach vorhergegangener Reflexion an einer ebenen Fläche den Turmalin passiert. Das Licht erfährt also durch die Reflexion eine Veränderung, die man Polarisation nennt. Fresnel wußte diese Erscheinung in mathematische Formeln zu fassen, er sah sich jedoch dabei genötigt anzunehmen, daß die Ätherteilchen Schwingungen vollführen, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts stattfinden. Wir können von dieser kühnen Hypothese jedoch absehen, wenn wir anstatt der Schwingung eines Teilchens den Bewegungszustand der Ätherteilchen einführen. Welche Bewegung die einzelnen Ätherteilchen dabei machen, brauchen wir gar nicht zu wissen, wenn sich nur der ganze Bewegungszustand durch einen Vektor darstellen läßt, welcher senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung ist. Auch bei dieser Annahme können wir den Weg Fresnels zur Herleitung der Polarisationsgleichungen einschlagen. Nach ihm gelten folgende Sätze:

1. Es muß die lebendige Kraft des einfallenden Strahls gleich der Summe der lebendigen Kräfte des reflektierten und gebrochenen Strahls sein.
2. In der Trennungsebene beider Medien muß Kontinuität vorhanden sein. Das heißt: in der Trennungsebene muß die Summe der Bewegung im ersten Medium gleich der Bewegung im zweiten sein.

Wir wollen nun daran gehen, die lebendige Kraft einer Welle aufzusuchen. Wir setzen voraus, daß unsere Lichtwelle eine Planwelle parallel zur  $xz$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 30) sei. Ihre Breite sei  $g$ , ihre Höhe  $h$ . Der Bewegungszustand im Anfangspunkt sei gegeben durch

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

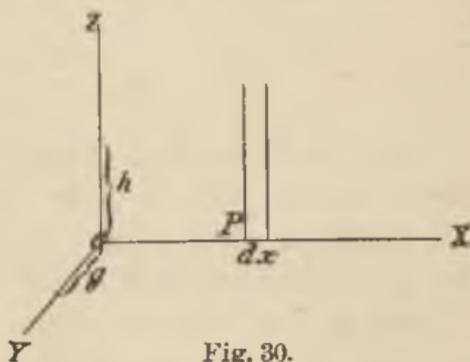


Fig. 30.

Dann haben wir in der Entfernung  $x$  die Bewegung

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

wenn  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts ist. Im Punkt  $P$  denken wir uns zwei parallele Ebenen senkrecht zur  $x$ -Achse, welche um  $dx$  voneinander entfernt sind. Diese schneiden aus der Lichtwelle ein Volumen  $gh dx$  von der Masse  $\rho gh dx$ . Wir nehmen also an, die Dichte des Äthers sei  $\rho$ . Die Lichtbewegung wird daher in diesem Volumen eine lebendige Kraft

$$dL = \frac{1}{2} k \rho g h dx \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2$$

besitzen, wobei  $k$  der entsprechende Proportionalitätsfaktor ist. Integrieren wir diesen Ausdruck von 0 bis  $\lambda$ , so erhalten wir die gesamte lebendige Kraft einer Welle, Sie ist somit

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} k \rho g h \int_0^\lambda \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 dx = \frac{2\pi^2 k \rho g h a^2}{\tau^2} \int_0^\lambda \cos^2 \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x}{c} \right) dx \\ &= \frac{2\pi^2 k \rho g h a^2}{\tau^2} \int_0^\lambda \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] dx \\ &= \frac{\pi^2 k \rho g h a^2 \lambda}{\tau^2} . \end{aligned}$$

Für die lebendige Kraft einer Welle im reflektierten Licht ändert sich in dem ganzen Ausdruck nichts als die Größe  $a$ . Wir wollen sie für dieses Licht  $a'$  nennen. Im gebrochenen Licht haben wir jedoch auch eine andere Dichte  $\rho$ , ein anderes  $h$  und  $\lambda$ . Wir wollen hier analog  $a_1$ ,  $\rho_1$ ,  $h_1$  und  $\lambda_1$  einführen. Somit muß folgende Gleichung gelten:

$$\frac{\pi^2 k \rho g h a^2 \lambda}{\tau^2} = \frac{\pi^2 k \rho g h a'^2 \lambda}{\tau^2} + \frac{\pi^2 k \rho_1 g h_1 a_1^2 \lambda_1}{\tau^2}$$

oder

$$(16) \quad \rho h a^2 \lambda = \rho h a'^2 \lambda + \rho_1 h_1 a_1^2 \lambda_1 .$$

Es ist nun nach Fig. 31

$$h : h_1 = \cos \alpha : \cos \beta ,$$

ferner

$$\lambda = c \tau , \quad \lambda_1 = c_1 \tau ,$$

wenn  $c$  und  $c_1$  die Lichtgeschwindigkeiten oben und

unten sind. Daraus folgt

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{c}{c_1} = n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Demnach können wir die Gleichung (16) schreiben

$$\varrho (a^2 - a'^2) \sin \alpha \cos \alpha = \varrho_1 a_1^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Fresnel macht nun weiter die Annahme, daß sich die Größe der Lichtgeschwindigkeit aus ähnlichen Elementen wie die Schallgeschwindigkeit zusammensetzt. Er schreibt daher

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

wobei wir unter E die Elastizität des Äthers verstehen können. Mit der Annahme, E sei für alle Körper gleich, folgt

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho_1}},$$

wonach

$$\frac{c^2}{c_1^2} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$$

gesetzt werden kann. Obige Gleichung der lebendigen Kraft wird somit

$$(a^2 - a'^2) \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta = a_1^2 \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha$$

oder

$$(a^2 - a'^2) \cos \alpha \sin \beta = a_1^2 \cos \beta \sin \alpha. \quad (17)$$

Wir haben jetzt noch die Gleichungen der Kontinuität zu entwickeln. Wir wissen, daß der

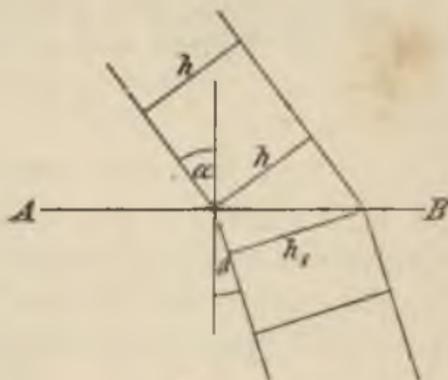


Fig. 31.

Schwingungszustand durch einen Vektor ausgedrückt werden kann, welcher senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichts steht. Wir zerlegen diesen Vektor in zwei Komponenten, deren eine in der Einfallsebene, während die andere senkrecht dazu ist. Diese wollen wir zuerst betrachten. Sie fällt in die Trennungsebene selbst hinein, und es muß zur Aufrechterhaltung der Kontinuität der Zustand  $\sigma_1$  im unteren Medium gleich der Summe  $\sigma + \sigma'$  im oberen sein. Daraus folgt

$$(18) \quad a + a' = a_1,$$

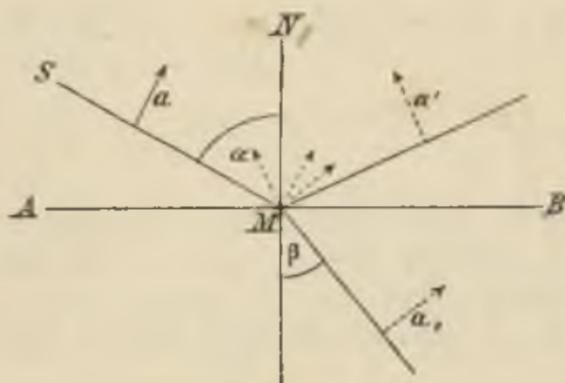


Fig. 82.

was in Gleichung (17) eingesetzt

$$(a - a') \cos \alpha \sin \beta - (a + a') \cos \beta \sin \alpha = 0$$

ergibt, was sich weiter umwandeln läßt in

$$a(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = a \sin(\beta - \alpha) = a' \sin(\alpha + \beta),$$

$$(19) \quad a' = -a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Es kehrt sich also die Amplitude im reflektierten Licht um. Für die Amplitude im gebrochenen Strahl finden wir aus den Gleichungen (17) und (18)

$$(20) \quad a_1 = a \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Für die Komponente in der Einfallsebene haben wir eine bestimmte Richtung als positiv anzunehmen. Es sei jene des Vektors  $a$  (Fig. 32). Diesen Vektor wollen wir im Punkt  $M$  abermals in eine Komponente in der Trennungsebene  $AB$  und eine im Einfallslot  $MN$  zerlegen. Es muß also dann der Kontinuität halber

$$(21) \quad a \cos \alpha - a' \cos \alpha = a_1 \cos \beta,$$

ferner

$$(22) \quad a \sin \alpha + a' \sin \alpha = a_1 \sin \beta$$

sein. Wenn wir die Gleichungen (21) und (22) miteinander multiplizieren, so gelangen wir in Widerspruch mit der Gleichung (17). Fresnel nahm daher an, daß die Gleichung (22) den Vorgängen in der Wirklichkeit nicht entspricht.

Dividieren wir Gleichung (17) durch Gleichung (21), so erhalten wir

$$(a + a') \sin \beta = a_1 \sin \alpha.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $\cos \beta$ , hingegen die Gleichung (21) mit  $\sin \alpha$  und subtrahieren beide voneinander. Es bleibt dann

$$(a + a') \sin \beta \cos \beta - (a - a') \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

woraus weiter folgt

$$a' = a \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = a \frac{\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Wir erhalten sonach für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt,

$$(23) \quad a' = a \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Ferner findet sich für die entsprechende Amplitude des gebrochenen Lichts wieder aus den Gleichungen (17) und (21) leicht

$$(24) \quad a_1 = a \frac{4 \cos \alpha \sin \beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} = a \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Wird  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , so wird  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \infty$ , also  $a' = 0$ .

Wenn wir demzufolge Licht so einfallen lassen, daß  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  ist, so werden parallel zur Einfallsebene gehende Schwingungen überhaupt nicht

reflektiert. Es ist für Glas dieser Winkel  $\alpha$  etwa  $57^\circ$ .

Man nennt ihn den Polarisationswinkel. Für den

Polarisationswinkel ist also  $\sin \beta = \cos \alpha$ , daher

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

es ist die Tangente des Polarisationswinkels gleich dem Brechungs-exponenten.

In Fig. 33 sei  $EE$  die Einfallsebene des Lichts,  $PP$  liege in der Trennungsebene der beiden Medien und stehe senkrecht auf  $EE$ . Die Schwingungen des Lichts finden in der Geraden  $SS$  statt.  $OA$  sei die Amplitude des einfallenden Lichts. Wir zerlegen sie in die Komponenten  $OB$  senkrecht und  $OC$  parallel zur Einfallsebene. Wir haben somit

$$OB = OA \sin \varphi, \quad OC = OA \cdot \cos \varphi.$$

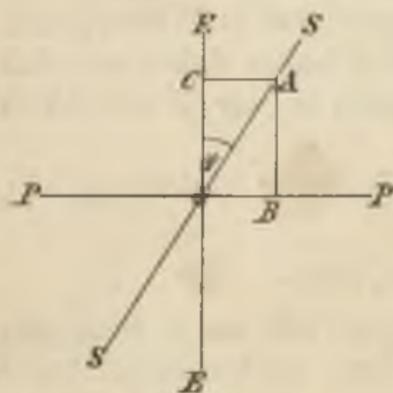


Fig. 33.

Nach der Reflexion verwandelt sich OB nach Gleichung (19) in

$$OB' = -OB \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und nach Gleichung (23) OC in

$$OC' = OC \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Es ist nun

$$\frac{OB'}{OC'} = -\frac{OB \cos(\alpha - \beta)}{OC \cos(\alpha + \beta)} = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es werden sich nach der Reflexion die Komponenten sonach zu einer Schwingungsrichtung  $\varphi'$  zusammensetzen, welche von der früheren abweicht. Wir haben nämlich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{OB'}{OC'} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Es wird also durch die Reflexion eine Drehung der Schwingungsebene oder, wie man auch sagt, der Polarisationssebene bewirkt.

Wird  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , d. h. fällt das Licht unter dem Polarisationswinkel auf, so wird  $\operatorname{tg} \varphi' = -\infty$ , das reflektierte Licht schwingt parallel zur Trennungsebene beider Medien. Das natürliche Licht, dessen Schwingungen nach allen Richtungen in einer zum Lichtstrahl senkrechten Ebene gehen, wird daher, wenn es unter dem Polarisationswinkel reflektiert wird, nur noch Schwingungen in einer Richtung, nämlich parallel zur Trennungsebene machen, es ist vollkommen polarisiert. Lassen wir nun solches Licht unter dem Polarisationswinkel auf

einen Spiegel fallen, aber so, daß es parallel zur Einfallsebene schwingt, so wird es überhaupt nicht mehr reflektiert.

Wir wollen jetzt eine ähnliche Betrachtung für das gebrochene Licht anstellen. Für dieses seien die Komponenten  $OB_1$  und  $OC_1$ , und wir haben nach den Gleichungen (20) und (24)

$$OB_1 = \overline{OB} \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad OC_1 = \overline{OC} \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \beta},$$

folglich

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OB}{OC} \cdot \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \varphi \cos(\alpha - \beta).$$

Also auch bei der Brechung haben wir eine Änderung der Schwingungsrichtung. Lassen wir Licht durch eine planparallele Platte fallen, so haben wir bei der ersten Brechung

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\alpha - \beta),$$

bei der zweiten

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos(\beta - \alpha) = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^2(\alpha - \beta).$$

Fällt das Licht durch  $n$  Platten, so haben wir

$$\operatorname{tg} \varphi_{2n} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^{2n}(\alpha - \beta).$$

Da nun  $\cos(\alpha - \beta) < 1$ , so nähert sich mit wachsender Zahl der Platten jedes  $\varphi$  mehr jenem Winkel, für welchen  $\operatorname{tg} \varphi_{2n} = 0$  ist, d. i. dem Winkel  $\varphi_{2n} = 0$ . Man nennt eine solche Reihe aufeinandergeschichteter planparalleler Platten einen Plattensatz, welcher ebenfalls die Fähigkeit hat, natürliches Licht in teilweise polarisiertes zu verwandeln, jedoch schwingt das polarisierte Licht dann in der Einfallsebene.

Neumann ging nun von der Anschauung aus, daß die Dichte des Äthers in allen Körpern gleich,

die Elastizität jedoch verschieden ist. Man erhält sodann aus der Gleichung (16)

$$(a^2 - a'^2) \sin \alpha \cos \alpha = a_1^2 \sin \beta \cos \beta,$$

und es stimmt dann auch die Gleichung (22) mit den anderen überein. Führen wir unter dieser Annahme in ganz derselben Weise wie früher die Berechnung der verschiedenen Amplituden durch, so erhalten wir zwar dieselben Formeln, doch erscheinen sie bezüglich der beiden Komponenten der Lichtschwingung vertauscht. Das heißt, nach Neumann gelten die Gleichungen (19) und (20) für das Licht, welches in der Einfallsebene schwingt, die Gleichungen (23) und (24) für jenes senkrecht zur Einfallsebene.

#### § 24. Doppelbrechung.

Geht ein Lichtstrahl durch eine Kalkspatplatte, so wird er im allgemeinen in zwei polarisierte Lichtstrahlen zerlegt, deren Schwingungsebenen senkrecht zueinander liegen. Huygens erklärte diese Erscheinung wieder mit Hilfe der Elementarwellen. Diese sind im Kalkspat jedoch nicht Kugelwellen, sondern jeder vom Lichtstrahl getroffene Punkt des Kalkspats wird zum Erregungspunkt neuer Elementarwellen, deren eine eine Kugel, die andere ein Rotationsellipsoid darstellt, deren Rotationsachse die kleine Achse der Ellipse ist und die Größe des Durchmessers der Kugelwelle hat. Es liegt somit die Kugelwelle innerhalb des Ellipsoids und berührt

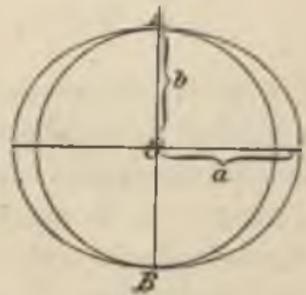


Fig. 34.

es in zwei Punkten A und B (Fig. 34). Die Richtung AB nennt man die optische Achse. Sie fällt beim Kalkspat mit der Verbindungsgeraden der stumpfen Rhomboderecken zusammen. Die Ebene, welche von der optischen Achse und dem Lichtstrahl gebildet wird, nennen wir den Hauptschnitt.

Wir denken uns den Kalkspat senkrecht zur optischen Achse  $qx$  (Fig. 35) geschliffen. Das Lichtbündel  $SS'$  falle schief auf. In O entstehen sodann

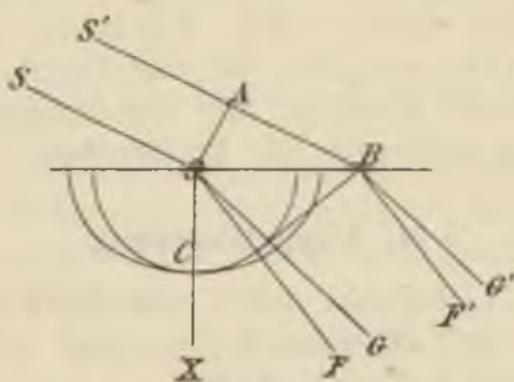


Fig. 35.

die zwei Elementarwellen, welche den Durchmesser bezüglich die kleine Achse  $OC$  erreicht haben, wenn der Punkt A der Lichtwelle nach B kommt. Die Tangenten von B an die Kugel bezüglich Ellipsoidfläche ergeben dann die zwei neuen Planwellen, welche in den Richtungen F und G ihren Weg fortsetzen. Das Licht hat also tatsächlich eine Doppelbrechung erlitten. Würde es, anstatt schief, senkrecht einfallen, so wäre keine Brechung vorhanden.

Dies ist nicht mehr der Fall, wenn wir den Kalkspat schief zur optischen Achse schleifen. Es ergibt dann Fig. 36, in welcher  $OX$  die optische Achse

sein soll, zwei Wellen, deren eine ungebrochen in der Richtung  $AB$  durch den Kalkspat geht, während die andere gebrochen wird und die Richtung  $AC$  einschlägt. Der ungebrochene Lichtstrahl, dessen Elementarwellen Kugelflächen sind, heißt der ordentliche Strahl. Er ist immer senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert. Der andere jedoch, der außerordentliche Strahl, rührt von den Ellipsoiden her, und sein Licht schwingt parallel zum Hauptschnitt. Drehen wir den Kalkspat um den einfallenden

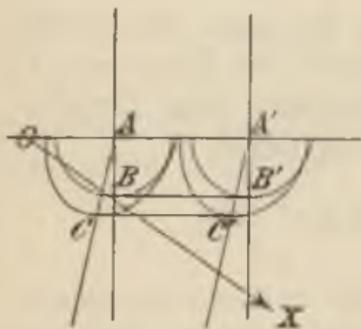


Fig. 36.

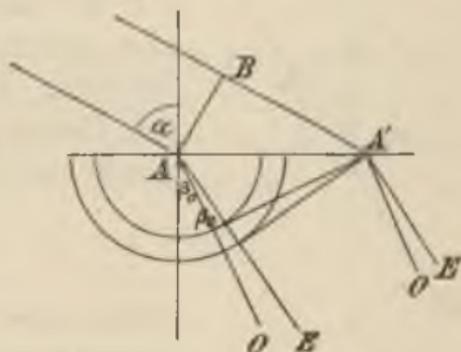


Fig. 37.

den Strahl als Achse, so behält der ordentliche Strahl seine Lage bei, während der außerordentliche sich um jenen herumdreht. Der Brechungsexponent des ordentlichen Strahls hat einen ganz bestimmten Wert, jener des außerordentlichen ändert sich mit dem Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der optischen Achse bildet. Man gibt jedoch in der Regel als Brechungsexponenten für den außerordentlichen Strahl seinen kleinsten Wert an. Dieser tritt ein, wenn die optische Achse in der brechenden Fläche selbst liegt und senkrecht zur Einfallsebene ist. Wir erhalten dann den ordentlichen und

außerordentlichen Strahl nach der Konstruktion Fig. 37, wo der kleinere Kreis der Kugelfläche angehört, während der größere der Äquator des Rotationsellipsoids ist.

### § 25. Elliptische und zirkulare Polarisation.

Wir nehmen an, ein polarisierter Lichtstrahl falle senkrecht auf eine planparallele Kalkspatplatte, deren optische Achse HH (Fig. 38) senkrecht zum Einfallslot liegt, während die Schwingungen in der Richtung PP vor sich gehen. HH versinnlicht also gleichzeitig die Lage des Hauptschnitts. Die Dicke der Platte sei  $\Delta$ ; der Bewegungszustand beim Einfallspunkt sei gegeben durch

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Dieser wird zerlegt in den ordentlichen und außerordentlichen Strahl. Ersterer ist beim Austritt aus der Platte

$$\sigma_o = a \sin \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\Delta}{o} \right),$$

letzterer

$$\sigma_e = a \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\Delta}{e} \right),$$

wenn wir mit  $o$  und  $e$  die Lichtgeschwindigkeit des ordentlichen bezgl. außerordentlichen Strahls bezeichnen. Wir wollen

$$\frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\Delta}{o} \right) = \psi, \quad \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{\Delta}{o} - \frac{\Delta}{e} \right) = \vartheta$$

setzen, können sonach schreiben

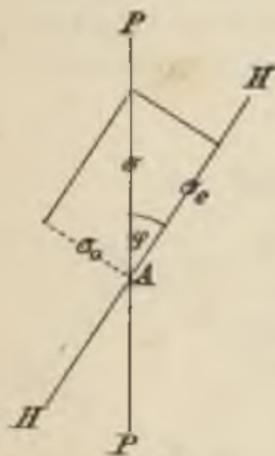


Fig. 38.

