Sammlung Göschen

# Theoretische Physik

## III

von

Dr. Gustav Jäger

# Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

1 **Der Nibelunge Nôt** und Mittelhochdeutsche Grammatik von Prof. Dr. Golther.

2 **Lessings Emilia Galotti.**

3 **Lessings Fabeln** nebst Abhandlungen.

4 **Lessings Laokoon.**

5 **Lessings Minna von Barnhelm.**

6 **Lessings Nathan der Weise.**

7 **Martin Luther, Thomas Murner u. d. Kirchenlied** d. 16. Jahrh. m. Einltg. u. Anm. v. Prof. G. Berlit.

8 **Lessings litterarische** und dramaturg. Abhandl.

9 **Lessings antiqu. und epigrammat. Abhandl.**

10 **Kudrun und Dietrichepen.** Mit Einltg. u. Wörterbuch v. Dr. O. L. Jiriczek.

11 **Astronomie** von A. F. Möbius. Mit 34 Figuren.

12 **Pädagogik** von Prof. Dr. Rein.

13 **Geologie** von Dr. E. Fraas. Mit 66 Textfig.

14 **Psychologie und Logik** von Dr. Th. Elsenhans.

15 **Deutsche Mythologie** von Prof. Dr. F. Kauffmann.

16 **Griechische Altertumskunde** von Matsch u. Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern.

17 **Aufsatz-Entwürfe** v. Prof. Dr. L. W. Straub.

18 **Menschliche Körper,** der. D. Realschuldir. Redmann, mit Gesundheitslehre. Mit 48 Abbild.

19 **Römische Geschichte** v. Dr. Jul. Koch.

20 **Deutsche Grammatik** und Geschichte der deutschen Sprache von Dr. O. Lyon.

21 **Lessings Philotas** und die Poesie des 7jähr. Krieges v. Prof. O. Günther.

22 **Hartmann von Aue, Wolfram v. Eschenbach u. Gottfr. von Straßburg.** Ausw. a. d. höf. Epos v. Prof. Dr. A. Marold.

23 **Walther v. d. Vogelweide** mit Ausw. aus Minnesang und Spruchdichtung von Prof. O. Günther.

24 **Hans Sachs u. Johann Fischart** nebst einem Anh.: **Brant u. Hutten.** Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr.

25 **Kirchenlied u. Volkslied.** Geistl. u. weltl. Lyrik d. 17. u. 18. Jahrh. bis Klopstock von Dr. G. Ellinger.

26 **Physische Geographie** von Prof. Dr. Siegm. Günther. Mit 32 Abbildungen.

27 **Griechische u. Römische** Mythologie v. Prof. Dr. H. Steuding.

28 **Althochdtsche Litteratur** m. Grammatik, Uebersetzung u. Erläuterungen v. Prof. Th. Schauffler.

29 **Mineralogie** v. Dr. K. Brauns, Professor an der Univ. Gießen. Mit 130 Abb.

30 **Kartenkunde** v. Dir. E. Gelcich, Prof. F. Sauter u. Dr. Diuse. Mit 70 Abbildungen.

31 **Deutsche Litteraturgeschichte** von Max Koch, Professor an der Universität Breslau.

32 **Deutsche Heldensage** von Dr. O. L. Jiriczek. Mit 3 Taf.

# Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

33 **Deutsche Geschichte** im Mittelalter von Dr. F. Kurze.

36 **Herder, Cid.** Herausg. von Dr. E. Naumann.

37 **Chemie, anorganische** von Dr. Jos. Klein.

38 **Chemie, organische** von Dr. Jos. Klein.

39 **Zeichenschule** mit 17 Tafeln in Con-, Farben- und Golddruck und 135 Voll- und Textbildern von R. Kimmich.

40 **Deutsche Poetik** von Dr. K. Borinski.

41 **Geometrie** von Prof. Mahler. Mit 118 zweifarb. Fig.

42 **Urgeschichte der Menschheit** von Dr. M. Hörnes. Mit 48 Abbildgn.

43 **Geschichte des alten Morgenlandes** von Prof. Dr. Fr. Hommel. Mit 6 Bildern und 1 Karte.

44 **Die Pflanze,** ihr Bau u. ihr Leben v. Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen.

45 **Römische Altertumskunde** von Dr. Leo Bloch. Mit 7 Vollbildern.

46 **Das Waltharilied** im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erl. v. Prof. Dr. H. Althof.

47 **Arithmetik u. Algebra** von Prof. Dr. H. Schubert.

48 **Beispielsammlung zur „Arithmetik u. Algebra"** von Prof. Dr. H. Schubert.

49 **Griechische Geschichte** von Prof. Dr. H. Swoboda.

50 **Schulpraxis** von Schuldirektor K. Seyfert.

51 **Mathem. Formelsammlung** v. Prof. O. Bürklen. Mit 17 Fig.

52 **Römische Litteraturgeschichte** von Herm. Joachim.

53 **Niedere Analysis** von Dr. Benedikt Sporer. Mit 5 Fig.

54 **Meteorologie** von Dr. W. Trabert. Mit 49 Abbild. und 7 Tafeln.

55 **Das Fremdwort im Deutschen** von Dr. Rud. Kleinpaul.