$\sigma_o = \eta = a \sin \varphi \sin \psi$ ,  $\sigma_e = \xi = a \cos \varphi \sin(\psi + \vartheta)$ ;  
 führen wir noch

$$a \cos \varphi = p, \quad a \sin \varphi = q$$

ein, so erhalten wir schließlich

$$\xi = p \sin(\psi + \vartheta), \quad \eta = q \sin \psi.$$

Betrachten wir diese Größen als rechtwinkelige  
 Koordinaten einer ebenen Kurve, so erhalten wir für  
 $\vartheta = 2\pi$

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{q}{p} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Das Licht der beiden Strahlen setzt sich also nach dem  
 Austritt wieder zu einer geradlinigen Bewegung zu-  
 sammen, welche dieselbe Schwingungsrichtung wie das  
 einfallende Licht hat. Ist  $\vartheta = \pi$ , so wird

$$\xi = -p \sin \psi, \quad \eta = q \sin \psi,$$

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{q}{p} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Es hat also die neue Schwingungsebene zur alten eine  
 Drehung von  $2\varphi$  erhalten. Es sei nun  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , dann

$$\xi = p \cos \psi, \quad \eta = q \sin \psi,$$

$$\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\eta^2}{q^2} = 1.$$

Wir haben somit als resultierenden Schwingungszustand  
 eine Bewegung, die uns bis jetzt noch nicht vorgekommen  
 ist. Die von uns erhaltene Kurve ist eine Ellipse,  
 weshalb wir das Licht elliptisch polarisiert nennen.  
 Ist die Schwingungsrichtung des einfallenden Lichts  
 durch  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  gegeben, d. h. bildet die Schwingungs-

richtung mit dem Hauptschnitt einen Winkel von  $45^\circ$ , so wird  $p = q$  und wir haben die Gleichung eines Kreises. Licht von einem derartigen Bewegungszustand nennt man daher zirkular polarisiertes Licht. Ist  $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ , so erhalten wir dieselbe Ellipse bezgl. denselben Kreis, nur geht jetzt die Bewegung in entgegengesetzter Richtung vor sich.

Wir wissen, daß

$$\vartheta = \frac{2\pi}{\tau} \left( \frac{A}{o} - \frac{A}{e} \right)$$

ist. Für  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  wird demnach

$$\frac{A}{o} - \frac{A}{e} = \frac{\tau}{4}.$$

Nun ist aber  $\frac{A}{o}$  die Zeit, welche der ordentliche Strahl braucht, um die Platte zu passieren,  $\frac{A}{e}$  die Durchgangszeit für den außerordentlichen Strahl. Wir erhalten somit elliptisch bezgl. zirkular polarisiertes Licht, wenn sich die Durchgangszeiten beider Strahlen um  $\frac{1}{4}$ -Schwingungsdauer voneinander unterscheiden. Glimmer läßt sich in dünne Blätter spalten, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Man nennt ein solches Glimmerblättchen  $\frac{1}{4}$ -Undulationsglimmer.

### § 26 ~~Polarisationsapparat~~ — Turmalinzange — senkrecht einfallendes Licht.

Um zu erkennen, in welcher Weise polarisiertes Licht beim Durchgang durch Kristallplatten geändert wird, benutzt man einen sogenannten Polarisations-

apparat. Ein solcher besteht aus zwei Hauptteilen, dem Polarisator und dem Analysator. Ersterer verwandelt das natürliche Licht in geradlinig polarisiertes. Dieses Licht läßt man dann durch die zu untersuchende Kristallplatte und sodann durch den Analysator gehen, aus welchem ebenfalls linear polarisiertes Licht austritt. Der einfachste derartige Apparat ist die sogenannte Turmalinzange. Der Turmalin hat die Eigenschaft, nur Licht von bestimmter Schwingungsrichtung durchzulassen. Bringen wir daher zwischen zwei Turmalinplatten einen Kristall, so kann durch Verdrehung der Turmaline gegeneinander alles erzielt werden, was man von einem Polarisationsapparat verlangt.

Es seien nun  $\sigma_e = AM$  (Fig. 39) und  $\sigma_o = AM'$ , die beiden Schwingungen nach dem Passieren der Kristallplatte. Die Strahlen gelangen sodann durch den Analysator, der sie nur Schwingungen in der Richtung  $QQ$  ausführen läßt. Es könnte dies z. B. ein Spiegel sein, auf welchem die Strahlen unter dem Polarisationswinkel auffallen.

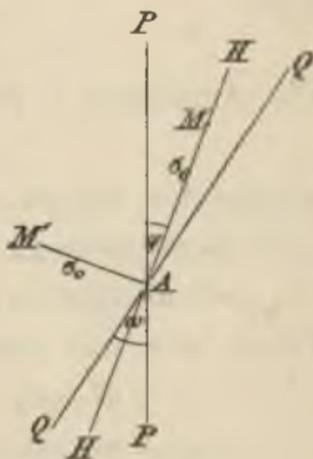


Fig. 39.

Wir haben nun nach dem Früheren

$$\sigma_o = a \sin \varphi \sin \psi, \quad \sigma_e = a \cos \varphi \sin(\psi + \vartheta).$$

Vom ordentlichen Strahl entfällt sodann auf die Richtung  $QQ$  die Komponente  $\sigma_o \sin(\omega - \varphi)$ , wenn  $\omega - \varphi$  der Winkel zwischen dem Hauptschnitt der Kristallplatte und der Schwingungsebene des Analysators ist. Der außerordentliche Strahl liefert  $\sigma_e \cos(\omega - \varphi)$ , und

wir haben als resultierende Schwingung

$$\sigma' = \sigma_e \cos(\omega - \varphi) - \sigma_o \sin(\omega - \varphi) ,$$

$$= a \cos \varphi \cos(\omega - \varphi) \sin(\psi + \vartheta) - a \sin \varphi \sin(\omega - \varphi) \sin \psi .$$

Wir wollen hier die Glieder mit  $\cos \psi$  bezgl.  $\sin \psi$  als Faktoren herausheben, erhalten somit

$$\sigma' = [a \cos \varphi \cos(\omega - \varphi) \cos \vartheta - a \sin \varphi \sin(\omega - \varphi)] \sin \psi \\ + a \cos \varphi \cos(\omega - \varphi) \sin \vartheta \cos \psi .$$

Wir haben also eine schwingende Bewegung von der Form

$$\sigma' = A \sin \psi + B \cos \psi .$$

Die Amplitude  $J$  dieser Bewegung ist gegeben durch

$$J^2 = A^2 + B^2 ,$$

woraus für unsern speziellen Fall folgt

$$J^2 = a^2 \cos^2 \varphi \cos^2(\omega - \varphi) + a^2 \sin^2 \varphi \sin^2(\omega - \varphi) \\ - 2 a^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin(\omega - \varphi) \cos(\omega - \varphi) \cos \vartheta .$$

Fügen wir der zweiten Seite dieser Gleichung noch

$$- 2 a^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos(\omega - \varphi) \sin(\omega - \varphi) \\ + 2 a^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos(\omega - \varphi) \sin(\omega - \varphi)$$

hinzu, so können wir leicht finden

$$(25) \quad J^2 = a^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin 2 \varphi \sin(2 \omega - 2 \varphi) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} .$$

Wir setzen nun  $\omega = 0$ . Man nennt das die Parallelstellung, da die Schwingungen im Polarisator jenen im Analysator parallel sind. Wir haben dann

$$J_0^2 = a^2 - a^2 \sin^2 2 \varphi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} .$$

Für  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , die gekreuzte Stellung, erhalten wir hingegen

$$J_{\frac{\pi}{2}}^2 = a^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Es ist somit

$$J_0^2 + J_{\frac{\pi}{2}}^2 = a^2.$$

Das heißt, die Erscheinungen der Parallelstellung und der gekreuzten sind einander komplementär. Verändern wir die Lage des Hauptschnitts, so wird für die Kreuzstellung

$$J^2 = 0,$$

wenn

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \dots$$

wird. In diesem Fall erhalten wir also ein dunkles Gesichtsfeld. Hat der Kristall die Eigenschaft, das Licht zirkular zu polarisieren, so geschieht dies für

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Dann wird

$$J^2 = a^2 \cos^2 \omega - a^2 \cos 2\omega \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos 2\omega$$

$$- \frac{a^2}{2} \cos 2\omega = \frac{a^2}{2}.$$

Es ist hier die Intensität des Lichts von der Stellung des Polarisationsapparats ganz unabhängig.

### § 27. Schief einfallendes Licht.

Durch eine planparallele Platte AB (Fig. 40) gehe ein Lichtstrahl SCD und parallel dazu durch die Luft der Strahl S'C'D'. Der Strahl SCD erleidet dabei gegen S'C'D' eine Verzögerung

$$Z = \frac{CD}{u} - \frac{C'D'}{v}$$

wenn  $u$  die Lichtgeschwindigkeit in der Platte,  $v$  jene in der Luft ist. Wir können diese Verzögerung auch so darstellen:

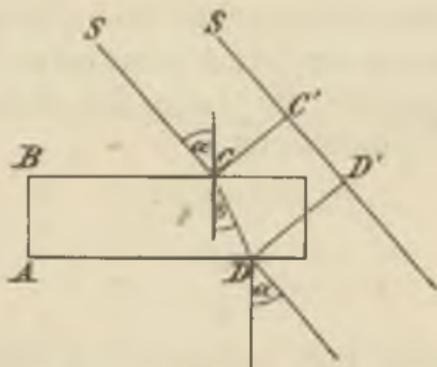


Fig. 40.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{CD}{u} - \frac{CD \cdot \cos(\alpha - \beta)}{v} \\ &= \frac{AB}{u \cos \beta} - \frac{AB \cdot \cos(\alpha - \beta)}{v \cos \beta} \\ &= \frac{AB}{v} \left[ \frac{v}{u \cos \beta} - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \right] \\ &= \frac{AB}{v} \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \beta} - \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) \\ &= \frac{AB}{v} \left[ \frac{\sin \alpha (1 - \sin^2 \beta)}{\sin \beta \cos \beta} - \cos \alpha \right] \\ &= \frac{AB}{v} \left( \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} - \cos \alpha \right) \\ &= AB \left( \frac{\cos \beta}{u} - \frac{\cos \alpha}{v} \right). \end{aligned}$$

Wenden wir diese Formel auf eine doppeltbrechende Platte an, so erhalten wir für die Verzögerung des ordentlichen Strahls

$$Z_o = \overline{AB} \left( \frac{\cos \beta}{o} - \frac{\cos \alpha}{v} \right),$$

für den außerordentlichen Strahl

$$Z_e = \overline{AB} \left( \frac{\cos \beta'}{u} - \frac{\cos \alpha}{v} \right),$$

mithin für den Zeitunterschied beider Strahlen

$$Z_e - Z_o = \overline{AB} \left( \frac{\cos \beta'}{u} - \frac{\cos \beta}{o} \right).$$

Wir haben hier die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahls  $o$ , die des außerordentlichen  $u$  genannt. Letztere ist gegeben, sobald der Winkel des Strahls mit der optischen Achse bekannt ist. Es läßt sich nun  $\cos \beta$  und  $\cos \beta'$  als Funktion von  $\alpha$ , sowie den Geschwindigkeiten  $v, o$  und  $u$  darstellen, wobei  $u$  wieder eine Funktion von  $\alpha, e, o$  und  $v$  ist, so daß  $Z_e - Z_o$  für eine bestimmte Kristallplatte lediglich eine Funktion des Einfallswinkels ist, da ja die Geschwindigkeiten  $v, o$  und  $e$ , d. i. der größte mögliche Wert von  $u$ , konstante Größen

sind. Somit ist auch  $\vartheta = \frac{2\pi}{\tau} (Z_e - Z_o)$  eine Funktion

von  $\alpha$ . Führen wir daher jetzt unser  $\vartheta$  in die Gleichung (25) ein, so werden wir mit wechselndem  $\alpha$  auch wechselnde Intensitäten des Lichts erhalten. Blickt also das Auge durch einen Polarisationsapparat, in welchem sich eine Kalkspatplatte befindet, so wird es eine Sehlinie geben, welche den Kalkspat senkrecht zu seinen Begrenzungsflächen durchsetzt. In dieser Richtung sehen wir dann die im vorhergehenden Paragraphen behandel-

ten Erscheinungen. In jedem konzentrischen Kreis um diese Sehlinie herum liegen Sehlinien, welche unter demselben Winkel die Platte treffen. Die Interferenzerscheinungen der Platte, welche von schief auffallenden Strahlen herrühren, werden daher kreisförmig angeordnet sein. Wir sehen somit eine Reihe konzentrischer Kreise, welche abwechselnd hell und dunkel sind, je nachdem wir  $\vartheta = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$  oder  $\vartheta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$  haben. Diese Kreise werden infolge der durch den Winkel  $\varphi$  (§ 26) bedingten Interferenzen von einem rechtwinkligen Kreuz radial geschnitten, welches je nach der Wahl der Winkel  $\omega$  und  $\varphi$  hell oder dunkel sein kann.

### § 28. Totale Reflexion.

Für die Brechung des Lichts fanden wir die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{c'}$$

welche immer einen Sinn hat, falls  $c > c'$  ist. Geht jedoch der Strahl von einem optisch dichteren in ein dünneres Medium, d. h. ist  $c < c'$ , so gelangen wir schließlich zu einem Einfallswinkel  $\alpha$ , für welchen

$\sin \beta = 1$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  wird. Der Strahl tritt dann nicht

mehr in das zweite Medium ein, sondern er wird für alle Winkel, welche größer als dieser Grenzwinkel sind, vollständig reflektiert, weshalb wir diesen Vorgang „totale Reflexion“ und den Grenzwinkel  $\alpha$ , für

welchen  $\beta = \frac{\pi}{2}$  wird, den Grenzwinkel der totalen

Reflexion nennen.

Wir fanden für die Größe der Amplitude des

reflektierten Lichts, welches senkrecht zur Einfallsebene schwingt, nach Gleichung (19)

$$\frac{a'}{a} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}.$$

Wir wollen die Substitution

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = i\sqrt{\sin^2\beta - 1}$$

eingeführen. Dann haben wir

$$\frac{a'}{a} = \frac{\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cdot i\sqrt{\sin^2\beta - 1}}{\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cdot i\sqrt{\sin^2\beta - 1}} = \frac{f - gi}{f + gi} = h + ki.$$

Wir erhalten somit bei der totalen Reflexion für die Amplitude der reflektierten Welle eine komplexe Zahl. Dies deutet nun Fresnel in sehr sonderbarer Weise. Er sagt: Multiplizieren wir den Schwingungszustand mit  $-1$ , so bedeutet das eine Verzögerung um eine halbe Schwingungsdauer. Ebenso können wir die Multiplikation mit  $\sqrt{-1}$  als eine Verzögerung um eine viertel Schwingungsdauer auffassen. Es wird dann der Schwingungszustand nach der Reflexion

$$\begin{aligned} \sigma' &= a' \sin \frac{2\pi t}{\tau} = a(h + ki) \sin \frac{2\pi t}{\tau} \\ &= a \left( h \sin \frac{2\pi t}{\tau} - k \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right) = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta), \end{aligned}$$

wenn wir

$$h = \cos \frac{2\pi \vartheta}{\tau}, \quad k = \sin \frac{2\pi \vartheta}{\tau}$$

setzen. Es folgt somit, daß

$$a' = a$$

ist, da ja jetzt die neue Amplitude durch

$$a'^2 = a^2 (h^2 + k^2)$$

bestimmt ist.

Für die Amplitude des reflektierten Lichts, welches in der Einfallsebene schwingt, haben wir nach Gleichung (23)

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \\ &= (h + ki) \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\ &= (h + ki) \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}}{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cdot i \sqrt{\sin^2 \beta - 1}} \quad (26) \\ &= (h + ki) \frac{1 - mi}{1 + mi} = (h + ki)(r + si). \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz der Lichtkomponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene ist daher durch  $r + si$  bestimmt. Nennen wir sie  $\delta$ , so wird

$$r = \cos \frac{2\pi\delta}{\tau}, \quad s = \sin \frac{2\pi\delta}{\tau}.$$

Auch hier folgt, wie oben,

$$a' = a.$$

Es entsprechen also unsere Formeln insofern tatsächlich der Wirklichkeit, als aus ihnen die Totalreflexion folgt; doch werden wir sofort noch weitere Konsequenzen kennen lernen, die alle durch das Experiment erhärtet sind.

### § 29. Elliptische Polarisation durch totale Reflexion.

Wir wollen annehmen, daß die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes

$$\sigma = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

mit der Einfallsebene den Winkel  $\varphi$  bildet. Dann sind die beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene

$$\xi = \sigma \sin \varphi, \quad \eta = \sigma \cos \varphi,$$

folglich, wie wir im vorhergehenden Paragraphen erfahren haben, nach der Reflexion

$$\xi' = a \sin \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta),$$

$$\eta' = a \cos \varphi \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \vartheta - \delta).$$

Wird  $\delta = \frac{\tau}{4}$ , so setzen sich die beiden Komponenten zu einer Schwingung zusammen, welcher die Gleichung

$$\frac{\xi'^2}{a^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\eta'^2}{a^2 \cos^2 \varphi} = 1$$

entspricht. Wir haben somit elliptisch polarisiertes Licht.

Dies wird zu zirkular polarisiertem, wenn  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ist.

Wird nun  $\delta = \frac{\tau}{4}$ , so wird  $r = \cos \frac{2\pi\delta}{\tau} = 0$ . Aus der Gleichung

$$\frac{l - mi}{l + mi} = r + si$$

finden wir

$$r = \frac{l^2 - m^2}{l^2 + m^2}.$$

Soll demnach  $r = 0$  werden, so muß  $l = m$  sein. Wir finden daher nach Gleichung (26)

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \beta - 1}$$

oder

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha (\sin^2 \beta - 1).$$

Hier können wir  $\sin \beta$  durch  $\alpha$  und den Brechungs-  
exponenten  $n$  aus der Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$$

ersetzen, wenn wir den Brechungsexponenten beim Gang  
des Lichts aus dem dünneren ins dichtere Medium  $n$   
nennen.

Es läßt sich nun leicht die Gleichung

$$\sin^4 \alpha - \frac{n^2 + 1}{2 n^2} \sin^2 \alpha = - \frac{1}{2 n^2}$$

und somit auch

$$\sin^2 \alpha = \frac{n^2 + 1}{4 n^2} \pm \sqrt{\frac{(n^2 + 1)^2}{16 n^4} - \frac{1}{2 n^2}}$$

herleiten. Soll also  $\alpha$  einen reellen Wert haben, so  
muß  $\frac{(n^2 + 1)^2}{16 n^4} > \frac{1}{2 n^2}$  sein. Daraus folgt aber ein

Brechungsexponent, welcher so groß ist, daß nur beim  
Diamant durch eine einmalige Totalreflexion elliptisch  
polarisiertes Licht zu erhalten wäre. Wir können aber  
die Phasendifferenzen summieren. Lassen wir daher  
einen Lichtstrahl, anstatt einmal, zweimal total reflek-  
tieren, so daß jedesmal eine Phasendifferenz  $\delta = \frac{\pi}{8}$

entsteht, dann erhalten wir ebenfalls elliptisch polari-  
siertes Licht. Dies geschieht im Fresnelschen Pa-  
rallelepiped ABCD (Fig. 41), dessen Winkel  $\alpha$  so

geschliffen sind, daß sie einer Phasendifferenz  $\delta = \frac{\tau}{8}$  entsprechen. Ein bei G senkrecht eintretender geradlinig polarisierter Lichtstrahl wird daher bei H in der Richtung HP als elliptisch polarisierter austreten. Geht die ursprüngliche Schwingung unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur Einfallsebene GEF vor sich, so erhalten wir einen zirkular polarisierten Strahl.

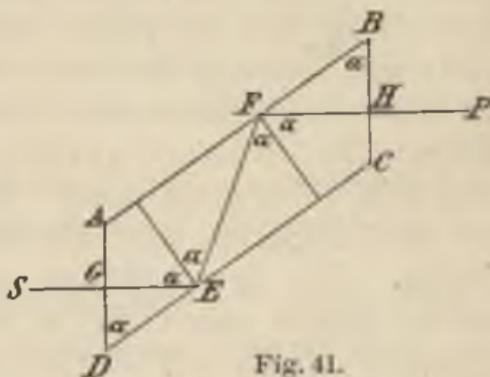


Fig. 41.

Es eignet sich ein derartiges Parallelpiped viel besser zur Erzeugung zirkular polarisierten Lichts, als der sogenannte  $\frac{1}{4}$ -Undulationsglimmer. Da in letzterem der Gangunterschied des ordentlichen und außerordentlichen Strahls  $\frac{1}{4}$ -Schwingungsdauer ausmachen soll, so läßt sich die Zirkularpolarisation nur für eine bestimmte Farbe genau herstellen, indem ja die Wellenlänge mit der Farbe sich erheblich verändert, während die Änderung des Brechungssexponenten eine verhältnismäßig geringe ist.