56 **Dtsche. Kulturgeschichte** von Dr. Reinh. Günther.

57 **Perspektive** v. Hans Freyberger. Mit 88 Fig.

58 **Geometrisches Zeichnen** von Hugo Becker. Mit 282 Abb.

59 **Indogermanische Sprachwissenschaft** von Prof. Dr. R. Meringer.

60 **Tierkunde** v. Dr. Franz v. Wagner. Mit 78 Abbild.

61 **Deutsche Redelehre** von Hans Probst. Mit einer Tafel.

62 **Länderkunde v. Europa.** Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Von Professor Dr. Franz Heiderich.

63 **Länderkunde der außereurop. Erdteile.** Mit 11 Textkärtchen u. Profilen. V. Prof. Dr. Franz Heiderich.

64 **Kurzgefaßtes Deutsches Wörterbuch.** Von Dr. F. Detter.

65 **Analytische Geometrie** der Ebene von Prof. Dr. M. Simon. Mit 40 Fig.

66 **Russische Grammatik** von Dr. Erich Berneker.

67 **Russisches Lesebuch** von Dr. Erich Berneker.

68 **Russisches Gesprächbuch** von Dr. Erich Berneker.

69 **Englische Litteraturgeschichte** von Prof. Dr. Karl Weiser.

70 **Griechische Litteraturgeschichte** von Prof. Dr. Alfred Gercke.

Wenden!

# Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

71 **Chemie, Allgemeine u. physikalische,** von Dr. Max Rudolphi.

72 **Projektive Geometrie** von Dr. Karl Doehlemann. Mit 57 zum Teil zweifarbigen Figuren.

73 **Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt. Mit 56 Abbildungen.

74 **Die Baukunst d. Abendlandes** von Dr. A. Schäfer. Mit 22 Abb.

75 **Die Graphischen Künste** von Carl Kampmann. Mit 5 Beilagen und 39 Abbildungen.

76 **Theoretische Physik,** I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit vielen Abbildgn.

77 **Theoretische Physik,** II. Teil: Licht und Wärme. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit vielen Abbildgn.

78 **Theoretische Physik,** III. Teil: Elektricität und Magnetismus. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit vielen Abbildgn.

79 **Gotische Sprachdenkmäler** mit Grammatik, Uebersetzung u. Erläuterungen v. Dr. Hermann Jantzen.

80 **Stilkunde** von Karl Otto Hartmann. Mit zahlr. Abbildgn. und Tafeln.

81 **Logarithmentafeln,** vierstellige, von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarb. Druck.

82 **Lateinische Grammatik** von Prof. Dr. W. Votsch.

83 **Indische Religionswissenschaft** von Prof. Dr. Edmund Hardy.

84 **Nautik** von Direktor Dr. Franz Schulze. Mit 56 Abbildgn.

85 **Französische Geschichte** von Prof. Dr. R. Sternfeld.

86 **Kurzschrift.** Lehrbuch der vereinfachten deutschen Stenographie (System Stolze-Schrey) von Dr. Ansel.

87 **Höhere Analysis I:** Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker. Mit 63 Fig.

88 **Höhere Analysis II:** Integralrechnung. Von Dr. Frdr. Junker. Mit 85 Figuren.

89 **Analytische Geometrie des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon. Mit 28 Abbildungen.

90 **Ethik** von Prof. Dr. Th. Achelis.

91 **Astrophysik,** die Beschaffenheit d. Himmelskörper von Prof. Dr Walter F. Wislicenus.

92 **Mathemat. Geographie** zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen von Kurt Geißler.

93 **Deutsches Leben im 12. Jahrhundert.** Kulturhist. Erläuterungen z. Nibelungenlied u. zur Kudrun. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher. Mit vielen Abbildgn.

94 **Photographie.** Von D. Keßler. Mit 1 Lichtdruckbeilage u. zahlr. Abbildgn.

95 **Paläontologie.** Von Prof. Dr. Rud. Hoernes. Mit vielen Abbildgn.

96 **Bewegungsspiele** von Prof. Dr. E. Kohlrausch. Mit 14 Abbildungen.

97 **Stereometrie** von Dr. Glaser. Mit 44 Figuren.

98 **Grundriß der Psychophysik** von Dr. G. F. Lipps.

99 **Trigonometrie** von Dr. Gerh. Hessenberg. Mit vielen Figuren.

100 **Sächsische Geschichte** von Rektor Prof. Dr. O. Kaemmel.

101 **Sociologie** von Prof. Dr. Th. Achelis.

102 **Geodäsie** von Prof. Dr. E. Reinhertz. Mit vielen Abbildungen.

Fortsetzung auf der vierten Vorsatzseite.

# Kleine mathematische Bibliothek

aus der **Sammlung Göschen.**

Jedes Bändchen elegant gebunden 80 Pfennig.

**Ebene Geometrie** mit 115 zweifarbigen Figuren von Prof. G. Mahler. Zweite Auflage. Nr. 41.

**Arithmetik und Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert. Zweite Auflage. Nr. 47.

**Beispiel-Sammlung** zur **Arithmetik** und **Algebra** von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

**Formelsammlung** u. **Repetitorium** der **Mathematik** mit 20 Fig. v. Prof. Bürklen. Zweite Aufl. Nr. 51.

**Niedere Analysis** mit 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

**Geometrisches Zeichnen** mit 282 Figuren von Architekt H. Becker. Nr. 58.

**Analytische Geometrie der Ebene** mit 45 Figuren von Prof. Dr. M. Simon. Nr. 65.

**Projective Geometrie** in synthetischer Behandlung mit 57 Figuren von Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

**Vierstellige Logarithmen** von Professor Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Sammlung Göschen

# Theoretische Physik

## III.

## Elektricität und Magnetismus

von

Dr. Gustav Jäger,
Professor der Physik an der Universität Wien

Księgarnia
w Krakowie

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1899.

S. 58
S. 74
S. 80
S. 87
S.04
53
POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
w Gliwicach
1207

Alle Rechte, insbesondere das Uebersetzungsrecht von der Verlagshandlung vorbehalten.

D 139/59
Druck und Einband von Carl Rembold & Co. in Heilbronn.

# Inhalt.

## Elektrostatik.


| | | Seite |
|---|---|---|
| § 1. | Grunderscheinungen — Coulomb's Gesetz | 7 |
| § 2. | Komponenten der elektrischen Kraft — Potential | 8 |
| § 3. | Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektricität gleichmässig verteilt ist | 9 |
| § 4. | Potential einer Vollkugel | 12 |
| § 5. | Die Laplace'sche Gleichung | 13 |
| § 6. | Die Poisson'sche Gleichung | 14 |
| § 7. | Potential einer Kreisscheibe | 16 |
| § 8. | Verteilung der Elektricität auf einem Leiter | 18 |
| § 9. | Verteilung der Elektricität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel | 19 |
| § 10. | Allgemeine Beziehung zwischen Elektricitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde | 21 |
| § 11. | Der Kugelkondensator | 23 |
| § 12. | Der Plattenkondensator | 26 |
| § 13. | Kraftlinien — Niveauflächen | 28 |
| § 14. | Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte | 30 |
| § 15. | Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel | 33 |
| § 16. | Theorie der Dielektrika | 34 |
| § 17. | Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektricität | 36 |
| § 18 | Kapazität eines Leiters, der von einem Dielektrikum umgeben ist | 40 |
| § 19. | Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator | 42 |
| § 20. | Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik | 43 |


## Magnetismus.


| | | |
|---|---|---|
| § 21. | Grunderscheinungen — Coulomb's Gesetz | 46 |
| § 22. | Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — Inklination — magnetisches Moment | 47 |
| § 23. | Potential eines Magnets | 51 |
| § 24. | Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments | 54 |
| § 25. | Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch induzierten Körpers | 57 |
| § 26. | Die homogen magnetisierte Kugel | 59 |

Seite

§ 27. Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld . . . . 65
§ 28. Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien . . . . . 67
§ 29. Transversal magnetisierter Cylinder im homogen magnetischen Feld . . . . . 68
§ 30. Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld . . . . . 73
§ 31. Die magnetische Kraft auf einen langen Cylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet 75
§ 32. Kraftfunktion und Potential der magnetischen Kräfte 77
§ 33. Die magnetische Molekularkraft . . . . . 78
§ 34. Magnetische Energie . . . . . 79

## Elektromagnetismus.

§ 35. Der elektrische Strom — Oersted's Entdeckung — Ampère's Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart 83
§ 36. Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol . 84
§ 37. Die Tangentenbussole — Mass der Stromstärke . . 85
§ 38. Potential eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol 88
§ 39. Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte . . . . . 93
§ 40. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol . . . . . 96
§ 41. Das Solenoid . . . . . 98
§ 42. Der Stokes'sche Satz . . . . . 100
§ 43. Die Wirkung elektrischer Ströme auf einander . . 103
§ 44. Die Gesetze von Ohm und Joule — Arbeit des Stroms 106
§ 45. Der Induktionsstrom . . . . . 107
§ 46. Das ballistische Galvanometer . . . . . 109
§ 47. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand . . . 111
§ 48. Das elektrostatische und elektromagnetische Masssystem 113
§ 49. Absolute und praktische Einheiten . . . . . 117
§ 50. Der Extrastrom . . . . . 118
§ 51. Dämpfung einer schwingenden Magnetnadel . . . 121
§ 52. Induktionswirkung zweier Stromleiter auf einander . 123
§ 53. Inductionsapparate — Transformatoren . . . . 126
§ 54. Oscillierende Entladung eines Kondensators . . . 128
§ 55. Elektrische Ströme in einem Dielektrikum . . . 130
§ 56 Allgemeine Gleichungen der Induktion . . . . 132
§ 57. Die Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren . . . . . 135
§ 58. Elektrische Wellen . . . . . 138
§ 59. Magnetische Wellen . . . . . 140
§ 60. Elektromagnetische Lichttheorie . . . . . 142

# Elektrostatik.

## § 1. Grunderscheinungen — Coulomb's Gesetz.

An Seide geriebenes Glas oder an Wolle geriebene Harze ziehen leicht bewegliche Körper an und stossen sie nach der Anziehung wieder ab. Als Ursache dieser Erscheinung sieht man die Elektricität an, welche durch Reiben auf der Oberfläche des Glases oder Harzes entsteht und deshalb Reibungselektricität genannt wird. Bringen wir einen Körper mit einem elektrischen in Berührung, so wird er in der Regel ebenfalls elektrisch. Es wird ihm Elektricität mitgeteilt.