## Die Lehre von der Wärme.

### Wärmeleitung.

#### § 30. Wärmemenge — Temperatur — spezifische Wärme — Wärmekapazität.

Wie wir die Schall- und Lichterscheinungen auf bloße Bewegungserscheinungen zurückgeführt haben, so

tun wir es auch mit den Erscheinungen der Wärme. Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen eines Körpers, als Molekularbewegung auf. Für die Bahnen der Molekeln gibt es keine bevorzugte Richtung, sie sind nach allen Richtungen gleichförmig verteilt. Der Schwerpunkt des Körpers bleibt also in Ruhe, und da die Bewegung der einzelnen Molekeln sinnlich nicht wahrnehmbar ist, so ist für die Sinnesorgane auch der ganze Körper in Ruhe. Die Gesamtenergie der Molekeln nennen wir seine Wärmemenge. Bringen wir zwei Körper zur Berührung, so wird ein Energieaustausch stattfinden. Von jenem Körper, welcher Energie an den andern abgibt, sagen wir, er besitze die höhere Temperatur. Nach willkürlichem Maß messen wir die Temperatur mit dem Thermometer und nennen die Maßeinheit einen Temperaturgrad. Die Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit eines Körpers um einen Grad erhöht, ist dessen spezifische Wärme  $c$ . Diese kann sich mit der Temperatur ändern, wir werden sie daher besser durch

$$c = \frac{dQ}{du}$$

definieren, wenn wir unter  $Q$  die Wärmemenge und unter  $u$  die Temperatur verstehen. Die Wärmemenge, welche wir demnach einem Körper zuführen, wird gleich dem Produkt aus seinem Gewicht, spezifischer Wärme und Temperaturerhöhung sein. Das Produkt aus der spezifischen Wärme und dem Gewicht ist die Wärmekapazität des Körpers.

Die Erfahrung lehrt, daß verschieden temperierte Körper, sich selbst überlassen, ihre Temperaturen aus-

gleichen. Dies geschieht entweder durch Leitung oder durch Strahlung der Wärme. Im ersteren Fall müssen die Körper einander berühren, und es gibt direkt der eine Energie an den andern ab. Es ist dies die Regel, wenn verschiedene Punkte ein und desselben Körpers verschiedene Temperaturen besitzen. Im zweiten Fall ist der Träger der Wärme der hypothetische Lichtäther, und es lehrten die Untersuchungen, daß Licht- und Wärmestrahlen sich physikalisch voneinander gar nicht unterscheiden.

Die im folgenden gegebene Theorie der Wärmeleitung wurde von Fourier begründet und ausgearbeitet.

### § 31. Gleichung der Wärmeleitung in einem Stab.

Wir halten das eine Ende eines dünnen Stabs beständig auf der Temperatur  $a$ , das andere auf der niedrigeren Temperatur  $b$ . Es strömt dann durch den Stab Wärme von  $a$  nach  $b$ . Je größer der Temperaturunterschied  $a - b$  ist, desto mehr Wärme wird in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Stabs fließen. Machen wir die Voraussetzung, der Stab gebe nach außen keine Wärme ab, was freilich in Wirklichkeit nur angenähert erreicht werden kann, so muß durch jeden Querschnitt des Stabs in derselben Zeit dieselbe Wärmemenge  $W$  gehen. Wir wollen sie daher proportional der Zeit und dem Temperaturunterschied setzen. Sie wird ferner noch proportional dem Querschnitt des Stabs  $q$  und schließlich von der Länge  $l$  des Stabs abhängig sein, so daß wir für die durch den Querschnitt gehende Wärmemenge

$$W = q t (a - b) f(l)$$

erhalten.

Teilen wir unsern Stab in gleiche Teile von der

Länge  $\lambda$  und sei in der Entfernung  $\lambda$  von  $a$  die Temperatur  $a_1$ , in der Entfernung  $2\lambda$   $a_2$  usw., so muß die Gleichung.

$$W = qt(a - a_1) f(\lambda) = qt(a_1 - a_2) f(\lambda) = \dots$$

gelten, woraus folgt

$$a - a_1 = a_1 - a_2 = \dots$$

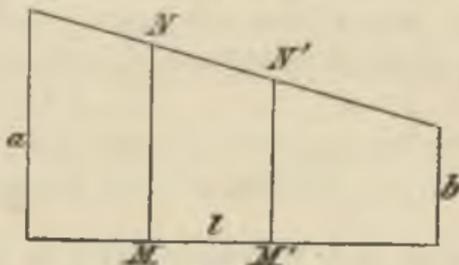


Fig. 42.

Es fällt also von  $a$  nach  $b$  die Temperatur linear ab. Wir können daher ganz allgemein schreiben

$$W = qt(MN - M'N') f(MM')$$

(Fig. 42). Da aber

$$\frac{MN - M'N'}{MM'} = \frac{a - b}{l} = G$$

ist, so wird

$$W = qt G \cdot MM' f(MM') = qt G y f(y),$$

wenn wir  $MM' = y$  einführen. Wir können nun  $y f(y) = k$ , also

$$f(y) = \frac{k}{y}$$

setzen, wonach

$$W = qtk \frac{a - b}{l}$$

wird. Die Konstante  $k$  nennen wir die Wärmeleitungs-

fähigkeit; es ist die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit beim Temperaturgefälle Eins geht, wobei wir unter dem Temperaturgefälle die Größe  $\frac{a - b}{l}$  verstehen.

Das lineare Temperaturgefälle in unserm Stab ist nur für den Fall eines stationären Zustands vorhanden. In allen andern Fällen können wir daher unsere Gleichung nur für ein sehr kurzes Stück  $dx$  des Stabs benützen, für welches wir das Gefälle als linear annehmen. Auf der Strecke  $dx$  soll die Temperatur um  $du$  fallen.

Anstatt  $\frac{a - b}{l}$  haben wir demnach  $-\frac{du}{dx}$  zu setzen.

Das negative Vorzeichen rührt davon her, daß die Wärme immer entgegen der Richtung der Temperaturzunahme fließt. Das Temperaturgefälle  $-\frac{du}{dx}$  wird

ferner nur für eine kurze Zeit  $\tau$  als konstant anzusehen sein. Während dieser Zeit fließt dann durch den Querschnitt des Stabs die Wärmemenge

$$W = -q \tau k \frac{du}{dx}. \quad (27)$$

Ein sehr kurzes Stabstück von der Länge  $\xi$  sei durch die Querschnitte  $M$  und  $M'$  begrenzt. Es strömt dann in der Zeit  $\tau$  durch den Querschnitt  $M$  die Wärmemenge, welche durch Gleichung (27) gefunden wird, ein, durch  $M'$  die Menge

$$W' = -q \tau k \left( \frac{du}{dx} \right)'$$

aus. Es bleibt daher in unserm Stabelement die Wärme  $W - W'$  zurück und erhöht die Temperatur um  $\delta$ . Das

Volumen des Stabelements ist  $q \xi$ , das spezifische Gewicht sei  $s$ , die spezifische Wärme  $c$ . Dann ist sein Gewicht  $q \xi s$  und seine Wärmekapazität  $q \xi s c$ . Es besteht somit die Gleichung

$$W - W' = q \xi s c \delta .$$

Die Temperaturerhöhung per Zeiteinheit können wir  $\frac{\partial u}{\partial t}$  schreiben, daher für die Zeit  $\tau$

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial t} \tau ,$$

mithin

$$W - W' = q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau .$$

Für einen Zeitpunkt oder für eine unendlich kleine Zeit  $\tau$  können wir die Wärmemenge  $W$  als eine Funktion von  $x$  ansehen, wenn wir mit  $x$  die Entfernung eines Punkts des Stabs vom Anfangspunkt bezeichnen. Dann ist

$$W' = W + \frac{\partial W}{\partial x} \xi ,$$

folglich nach Gleichung (27)

$$W - W' = - \frac{\partial W}{\partial x} \xi = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{s c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Wir lassen jetzt die Bedingung, daß der Stab nach außen keine Wärme abgibt, fallen und nehmen an, daß

die abgegebene Wärme der Temperaturdifferenz zwischen Stab und Umgebung und der Oberfläche proportional sei. Ist  $p$  der Umfang, so ist  $p \xi$  die Oberfläche des Stabelements und  $h p \xi (u - a) \tau$  die nach außen abgegebene Wärme, wenn wir  $a$  die Temperatur der Umgebung nennen. Da es nun ganz gleichgültig ist, wo wir den Nullpunkt der Temperaturskala anbringen, so können wir von Fall zu Fall

$$a = 0$$

annehmen. Es bleibt uns dann für die nach außen abgegebene Wärmemenge der Ausdruck  $h p \xi u \tau$ . Die im Stabelement verbleibende Wärme ist daher

$$W - W' = h p \xi u \tau,$$

was uns die Gleichung

$$q \xi s c \frac{\partial u}{\partial t} \tau = q \tau k \xi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h p \xi u \tau$$

ergibt, welche sich reduziert auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{s c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h p}{q s c} u$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n u. \quad (28)$$

Die Größe  $m = \frac{k}{s c}$  nennt man die Temperaturleitfähigkeit oder auch das thermometrische Leitungsvermögen,  $h$  die äußere Wärmeleitfähigkeit.

Es darf also das Temperaturleitungsvermögen nicht mit dem Wärmeleitungsvermögen verwechselt werden. Während z. B. die Wärmeleitfähigkeit der Gase gegenüber jener der Metalle sehr klein ist, haben sie

doch ziemlich dasselbe Temperaturleitungsvermögen. Das heißt, es gleichen sich verschiedene Temperaturen in Gasen ebenso rasch aus wie in Metallen.

### § 32. Stationärer Zustand.

Bleibt jeder Punkt unseres Stabs auf konstanter Temperatur, so nennen wir diesen Zustand stationär. Es ist also dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

und Gleichung (28) wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{n}{m} u = 0.$$

Eine Lösung dafür ist

$$u = e^{\beta x}.$$

Danach wird unsere Gleichung

$$\beta^2 e^{\beta x} - \frac{n}{m} e^{\beta x} = 0,$$

folglich

$$\beta^2 = \frac{n}{m}, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Wir erhalten also zwei Werte für  $\beta$ , welche wir zusammenfassen können in

$$u = A e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}} + B e^{x\sqrt{\frac{n}{m}}}.$$

Unser Stab sei nun sehr lang. Die Temperatur soll aber für ein unendlich großes  $x$  nicht unendlich werden. Dann ist  $B = 0$  zu setzen, und es bleibt

$$u = A e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}}.$$

Für  $x = 0$  sei  $u = u_0$ . Folglich wird  $A = u_0$ . Haben

wir zwei Stäbe mit derselben Anfangstemperatur, so ist für den einen

$$u = u_0 e^{-x\sqrt{\frac{n}{m}}},$$

für den andern

$$u' = u_0 e^{-x'\sqrt{\frac{n'}{m'}}}.$$

Für zwei Punkte gleicher Temperatur muß somit

$$x\sqrt{\frac{n}{m}} = x'\sqrt{\frac{n'}{m'}}$$

sein. Es ist nun

$$\frac{n}{m} = \frac{h p}{q k}, \quad \frac{n'}{m'} = \frac{h' p'}{q' k'}.$$

Geben wir daher den Stäben kongruente Form und gleiche Oberflächenbeschaffenheit, so ist

$$\frac{h p}{q} = \frac{h' p'}{q'},$$

und wir erhalten

$$\frac{k'}{k} = \frac{x'^2}{x^2},$$

was uns die Möglichkeit liefert, die Wärmeleitungsfähigkeiten von Stäben verschiedenen Materials zu vergleichen.

### § 33. Wärmeleitung in einem Ring.

Setzen wir in Gleichung (28)

$$u = y e^{-nt},$$

so nimmt sie, wie leicht zu finden, die Form

$$\frac{\partial y}{\partial t} = m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

an. Das ist aber die Form der Wärmeleitungsgleichung ohne Wärmeabgabe nach außen, welche wir schreiben können

$$(29) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Es wird demnach in vielen Fällen genügen, die Lösung für die Gleichung (29) zu kennen, weil diese, mit  $e^{-\alpha t}$  multipliziert, sodann die Lösung für (28) ergibt. Eine Lösung der Gleichung (29) ist

$$(30) \quad u = e^{\alpha t + \beta x}.$$

Dieser Wert, in die Gleichung (29) eingesetzt, gibt

$$\alpha = m \beta^2.$$

Soll die Temperatur mit der Zeit nicht ins Unendliche wachsen, so muß  $\alpha$  negativ sein. Wir wollen  $\alpha = -\gamma$  schreiben, wonach wir

$$\beta \sqrt{m} = \pm i \sqrt{\gamma}$$

erhalten, was sich in das partikuläre Integral

$$u = e^{-\gamma t} \left( A \cos x \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin x \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right)$$

zusammenfassen läßt. (Bd. I § 10.)

Wenden wir diese Formel auf einen Stab an, welcher zu einem Ring zusammengebogen ist, so daß sich Anfangs- und Endpunkt berühren, und legen wir in eine beliebige Stelle des Rings den Anfangspunkt der Abszissen, so muß in den Punkten  $x, x + l, x + 2l, \dots$  die Temperatur ein und dieselbe Größe haben, wenn  $l$  der Umfang des Rings ist. Daraus folgt, daß

$$l \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 2\pi, \quad 4\pi, \quad 6\pi \dots$$

sein muß, wonach

$$\gamma = \frac{4 \pi^2 m}{l^2}, \quad \frac{16 \pi^2 m}{l^2}, \quad \frac{36 \pi^2 m}{l^2}, \dots$$

wird. Wir haben somit als allgemeine Lösung

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{4k^2\pi^2 mt}{l^2}} \left( A_k \cos \frac{2k\pi x}{l} + B_k \sin \frac{2k\pi x}{l} \right).$$

Die Konstanten A und B lassen sich berechnen, sobald für  $t = 0$  die Temperatur durch  $u = f(x)$  gegeben ist (Bd. I § 85). Die höheren Glieder unserer Summe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab. In der Praxis genügt es daher, sich auf

$$u = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 mt}{l^2}} \left( A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right)$$

zu beschränken. Es ist dies die Temperatur der Abszisse  $x$ . Gegenüber liegt der Punkt  $x + \frac{l}{2}$  mit der Temperatur

$$u' = A_0 + e^{-\frac{4\pi^2 mt}{l^2}} \left( -A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} - B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Die Summe beider liefert

$$u + u' = 2 A_0,$$

die Differenz

$$u - u' = 2 e^{-\frac{4\pi^2 mt}{l^2}} \left( A_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Es nimmt also die Differenz der Temperaturen zweier gegenüberliegender Punkte geometrisch mit der Zeit ab, woraus wir die Größe des Exponenten, somit auch die Temperatur- und Wärmeleitungsfähigkeit bestimmen können.

### § 34. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung unter der Erdoberfläche.

In der Lösung der Gleichung (29), welche durch Gleichung (30) gegeben ist, ist eine der beiden Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  vollständig willkürlich. Wir wollen deshalb  $\alpha$  imaginär, also  $\alpha = ai$  wählen. Wir haben dann

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{ai}{m}},$$

ferner

$$\sqrt{ai} = \sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}}$$

und

$$\begin{aligned} u &= A e^{ait + \frac{x}{m} \left( \sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}} \right)} + B e^{ait - \frac{x}{m} \left( \sqrt{\frac{a}{2}} + i \sqrt{\frac{a}{2}} \right)} \\ &= A e^{x \sqrt{\frac{a}{2m}} + i \left( at + x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right)} + B e^{-x \sqrt{\frac{a}{2m}} + i \left( at - x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right)}. \end{aligned}$$

Es läßt sich also  $u$  als periodische Funktion bei richtiger Wahl der Anfangszeit in folgender Weise darstellen:

$$u = C e^{-x \sqrt{\frac{a}{2m}}} \sin \left( at - x \sqrt{\frac{a}{2m}} \right).$$

Für den Anfangspunkt  $x = 0$  erhalten wir somit

$$u_0 = C \sin at.$$

Unsere Lösung gilt also für einen Stab, der nach außen keine Wärme abgibt und an dessen Anfangspunkt die Temperaturänderung eine harmonische Schwingung darstellt.

Denken wir uns ein Prisma, welches von der Erdoberfläche senkrecht in die Tiefe geht, so haben wir den Fall verwirklicht, daß nach außen keine Wärme abgegeben wird, da wegen der gleichen Verteilung der

Temperatur in einer horizontalen Ebene keine Wärmebewegung stattfindet. Die tägliche und jährliche Temperaturschwankung an der Erdoberfläche können wir in erster Annäherung als eine harmonische auffassen, können daher unsere Lösung auf die Temperaturänderung unter der Erdoberfläche beziehen. Wir finden in jeder Tiefe eine periodische Temperaturänderung, jedoch wird die Amplitude mit wachsender Tiefe immer kleiner, so daß wir etwa 28 m tief unter der Erdoberfläche die Temperaturschwankung überhaupt nicht mehr wahrnehmen, sondern jahraus jahrein eine konstante Temperatur, nämlich die mittlere Jahrestemperatur haben. Hat zu einer bestimmten Zeit  $t$  die Temperatur an der Erdoberfläche den Wert Null, so muß  $at = n\pi$  sein. In der Tiefe  $x$  wird diese Temperatur erst nach der Zeit  $\delta$  eintreten, welche sich daraus bestimmt, daß

dann  $a(t + \delta) - x \sqrt{\frac{a}{2m}} = n\pi$  ist. Wir finden somit

$$a\delta = x \sqrt{\frac{a}{2m}} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\delta} = \sqrt{2ma}.$$

Das können wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmewelle nennen. Nennen wir analog die Schwingungsdauer  $\tau$ , so haben wir  $a = \frac{2\pi}{\tau}$ , folglich

$$u = C e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - x \sqrt{\frac{\pi}{m\tau}}\right). \quad (31)$$

$$\frac{x}{\delta} = \sqrt{\frac{4m\pi}{\tau}}.$$

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Funktion der Schwingungsdauer, und zwar wird sie um

so größer, je kleiner die Schwingungsdauer ist. Es pflanzen sich deshalb die täglichen Änderungen viel rascher in die Tiefe fort, als die jährlichen. Dafür nimmt aber die Amplitude der letzteren mit der Tiefe viel langsamer ab.

Die Gleichung (31) gibt uns die Mittel an die Hand, nach zwei Methoden die Wärmeleitfähigkeit der Erde zu bestimmen, einmal aus der Abnahme der Amplitude mit der Tiefe, das zweite Mal aus der Verzögerung des Maximums bezgl. des Minimums der Temperatur. In der Tiefe  $x'$  ist die Schwankung der Temperatur

$$\delta' = 2 C e^{-x' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

in der Tiefe  $x''$

$$\delta'' = 2 C e^{-x'' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

folglich

$$\frac{\delta'}{\delta''} = e^{(x'' - x') \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}},$$

woraus sich  $m$  bestimmen läßt.

Das Maximum der Temperatur haben wir in  $x'$  zur Zeit  $t'$ , wenn

$$\frac{2 \pi t'}{\tau} - x' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}} = \frac{\pi}{2},$$

desgl. in  $x''$  nach der Zeit  $t''$  für

$$\frac{2 \pi t''}{\tau} - x'' \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}} = \frac{\pi}{2},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{2 \pi}{\tau} (t'' - t') = (x'' - x') \sqrt{\frac{\pi}{m \tau}}.$$

Dieselbe Formel erhalten wir für die Wanderung des Minimums, und wiederum ist es leicht, aus dieser Gleichung die Temperaturleitungsfähigkeit  $m$  und somit auch die Wärmeleitungsfähigkeit der Erde zu finden.

### § 35. Gleichung der Wärmeleitung in einem isotropen Körper — Analogie zwischen Wärme- und Flüssigkeitsströmung.

Denken wir uns aus einem isotropen Körper ein Volumelement  $\xi \eta \zeta$  herausgeschnitten, so können wir für die drei Richtungen parallel zu den Koordinatenachsen dieselbe Überlegung machen, welche wir über die Wärmeströmung nach einer Richtung (§ 31) anstellten. Der Unterschied ist dann nur der, daß dem Volumelement nicht nur von einer Seite, sondern von drei Wärme zu- und gleicherweise abgeführt wird. Die Gleichung (29) erweitert sich daher auf

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (32)$$

Für den stationären Zustand wird sie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Dieselbe Gleichung fanden wir (Bd. I § 62) für die stationäre Strömung einer Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitspotential  $u$ . Wir können daher alle speziellen Fälle stationärer Wärmeströmung in einem isotropen Körper, der nach außen keine Wärme abgibt, auf die stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit und umgekehrt übertragen, wenn wir Temperatur und Geschwindigkeitspotential, Temperaturgefälle

und Strömungsgeschwindigkeit miteinander vertauschen.