Zwei kleine Kugeln, welche durch einen Glasstab elektrisiert worden sind, stossen sich ab, ebenso durch Harzstäbe elektrisierte Kugeln. Enthält aber die eine Glaselektricität, die andere Harzelektricität, so ziehen sie einander an. Glas- und Harzelektricität haben entgegengesetzte Eigenschaften. Wir nennen die Glaselektricität positiv, die Harzelektricität negativ. Gleichnamige Elektricitäten stossen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Befindet sich auf einer sehr kleinen Kugel die Elektricitätsmenge m, auf einer zweiten m', so stossen sie sich mit einer Kraft

$$\underline{K} = \varepsilon \frac{mm'}{r^2} \qquad (1)$$

ab, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte r ist. Der Proportionalitätsfaktor $\varepsilon$ hängt von der Einheit

ab, mit welcher wir Elektricitätsmengen messen. Wir wollen künftig

$$\varepsilon = 1$$

setzen. Wählen wir für die Kraft und Länge die gewohnten (C-G-S)-einheiten, so messen wir die Elektricitätsmengen im absoluten elektrostatischen Mass. Das in der Gleichung (1) ausgesprochene Kraftgesetz wurde von Coulomb entdeckt.

§ 2. **Komponenten der elektrischen Kraft — Potential.** Aus der mathematischen Formulierung des Coulomb'schen Gesetzes geht hervor, dass wir eine abstossende Kraft als positiv, eine anziehende als negativ auffassen. Die Kraft wirkt in der Richtung der Verbindungslinie r' zweier elektrischer Punkte. Wir können sie daher in drei Komponenten nach den Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems zerlegen. Diese sind

$$X' = K\cos\alpha = \frac{mm'}{r'^2}\cdot\frac{x}{r'} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{mm'}{r'}\right)$$

und ebenso

$$Y' = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m\,m'}{r'}\right),$$

$$Z' = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m\,m'}{r'}\right).$$

Ist ein dritter elektrischer Punkt von der Menge m'' in der Entfernung r'' von m vorhanden, so übt er auf m die Kraft $\frac{m\,m''}{r''^2}$ aus. Diese gibt parallel zur x-achse eine Komponente

$$X'' = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,m''}{r''}\right).$$

Wir haben daher als Gesamtkraft parallel zur x-achse

$$X = X' + X'' = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,m'}{r'} + \frac{m\,m''}{r''}\right) =$$

$$= -m\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''}\right).$$

Wir können diese Ueberlegung ohne weiteres auf beliebig viel elektrische Punkte ausdehnen und erhalten so

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}\,\Sigma\frac{m}{r},$$

$$Y = -\frac{\partial}{\partial y}\,\Sigma\frac{m}{r},$$

$$Z = -\frac{\partial}{dz}\,\Sigma\frac{m}{r}.$$

Die Grösse $\Sigma\frac{m}{r}$ ist also nichts anderes als das Potential der Kräfte X, Y, Z (Bd. I, § 14). Man nennt daher $\Sigma\frac{m}{r}$ das elektrische Potential, die Potentialfunktion oder auch die Spannung der Elektricität.

### § 3. Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektricität gleichmässig verteilt ist.

Auf einer Kugelfläche vom Radius a (Fig. 1) befinde sich gleichmässig verteilt die Elektricitätsmenge M. Auf der Flächeneinheit ist somit die Menge

$$\sigma = \frac{M}{4\pi a^2},$$

und wir nennen $\sigma$ die Flächendichte der Elektricität.

Auf dem Flächenelement $\omega$ sitzt daher die Menge $\omega\sigma$. Ihr Potential im Punkt A ist $\frac{\omega\sigma}{u}$. Das Potential der gesamten Elektricität daher $\Sigma\frac{\omega\sigma}{u}$. Lassen wir $\omega$ um O A rotieren, so erhalten wir eine unendlich schmale

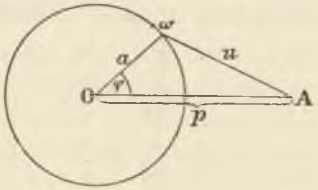


Fig. 1.

Kugelzone, deren Punkte sämtlich von A gleichweit entfernt sind. Ihre Fläche ist $2\pi a^2 \sin\varphi\, d\varphi$ und ihr Potential $\frac{2\pi a^2 \sigma \sin\varphi\, d\varphi}{u}$. Das Potential der Kugelfläche ist daher

$$V = 2\pi a^2 \sigma \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{u}. \qquad (2)$$

Aus

$$u^2 = a^2 + p^2 - 2ap\cos\varphi$$

erhalten wir leicht

$$u\,du = ap\sin\varphi\, d\varphi$$

oder

$$\sin\varphi\, d\varphi = \frac{u\,du}{ap},$$

was in Gleichung (2) eingesetzt

$$V = \frac{2\pi a\sigma}{p}\int_{u_0}^{u_\pi} du = \frac{2\pi a\sigma}{p}(u_\pi - u_0)$$

ergiebt. Dabei ist $u_0$ der Wert von u für $\varphi = 0$, also

$$u_0 = p - a,$$

während

$$u_\pi = p + a$$

der Wert von u für $\varphi = \pi$ ist. Darnach wird

$$V = \frac{2\pi a\sigma}{p}(a + p - p + a) = \frac{4\pi a^2\sigma}{p}.$$

Nun ist aber

$$4\pi a^2\sigma = M,$$

folglich

$$V = \frac{M}{p}.$$

Das heisst, die auf einer Kugelfläche gleichmässig verteilte Elektricität wirkt auf einen Punkt ausserhalb der Kugel so, als wäre sie im Mittelpunkt vereinigt.