### § 36. Gleichung der Wärmeleitung in einer Kugel.

Wenden wir die Gleichung (32) auf eine Kugel an, in welcher die Wärmeströmung nur radial vor sich gehen soll, so muß in jeder konzentrischen Kugelschale die Temperatur konstant sein. Verlegen wir den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte der Kugel, so wird  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  die Gleichung einer konzentrischen Kugelfläche, ferner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$$

(Bd. I § 67.) Wir können daher Gleichung (32) schreiben

$$(33) \quad \frac{\partial (ru)}{\partial t} = m \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2},$$

da ja bei der partiellen Differentiation von  $ru$  nach  $t$   $r$  als konstant anzusehen ist. Wir erhalten also für die Kugel dieselbe Gleichung der Wärmeleitung wie für den Stab, der nach außen keine Wärme abgibt, wenn wir  $u$  durch  $ru$  und  $x$  durch  $r$  ersetzen. Es tritt hier dieselbe Analogie auf wie für die Fortpflanzung einer ebenen und einer Kugelwelle (Bd. I §§ 68 u. 69).

### § 37. Das Temperaturgefälle in der Erdrinde.

Als eine Lösung der Gleichung (33) fanden wir im § 33

$$ru = e^{-\gamma t} \left( A \cos r \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right).$$

Für  $r = 0$  soll die Temperatur einen endlichen Wert behalten. Dann muß  $A = 0$  sein und es bleibt uns

$$u = B e^{-\gamma t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r}. \quad (34)$$

Die Wärmemenge, welche durch die Flächeneinheit der Kugeloberfläche in der Zeiteinheit geht, können wir auf zweierlei Art ausdrücken. Sie ist erstens gleich  $-k \frac{\partial u}{\partial r}$ , ferner gleich  $h u$  (§ 31). Wir haben somit

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} = h u$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial r} + n u = 0, \quad (35)$$

wenn wir

$$\frac{h}{k} = n$$

setzen. Doch gilt diese Gleichung nur für die Oberfläche der Kugel, d. h. für  $r = \varrho$ , wobei also  $\varrho$  der Kugelradius ist. Wir können  $\frac{\partial u}{\partial r}$  aus Gleichung (34)

finden. Wir erhalten dafür

$$\frac{\partial u}{\partial r} = B e^{-\gamma t} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \frac{\cos r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r} - \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{r^2} \right).$$

Setzen wir hier wie in der Gleichung (34)  $r = \varrho$ , so gestaltet sich Gleichung (35) folgendermaßen:

$$\text{Be}^{-\gamma t} \left( \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho} - \frac{\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho^2} \right) + n \text{Be}^{-\gamma t} \frac{\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\varrho} = 0,$$

welche sich leicht verwandeln läßt in

$$\sin \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} (n \varrho - 1) + \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = 0$$

oder

$$\text{tg } \varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = \frac{\varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{1 - n \varrho}.$$

Setzen wir  $\varrho \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = x$ , so vereinfacht sie sich noch zu

$$\text{tg } x = \frac{x}{1 - n \varrho}. \quad (36)$$

Diese letzte Gleichung können wir nun sehr leicht auf graphischem Weg lösen, wenn wir sowohl  $\text{tg } x$  als auch

$\frac{x}{1 - n \varrho}$  in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eintragen.

Wir wollen eine Anwendung davon auf unsere Erde machen. Es wird somit  $\varrho$  sehr groß, also  $\frac{1}{1 - n \varrho}$  eine kleine negative Zahl. Es ist daher die Kurve

$$y = \frac{x}{1 - n \varrho}$$

eine Gerade, welche vom Ursprung 0 (Fig. 43) ausgeht, mit der  $x$ -Achse einen sehr kleinen Winkel bildet und für positive  $x$  unterhalb der  $x$ -Achse liegt. Wo diese Gerade die zweite Kurve

$$y = \operatorname{tg} x$$

schneidet, dort ist immer eine Wurzel der Gleichung (36). Wir erhalten somit unendlich viel Werte für  $x$

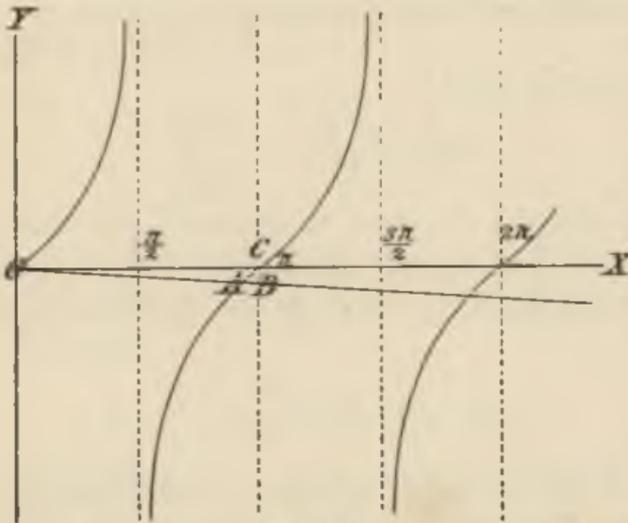


Fig. 43.

und somit auch für  $\gamma$ . Die Gleichung (34) verwandelt sich daher in eine unendliche Reihe. Das erste Glied fällt ganz weg, weil dafür  $x = 0$ , also auch  $\gamma = 0$  ist. Die nächste Wurzel von  $x$  liegt nahe bei  $\pi$ , die zweitnächste nahe bei  $2\pi$  usw. Sie werden sich also nahezu verhalten wie  $1:2:3\dots$ , folglich die Werte der  $\gamma$  nahezu wie  $1:4:9\dots$ . Das heißt, die höheren Glieder unserer unendlichen Reihe nehmen mit wachsender Zeit sehr rasch ab, so daß wir uns nach einiger Zeit lediglich auf die Gleichung

$$u = B_1 e^{-\gamma t} \frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r}$$

beschränken können.

Wir wollen nun  $x_1 = \pi - \varepsilon$  setzen, wobei  $\varepsilon$  sehr klein ist. Aus dieser Ursache können wir aber dann ABC (Fig. 43) als ein rechtwinkeliges Dreieck auffassen und

$$AB = BC = \varepsilon = -\frac{\pi}{1 - n\varrho} = \frac{\pi}{n\varrho}$$

setzen. Somit wird

$$x_1 = \pi \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right),$$

$$\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = \frac{x_1}{\varrho} = \frac{\pi}{\varrho} \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right)$$

und

$$\gamma_1 = m \frac{\pi^2}{\varrho^2},$$

indem wir die anderen Glieder vernachlässigen können. Führen wir die Tiefe  $z$  ein, so wird

$$r = \varrho - z,$$

und es soll  $z$  gegen  $\varrho$  ebenfalls eine kleine Größe sein. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} &= \sin \frac{\pi}{\varrho} (\varrho - z) \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right) \\ &= \sin \pi \left(1 - \frac{z}{\varrho}\right) \left(1 - \frac{1}{n\varrho}\right) = \sin \left(\pi - \frac{\pi z}{\varrho} - \frac{\pi}{n\varrho}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{\varrho} \left(z + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\varrho} \left(z + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

da wir wegen der Kleinheit von  $\frac{\pi}{\varrho}$  den Sinus mit dem Bogen vertauschen können. Wir erhalten demnach weiter

$$\frac{\sin r \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}}{r} = \frac{\pi}{\varrho^2} \left( z + \frac{1}{n} \right),$$

wenn wir  $z$  gegen  $\varrho$  vernachlässigen, was hier erlaubt ist. Somit wird schließlich

$$u = \frac{B_1 \pi}{n \varrho^2} e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t} (1 + n z).$$

Es muß also die Temperatur von der Oberfläche gegen das Erdinnere mit der Tiefe linear zunehmen. Die Erfahrung lehrt, daß die Temperaturzunahme für 30 m etwa  $1^\circ \text{C}$ . beträgt.

### § 38. Abkühlung der Erde.

Für ein konstantes  $r$  wird nach Gleichung (34) die Temperatur lediglich eine Funktion der Zeit, welche für unsere Erde die Form

$$u = A e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t}$$

annimmt. Setzen wir für die Zeit  $t = 0$  die Temperatur  $u = u_0$ , so wird  $A = u_0$  und

$$u = u_0 e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t},$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{m \pi^2}{\varrho^2} u_0,$$

da wir wegen des großen  $\varrho^2 e^{-\frac{m \pi^2}{\varrho^2} t} = 1$  setzen können.

Die Temperatur unter der Erdoberfläche muß demnach mit der Zeit abnehmen, doch geschieht dies ungemein langsam.

Da  $u_0$  der Überschuß über die Temperatur der Umgebung der Erde ist, so müßten wir, um  $\frac{du}{dt}$  berechnen zu können, die Temperatur des Weltraums kennen. Aber selbst wenn diese den absoluten Nullpunkt, d. h.  $-273^\circ$  C. erreicht hätte, würde  $\frac{du}{dt}$  so klein, daß die Temperatur der Erdrinde erst in vielen Millionen Jahren um  $1^\circ$  sinkt.

Die Wärmemenge, welche durch die Oberflächeneinheit der Erde in der Zeiteinheit ausgestrahlt wird,

ist  $-k \frac{du}{dr}$ . Wir können dieselbe berechnen, da wir

sowohl  $\frac{du}{dr}$  kennen, als auch die Wärmeleitungsfähigkeit

$k$  der Erde (§ 34) bestimmbar ist. Es ergibt sich daraus, daß jährlich eine Wärmemenge aus dem Innern der Erde zur Oberfläche strömt, welche imstande ist, eine neun Millimeter dicke Eisschicht zu schmelzen. Es kommt diese Wärmemenge somit im Vergleich zu der von der Sonne gespendeten Wärme gar nicht in Betracht. Ob es daher im Innern der Erde kalt oder heiß ist, für die Lebensbedingungen auf der Oberfläche ist das völlig belanglos.

## Mechanische Wärmetheorie.

### § 39. Zustand eines Körpers — Zustandsgleichung idealer Gase — absolute Temperatur.

Wir fassen die Wärme als Bewegung der kleinsten Teilchen der Körper auf. Zu einem gegebenen Zeitpunkt wird daher jedes Teilchen eine bestimmte Lage und eine bestimmte Geschwindigkeit besitzen. Wir nennen dies den Zustand des Körpers. Um ihn zu kennen, ist es nicht nötig, den Zustand jedes einzelnen Körperteilchens zu wissen, sondern bloß die Mittelwerte der den Zustand bestimmenden Größen, da ja die thermischen Erscheinungen, welche wir an einem Körper wahrnehmen, durch das Zusammenwirken der kleinsten Teilchen hervorgebracht werden. Der Zustand eines Körpers ist sonach in unserm Sinn bestimmt durch seine Temperatur, sein Volumen, seine Gestalt und die auf ihn wirkenden äußeren und inneren Kräfte. Soweit diese verschiedenen Größen voneinander abhängig sind, lassen sie sich in Gleichungen fassen, und jene Gleichung, welche alle den Zustand bestimmenden Größen untereinander verbindet, nennen wir die Zustandsgleichung des Körpers.

Diese ist z. B. für ideale Gase durch das Boyle-Charlessche Gesetz

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

gegeben. Das heißt, der Zustand eines Gases ist vollständig durch sein Volumen  $v$ , seine Temperatur  $t$  und den Druck  $p$ , unter dem es sich befindet, gegeben. Benutzen wir das hundertteilige Thermometer, so ist  $\alpha = \frac{1}{273}$ . Verlegen wir daher den Nullpunkt auf

— 273° C., so wird

$$p v = p_0 v_0 \alpha \left( \frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 v_0 \alpha T = R T .$$

In der Form

$$(37) \quad p v = R T$$

wollen wir das Boyle-Charlessche Gesetz künftig benutzen und

$$T = t + \frac{1}{\alpha}$$

die absolute Temperatur nennen.

#### § 40. Umwandelbarkeit der Wärme in Arbeit und der Arbeit in Wärme — mechanisches Wärmeäquivalent — äußere und innere Arbeit — erster Hauptsatz.

R. Mayer hat zuerst bestimmt ausgesprochen, daß Arbeit in Wärme und Wärme in Arbeit verwandelt werden kann und daß einer Kalorie — d. i. jene Wärmemenge, welche ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1° C. erhöht — ein ganz bestimmter Arbeitswert zukommt. Die experimentellen Untersuchungen haben gelehrt, daß einer Kalorie rund 427 mkg entsprechen, welche Zahl man daher das mechanische Wärmeäquivalent nennt. Da das Gewicht eines Kilogramms sich mit dem Breitengrad ändert, so ist es für praktische Arbeiten manchmal angezeigt, den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents in absolutem Maß anzugeben.

Führen wir einem Körper Wärme zu, so wird im allgemeinen seine Temperatur und seine Gestalt verändert. Es muß daher eine Arbeit aufgewandt werden, um die inneren Kräfte zu überwinden und die Energie der kleinsten Teilchen zu erhöhen. Man nennt dies die

innere Arbeit oder die Vermehrung der inneren Energie, welche auf Kosten der Wärme erzeugt wird. Ferner ist Arbeit zur Überwindung der äußeren Kräfte notwendig, welche wir analog die äußere Arbeit nennen. Es wird sich daher die unendlich kleine Wärmemenge  $dQ$ , welche wir einem Körper zuführen, in einen Teil  $dU$  zerlegen lassen, welcher die Temperaturerhöhung und die innere Arbeit bewirkt, und einen zweiten, der die äußere Arbeit  $dK$  leistet. Um diese Arbeit in Wärmemaß zu bekommen, haben wir sie durch das mechanische Wärmeäquivalent  $E$  zu dividieren oder mit dem reziproken Wert desselben, dem kalorischen Arbeitsäquivalent  $A = \frac{1}{E}$  zu multiplizieren. Sonach erhalten wir nach dem Satz von der Erhaltung der Energie die Gleichung

$$dQ = dU + AdK, \quad (38)$$

welche man gewöhnlich den ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie nennt.

#### § 41. Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen und konstantem Druck.

Steht ein Körper unter keiner äußeren Kraft als einem konstanten, senkrecht zu seiner Oberfläche wirkenden Druck  $p$ , wie es etwa der Luftdruck ist, so wird die zugeführte Wärmemenge  $dQ$  lediglich eine kleine Volumsänderung hervorbringen. Jedes Oberflächenelement  $d\omega$  legt dabei einen Weg  $\delta n$  zurück. Die äußere Arbeit, welche geleistet wird, ist sonach gleich dem Produkt aus der Kraft  $p d\omega$  in den Weg  $\delta n$ , die Gesamtarbeit also

$$dK = \int p \delta n d\omega = p \int \delta n d\omega = p dV,$$

da ja  $\int \delta n d \omega$  nichts anderes als die Volumszunahme  $d v$  des Körpers ist. Es verwandelt sich daher die Gleichung (38) in

$$d Q = d U + A p d v . \quad (39)$$

Die innere Arbeit wird im allgemeinen ebenfalls eine Funktion der Temperatur, des Drucks und des Volumens sein. Da aber eine dieser drei Größen wegen der Gleichung (37) immer durch die beiden andern bestimmt werden kann, so genügt es,

$$U = f(v, T)$$

zu setzen, wonach

$$d U = \frac{\partial f}{\partial v} d v + \frac{\partial f}{\partial T} d T$$

wird.

Es hat nun schon Gay-Lussac gezeigt, daß ein Gas, wenn es sich ohne äußere Arbeitsleistung ausdehnt, seine Temperatur nicht ändert. Es leistet daher ein Gas bei der Volumsveränderung auch keine innere Arbeit, d. h. es muß die Größe

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

sein. Setzen wir  $\frac{\partial f}{\partial T} = c$ , so können wir Gleichung (39) schreiben

$$d Q = c d T + A p d v . \quad (40)$$

Wir wollen voraussetzen, daß sich unsere Gleichung auf die Masseneinheit Gas bezieht. Führen wir die Wärme bei konstantem Volumen zu, so ist  $d v = 0$ , folglich  $\frac{d Q}{d T} = c$  die spezifische Wärme bei konstantem Volumen.

Die Differentiation der Zustandsgleichung (37) ergibt

$$p \, d v + v \, d p = R \, d T . \quad (41)$$

Dadurch können wir Gleichung (40) in

$$d Q = (c + A R) \, d T - A \, v \, d p$$

verwandeln. Nehmen wir eine Wärmeausdehnung bei konstantem Druck vor, so wird  $d p = 0$ , folglich

$$\frac{d Q}{d T} = c + A R = C .$$

Dies ist also die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck.

### § 42. Adiabatische Zustandsänderungen.

Verändern wir den Zustand eines Körpers, ohne daß ihm Wärme zu- oder abgeführt wird, so nennen wir dies eine adiabatische Zustandsänderung. Für eine solche muß also in Gleichung (40)

$$d Q = 0$$

werden. Dividieren wir dann die Gleichung noch durch  $p \, v = R T$ , so ergibt dies

$$0 = \frac{c \, d T}{R T} + \frac{A \, d v}{v} \quad \text{oder} \quad 0 = \frac{c \, d T}{T} + \frac{A R \, d v}{v} .$$

Durch Integration erhalten wir

$$c \, l \, T + A R \, l \, v = G .$$

Zu Beginn des Prozesses sei diese Gleichung

$$c \, l \, T_0 + A R \, l \, v_0 = G .$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen folgt

$$c \, l \, \frac{T}{T_0} + A R \, l \, \frac{v}{v_0} = 0 ,$$

was wir schließlich noch umwandeln können in

$$1 \left( \frac{T}{T_0} \right)^c + \left( \frac{v}{v_0} \right)^{AR} = 0 \quad \text{oder} \quad \left( \frac{T}{T_0} \right)^c \left( \frac{v}{v_0} \right)^{AR} = 1.$$

Beachten wir noch, daß

$$C - c = AR,$$

so bleibt uns schließlich

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{v_0}{v} \right)^{\frac{c}{c-1}} = \left( \frac{v_0}{v} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad (42)$$

wenn wir das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa$  nennen. Diese Gleichung besagt somit, daß durch Kompression eines Gases seine Temperatur erhöht, durch Ausdehnung erniedrigt wird.

Auf ähnliche Weise können wir auch die Beziehung zwischen Druck und Volumen bei einer adiabatischen Zustandsänderung eines Gases finden. Ersetzen wir in Gleichung (40)  $dT$  durch  $\frac{p dv + v dp}{R}$

aus der Gleichung (41), so wird

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{c}{R} (p dv + v dp) + A p dv \\ &= \frac{(c + AR) p dv + c v dp}{R} = \frac{C p dv + c v dp}{R}. \end{aligned}$$

Für eine adiabatische Änderung muß wieder  $dQ = 0$ , also

$$C p dv + c v dp = 0$$

sein, was durch  $p v$  dividiert

$$C \frac{dv}{v} + c \frac{dp}{p} = 0$$

ergibt. Durch Integration finden wir wie früher

$$Cl \frac{v}{v_0} + cl \frac{p}{p_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p_0} = \left( \frac{v_0}{v} \right)^\kappa = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa,$$

wenn wir  $\rho$  die Dichte des Gases nennen. Diese Formel mußten wir benutzen, um die Schallgeschwindigkeit in der Luft zu finden (Bd. I § 66).

### § 43. Kreisprozeß.

Lassen wir den Zustand eines Körpers verschiedene Änderungen durchmachen, bis er wieder den Anfangszustand erreicht, so nennen wir das einen Kreisprozeß. Können die Veränderungen auch in entgegengesetzter Richtung ablaufen, so ist es ein umkehrbarer Kreisprozeß. Einen solchen wollen wir an einem idealen Gas vornehmen. Wir stellen den Zustand der Masseneinheit des Gases durch einen Punkt in einem

rechtwinkligen Koordinatensystem dar (Fig. 44), dessen Abszisse das Volumen, während die Ordinate den Druck bedeutet. Die Kurve, welche wir für eine konstante Temperatur dabei erhalten, nennen wir eine Isotherme. Bei einem idealen Gas ist sie

$$p v = \text{konst.},$$

also eine gleichseitige Hyperbel.

Der Punkt A sei der Anfangszustand des Gases bei der Temperatur  $T_0$ , dem Druck  $p_0$  und dem Vo-

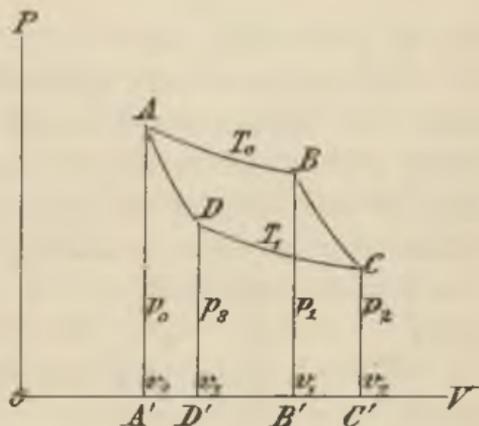


Fig. 44.

lumen  $v_0$ . Das Gas dehne sich jetzt isotherm, d. h. bei konstanter Temperatur  $T_0$  aus bis zum Zustand B mit den zugehörigen Größen  $T_0, p_1, v_1$ . Für diesen Vorgang ist also  $dT = 0$ , daher nach Gleichung (40)

$$dQ = A p dv.$$

Die gesamte Wärme  $Q_0$ , welche wir auf dem Weg von A nach B in unser Gas hineinstecken, wird also nur zur Arbeitsleistung verwendet, und es ist

$$(43) \quad Q_0 = A \int_{v_0}^{v_1} p dv = ART_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = ART_0 \ln \frac{v_1}{v_0},$$

da ja  $p v = RT_0$  ist.