Liegt der Punkt innerhalb der Kugel, so ist

$$u_0 = a - p,\ u_\pi = a + p.$$

daher

$$V = \frac{2\pi a\sigma}{p}(a + p - a + p) = 4\pi a\sigma.$$

Wir haben also wohl zu unterscheiden zwischen dem Wert des Potentials in einem Punkt ausserhalb und in einem Punkt innerhalb der Kugelfläche. Für einen Punkt auf der Kugel selbst, d. h. für $p = a$ gehen natürlich beide Formeln in einander über. Innerhalb der Kugel haben wir also ein konstantes

Potential, wo immer der Punkt A liegt. Die Kraft, welche auf den Punkt wirkt, ist daher Null.

### § 4. Potential einer Vollkugel.

Die Elektricitätsmenge M sei im Innern einer Vollkugel gleichmässig verteilt. Wir können uns das in einer Kugel, welche aus einem Isolator besteht, realisiert denken. Wir haben dann in der Volumeinheit die Menge

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

und nennen $\varrho$ die Dichte der Elektricität. Wir denken uns die Kugel in unendlich viel dünne konzentrische Schalen zerlegt. Eine jede Schale wirkt dann auf einen Punkt ausserhalb so, als wäre die gesamte Elektricität im Mittelpunkt vereinigt. Wir haben daher auch für die Vollkugel als Potential auf einen ausserhalb liegenden Punkt

$$V = \frac{M}{p} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho}{p}.$$

Liegt jedoch der Punkt im Innern der Kugel, so setzt sich das Potential aus zwei Teilen zusammen. Der eine rührt von Kugelschalen her, welche innerhalb der Kugel vom Radius p liegen. Sie wirken wie auf einen ausserhalb liegenden Punkt. Ihr Potential ist

$$V_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi p^3 \varrho}{p} = \frac{4\pi p^2 \varrho}{3}.$$

Für die übrigen Kugelschalen ist jedoch der Punkt ein innerhalb liegender. Wir haben für eine solche Schale als Potential $4\pi a\sigma$. In unserem Fall ist nun

$$\sigma = \varrho\, dr$$

zu setzen, und es wird der zweite Teil des Potentials

$$V_2 = 4\pi\varrho \int_p^a r\,dr = 2\pi\varrho\,(a^2 - p^2),$$

indem eine Schale den Anteil $4\pi\varrho\,r\,dr$ liefert. Es ist somit

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi\varrho\,p^2}{3} + 2\pi\varrho\,(a^2 - p^2)$$

$$= 2\pi\varrho\,a^2 - \frac{2\pi\varrho}{3}\,p^2.$$

## § 5. Die Laplace'sche Gleichung.

Zwei Punkte in der Entfernung r haben die Koordinaten x, y, z bezüglich x', y', z'. Es ist dann

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2. \qquad (3)$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

ist. Wir haben nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\frac{x' - x}{r} = \frac{x' - x}{r^3},$$

da nach Gleichung (3)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x' - x}{r}$$

ist. Wir erhalten nun durch weitere Differentiation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x' - x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} - \frac{3\,(x' - x)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} =$$

$$= -\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(x' - x)^2}{r^5}.$$

Gleicherweise ergiebt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y'-y)^2}{r^5}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z'-z)^2}{r^5}.$$

Addieren wir die drei letzten Gleichungen, so erhalten wir thatsächlich

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Haben wir anstatt zwei mehrere Punkte, so ist natürlich für einen bestimmten Punkt ebenfalls

$$\Sigma\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \Delta\Sigma\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Daran wird nichts geändert, wenn in jedem Punkt eine elektrische Masse sitzt, und wir $\Delta\Sigma\frac{m}{r}$ bilden. Auch diese Grösse muss gleich Null sein. Nun ist aber

$$\Sigma\frac{m}{r} = V$$

das Potential der elektrischen Massen auf einen Punkt. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = 0,$$

welche nach ihrem Entdecker die Laplace'sche Gleichung genannt wird.