Wir nehmen nun eine adiabatische Ausdehnung vor. Bei dieser wird somit der Zustand von B längs einer adiabatischen Kurve bis C vorrücken. Wir führen also Wärme weder zu noch ab. Das Gas kühlt sich daher von der Temperatur  $T_0$  auf  $T_1$  ab, und wir haben nach Gleichung (42)

$$(44) \quad v_1^{\gamma-1} T_0 = v_2^{\gamma-1} T_1.$$

Wir komprimieren nun das Gas isotherm, haben somit eine Wärmemenge

$$Q_1 = ART_1 \ln \frac{v_3}{v_2}$$

zuzuführen. Diese Wärmemenge erscheint aber, da  $v_3 < v_2$ , negativ, es wird in Wirklichkeit dem Gas Wärme entzogen. Die Kompression wird längs CD so lange fortgesetzt, bis die Isotherme die durch den Punkt A gezogene Adiabate in D schneidet. Von dort aus komprimieren wir dann weiter adiabatisch, langen also wieder beim Ausgangspunkt in A an. Für den letzten Vorgang gilt die Gleichung

$$(45) \quad v_3^{\gamma-1} T_1 = v_0^{\gamma-1} T_0.$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (44) und (45) miteinander, so finden wir  $v_1 v_3 = v_0 v_2$  oder

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_3}.$$

Daher ist

$$Q_1 = ART_1 \ln \frac{v_3}{v_2} = -ART_1 \ln \frac{v_1}{v_0},$$

was mit Gleichung (43) vereinigt ergibt

$$\frac{Q_0}{T_0} = -\frac{Q_1}{T_1},$$

wo also das negative Vorzeichen sagt, daß  $Q_1$  eine dem Gas entzogene Wärmemenge ist. Rechnen wir hingegen jede Menge positiv, so ist die in Arbeit umgewandelte Wärme  $Q_0 - Q_1$ . Sie entspricht in Fig. 44 der Fläche ABCD, da ja die Flächen ABB'A', BCC'B' usw. die geleistete bezgl. aufgewendete Arbeit bei den einzelnen Vorgängen des Kreisprozesses darstellen.

Von der Wärmemenge  $Q_0$ , welche bei der Temperatur  $T_0$  in das Gas hineingesteckt wird, wird also nur der Teil  $Q_0 - Q_1$  in Arbeit verwandelt, während die Wärmemenge  $Q_1$  bei der Temperatur  $T_1$  wieder abgegeben wird. Da sich der Kreisprozeß beliebig wiederholen läßt, so haben wir hier eine sogenannte kalorische Maschine vor uns, welche Wärme in Arbeit verwandelt. Doch ist es nur der Bruchteil

$$\frac{Q_0 - Q_1}{Q_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_0},$$

welcher wirklich von der gesamten aufgewendeten Wärme in Arbeit verwandelt wird. Je größer dieser Bruch ist, desto besser wird die Wärme ausgenützt.

Man nennt daher die Größe  $\frac{T_0 - T_1}{T_0}$  den ökonomischen Koeffizienten der Maschine. Diese arbeitet mithin um so ökonomischer, je größer der Temperaturunterschied  $T_0 - T_1$  ist.

#### § 44. Entropie — zweiter Hauptsatz.

Es ist nicht nötig, einen Kreisprozeß einfach längs der früher gewählten Isothermen und Adiabaten vor sich gehen zu lassen, sondern es kann dies längs jeder beliebigen geschlossenen Kurve geschehen, indem die Gleichung (40), wenn wir sie in der Form

$$A p dv = dQ - c dT$$

schreiben, ersichtlich ja nichts anderes als die Summe aus einem adiabatischen und einem isothermen Vorgang enthält, welche bei der graphischen Darstellung eine geometrische Summe wird. Je nach der Fläche der geschlossenen Kurve wird daher das Integral der Gleichung (40) verschiedene Werte annehmen können. Dividieren wir die gesamte Gleichung durch die absolute Temperatur  $T$ , so erhalten wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c dT}{T} + \frac{A R dv}{v}.$$

Integrieren wir nun diese Gleichung zwischen zwei Punkten der Kurve, welche den Größen  $T_0$ ,  $v_0$  und  $T_1$ ,  $v_1$  entsprechen, so wird

$$\int_0^1 \frac{dQ}{T} = c l \frac{T_1}{T_0} + A R l \frac{v_1}{v_0}.$$

Es ist also ganz gleichgültig, auf welchem Weg wir von dem einen zum andern Punkt ge-

langen, da das Integral nur vom Anfangs- und Endwert abhängig ist. Für jede geschlossene Kurve ist somit

$$\int \frac{dQ}{T} = 0. \quad (46)$$

Man pflegt daher  $\frac{dQ}{T}$  ein vollständiges Differential zu nennen. Wir wollen

$$\frac{dQ}{T} = dS$$

setzen, wonach wir erhalten

$$\int \frac{dQ}{T} = S + C.$$

Clausius nennt  $S$  die Entropie des Gases. Wir werden später sehen, daß wir dieselben Überlegungen auf jeden beliebigen Körper anwenden können.

Die Gleichung (46) ist der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, den wir etwa folgendermaßen formulieren können: Rechnen wir die zugeführte Wärme positiv, die entzogene negativ, so ist die Summe aller unendlich kleinen Wärmemengen, jede dividiert durch ihre jeweilige Temperatur für einen umkehrbaren Kreisprozeß, gleich Null.

Bei jeder adiabatischen Zustandsänderung ist  $dQ = 0$ , es wird daher

$$\int \frac{dQ}{T} = C,$$

d. h. die Entropie bleibt konstant, weshalb man die adiabatischen Vorgänge auch isentropische nennt.

### § 45. Unabhängigkeit des zweiten Hauptsatzes von der Natur der Körper — thermisches Perpetuum mobile.

Wie wir durch einen umkehrbaren Kreisprozeß Wärme in Arbeit verwandeln können, so läßt sich auch Arbeit in Wärme umsetzen, sobald wir den Prozeß entgegengesetzt durchlaufen. Gleichzeitig wird eine gewisse Wärmemenge auf höhere Temperatur gebracht. Wie ein Gas können wir auch jeden anderen beliebigen Körper zwei isotherme und zwei adiabatische Kurven durchlaufen lassen und somit einen umkehrbaren Kreisprozeß herstellen. Umgrenzen die Kurven eine Fläche von derselben Größe wie der Kreislauf eines Gases, so leisten beide Prozesse dieselbe Arbeit. Lassen wir sie daher entgegengesetzt vor sich gehen, so heben sie sich in ihrer Wirkung auf. Aber es wäre noch die Möglichkeit vorhanden, daß die Wärmemengen, welche von tieferer auf höhere Temperatur und umgekehrt befördert werden, verschieden sind. Das widerspricht aber dem Erfahrungssatz, daß es noch niemals in der Natur beobachtet wurde, daß Wärme ohne vorhandene anderweitige Energieänderung von selbst zu höherer Temperatur aufsteigen kann. Es muß daher auch für unsern zweiten Kreisprozeß wie für das Gas die Gleichung

$$\frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}$$

gelten. Schon Carnot sprach aus, daß bei der durch die Wärme hervorgebrachten Arbeit nur die Temperaturen, nicht aber die dazu verwendeten Körper maßgebend sind.

Wäre es möglich, daß Wärme von selbst zu höherer Temperatur aufsteigt, so könnte ein beständiger Wärme-

kreislauf ohne Arbeitsleistung hergestellt werden, indem ja durch Leitung oder Strahlung die Wärme wieder auf ihre ursprüngliche Temperatur sinken würde. Man hätte dann ein sogenanntes thermisches Perpetuum mobile. Aber dieses ist ebenso unmöglich wie ein mechanisches.

Der zweite Hauptsatz hat in der von uns gegebenen Form die Voraussetzung einer willkürlichen Temperatur, indem wir ein ideales Gas als thermometrische Substanz benützten. Hätten wir ein anderes Temperaturmaß gewählt, so würden wir auch eine andere Form des zweiten Hauptsatzes erhalten haben. W. Thomson machte daher den Vorschlag, den zweiten Hauptsatz direkt zur Temperaturdefinition zu benützen, da dann das Temperaturmaß von einer thermometrischen Substanz völlig unabhängig wird. Willkürlich bleibt jedoch wiederum die Wahl der Form der Temperaturfunktion, und es darf die Annahme der sogenannten absoluten Temperatur nur als eine Folge der Gewohnheit angesehen werden.

#### § 46. Anwendung der beiden Hauptsätze.

Wir lernten den ersten Hauptsatz in der Form

$$dQ = dU + A p dv$$

kennen. Hier ist die Größe  $dU$  ebenso ein vollständiges Differential wie das Differential der Entropie

$\frac{dQ}{T}$ . Es zeigt sich nämlich in der Erfahrung, daß die

Wärmemenge, welche wir einem Körper lediglich zur Änderung seines Zustandes abgesehen von der äußeren Arbeitsleistung zuführen müssen, nur vom Anfangs- und Endwert des Zustands abhängig ist, hingegen völlig unabhängig von den Zwischenzuständen.

Wir machen nun die Annahme, der Zustand eines Körpers sei durch die Temperatur  $T$  und das Volumen  $v$  vollständig bestimmt. Die beiden Differentiale der inneren Energie und der Entropie sind sonach Funktionen von  $T$  und  $v$  und ebenso die dem Körper zugeführte Wärmemenge  $dQ$ . Wir wollen deshalb

$$dQ = \alpha dT + \beta dv$$

setzen, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Funktionen von  $T$  und  $v$  sind. Betrachten wir die Gewichtseinheit des Körpers, so ergibt sich ohne weiteres, daß  $\alpha$  die spezifische Wärme bei konstantem Volumen ist, da dann  $dv = 0$  wird. Jedes vollständige Differential  $dF$ , das eine Funktion von  $T$  und  $v$  ist, können wir schreiben

$$dF = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial v} dv = M dT + N dv$$

und es folgt

$$\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial N}{\partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial v}.$$

Demnach können wir aus

$$dU = dQ - A p dv = \alpha dT + (\beta - A p) dv$$

die Folgerung ziehen:

$$(47) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial (\beta - A p)}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} - A \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Ferner haben wir

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\alpha}{T} dT + \frac{\beta}{T} dv,$$

und wiederum gilt

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\alpha}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\beta}{T} \right)$$

oder

$$\frac{1}{T} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{1}{T} \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T^2},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial \beta}{\partial T} - \frac{\beta}{T}. \quad (48)$$

Aus den Gleichungen (47) und (48) erhalten wir

$$\beta = \Lambda T \frac{\partial p}{\partial T},$$

folglich

$$dQ = \alpha dT + \Lambda T \frac{\partial p}{\partial T} dv. \quad (49)$$

Stellen wir den Zustand als Funktion der Temperatur und des Drucks, also durch  $T$  und  $p$  dar, so können wir

$$dQ = \gamma dT + \eta dp$$

setzen, wobei also  $\gamma$  die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist. Wir haben dann

$$dU = dQ - A p dv = dQ - A p \left( \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp \right),$$

da wir jetzt  $v$  als Funktion von  $T$  und  $p$  auffassen müssen. Aus

$$dU = \left( \gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T} \right) dT + \left( \eta - A p \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp$$

finden wir

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \gamma - A p \frac{\partial v}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \eta - A p \frac{\partial v}{\partial p} \right);$$

führen wir die Differentiation durch, so ergibt sich

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T} - A p \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial T},$$

oder

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} - A \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{\partial \eta}{\partial T}. \quad (50)$$

Wir haben nun weiter

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\gamma}{T} dT + \frac{\eta}{T} dp,$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\gamma}{T} \right) &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\eta}{T} \right), \\ \frac{1}{T} \frac{\partial \gamma}{\partial p} &= \frac{1}{T} \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T^2}, \\ (51) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial p} &= \frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{\eta}{T} \end{aligned}$$

und aus den Gleichungen (50) und (51)

$$\begin{aligned} \eta &= -AT \frac{\partial v}{\partial T}, \\ (52) \quad dQ &= \gamma dT - AT \frac{\partial v}{\partial T} dp. \end{aligned}$$

Analog diesem Vorgang ist es nicht schwer, für beliebige Variable, welche den Zustand bestimmen, die entsprechende Gleichung herzuleiten.

#### § 47. Verdampfungswärme — Schmelzwärme — gesättigter Dampf — Schmelzpunkt.

Wir haben in einem geschlossenen Gefäß die Masseneinheit eines Körpers teilweise in flüssigem, teilweise in dampfförmigem Zustand. Das Gewicht des Dampfes sei  $x$ , das der Flüssigkeit also  $1 - x$ . Das Volumen  $v$  des Gefäßes ist demnach

$$v = \frac{1-x}{s} + \frac{x}{\sigma} = \frac{1}{s} + \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{s} \right) x = u' + (u - u') x,$$

wenn  $s$  und  $\sigma$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bezgl. ihres gesättigten Dampfes ist. Es ist  $u'$  also das

sogenannte spezifische Volumen der Flüssigkeit, u jenes des Dampfes. Wir wollen nun eine Verdampfung der Flüssigkeit bei konstanter Temperatur vornehmen. Dann wird  $dT = 0$  und Gleichung (49)

$$dQ = AT \frac{\partial p}{\partial T} (u - u') dx .$$

Nennen wir die Verdampfungswärme  $r$ , so wird

$$dQ = r dx ,$$

daher

$$r = AT \frac{\partial p}{\partial T} (u - u') . \quad (53)$$

Diese Formel können wir benützen, um z. B. die Dichte des gesättigten Dampfes  $\frac{1}{u}$  zu finden, wenn die übrigen Größen bekannt sind.

Wir wollen jetzt die Temperatur der Masseneinheit des gesättigten Dampfes um  $dT$  erhöhen, dabei den Druck und das Volumen aber derart ändern, daß der Dampf gesättigt bleibt. Die Gleichung (39) läßt sich, auf unsern Fall angewendet, schreiben

$$dQ = \left( \frac{\partial U}{\partial T} + Ap \frac{\partial u}{\partial T} \right) dT , \quad (53a)$$

hingegen auf die Verdampfungswärme angewendet, ergibt die Integration

$$r = U_1 - U_2 + Ap(u - u') ,$$

wenn wir unter  $U_1$  die innere Energie der Masseneinheit Dampf, unter  $U_2$  dieselbe Größe für die Masseneinheit Flüssigkeit verstehen. Nun können wir aber annehmen, daß

$$U_2 = cT + k ,$$

wobei  $c$  die spezifische Wärme der Flüssigkeit und  $k$  eine Konstante bedeutet. Danach erhalten wir

$$U_1 = r + cT + k - Ap(u - u'),$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial T} = \frac{dr}{dT} + c - Ap \frac{\partial u}{\partial T} - A(u - u') \frac{\partial p}{\partial T},$$

da wir das spezifische Volumen  $u'$  der Flüssigkeit mit großer Annäherung als konstant ansehen können. Diesen Ausdruck

haben wir für  $\frac{\partial U}{\partial T}$  in Gleichung (53a) einzusetzen, wo-

bei wir nach Gleichung (53)  $A(u - u') \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{T}$  einführen wollen. Das ergibt

$$dQ = \left( \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T} + c \right) dT.$$

Die Größe

$$\gamma = \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T} + c$$

können wir somit die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes nennen. Wie man sieht, kann sie positiv oder negativ sein. In letzterem Fall können wir den Dampf komprimieren, erhöhen dabei seine Temperatur und bewirken, daß er nicht mehr gesättigt ist. Wir müssen ihm Wärme entziehen, wenn er gesättigt bleiben soll. Lassen wir einen derartig gesättigten Dampf sich ausdehnen, so wird er übersättigt und es tritt Kondensation ein. Es verhält sich so der Wasserdampf bei gewöhnlicher Temperatur. Es tritt daher gewöhnlich klares Wetter ein, wenn der Wind vom Berg ins Tal weht, da unten der Luftdruck höher ist, als oben. Steigt jedoch der Wind, so ist dies in der Regel mit Wolkenbildung verbunden.

Die Gleichung (53) gilt nun ebenso für einen festen Körper und seinen Dampf, wie etwa für Eis und den dabei befindlichen Wasserdampf. Sie gilt für die Schmelzwärme eines Körpers, wenn wir  $r$  damit bezeichnen, unter  $p$  den Flüssigkeitsdruck beim Schmelzpunkt, unter  $u$  und  $u'$  das spezifische Volumen des flüssigen bezgl. festen Körpers verstehen. Schreiben wir z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{AT(u - u')},$$

und bedenken wir, daß das Volumen des Wassers kleiner als jenes des Eises ist, so finden wir  $\frac{\partial p}{\partial T}$  negativ. Das heißt, mit wachsendem Druck erniedrigt sich der Schmelzpunkt und umgekehrt. Wir können die Gleichung (53) auch anwenden, wenn sich ein Körper durch Temperaturerhöhung bezgl. Druckverminderung in seine chemischen Bestandteile zerlegt. Es ist dann  $p$  einfach der Dissoziationsdruck,  $r$  die Dissoziationswärme usw.

#### § 48. Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Körpers.

Nehmen wir eine adiabatische Zustandsänderung durch Änderung des Drucks vor, so können wir die Gleichung (52) benutzen, wenn wir  $dQ = 0$  setzen. Es bleibt dann

$$\gamma dT = AT \frac{\partial v}{\partial T} dp.$$

Es ist nun  $\frac{\partial v}{\partial T}$  nichts anderes als  $v \delta$ , wenn wir unter  $\delta$  den Ausdehnungskoeffizienten des Körpers verstehen.

Wir können daher schreiben

$$\gamma dT = ATv \delta dp.$$

$\gamma$ ,  $A$ ,  $T$ ,  $v$  sind ihrer Natur nach positive Größen,  $\delta$  kann jedoch sowohl positiv als auch, wie z. B. beim Wasser zwischen  $0^\circ$  und  $4^\circ$  C., negativ sein. Im ersteren Fall wird sich daher mit wachsendem Druck die Temperatur erhöhen, im andern jedoch erniedrigen.

### § 49. Temperaturänderung durch Dehnung.

Ein Stab von der Masse Eins und der Länge  $l$  wird durch ein angehängtes Gewicht  $P$  gedehnt. Führen wir dem Stab die Wärme  $dQ$  zu, so verlängert er sich um  $dl$ . Das Gewicht sinkt und leistet dabei die Arbeit  $P dl$ . Die Wärme wirkt also diesmal nicht einer äußeren Kraft entgegen, sondern im selben Sinn. Wir haben deshalb nach dem ersten Hauptsatz

$$dU = dQ + AP dl.$$

Die Wärmemenge  $Q$  werde als Funktion von  $T$  und  $P$  dargestellt. Es ist sonach

$$dQ = \gamma dT + \eta dP.$$

Benützen wir nun die Eigenschaft der vollständigen Differentiale  $dU$  und  $\frac{dQ}{T}$  wie früher, indem wir

$$(54) \quad dl = \frac{\partial l}{\partial T} dT + \frac{\partial l}{\partial P} dP$$

setzen, so finden wir leicht

$$\eta = AT \frac{\partial l}{\partial T},$$

für eine adiabatische Dehnung erhalten wir somit

$$0 = \gamma dT + AT \frac{\partial l}{\partial T} dP.$$

$\gamma$  ist die spezifische Wärme bei konstantem Zug.  $\frac{\partial l}{\partial T} = \lambda l$ , wenn wir mit  $\lambda$  den Ausdehnungskoeffizienten bezeichnen. Wir haben somit

$$dT = - \frac{AT\lambda l}{\gamma} dP.$$

Da in der Regel  $\lambda$  positiv ist, so kühlt sich bei der Dehnung der Stab ab. Bei gespanntem Kautschuk ist  $\lambda$  negativ. In der Tat erwärmt sich eine Kautschukschnur bei der Dehnung und kühlt sich mit abnehmender Spannung ab.

Aus Gleichung (54) erhalten wir

$$dP = \frac{dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT}{\frac{\partial l}{\partial P}},$$

folglich

$$dQ = \gamma dT + \frac{\eta}{\bar{c}_P} \left( dl - \frac{\partial l}{\partial T} dT \right).$$

Bei konstanter Länge wird  $dl = 0$  und

$$dQ = \left( \gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\bar{c}_P} \right) dT.$$

Es ist daher die spezifische Wärme bei konstanter Länge

$$\gamma' = \gamma - \eta \frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\bar{c}_P} = \gamma - \frac{AT \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)^2}{\bar{c}_P} = \gamma - AT \lambda^2 E l_Q,$$

indem  $\frac{\partial l}{\partial P} = \frac{l}{E q}$  (Bd. I § 86), wenn  $q$  der Querschnitt des Stabs und  $E$  der Elastizitätsmodul ist. Bei Metalldrähten und vielen anderen Körpern zeigt sich, daß das Produkt  $AT \lambda^2 E l q$  so klein ist, daß man es in der Regel gegen  $\gamma$  vernachlässigen, das Verhältnis der spezifischen Wärmen also gleich Eins setzen kann.