### § 6. Die Poisson'sche Gleichung.

Wir fanden für das Potential einer Vollkugel auf einen ausserhalb liegenden Punkt (§ 4)

$$V_e = \frac{4\pi a^3 \varrho}{3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{4\pi a^3 \varrho}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

wenn wir uns den Mittelpunkt der Kugel zum Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems wählen. Es gilt für diesen Fall auch die im vorigen Paragraphen gefundene Gleichung

$$\Delta V_e = 0.$$

Anders verhält es sich jedoch, wenn der Punkt im Innern der Vollkugel liegt. Wir haben dann

$$V_i = 2\pi\varrho a^2 - \frac{2\pi\varrho}{3} p^2.$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}$$

oder

$$\Delta V_i = -4\pi\varrho. \qquad (4)$$

Diese Gleichung stimmt mit der Laplace'schen nicht überein. Das rührt daher, weil der Raum rings um unseren Punkt, für welchen wir das Potential bestimmt haben, von Massen erfüllt ist, während wir

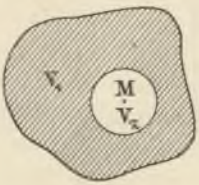


Fig. 2.

die Gleichung von Laplace unter der Bedingung ableiteten, dass der Punkt von den übrigen Massen getrennt ist.

Was wir für die Kugel fanden, gilt aber für jeden mit Masse erfüllten Körper. Immer besteht für einen Punkt innerhalb zusammenhängender Massen die Gleichung (4). Wir können uns nämlich immer um diesen Punkt eine kleine Kugel geschlagen (Fig. 2) und uns das Potential des ganzen Körpers aus den zwei Teilen $V_1$, von den Massen ausserhalb der Kugeln herrührend, und dem Potential $V_2$ der Kugel bestehend denken. Es gilt dann

$$\Delta V_1 = 0, \quad \Delta V_2 = -4\pi\varrho,$$

also auch, da

$$\Delta V = \Delta(V_1 + V_2) = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

ist,

$$\Delta V = 4\pi\varrho.$$

Das ist die Poisson'sche Gleichung.

### § 7. Potential einer Kreisscheibe.

Eine Kreisscheibe (Fig. 3) liege in der (y z)-Ebene mit ihrem Mittelpunkt O im Ursprung des Koordinaten-

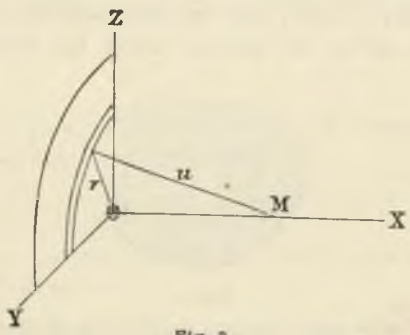


Fig. 3.

systems. Sie sei mit Masse von der Flächendichte $\sigma$ belegt. Wir suchen ihr Potential auf den Punkt M in

der x-Achse. Sämtliche Punkte des Flächenelements $2\pi r\,dr$ liegen in der Entfernung u von M, liefern daher das Potential $\frac{2\pi r\,dr\,\sigma}{u}$, und da

$$u^2 = r^2 + x^2,$$

so ist das Potential der gesamten Scheibe

$$V = \int_0^R \frac{2\pi r\,dr\,\sigma}{u} = 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}} =$$

$$= 2\pi\sigma \left[\sqrt{r^2+x^2}\right]_0^R = 2\pi\sigma \left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right).$$

Für die Kraft auf den Punkt finden wir

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\sigma \left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} - 1\right).$$

Rückt der Punkt sehr nahe an die Scheibe, so konvergiert $\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$ gegen Null, und wir erhalten für die Kraft in unmittelbarer Nähe der Scheibe

$$X = 2\pi\sigma.$$

Denselben Wert hat natürlich die Kraft auf der andern Seite der Scheibe, nur ist sie hier entgegengesetzt gerichtet. Geht daher ein Punkt von der positiven Seite durch die Scheibe auf die negative, so ändert sich die Kraft um $4\pi\sigma$. Nennen wir das Potential auf der positiven Seite $V_+$, auf der negativen $V_-$, so ist

$$-\frac{\partial V_+}{\partial x} + \frac{\partial V_-}{\partial x} = 4\pi\sigma.$$

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice

Diese Gleichung gilt aber für jede Fläche. Wir können nämlich aus einer beliebigen Fläche (Fig. 4) eine kleine kreisförmige Scheibe herausschneiden. Nennen wir dann das zum Punkt M gehörige Potential $V_+$, das zum Punkt M' gehörige $V_-$, so ändert sich

Fig. 4.

das Potential, welches von der Scheibe NN' herrührt, beim Durchgang sprungweise, hingegen jener Teil, der von den übrigen Teilen der Fläche stammt, stetig. Es bleibt daher für den Durchgang wiederum

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma, \qquad (5)$$

wenn wir unter n die Normale zur Fläche verstehen.

§ 8. **Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter.**

Im § 1 lernten wir zweierlei Elektrizitäten kennen, die positive und die negative. Laden wir einen Körper positiv mit einer bestimmten Elektrizitätsmenge und geben dann soviel negative Elektrizität noch hinzu, bis der Körper wieder unelektrisch ist, so können wir sagen: er enthält gleichviel positive und negative Elektrizität. Jeder unelektrische Körper kann als mit gleich viel positiver und negativer Elektrizität geladen angesehen werden.