## Die kinetische Theorie der Gase.

### § 50. Die Wärmebewegung in Gasen.

D. Bernoulli, vorzüglich aber R. Clausius entwickelten eine Theorie, welche direkt eine Vorstellung jener Bewegung der kleinsten Teilchen gibt, die wir Wärme nennen. Vollständig entwickelt ist diese Hypothese für Gase, und man faßt die ganze Anschauungsweise unter dem Namen „mechanische“ oder „dynamische“, in der Regel aber „kinetische“ Theorie der Gase zusammen. Nach ihr stellt man sich im gasförmigen Zustand die Molekeln vollständig voneinander getrennt und in geradliniger Bewegung begriffen vor. „Die Bewegungsrichtungen sind für ein ruhendes Gas über die Gesamtheit der Gasmolekeln im Raum gleichmäßig verteilt, so daß sich nach jeder Richtung des Raums gleichviel Molekeln bewegen. Da man den Molekeln eine gewisse Ausdehnung zuschreiben muß, so sind natürlich Zusammenstöße derselben nicht ausgeschlossen. Damit aber der Zustand des Gases unverändert bleibt, ist erforderlich, daß die Molekeln infolge der Zusammenstöße weder in ihrer Durchschnittsgeschwindigkeit noch in ihrer Durchschnittsbewegungsrichtung eine Änderung

erfahren. Um dieser Bedingung Genüge zu tun, ist es am bequemsten, die Molekeln als vollkommen elastische Kugeln von gleicher Größe und gleicher Masse anzusehen. Für deren Zusammenstoß gilt dann das Gesetz von der Erhaltung der gemeinsamen Bewegungsgröße als auch der kinetischen Energie, und entsprechend dem Zustand vor dem Stoß ist auch nachher die Bewegung der Molekeln nach jeder Richtung des Raums gleich wahrscheinlich.

Es genügt in den meisten Fällen, und es vereinfacht die mathematische Behandlung bedeutend — tatsächlich wurde es anfangs von seiten der Forscher auch stets so gepflogen, und wir werden uns im folgenden ihnen darin anschließen —, wenn man allen Molekeln eine bestimmte Geschwindigkeit zuschreibt. Dies ist aber nur ein Mittelwert aus allen möglichen Geschwindigkeiten, welche nach einem bestimmten Gesetz über die Molekeln verteilt sein müssen.“

### § 51. Boyle-Charlessches Gesetz.

Ein Gas, welches sich in keinem Gefäß befindet und keiner äußeren Kraft, wie etwa der Schwere, unterworfen ist, muß sich nach der kinetischen Theorie immer weiter zerstreuen. Befindet es sich aber in einem allseits geschlossenen Gefäß, so ist die Folge davon, daß von den Molekeln beständig Stöße auf die Gefäßwand ausgeübt werden. Indem diese wegen der großen Zahl der Molekeln sehr rasch aufeinander folgen, bewirken sie den Eindruck eines kontinuierlichen Druckes. Damit dieser, sowie der ganze Zustand des Gases konstant bleibt, ist es nötig, daß ebensoviel Molekeln von der Wand in das Gas zurückfliegen, als gegen die Wand stoßen. Es wird dies am leichtesten

erfüllt, wenn wir annehmen, die Gasmolekeln werden von der Wand nach den Reflexionsgesetzen zurückgeworfen, was ja bei vollkommen elastischen Kugeln und einer absolut starren Wand tatsächlich der Fall ist.

„Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so ist das Maß derselben die Bewegungsgröße, welche in der Zeiteinheit auf den Körper übertragen wird. Stößt eine Molekel von der Masse  $m$  mit einer Geschwindigkeitskomponente  $u$  senkrecht gegen die Wand, so hat sie nach dem Stoß ebenfalls senkrecht gegen die Wand die Geschwindigkeit  $-u$ . Es muß also während des Stoßes auf die Molekel ein Gegendruck ausgeübt werden, welcher sie vollständig zur Ruhe bringt, ferner muß ein weiterer Gegendruck vorhanden sein, welcher ihr die Geschwindigkeit  $-u$  erteilt. Die Molekel empfängt also von der Wand die Bewegungsgröße  $2m u$ . Dieselbe Bewegungsgröße, nur entgegengesetzt gerichtet, hat aber auch die Wand nach dem Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung von der Molekel erhalten.“

Eine Molekel besitze die Geschwindigkeit  $c$  mit den Komponenten  $\xi, \eta, \zeta$ . Es ist also

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2.$$

In der Volumeneinheit seien  $N_1$  Molekeln vorhanden von der Geschwindigkeitskomponente  $\xi$ . Es werden daher  $N_1 \xi$  solcher Molekeln gegen die Flächeneinheit einer Wand fliegen, welche senkrecht zur  $x$ -Achse steht.  $N_1 \xi$  Stöße erhält davon die Wand in der Sekunde und

$$N_1 \xi \cdot 2m\xi = 2N_1 m\xi^2$$

ist daher die Bewegungsgröße, welche die Wand empfängt. Bilden wir die Summe über sämtliche Molekeln, so erhalten wir den Druck

$$p = \sum 2 N_1 m \xi^2 = \sum 2 N_1 m \eta^2 = \sum 2 N_1 m \zeta^2,$$

da wegen der gleichen Verteilung es ebensoviel gleich große  $\eta$  und  $\zeta$  als  $\xi$  geben muß. Es ist demnach

$$p = \frac{\sum 2 N_1 m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{3} = \frac{2 m c^2}{3} \sum N_1.$$

Überlegen wir nun, daß die Hälfte der Molekeln positive, die andere negative  $\xi$  usw. besitzt, so fliegen gegen die Wand, wenn  $N$  die Zahl sämtlicher Molekeln in der Volumeneinheit ist,  $\frac{N}{2}$  Molekeln. Es ist daher

$$\sum N_1 = \frac{N}{2}, \text{ folglich}$$

$$p = \frac{N m c^2}{3}. \quad (55)$$

Enthält unser Gefäß vom Volumen  $v$   $n$  Molekeln, so ist  $N = \frac{n}{v}$ , folglich

$$p v = \frac{n m c^2}{3}. \quad (56)$$

Dies ist der Inbegriff des Boyle-Charlesschen Gesetzes, welches wir nach Gleichung (37) in der Form

$$p v = RT$$

kennen gelernt haben. Da für eine bestimmte Gasmenge die Zahl  $n$  der Molekeln, als auch die Masse  $m$  einer Molekel konstant ist, so muß  $c^2$  proportional der absoluten Temperatur sein.  $\frac{m c^2}{2}$  ist die kinetische Energie

einer Molekel und  $\frac{n m c^2}{2}$  jene des ganzen Gases. Das ist gleichzeitig die im Gas enthaltene Wärmemenge.

### § 52. Regel von Avogadro — Gesetze von Gay-Lussac und Dalton — Geschwindigkeit der Molekeln.

Es läßt sich zeigen, daß für Gase von gleicher Temperatur die lebendige Kraft der Molekeln gleich ist. Wir haben deshalb die Gleichung

$$\frac{m c^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} = k ,$$

wenn  $m$  und  $c$  dem einen,  $m_1$  und  $c_1$  dem andern Gas angehören. Stehen daher Gase von gleicher Temperatur auch unter demselben Druck, so muß

$$p = \frac{N m c^2}{3} = \frac{N_1 m_1 c_1^2}{3} = \dots ,$$

daher

$$N = N_1 = \dots$$

sein. Gase unter gleichem Druck haben bei derselben Temperatur in gleichen Räumen gleichviel Molekeln. Es ist dies Avogadros Regel, welche hier als eine Folge der kinetischen Gastheorie erscheint.

Nach Gay-Lussac stehen zwei eine chemische Verbindung eingehende Gasmengen, bezogen auf gleichen Druck und gleiche Temperatur, untereinander sowie zur Menge der Verbindung in Verhältnissen, welche durch einfache ganze Zahlen dargestellt werden. Es folgt dies unmittelbar aus Avogadros Regel und Daltons Theorie, nach welcher die Molekeln einer chemischen Verbindung aus ganzen Zahlen von Atomen der sie bildenden Elemente bestehen.

Haben wir mehrere Gase in einem Gefäß, deren Molekelzahlen in der Volumeneinheit  $N_1, N_2 \dots$  sind, so ist die Gesamtzahl der Molekeln in der Volumeneinheit

$N = N_1 + N_2 + \dots$  und der Druck

$p = \frac{2}{3} N k = \frac{2}{3} N_1 k + \frac{2}{3} N_2 k + \dots = p_1 + p_2 + \dots$ ,  
wenn wir mit  $p_1, p_2 \dots$  die Drucke bezeichnen, welche die einzelnen Gase für sich im Gefäß erzeugen würden. Es ist der Gesamtdruck eines Gasgemenges gleich der Summe der Partialdrucke der einzelnen Gase, ein Gesetz, welches Dalton fand.

Setzen wir  $Nm = \rho$ , so haben wir unter  $\rho$  die Masse der Volumeinheit, d. i. die Dichte des Gases zu verstehen. Wir haben sonach  $p = \frac{\rho c^2}{3}$  oder

$$c^2 = \frac{3p}{\rho}.$$

Da aber Druck und Dichte eines Gases bestimmbar ist, so ist uns damit auch die Geschwindigkeit der Gasmolekeln gegeben. Wir finden so für Sauerstoff 461 m, Stickstoff 492 m, Wasserstoff 1844 m. Diese Zahlen gelten für die Temperatur des schmelzenden Eises, und sie wachsen proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur. Wir haben es sonach mit Geschwindigkeiten zu tun, welche jene der Geschosse unserer modernen Feuerwaffen zum Teil weit übertreffen.

### § 53. Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz — Zustandsgleichung von van der Waals.

Nach dem Boyle-Charlesschen Gesetz muß mit wachsendem Druck das Volumen des Gases beständig kleiner werden, bis es bei unendlich hohen Drucken schließlich Null wird. Dasselbe müßte man auch bei endlichen Drucken erreichen, wenn die Temperatur bis zum absoluten Nullpunkt sinkt. Die Erfahrung lehrt

jedoch, daß man Gase nur bis zu einer gewissen Grenze komprimieren kann, wie groß man auch den Druck wählt. Wir erklären uns das so, daß wir uns die Molekeln nicht als Massenpunkte, sondern, wie wir bereits früher annahmen, als kleine vollkommen elastische Kugeln vorstellen. Ist nun das Gas so stark komprimiert, daß die Molekeln einander berühren, so füllen sie den ihnen zu Gebote stehenden Raum aus und lassen sich nicht weiter zusammendrücken. Das besagt, daß infolge des Volumens der Molekeln der Bewegung einer einzelnen nicht der ganze Gefäßraum zur Verfügung steht. Der Einfluß des Molekular-Volumens auf das Boyle-Charlessche Gesetz konnte bis jetzt strenge noch nicht ermittelt werden. Es genügt jedoch, für nicht zu hohe Drucke das Volumen  $v$  um eine konstante Größe  $b$  zu vermindern, welche sich als das vierfache Molekularvolumen ergibt. Das heißt: das Volumen, welches die Molekeln wirklich mit Materie ausfüllen, entspricht in seinem vierfachen Wert der Größe  $b$ . Die Zustandsgleichung verändert sich dadurch in

$$(57) \quad p(v - b) = \frac{nm c^2}{3}.$$

Wir müssen aber noch einen zweiten Einfluß in Rechnung ziehen. Bisher nahmen wir nämlich an, daß die Molekeln gar keine Kräfte aufeinander ausüben. Diese Annahme ist jedoch sehr willkürlich. Es liegt im Gegenteil nahe, den Molekeln Anziehungskräfte zuzuschreiben, da ja sonst ein Verflüssigen der Gase und ein Überführen in den festen Zustand bei abnehmender Temperatur kaum denkbar wäre. Wir haben von den Kräften anzunehmen, daß sie nur dann

wirksam sind, wenn die Molekeln einander sehr nahe kommen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, daß bei einem Zusammentreffen von mehr als zwei Molekeln eine Konstellation eintritt, bei welcher zwei Molekeln dauernd zusammenbleiben und eine sogenannte Doppelmolekel bilden. Durch die Anziehungskräfte wird also die Gesamtzahl der sich als Einzelindividuen bewegendenden Molekeln verringert, was nach Gleichung (56) einer Verminderung des Drucks gleichkommt. Auch diese Abweichung vom Boyle-Charlesschen Gesetz ist erfahrungsgemäß vom Volumen abhängig. Sie verschwindet bei sehr großer Verdünnung des Gases. Für diesen Fall haben wir also anzunehmen, daß nur einfache Molekeln vorhanden sind. Das gilt auch für sehr hohe Temperaturen, was ohne weiteres verständlich ist. Mit wachsender Temperatur nimmt die Energie der Molekeln zu und erschwert so die Vereinigung zu Doppelmolekeln. Die Zahl der Molekeln in einem verdünnten Gas von hoher Temperatur sei  $n_0$ . Verdichten wir es allmählich, so treten die Abweichungen auf, welche mit abnehmendem Volumen und sinkender Temperatur immer stärker ins Gewicht fallen. Wir werden daher die Zahl der jeweilig vorhandenen Molekeln durch

$$n = n_0 \left( 1 - \frac{k}{vT} \right)$$

darstellen können. Wird  $v$  und  $T$  genügend groß, so kann  $\frac{k}{vT}$  gegen Eins vernachlässigt werden, d. h. wir merken keine Abweichung vom Boyle-Charlesschen Gesetz, während mit abnehmendem  $v$  und  $T$  auch  $n$ , wie es die Erfahrung verlangt, immer kleiner wird.

Demnach erhalten wir aus Gleichung (57)

$$p(v - b) = \frac{n_0 m c^2}{3} \left(1 - \frac{k}{vT}\right).$$

Es ist zu bemerken, daß sowohl  $b$  gegen  $v$  als auch  $\frac{k}{vT}$  gegen Eins klein sein muß, da wir sonst nicht so einfache Funktionen voraussetzen können. Es ist somit die Annahme

$$p = \frac{n_0 m c^2}{3(v - b)} - \frac{k n_0 m c^2}{3 v^2 T}$$

erlaubt, wobei wir höhere Glieder nicht in Betracht ziehen.  $\frac{c^2}{T}$  ist eine konstante Größe; wir können daher

$$\frac{k n_0 m c^2}{3 T} = a$$

setzen und die Gleichung in die Form

$$(58) \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

bringen. Dies ist die Zustandsgleichung der Gase, welche zuerst von van der Waals, jedoch mittels anderer Erklärungsweise aufgestellt wurde. Sie ist um so wertvoller, als sie noch für viel höhere Drucke, als man nach der theoretischen Betrachtung glauben sollte, gültig ist, ja von van der Waals selbst auch für die Verflüssigung der Gase angewandt wurde. Sie zeichnet sich durch Einfachheit aus, da sie in die Zustandsgleichung idealer Gase nur die zwei neuen Konstanten  $a$  und  $b$  einführt.

### § 54. Kritische Temperatur — kritischer Druck — kritisches Volumen.

Wir können die Gleichung (58) in die Form

$$p v^3 - (p b + RT) v^2 + a v - a b = 0$$

bringen. Sie ist somit bezüglich des Volumens  $v$  eine Gleichung 3. Grads. Eine solche hat drei Wurzeln, von welchen entweder alle reell, oder eine reell und die beiden andern imaginär sein können. Wir veranschaulichen uns dies am besten durch die

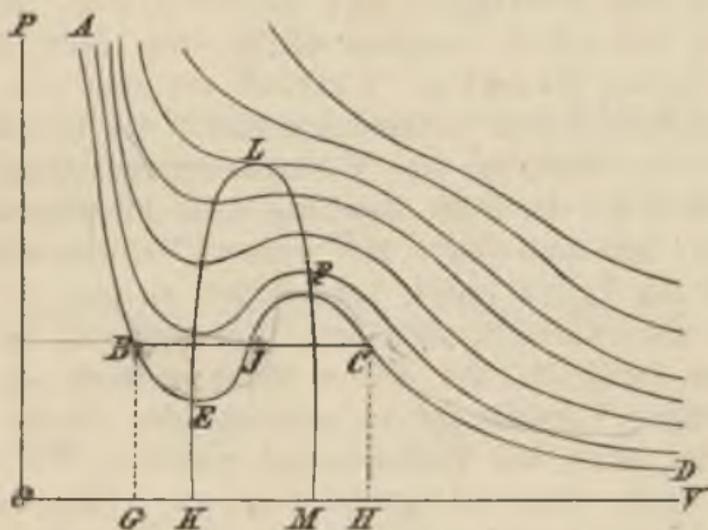


Fig. 45.

graphische Darstellung (Fig. 45), indem wir die Volumina als Abszissen, die Drucke als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen. Tun wir das bei verschiedenen Temperaturen, so erhalten wir eine Schar von Isothermen. Bei tiefen Temperaturen, für welche die Kurven ein Minimum bei E und ein Maximum bei F haben, erhalten wir drei mögliche Werte des Volumens, wenn wir innerhalb des

Druckunterschieds EF eine zur  $v$ -Achse parallele Gerade ziehen. Diese schneidet die Kurve in drei Punkten, welche die drei Wurzeln der Gleichung ergeben. Es lassen sich aber nicht alle drei Wurzeln realisieren. Zwischen E und F haben wir nämlich einen labilen Zustand, indem bei wachsendem Druck auch das Volumen wachsen soll, was nicht ausführbar ist; sondern, wenn wir das Gas komprimieren, beginnt es sich beim Punkt C zu verflüssigen. Wir haben dann gleichzeitig zweierlei Zustände, den flüssigen und gasförmigen, und die Strecke  $BG = CH$  veranschaulicht den Druck des gesättigten Dampfes. Während wir also von C an das Volumen weiter verkleinern, bleibt der Druck konstant. Es verläuft die Volumsänderung längs der Geraden CB. In B ist aber nur noch Flüssigkeit vorhanden. Es muß dann für weitere Volumsvermindierungen der Druck gleich beträchtlich steigen.

Es wäre verfehlt, nach dem Bisherigen zu glauben, daß das Stück BC der Kurve völlig wertlos sei. Bei der nötigen Vorsicht ist es möglich, den Punkt C zu passieren, ohne daß Verflüssigung eintritt. Wir haben dann einen übersättigten Dampf. Dasselbe geschieht beim umgekehrten Durchlaufen der Kurve im Punkt B. Wir sprechen dann von einer überhitzten Flüssigkeit

Je höher die Temperatur wird, desto mehr nähern sich die Punkte B, J und C, bis sie schließlich zusammenfallen. Für diesen Punkt sind somit alle drei Wurzeln der Gleichung gleich groß. Steigern wir die Temperatur noch mehr, so erscheint nur noch eine reelle Wurzel. Die Temperatur der drei gleichen Wurzeln nennt man die kritische Temperatur.

Sie ist nämlich die Grenztemperatur, für welche die Verflüssigung eines Gases noch möglich ist. Gleicherweise nennen wir auch das Volumen und den Druck, welcher dem Punkt der drei gleichen Wurzeln entspricht, das kritische Volumen und den kritischen Druck.

Die Maxima und Minima der Kurven sind durch die Gleichung  $\frac{dp}{dv} = 0$  gegeben. Nach Gleichung (58) haben wir also

$$p + \frac{a}{v^2} - \frac{2a(v-b)}{v^3} = 0. \quad (59)$$

Es ist das die Gleichung der Kurve KELFM, welche die Minima bezgl. Maxima der Isothermen verbindet. Sie hat wieder ein Maximum, welches gleichzeitig der kritische Punkt ist. Wir erhalten sonach das kritische Volumen  $v_1$ , wenn wir für Gleichung (59)  $\frac{dp}{dv} = 0$  setzen. Dies ergibt

$$\frac{6a(v_1 - b)}{v_1^4} - \frac{4a}{v_1^3} = 0,$$

daher  $v_1 = 3b$ .

Die Gleichungen (58) und (59) lassen jetzt mit Hilfe des Wertes  $v_1$  auch den kritischen Druck

$$p_1 = \frac{a}{27b^2}$$

und die kritische Temperatur

$$T_1 = \frac{8a}{27bR}$$

ermitteln.

Machen wir die kritischen Werte zur Einheit, d. h. setzen wir

$$v = \omega v_1 = 3 b \omega ,$$

$$p = \pi p_1 = \frac{a}{27 b^2} \pi ,$$

$$T = \tau T_1 = \frac{8 a}{27 b R} \tau ,$$

so verwandelt sich die Zustandsgleichung in

$$\left( \pi + \frac{3}{\omega^2} \right) (3 \omega - 1) = 8 \tau .$$

Es haben alle Körper dieselben Isothermen, wenn wir als Maßeinheiten des Drucks, des Volumens und der Temperatur deren kritische Werte nehmen.

### § 55. Spannungs- und Ausdehnungskoeffizient.

Schreiben wir das Boyle-Charlessche Gesetz in der Form

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t) ,$$

so wird bei konstantem Volumen  $v_0$

$$p = p_0 (1 + \alpha t) ,$$

und wir nennen  $\alpha$  den Spannungskoeffizienten. Lassen wir hingegen den Druck konstant, so heißt analog in der Gleichung

$$v = v_0 (1 + \alpha t)$$

$\alpha$  der Ausdehnungskoeffizient. Für ideale Gase sind somit diese beiden Koeffizienten identisch, nicht aber für wirkliche Gase. Wir wollen daher den

Spannungskoeffizienten mit  $\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t}$ , den Aus-

dehnungskoeffizienten mit  $\alpha_v = \frac{v - v_0}{v_0 t}$  bezeichnen. Nach Gleichung (58) ist

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT = R_1(1 + \alpha t),$$

wenn wir  $R_1 = 273 R$  setzen. Gleicherweise ist

$$\left(p_0 + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R_1.$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, so

$$(p - p_0)(v - b) = R_1 \alpha t = \left(p_0 + \frac{a}{p^2}\right)(v - b) \alpha t,$$

daher

$$\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \left(1 + \frac{a}{p_0 v^2}\right) \alpha.$$

Für ein bestimmtes Volumen ist also der Spannungskoeffizient eine konstante Größe, doch ist er immer größer als sein idealer Wert. Erst

wenn das Volumen  $v$  groß wird, kann  $\frac{a}{p_0 v^2}$  vernachlässigt werden und wir erhalten  $\alpha_p = \alpha$ . Der Umstand, daß für Wasserstoffgas  $a$  verschwindend klein ist, macht dieses Gas geeignet zur Bestimmung des idealen Spannungskoeffizienten  $\alpha$ .