Beide Elektrizitäten sind in derselben Weise verteilt, können daher keine Wirkung nach aussen ausüben. Bringen wir nun einen elektrischen Körper in die Nähe, so wird er die gleichnamige Elektrizität abstossen, die ungleichnamige anziehen. Es erweist sich der ursprünglich unelektrische Körper sodann elektrisch. Wir nennen diesen Vorgang Elektrizitätserregung durch Verteilung.

Laden wir einen Leiter mit Elektrizität, so wird sie sich auf ihm in bestimmter Weise anordnen. Es befindet sich die Elektrizität im Gleichgewicht, wenn alle Kräfte, welche die einzelnen elektrischen Teilchen auf einander ausüben, im Gleichgewicht sind. Für alle Punkte im Innern des Leiters muss daher das Potential eine konstante Grösse sein. Es ist dann aber im Innern des Körpers

$$\Delta V = 0,$$

das heisst, es muss die Dichte der Elektrizität $\sigma = 0$ sein; denn wäre dies nicht der Fall, so hätten wir ja nach Poisson

$$\Delta V = -4\pi\sigma.$$

Ist demnach die Elektrizität auf einem Leiter im Gleichgewicht, so befindet sie sich nur an der Oberfläche des Leiters.

### § 9. Verteilung der Elektrizität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel.

Aus der allseitigen Symmetrie einer Kugel geht ohne weiters hervor, dass die Elektrizität sich auf ihr gleichmässig verteilen muss, so dass die Dichte an allen Punkten der Kugeloberfläche gleich gross ist.

Das Potential auf einen inneren Punkt ist dann nach § 3

$$V = 4\pi a\sigma = \frac{4\pi a^2\sigma}{a} = \frac{E}{a},$$

wenn wir mit E die gesamte Elektrizitätsmenge auf der Kugel bezeichnen. Die Elektrizitätsmenge ist also

$$E = V a.$$

Die Grösse a, mit welcher das Potential multipliziert werden muss, damit man die Elektrizitätsmenge erhält, nennen wir die Kapazität der Kugel.

Sind zwei Kugeln sehr weit von einander entfernt, so können wir den Einfluss, welchen die Elektrizitätsmengen dieser Kugeln auf einander ausüben, vernachlässigen. Die Radien der beiden Kugeln seien a und a', ihre Elektrizitätsmengen E beziehungsweise E'. Die Kugeln besitzen dann das Potential

$$V = \frac{E}{a}, \quad V' = \frac{E'}{a'}.$$

Wir verbinden nun beide Kugeln durch einen dünnen Draht. Demzufolge werden die Kugeln das gemeinschaftliche Potential P annehmen, da wir sie ja jetzt als einen einzigen Körper betrachten können. Es muss jetzt

$$P = \frac{e}{a} = \frac{e'}{a'},$$

sein, wenn wir mit e und e' die Elektrizitätsmengen bezeichnen, welche nunmehr auf den Kugeln sitzen. Es ist also auch

$$P = \frac{e + e'}{a + a'} = \frac{E + E'}{a + a'}.$$

Daraus folgt

$$e = a\,\frac{E + E'}{a + a'},\quad e' = a'\,\frac{E + E'}{a + a'}.$$

## § 10. Allgemeine Beziehung zwischen Elektrizitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde.

Bestimmen wir für einen beliebigen Körper (Fig. 5) das Potential auf einen innerhalb liegenden Körper M, so haben wir jedes Flächenelement $\omega$ mit der zuge-

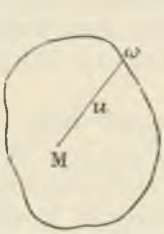


Fig. 5.

hörigen Flächendichte zu multiplizieren, durch die Entfernung u zu dividieren und über die ganze Oberfläche zu summieren. Das Potential ist also

$$V = \Sigma\,\frac{\omega\,\sigma}{u},$$

u. z. muss es im Innern des Körpers einen konstanten Wert haben. Wächst nun in allen Punkten des Körpers die Dichte der Elektrizität proportional, so wird das Gleichgewicht nicht gestört. Es besteht somit auch die Gleichung

$$n\,V = \Sigma\,\frac{\omega\,n\,\sigma}{u},$$

$$\Sigma\,\omega\,n\,\sigma = n\,E$$

ist nun die auf dem Körper vorhandene Elektrizitätsmenge, welche früher den Wert

$$E = \Sigma \omega \sigma$$

hatte. Es wächst daher die Elektrizitätsmenge mit dem Potential proportional, so dass immer die Gleichung

$$E = \alpha V$$

besteht, wobei $\alpha$ eine konstante Grösse ist, die wir die Kapazität des Körpers nennen. Für die Kugel fanden wir sie gleich dem Radius a. Wir können daher sagen: Die Kapazität hat die Dimension einer Länge.

Haben wir mehrere Körper von verschiedener Kapazität, die sehr weit von einander entfernt sind, und verbinden wir sie durch sehr dünne Drähte, so werden sie ein gemeinsames Potential annehmen, während sich in diesem Fall die Kapazitäten einfach summieren. Die Kapazität ändert sich jedoch, wenn sich die Körper einander nähern. Die Elektrizitätsmengen auf den einzelnen Körpern können wir ebenso finden wie im vorhergehenden Paragraphen für die Kugeln, nur haben wir jetzt anstatt a die Kapazität $\alpha$ u. s. w. zu setzen.