Nicht so einfach wie der Spannungskoeffizient läßt sich der Ausdehnungskoeffizient  $\alpha_v$  finden. Wir müßten zu diesem Zweck  $v$  und  $v_0$  aus Gleichungen vom 3. Grad bestimmen und würden so zu sehr komplizierten, unübersichtlichen Ausdrücken kommen. Für bestimmte Grenzen der Temperatur und des Drucks lassen sich jedoch Vereinfachungen einführen, so daß die Aus-

drücke handlicher werden. Für Wasserstoff z. B. wird, da  $a = 0$  gesetzt werden kann,

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{b}{v_0}\right)\alpha,$$

mithin  $\alpha_v < \alpha_p$ . Bei anderen Gasen findet das Gegenteil statt.

### § 56. Spezifische Wärme.

Die in einem Gas enthaltene Wärmemenge ist die gesamte kinetische Energie der Molekeln. Wir betrachten die Masseneinheit des Gases, für welche  $n m = 1$  ist. Sonach wird nach Gleichung (56)

$$p v = \frac{c^2}{3}$$

und die im Gas enthaltene kinetische Energie

$$\frac{c^2}{2} = \frac{3}{2} p v.$$

Bekanntlich ist

$$c^2 = c_0^2(1 + \alpha t),$$

daher  $\frac{c_0^2 \alpha}{2}$  die Zunahme der gesamten Energie des Gases

bei einer Temperaturerhöhung um  $1^\circ \text{C}$ . Lassen wir dabei keine Volumsänderung eintreten, so ist

$$\gamma = \frac{c_0^2 \alpha}{2} A,$$

die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, wenn  $A$  das kalorische Äquivalent der Arbeit ist. Bei konstantem Druck gilt für das Gas

$$v = v_0(1 + \alpha t).$$

Die Zunahme für einen Grad ist  $v_0 \alpha$ , wobei die äußere

Arbeit  $p v_0 \alpha$  zu leisten ist. Das entspricht der Wärmemenge  $A p v_0 \alpha$ . Um diesen Wert ist also die spezifische Wärme bei konstantem Druck  $\Gamma$  größer als jene bei konstantem Volumen. Es ist somit

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + A p v_0 \alpha = \frac{A c_0^2 \alpha}{2} + \frac{A c_0^2 \alpha}{3} \\ &= \frac{5}{3} A \alpha \frac{c_0^2}{2} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{5}{3}.$$

In Wirklichkeit ist aber nur für wenige Gase, die sogenannten einatomigen, wie z. B. für Quecksilberdampf, Argon, Krypton, Xenon, das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\frac{5}{3}$ . Das rührt davon her, daß wir bei den meisten Gasen die Molekeln nicht als Kugeln von vollkommen glatter Oberfläche auffassen dürfen, sondern als kompliziertere Gebilde. Demzufolge besitzen sie nicht nur eine fortschreitende Bewegung, sondern auch eine drehende, sowie eine innere Bewegung, wie z. B. Schwingungen der die Molekeln bildenden Atome. Wir haben daher einen Unterschied zwischen der Gesamtenergie  $H$  und der Energie der fortschreitenden Bewegung  $K$  der Molekeln zu machen. Für die Masseneinheit des Gases ist

$$K = A \frac{c_0^2}{2},$$

hingegen

$$H = A \frac{c_0^2}{2} + k,$$

wobei  $k$  von jenem Teil der Energie herrührt, der nicht in der fortschreitenden Bewegung liegt. Ferner ist

$$\Gamma = \gamma + \Lambda p v_0 \alpha = \frac{2}{3} \frac{\Lambda \alpha c_0^2}{2} + k \alpha,$$

indem wir  $\gamma = \Lambda \alpha \frac{c_0^2}{2} + k$  setzen müssen.

Aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$\frac{\Gamma}{\gamma} = 1 + \frac{2}{3} \frac{K}{H}.$$

Überlegen wir, daß  $\frac{K}{H}$  zwischen Null und Eins liegen muß, so folgt

$$1 < \frac{\Gamma}{\gamma} < \frac{5}{3},$$

was sich ausnahmslos in der Erfahrung bestätigt.

### § 57. Stoßzahl und mittlere Weglänge der Molekeln.

Wir betrachten die Molekeln als kleine Kugeln vom Durchmesser  $\sigma$ . Alle sind nach den verschiedensten Richtungen des Raums in geradliniger Bewegung begriffen. Es muß sich folglich ereignen, daß eine Molekel mit anderen zusammenstößt. Die Zahl der Zusammenstöße, welche eine Molekel in der Sekunde erfährt, wollen wir berechnen. Wir denken uns zu dem Zweck erst alle Molekeln in Ruhe bis auf eine, welche sich mit der Geschwindigkeit  $c$  bewegt. Stößt sie mit einer anderen zusammen, so ist die Entfernung der Mittelpunkte beider gleich dem Durchmesser  $\sigma$  einer Molekel. Wir werden also denselben Effekt erreichen, wenn wir uns die ruhende Molekel als Punkt, hingegen die sich bewegende als eine Kugel vom Radius  $\sigma$  denken.

Eine solche Kugel hinterläßt als Spur einen Zylinder vom Querschnitt  $\pi \sigma^2$  und der Länge  $c$  per Sekunde. In der Sekunde fegt unsere Kugel also einen Raum  $\pi \sigma^2 c$  ab. In diesem Raum befinden sich  $N \pi \sigma^2 c$  Gasmolekeln, falls  $N$  die Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit ist.

$$Z = N \pi \sigma^2 c$$

ist daher die Zahl der Zusammenstöße, welche die wandernde Molekel erfährt.

Dieselbe Betrachtungsweise können wir für den Fall festhalten, daß alle Molekeln in Bewegung sind; nur haben wir dann anstatt  $c$  die mittlere relative Geschwindigkeit  $r$  einzusetzen, welche eine Molekel gegenüber den andern hat. Bilden die Bewegungsrichtungen zweier Molekeln den Winkel  $\vartheta$  (Fig. 46), so ist die relative Geschwindigkeit  $r$  gegeben durch

$$r^2 = c^2 + c^2 - 2 c^2 \cos \vartheta = 2 c^2 (1 - \cos \vartheta).$$

Die Zahl sämtlicher Geschwindigkeiten sei  $N$ . Sie verteilen sich gleichmäßig nach allen Richtungen des Raums. Wir können sie uns zum Zweck der Rechnung als Radien einer Kugel vorstellen, welche gleichmäßig verteilt die Kugeloberfläche treffen. Auf die Flächeneinheit der Kugel gehen demnach  $\frac{N}{4 \pi c^2}$  solcher Radien. Auf einer Kugelzone  $2 \pi c^2 \sin \vartheta d \vartheta$  liegen die Geschwindigkeiten, welche mit der Richtung  $OA$  den Winkel  $\vartheta$  einschließen. Ihre Zahl ist

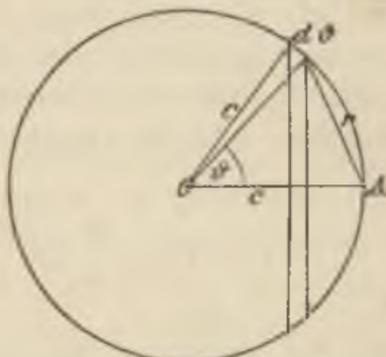


Fig. 46.

$$\frac{2 \pi N c^2 \sin \vartheta d \vartheta}{4 \pi c^2} = \frac{N}{2} \sin \vartheta d \vartheta$$

und ihre Gesamtsumme

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} \sin \vartheta d \vartheta \sqrt{2 c^2 (1 - \cos \vartheta)} &= c N \sin \vartheta d \vartheta \sqrt{\frac{1 - \cos \vartheta}{2}} \\ &= c N \sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} d \vartheta = 4 c N \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

Bilden wir nun durch Integration die Summe über die ganze Kugelfläche und dividieren wir durch die Gesamtzahl  $N$  der Geschwindigkeiten, so erhalten wir die mittlere relative Geschwindigkeit. Diese ist somit

$$r = 4 c \int_0^\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2} = 4 c \left[ \frac{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}{3} \right]_0^\pi = \frac{4 c}{3}.$$

Es ist demnach die Zahl der Zusammenstöße einer Molekel in der Sekunde

$$Z = \frac{4}{3} N \pi \sigma^2 c.$$

Dividieren wir den Weg  $c$ , welchen die Molekel in der Sekunde zurücklegt, durch die Zahl der Zusammenstöße, so erhalten wir die mittlere Weglänge, d. i. den Weg, welchen die Molekel im Durchschnitt zwischen zwei Zusammenstößen zurücklegt,

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}.$$

### § 58. Innere Reibung.

Bewegen sich zwei einander berührende parallele Gaschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so übt die schnellere auf die langsamere eine Beschleunigung, diese auf jene eine Verzögerung aus. Es wird somit

Bewegungsgröße von der schnelleren an die langsamere Schichte abgegeben, u. z. wird durch die Flächeneinheit der Schichte die Bewegungsgröße

$$R = - \eta \frac{du}{dz} \quad (60)$$

per Sekunde getragen. Das heißt,  $R$  ist die Kraft, welche die schnellere Schichte auf die Flächeneinheit der langsameren ausübt. Wir bezeichnen diese Kraft mit dem Namen „innere Reibung“ (siehe Bd. I § 64).

$\eta$  nennen wir den Reibungskoeffizienten,  $\frac{du}{dz}$  ist das

Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Bewegungsrichtung der Gasschichte. Verstehen wir unter  $z$  die eine der Koordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so bewegen sich die Schichten parallel zur  $xy$ -Ebene. Den Vorgang der inneren Reibung der Gase nach der kinetischen Theorie zu erklären, läuft also darauf hinaus, die Möglichkeit des Transports von Bewegungsgröße parallel zur  $z$ -Achse nachzuweisen.

Die Bewegungsrichtung der Gasschichten sei parallel zur  $x$ -Achse. In der Volumeneinheit des Gases seien  $n$  Molekeln von der Geschwindigkeit  $\xi'$  parallel zur  $x$ -Achse und  $\zeta$  parallel zur  $z$ -Achse. Durch die Flächeneinheit der  $xy$ -Ebene wird sonach in der Sekunde die Bewegungsgröße

$$R = \sum n m \xi' \zeta$$

getragen, wobei sich die Summe über alle möglichen Werte von  $\xi'$  und  $\zeta$  erstreckt. Die Molekeln, welche die  $xy$ -Ebene mit der Geschwindigkeit  $\zeta$  passieren, kommen aus verschiedenen Schichten. Die aus der Schichte mit der Ordinate  $z$  stammen, haben die Geschwindigkeit

$$\xi' = \xi + u + \frac{du}{dz} z,$$

wobei sich  $\xi$  auf die Wärmebewegung,  $u + \frac{du}{dz} z$  auf die Bewegung der Schichte als Ganzes bezieht. Es ist somit  $u$  die Geschwindigkeit der Schichte in der  $xy$ -Ebene. Für die Reibung haben wir also

$$R = \sum n m \left( \xi + u + \frac{du}{dz} z \right) \xi.$$

Die Summen  $\sum n m \xi \zeta$  und  $\sum n m u \zeta$  verschwinden wegen der gleich großen Anzahl positiver und negativer  $\xi$  und  $\zeta$ . Es bleibt also nur

$$R = \frac{du}{dz} \sum n m \zeta z,$$

wobei wir  $\frac{du}{dz}$  als konstant ansehen. Ist der Weg, welchen die Molekel nach ihrem letzten Zusammenstoß in  $m$  (Fig. 47) bis zum Passieren der  $xy$ -Ebene zurücklegt,  $r$ , so besteht die Proportion

$$\zeta : c = -z : r,$$

daher

$$z = -\frac{\xi r}{c}.$$

Danach können wir schreiben

$$R = -\frac{1}{c} \frac{du}{dz} \sum n m \zeta^2 r.$$

Der Mittelwert von  $r$  ist aber für alle  $\zeta$  eine konstante Größe und zwar gleich der mittleren Weglänge  $\lambda$ , weshalb

$$R = -\frac{\lambda}{c} \frac{du}{dz} \sum n m \zeta^2$$

gesetzt werden kann. Nun ist

$$\Sigma n m \zeta^2 = p$$

gleich dem Druck des Gases, so daß wir leicht nach Gleichung (60) für die Größe des Reibungskoeffizienten

$$\eta = \frac{p \lambda}{c} = \frac{N m c \lambda}{3} \quad (61)$$

erhalten, wenn wir den Wert von  $p$  aus Gleichung (55) benützen.

Führen wir in Gleichung (61) den Wert der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4 N \pi \sigma^2}$$

ein, so ergibt dies

$$\eta = \frac{m c}{4 \pi \sigma^2}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist frei von der Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit, d. h. die innere Reibung eines Gases ist von dessen Dichte oder, was dasselbe ist, vom Druck unabhängig. Dieses überraschende von Maxwell gefundene Resultat bestätigt sich tatsächlich innerhalb sehr großer Druckgrenzen.

Aber noch einen anderen merkwürdigen Aufschluß gewährt uns die Theorie der inneren Reibung. Wir wissen, daß  $N m = \rho$  die Dichte des Gases ist, somit finden wir nach Gleichung (61)

$$\lambda = \frac{3 \eta}{\rho c}$$

Die Geschwindigkeit der Molekeln ist uns bereits bekannt (§ 52), der Reibungskoeffizient und die Dichte

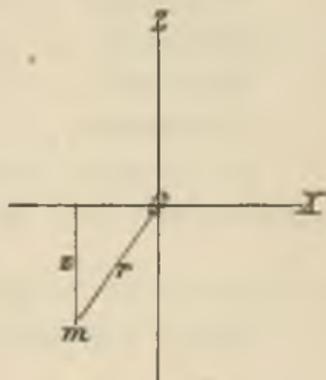


Fig. 47.

sind experimentell bestimmbare Größen. Wir können somit den Zahlenwert der mittleren Weglänge angeben und damit auch die Stoßzahl einer Molekel. So finden wir für

|             | Weglänge       | Stoßzahl        |
|-------------|----------------|-----------------|
| Wasserstoff | 0 0000 1855 cm | 9480 Millionen. |
| Sauerstoff  | 1059 „         | 4065 „          |
| Stickstoff  | 959 „          | 4735 „          |
| Kohlensäure | 680 „          | 5510 „          |

Es beziehen sich diese Zahlen auf den Druck einer Atmosphäre und die Temperatur  $0^{\circ}$  C.

### § 59. Wärmeleitung.

Haben wir parallel zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ein Temperaturgefälle  $\frac{dT}{dz}$ , so fließt beständig von oben nach unten Wärme durch die xy-Ebene. Für die Flächen- und Zeiteinheit ist diese Wärmemenge

$$W = -k \frac{dT}{dz},$$

wenn wir  $k$  die Wärmeleitungsfähigkeit nennen. Nach unserer Auffassung ist nun  $W$  nichts anderes als eine Energiemenge, welche von oben nach unten getragen wird, und wir können deren Größe genau so finden, wie den Wert der transportierten Bewegungsgröße im vorhergehenden Paragraphen. Es trägt jede passierende Molekel durch die xy-Ebene die Wärmemenge  $m \gamma \left( T_0 + \frac{dT}{dz} z \right)$ , indem  $m$  die Masse einer Molekel,  $\gamma$  die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und  $z$  die Höhe jener Schichte bedeutet, aus welcher die Molekel

kommt. Dabei haben wir vorausgesetzt, daß die Temperatur

$$T = T_0 + \frac{dT}{dz} z$$

sei.  $T_0$  ist also die Temperatur in der  $xy$ -Ebene. Wir brauchen somit in den Formeln für die innere Reibung nur  $m$  durch  $m\gamma$  und  $u$  durch  $T$  zu ersetzen und haben unmittelbar die Formel für die Wärmeleitung

$$k = \frac{c N m \lambda \gamma}{3} = \frac{\rho c \lambda \gamma}{3}.$$

Es besteht demnach zwischen dem Reibungskoeffizienten und der Wärmeleitungsfähigkeit die enge Beziehung

$$k = \eta \gamma.$$

Ferner folgt, daß auch die Wärmeleitungsfähigkeit vom Druck des Gases unabhängig ist, und schließlich haben wir auch in der Wärmeleitung ein Mittel, den Zahlenwert der mittleren Weglänge kennen zu lernen.

### § 60. Größe der Molekeln.

Komprimieren wir ein Gas durch sehr große Druckkräfte auf das kleinste mögliche Volumen, so können wir annehmen, daß die Molekeln den Raum  $V$ , der ihnen zur Verfügung steht, völlig mit Materie ausfüllen. Ist das ursprüngliche Volumen Eins, die darin enthaltene Molekelzahl  $N$ , so wird, da  $\frac{4}{3} N \pi \sigma^3$  das achtfache Molekularvolumen ist,

$$V = \frac{1}{6} N \pi \sigma^3.$$

Diese Gleichung erlaubt mit Hilfe des Werts der mittleren Weglänge

$$\lambda = \frac{3}{4N\pi\sigma^2}$$

den Durchmesser einer Molekel

$$\sigma = 8V\lambda$$

zu finden. Dieses überraschende Resultat verdanken wir Loschmidt. Er fand auf diesem Weg für

|                       |                                    |
|-----------------------|------------------------------------|
| Wasser . . . . .      | $\sigma$<br>44.10 <sup>-9</sup> cm |
| Kohlensäure . . . . . | 114     "     "                    |

Für ausgedehntere Studien der optischen Erscheinungen sind folgende Werke zu erwähnen:

- V. v. Lang: Einleitung in die theoretische Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1891.
- A. Beer: Einleitung in die höhere Optik. 2. Aufl. Bearbeitet von V. v. Lang. Braunschweig 1882.
- E. Verdet: Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von K. Exner. Braunschweig 1881.
- F. Neumann: Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgegeben von E. Dorn. Leipzig 1885.
- H. Poincaré: Mathematische Theorie des Lichtes. Deutsch von E. Gamlich und W. Jäger. Berlin 1894.

Für tiefere Studien in der Wärmelehre und kinetischen Gastheorie sind folgende Werke zu nennen:

- V. v. Lang: Einleitung in die theoretische Physik. 2. Aufl. Braunschweig 1891.
- C. Christiansen: Elemente der theoretischen Physik. Leipzig 1903.

- B. Riemann: Partielle Differentialgleichungen, angewendet auf physikalische Fragen. Herausgegeben von Hattendorf. Braunschweig 1876.
- R. Clausius: Die mechanische Wärmetheorie. Braunschweig 1876.
- — Die kinetische Theorie der Gase. Herausgegeben von M. Planck und C. Pulfrich. Braunschweig 1889 bis 1891.
- H. Poincaré: Thermodynamik. Deutsch von W. Jäger und E. Gamlich. Berlin 1893.
- O. E. Meyer: Die kinetische Theorie der Gase. 2. Auflage. Breslau 1895.
- L. Boltzmann: Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig 1895 und 1898.
- J. D. van der Waals: Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. 2. Aufl. Leipzig 1899.



Im gleichen Verlage erschienen ferner:

# Physikalische Aufgabensammlung

Von

G. Mahler,

Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm.

Mit den Resultaten.

Preis: in Leinwand gebunden 80 Pfennige.

(Sammlung Göschen Nr. 243.)



Bei dem engen Rahmen eines Bändchens der „Sammlung Göschen“ war eine sehr sorgfältige Auswahl aus dem großen physikalischen Übungsmaterial geboten; nur Aufgaben über tatsächliche und rein physikalische Verhältnisse konnten aufgenommen werden, während alle Beispiele mit mehr mathematischem Charakter ausgeschlossen werden mußten. Ganz einfache Aufgaben und Fragen, wie sie der Übungsstoff eines jeden Lehrbuches enthält und wie solche der ersten Einführung in die Physik dienen, wurden ebenfalls übergangen. Die größere Zahl der dargebotenen Aufgaben findet ihre Erledigung durch Rechnung; jedoch finden sich auch Beispiele für die Konstruktion und die graphische Behandlung. Die Lösung sämtlicher Beispiele setzt die Kenntnis der wichtigsten physikalischen Gesetze und Prinzipien voraus, wie auch eine gewisse Gewandtheit im elementaren und mathematischen Rechnen. Die Resultate der Aufgaben enthalten nur in schwierigeren Fällen Andeutungen zur Lösung. Im Text ist stets auf klare, anschauliche Darstellung, zuverlässiges Zahlenmaterial und streng wissenschaftliche Grundlage gehalten worden.

Da sich ein erfolgreicher physikalischer Unterricht nicht bloß auf den Vortrag und das Experiment beschränken darf, sondern von Übungen begleitet sein muß, in denen die physikalischen Gesetze in den verschiedensten Kombinationen zur Anwendung gelangen, so dürfte die vorliegende Sammlung der Schule und dem Privatstudium ein wesentliches und brauchbares Hilfsmittel zur sicheren Einführung in das große Gebiet der Physik sein.

---

---

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

# Physikalische Formelsammlung

Von

**G. Mahler,**

Professor am Gymnasium in Ulm.

Zweite, verbesserte Auflage. Mit 65 Figuren.

(Sammlung Göschen Nr. 136.)



Diese Formelsammlung enthält die Hauptgesetze der Experimentalphysik und diejenigen Formeln, die sich mit den Hilfsmitteln der niederen Mathematik ableiten lassen. Dabei ist deren Herleitung in den meisten Fällen kurz angedeutet. Letztere Einrichtung ermöglicht es, das Bändchen nicht bloß als Nachschlagemittel, sondern auch bei der Durchnahme und Wiederholung des physikalischen Lehrstoffs mit Erfolg zu benützen.



# Kleine Chemische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen

Jedes Bändchen in Leinwand gebunden 80 Pfennige

---

---

- Allgemeine und physikalische Chemie** von Dr. Max Rudolphi, Dozent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- Stereochemie** von Dr. E. Wedekind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.
- Anorganische Chemie** von Dr. Johs. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- Metalloide (Anorganische Chemie I)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
- Metalle (Organische Chemie II)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
- Organische Chemie** von Dr. Johs. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- Chemie der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.
- — III: Karbocyclische Verbindungen. Nr. 193.
- — IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- Maßanalyse** von Dr. Otto Rohm in Stuttgart. Nr. 221.
- Chemisch-technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
- Physiologische Chemie** von Dr. med. A. Legahn in Berlin I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
- — II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.
- Allgemeine chemische Technologie** von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Anorganische chemische Industrie** von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
- — III: Anorganische chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.
- Die Teerfarbstoffe** mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Professor an der Königl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.
- Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels** von Dr. Gustav Rauter I: Glas- und keramische Industrie Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
- — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

# Sammlung Göschel

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Göschel'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Forstwissenschaft** von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.
- Fremdwort, Das, im Deutschen** von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.
- Fremdwörterbuch, Deutsches**, von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
- Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirterei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Sitzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- Geodäsie** von Dr. C. Reinherz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.
- Geographie, Astronomische**, von Dr. Siegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- **Physische**, von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
- s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.
- Geologie** v. Professor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.
- Geometrie, Analytische, der Ebene** v. Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.
- **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.
- **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.
- Geometrie, Darstellende**, v. Dr. Rob. Haugner, Prof. an der Universität Jena. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.
- **Ebene**, von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.
- **Projektive**, in Synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.
- Geschichte, Badische**, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
- **Bayerische**, von Dr. Hans Odel in Augsburg. Nr. 160.
- **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.
- **Deutsche, im Mittelalter** (bis 1500) von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.
- **im Zeitalter der Reformation u. der Religionskriege** von Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.
- — siehe auch: Quellenkunde.
- **Französische**, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.
- **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.
- **des 19. Jahrhunderts** v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univers. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.
- — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.
- **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
- **Lothringens**, von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.
- **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univers. München. III. 6 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.

# Sammlung Götschen Zeinelegantem Einwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Geschichte, Österreichische, I:** Von der Urzeit bis 1439 von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 104.
- II: Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.
- **Römische,** von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
- **Russische,** v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Obergymnasium in Mainz. Nr. 4.
- **Sächsische,** von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
- **Schweizerische,** von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.
- **Spanische,** von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
- **der Chemie** siehe: Chemie.
- **der Malerei** siehe: Malerei.
- **der Mathematik** s.: Mathematik.
- **der Musik** siehe: Musik.
- **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.
- **der Physik** siehe: Physik.
- **des deutschen Romans** s.: Roman.
- **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.
- **des deutschen Unterrichtswesens** s. e: Unterrichtswesen.
- Geschichtswissenschaft, Einleitung in die,** von Dr. Ernst Bernheim, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 270.
- Gesundheitslehre.** Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.
- Gewerbewesen** von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.
- Gewichtswesen.** Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Gleichstrommaschine, Die,** von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Figuren. Nr. 257.
- Gletscherkunde** von Dr. Frh. Machäfel in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
- Gottfried von Straßburg.** Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
- Grammatik, Deutsche,** und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
- **Griechische, I:** Formenlehre von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.
- II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.
- **Lateinische.** Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Professor Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.
- **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Goltzer, Prof. a. d. Universität Rostock. Nr. 1.
- **Russische,** von Dr. Erich Bernker, Professor an der Universität Prag. Nr. 66.
- siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.
- Handelskorrespondenz, Deutsche,** von Prof. Th. de Beaug, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
- **Englische,** von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

6. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Handelskorrespondenz, Französische**, v. Professor Th. de Beauv, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.
- **Italienische**, von Professor Alberto de Beauv, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
- **Spanische**, von Dr. Alfredo Nadal de Marzecurrena. Nr. 295.
- Handelspolitik, Auswärtige**, von Dr. Heinr. Sieveking, Prof. an der Universität Marburg. Nr. 245.
- Handelswesen, Das**, von Dr. Wilh. Legis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.
- II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.
- Harmonielehre** von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.
- Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg**. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Professor am Königlichen Friedrichs-Kollegium zu Königsberg. Pr. Nr. 22.
- Hauptliteraturen, Die d. Orients** v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Universität Wien. I. II. Nr. 162. 163.
- Geldensage, Die deutsche**, von Dr. Otto Eitpold Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 32.
- siehe auch: Mythologie.
- Industrie, Anorganische Chemische**, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
- III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.
- **der Silikate, der künstl. Bausteine und des Mörtels**. I: Glas- und keramische Industrie von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
- II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Integralrechnung** von Dr. Friedrich Junfer, Professor am Karls gymnasium in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.
- Integralrechnung**. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedrich Junfer, Professor am Karls gymnasium in Stuttgart. Mit 50 Figuren. Nr. 147.
- Gartenkunde**, geschichtlich dargestellt von E. Gelsch, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm, neu bearbeitet von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbildungen. Nr. 30.
- Kirchenlied**. Martin Luther, Thom. Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Professor G. Berlit, Oberlehrer am Nikolai-gymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
- Klimalehre** von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln und 2 Figuren. Nr. 114.
- Kolonialgeschichte** von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 156.
- Kompositionslehre**. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.
- Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten**, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.
- Kristallographie** von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
- Rudrun und Dietrichen**. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.
- — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Kultur, Die, der Renaissance.** Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 189.
- Kulturgeschichte, Deutsche,** von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
- Künste, Die graphischen,** von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. f. f. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen und Beilagen. Nr. 75.
- Kurzschrift** siehe: Stenographie.
- Länderkunde von Europa** von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpen-einteilung. Nr. 62.
- **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.
- Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. M. Profil, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.
- **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.
- **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.
- **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.
- **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Professor an der Universität Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbildung. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
- **von Oesterreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 10 Text-illustration. und 1 Karte. Nr. 244.
- **des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Ziemrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbildungen u. 1 Karte. Nr. 258.
- Landeskunde von Skandinavien** (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinr. Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.
- **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.
- Landwirtschaftliche Betriebslehre** von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.
- Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.** Kulturhistorische Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen. Nr. 93.
- Lessings Emilia Galotti.** Mit Einleitung und Anmerkungen von Prof. Dr. W. Dotsch. Nr. 2.
- **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.
- Licht.** Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.
- Literatur, Althochdeutsche,** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Professor am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.
- Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts.** Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Janßen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.
- **des 16. Jahrhunderts I: Martin Luther, Thom. Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

# Sammlung Götschen Jein elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

**Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts II: Hans Sachs.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

— **III: Von Brant bis Hollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Terepos und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

**Literaturen. Die, des Orients.** I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 162.

— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 163.

**Literaturgeschichte, Deutsche,** von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286. 287.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gerde, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Vogler, Professor a. d. Universität Heidelberg. Nr. 125.

— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 254.

**Literaturgeschichte, Portugiesische,** von Dr. Karl von Reinhardtstoettner, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Slavische,** von Dr. Josef Karáset in Wien. 1. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — 2. Teil: Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

**Logarithmen.** Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

**Logik.** Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

**Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

**Magnetismus.** Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

**Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V.** von Dr. Rich. Muther, Professor an der Universität Breslau. Nr. 107—111.

**Maschinenelemente, Die.** Kurzgefasstes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Obergeringieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 3.

# Sammlung Götschen Fein elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Maßanalyse** von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.
- Mathematik, Geschichte der**, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Mechanik, Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.
- Meereskunde, Physische**, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
- Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil)** v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
- Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
- Meteorologie** von Dr. W. Trabert, Professor an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
- Mineralogie** von Dr. R. Brauns, Professor an der Universität Kiel. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.
- Minnefang und Spruchdichtung.** Walther v. d. Vogelweide mit Auswahl aus Minnefang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Professor an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
- Morphologie, Anatomie u. Phytologie der Pflanzen.** Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.
- Münzwesen.** Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Murner, Thomas.** Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.
- Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen**, von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121.
- Musikalische Formenlehre (Kompositionellehre)** v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.
- Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.
- **des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.
- Musiklehre, Allgemeine.** v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.
- Anthologie, Deutsche**, von Dr. Friedrich Kauffmann, Professor an der Universität Kiel. Nr. 15.
- **Griechische und römische**, von Dr. Herm. Steuding, Professor am Kgl. Gymnasium in Würzen. Nr. 27.
- siehe auch: Heldenjage.
- Nautik.** Kurzer Abriss des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.
- Nibelunge, Der, Nöt** in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Goltzer, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.
- — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

# Sammlung Götschen

In elegantem  
Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Kubpflanzen** von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftlichen Versuchsanstalt Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.
- Pädagogik im Grundriß** von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität Jena. Nr. 12.
- **Geschichte der**, von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
- Paläontologie** v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.
- Parallelperspektive**. Rechtswinklige und schiefwinklige Aronometrie von Professor J. Vonderlinn in Breslau. Mit 121 Figuren. Nr. 260.
- Perspektive** nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberlehrer an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.
- Petrographie** von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.
- Pflanze, Die**, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.
- Pflanzenbiologie** von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
- Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie** von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.
- Pflanzenreich, Das**. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Figuren. Nr. 122.
- Pflanzenwelt, Die**, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.
- Pharmakognosie**. Von Apotheker F. Schmitt-Henner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.
- Philosophie, Einführung in die**, von Dr. Max Wentscher, Prof. a. d. Universität Königsberg. Nr. 281.
- **Psychologie und Logik** zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Photographie**. Von Prof. H. Kehler, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbild. Nr. 94.
- Physik, Theoretische**, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.
- II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Univ. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.
- III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.
- **Geschichte der**, von A. Kistner, Professor an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.
- II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.
- Physikalische Aufgabensammlung** von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.
- Physikalische Formelsammlung** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.
- Plastik, Die**, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.
- Poetik, Deutsche**, von Dr. K. Borinski, Dozent a. d. Univ. München. Nr. 40.
- Posamentiererei**. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentraltelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

# Sammlung Götschen Je in elegantem Einwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlags-handlung, Leipzig.

- Psychologie und Logik** zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Eichenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Psychophysik. Grundriß** der, von Dr. G. S. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.
- Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen.** Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbau-Schule in Posen. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 290.
- Quellenkunde zur deutschen Geschichte** von Dr. Carl Jacob, Prof. a. d. Universität Tübingen. 2 Bände. Nr. 279. 280.
- Rechnen, Kaufmännisches,** von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.
- Rechtslehre. Allgemeine,** von Dr. Th. Sternberg in Charlottenburg. I: Die Methode. Nr. 169.  
— II: Das System. Nr. 170.
- Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche,** von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.
- Redelehre. Deutsche,** v. Hans Probst, Gymnasialprofessor in Bamberg. Mit einer Tafel. Nr. 61.
- Religionsgeschichte. Alttestamentliche,** von D. Dr. Max Löhner, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 292.  
— **Indische,** von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.  
— — siehe auch Buddha.
- Religionswissenschaft, Abriss der vergleichenden,** von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
- Roman.** Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielfe. Nr. 229.
- Russisch-Deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berner, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.
- Russisches Lesebuch** mit Glossar von Dr. Erich Berner, Professor an der Universität Prag. Nr. 67.  
— — siehe auch: Grammatik.
- Sachs. Hans.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
- Säugetiere.** Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
- Schattenkonstruktionen** v. Prof. J. Donderlinn in Breslau. Mit 114 Fig. Nr. 236.
- Schmarozer u. Schmarozerium in der Tierwelt.** Erste Einführung in die tierische Schmarozerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univerf. Gießen. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.
- Schule, Die deutsche, im Auslande,** von Hans Amrhein in Halle a. S. Nr. 259.
- Schulpraxis.** Methodik der Volksschule von Dr. R. Senfert, Seminaroberlehrer in Annaberg. Nr. 50.
- Simplicius Simplicissimus** von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. S. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.
- Sociologie** von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
- Spitzenfabrikation.** Textil-Industrie II: Weberei, Wirterei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- Sprachdenkmäler, Gotische,** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.
- Sprachwissenschaft, Germanische,** v. Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.  
— **Indogermanische,** v. Dr. R. Meringer, Prof. a. d. Univ. Graz. Mit einer Tafel. Nr. 59.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Sprachwissenschaft, Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.  
— — II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.  
— **Semitische,** von Dr. C. Brodelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.
- Staatsrecht, Preussisches,** von Dr. Fritz Stier-Somlo, Professor an der Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.
- Stammeskunde, Deutsche,** von Dr. Rudolf Much, a. o. Professor an d. Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.
- Statik, I. Teil:** Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, diplom. Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.  
— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.
- Stenographie nach dem System** von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.  
— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schren) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.
- Stereochemie** von Dr. E. Wedekind, Professor a. d. Universität Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.
- Stereometrie** von Dr. R. Glaeser in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.
- Stilkunde** von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.
- Technologie, Allgemeine chemische,** von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Teerfarbstoffe, Die,** mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.
- Telegraphie, Die elektrische,** von Dr. Lud. Reilstab. M. 19 Fig. Nr. 172.
- Testament.** Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerck in Jena. Nr. 272.  
— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.
- Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Mag. Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.  
— III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Thermodynamik (Technische Wärmelehre)** von K. Walther und M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Fig. Nr. 242.
- Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur** von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.  
— II: Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
- Tiergeographie** von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.
- Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner,** Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.
- Tierreich, Das, I: Säugetiere** von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
- Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle,** von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
- Trigonometrie, Ebene und sphärische,** von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Figuren. Nr. 99.

# Sammlung Götschen Je elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart** von Dr. Paul Stöhrer, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.
- **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Ludau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
- II. Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
- Tragsgeschichte der Menschheit** v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.
- Urheberrecht, Das deutsche, an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge** von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
- Versicherungsmathematik** von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.
- Versicherungswesen, Das,** von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.
- Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.
- Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert** von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.
- Volkswirtschaftslehre** v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 133.
- Volkswirtschaftspolitik** von Präsident Dr. R. van der Borgh in Brüssel. Nr. 177.
- Waltherlied, Das,** im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.
- Walther von der Vogelweide** mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Günther, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
- Warenkunde,** von Dr. Karl Hassad, Professor an der Wiener Handelsakademie. I. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
- II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.
- Wärme, Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme.** Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.
- Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik)** von K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.
- Wäscherei, Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Wasser, Das, und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe** von Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ingen. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.
- Weberzi, Textil-Industrie II: Webererei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Wirkerei, Textil-Industrie II: Webererei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Wolfram von Eschenbach, Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg.** Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichs-holleg. 3. Königsberg i. Pr. Nr. 22.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

**Wörterbuch** nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches**, von Dr. Ferd. Dettler, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

**Zeichenschule** von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck u. 135 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

**Zeichnen, Geometrisches**, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearb. v. Prof. J. Vonderlinn, diplom. und staatl. gepr. Ingenieur in Breslau. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Weitere Bände erscheinen in rascher Folge.

# Sammlung Schubert.

## Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die, auf wissenschaftlicher Grundlage beruhend, den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und zugleich durch eine leicht faßliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

### G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

#### Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände:

- 1 Elementare Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.
- 2 Elementare Planimetrie von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.
- 3 Ebene und sphärische Trigonometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.—.
- 4 Elementare Stereometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.40.
- 5 Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.60.
- 6 Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.
- 7 Ebene Geometrie der Lage von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.
- 8 Analytische Geometrie der Ebene von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.
- 9 Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.
- 10 Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung von Prof. Dr. W. Frz. Meyer in Königsberg. M. 9.—.
- 11 Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. M. 10.—.
- 12 Elemente der darstellenden Geometrie von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.
- 13 Differentialgleichungen von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Auflage. M. 8.—.
- 14 Praxis der Gleichungen von Prof. C. Runge in Hannover. M. 5.20.
- 19 Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungs-Rechnung von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.
- 20 Versicherungsmathematik von Dr. W. Grossmann in Wien. M. 5.—.
- 25 Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.
- 27 Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.
- 29 Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80.
- 31 Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 8.50.
- 32 Theorie und Praxis der Reihen von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.
- 34 Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.

# Sammlung Schubert.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 35 | Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.                            | 44 | Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen u. Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80. |
| 36 | Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.                                 | 45 | Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.                                       |
| 38 | Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil v. Prof. E. Grimsehl in Hamburg. M. 6.—.                               | 46 | Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.   |
| 39 | Thermodynamik I. Teil von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.  | 48 | Thermodynamik II. Teil von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.   |
| 40 | Mathematische Optik von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.   | 49 | Nicht-Euklidische Geometrie v. Dr. H. Liebmann, Leipzig. M. 6.50.  |
| 41 | Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.  | 50 | Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. M. 10.—.                                   |
| 42 | Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—. | 51 | Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 8.—.  |
| 43 | Theorie der ebenen algebraischen Kurven höh. Ordnung v. Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. M. 10.—.                                    |    |  |

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

- |  |  |
|--|--|
| Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.  | Allgem. Formen- u. Invariantentheorie. Kinematik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.             |
| Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.   | Elektromagnet. Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.                                       |
| Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie v. Prof. Erich Geyger in Kassel | Gruppen- u. Substitutionentheorie von Prof. Dr. E. Netto in Gießen.                                    |
| Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. von Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.            | Theorie der Flächen dritter Ordnung. Mathematische Potentialtheorie v. Prof. Dr. A. Wangerin in Halle. |
| Dynamik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.  | Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.                      |
| Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.  | Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.                   |
| Geodäsie von Professor Dr. A. Galle in Potsdam.  | Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Prag.  |
| Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.  | Partielle Differentialgleichungen von Professor J. Horn in Clausthal.                                  |
| Räumliche projektive Geometrie.  | Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.                                      |
| Geometrische Transformationen II. Teil von Professor Dr. Karl Doehle- mann in München.                   |  |
| Elliptische Funktionen von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.   |  |

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

# Grundriß der Handelsgeographie

von

**Dr. Max Eckert**

Privatdozent der Erdkunde an der Universität Kiel

2 Bände

**I: Allgemeine Wirtschafts- und Verkehrsgeographie**

Preis: Broschiert M. 3.80—, geb. in Halbfranz M. 5.—

**II: Spezielle Wirtschafts- und Verkehrsgeographie**

Preis: Broschiert M. 8.—, geb. in Halbfranz M. 9.20

**D**ieser Grundriß ist ein Versuch, die Handelsgeographie als ein einheitliches wissenschaftliches System, das die gesamte Wirtschafts- und Verkehrsgeographie umfaßt, darzustellen. Ihr Wesen und ihre Aufgaben bestimmt der Verfasser dahin, daß sie von der Kenntnis der allgemeinen Lage und der orographischen und hydrographischen Voraussetzungen aus die gründliche Einsicht in die Erwerbs- und Verkehrsverhältnisse sowohl eines einzelnen Landschaftsgebietes bzw. eines einzelnen Wirtschaftsreiches, als auch der gesamten Erde, unter steter Berücksichtigung der wichtigsten klimatologischen, geologischen, volkswirtschaftlichen und politischen Faktoren, vermittelt.

# Leitfaden der Handelsgeographie

von

**Dr. Max Eckert**

Preis: In Leinwand geb. M. 3.—

**D**ieser Leitfaden ist für die Hand des Schülers bestimmt. Er ist im allgemeinen ein Auszug aus dem vorstehenden „Grundriß der Handelsgeographie“; wenn sich aber auch die stoffliche Verteilung im großen und ganzen nach diesem Werk richtet, so sind doch in einzelnen Punkten bedeutende Veränderungen vorgenommen worden. Außerdem wurde das statistische Beiwerk auf ein Minimum beschränkt.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

# Allgemeine und spezielle Wirtschaftsgeographie

von

Dr. Ernst Friedrich

Privatdozent an der Universität Leipzig

Mit 3 Karten

Preis: Broschiert M. 6.80, geb. in Halbfranz M. 8.20

Dieses Buch sucht in ein **hologäisches Verständnis** der Wirtschaft (Produktion und Verkehr) einzuführen, indem es zeigt, wie jede örtliche Wirtschaft als Teil in dem zusammenhängenden und durch tellurische Faktoren bestimmten Wirtschaftsleben der Erde dasteht. Dabei wird, wie es richtig ist, die Produktion der Länder in den Vordergrund gestellt, der Verkehr an zweiter Stelle behandelt.

# Zeichenkunst

Methodische Darstellung des gesamten Zeichenwesens  
unter Mitwirkung erster Kräfte herausgegeben von

**Karl Kimmich**

582 Seiten, mit 1091 Text-Illustrationen,  
sowie 57 Farb- und Lichtdrucktafeln

————— 2 Bände —————

Preis: gebunden M. 25.—

BG Politechniki Śląskiej

nr inw.: 102 - 141164



Dyr.1 141164