Bringen wir einen Körper mit der Erde in Verbindung, so nimmt er ihr Potential an. Wir setzen dies gewöhnlich gleich Null, doch ist das nicht notwendig; denn die Grösse, welche wir das Potential eines Körpers nennen, ist immer nur die Differenz zum Potential der Erde. Es liegt sogar nahe, der Erde auch ein Potential zu geben. Die positiv und negativ elektrischen Körper weichen dann

in verschiedenem Sinn vom Potential der Erde ab. Wir befolgen dann dieselbe Anschauungsweise wie bei der Wärme, wenn wir die Temperatur unter Null durch Kältegrade, die über Null durch Wärmegrade messen, obwohl wir beide, wie wir es nach Einführung des absoluten Nullpunkts ja auch gethan haben (Bd. 2 § 39), auch als gleichbezeichnete Grössen ansehen können.

### § 11. Der Kugelkondensator.

Wir betrachten zwei konzentrische leitende Hohlkugeln (Fig. 6). Die Oberflächen der inneren Hohlkugeln haben die Radien $a_1$ und $a_2$, die der äusseren

Fig. 6.

$a_3$ und $a_4$. Durch einen sehr dünnen Draht sei die innere Hohlkugel mit einem Körper vom konstanten Potential A verbunden, die äussere werde auf dem Potential B gehalten. Wir nehmen nun an, auf den Kugelflächen sitzen entsprechend den Radien $a_1$, $a_2$ u. s. w. die Elektrizitätsmengen $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$. Für einen innerhalb der inneren Hohlkugel liegenden Punkt M, der sich in der Entfernung r vom Mittelpunkt O befindet, kann also das Potential nur den Wert A, hingegen in einem Punkt M′ der äusseren Hohlkugel in der Entfernung r′ den Wert B haben. Die Elektri-

zitätsmengen $E_1$, $E_2$ u. s. w. haben wir uns wegen der allseitigen Symmetrie auf den zugehörigen Kugelflächen gleichmässig verteilt zu denken. $E_1$ wirkt daher auf M, als wäre die gesamte Menge im Punkt O vereinigt. Für die übrigen Kugelflächen ist M ein innerhalb liegender Punkt. Das Potential A setzt sich daher folgendermassen zusammen

$$A = \frac{E_1}{r} + \frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Für den Punkt M′ liefern die Elektrizitätsmengen $E_1$, $E_2$, $E_3$ ein Potential, als wären sie in O vereinigt. Nur für die äusserste Kugelfläche ist M′ ein innerhalb liegender Punkt. Wir erhalten somit

$$B = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{r'} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Wir müssen nun

$$E_1 = 0$$

setzen, da A für alle Punkte der inneren Hohlkugel konstant sein muss. Es bleibt somit

$$\frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} + \frac{E_4}{a_4} = A, \qquad (6)$$

$$\frac{E_2 + E_3}{r'} + \frac{E_4}{a_4} = B.$$

Das Potential B muss wiederum für alle Punkte der äusseren Hohlkugel konstant sein. Daraus folgt

$$E_2 + E_3 = 0.$$

Es sitzt demnach auf den zwei einander zugekehrten Kugelflächen gleich viel aber entgegengesetzte Elektrizität. Somit bleibt uns nur

$$B = \frac{E_4}{a_4}, \qquad (7)$$

d. h. derselbe Potentialwert, als wäre nur eine einzige leitende Kugel vom Radius $a_4$ vorhanden. Die Gleichungen (6) nnd (7) ergeben

$$\frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} = A - B,$$

und da

$$E_2 = -E_3,$$

so

$$E_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2}\right) = A - B$$

oder

$$E_2 = \frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} (A - B)$$

Wir nehmen nun an, die innere Kugelschale sei isoliert, und die äussere werde geladen. Dann muss $E_1 + E_2 = 0$, oder da $E_1 = 0$, so muss auch $E_2 = 0$ und damit auch $E_3 = 0$ sein. Es befindet sich also dann Elektrizität nur auf der äusseren Oberfläche, deren Menge die Gleichung

$$E_4 = a_4 B$$

angiebt. Verbinden wir jetzt die innere Kugel mit der Erde, so dass $A = 0$ wird, so folgt

$$E_2 = -\frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \; E_3 = \frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \; E_4 = a_4 B.$$

$E_2$ und $E_3$ sind also umso grösser, je kleiner $a_3 - a_2$ ist, d. h. je näher die beiden inneren Kugelflächen aneinander rücken. Wir können dann in erster Annäherung

$$a_2 = a_3 = a, \quad a_2 a_3 = a^2$$

setzen, hingegen sei

$$a_3 - a_2 = \delta.$$

Es wird jetzt

$$E_3 = \frac{a^2}{\delta} B = \frac{4\pi a^2}{4\pi\delta} B.$$

Da aber $4\pi a^2$ die Oberfläche der Kugel ist, so heisst das, dass die angesammelte Elektrizitätsmenge $E_3$ proportional der Kugelfläche und verkehrt proportional dem Abstand $\delta$ der beiden Kugelflächen ist. Ein derartiges System von leitenden Flächen kann also als Elektrizitätssammler oder Kondensator benützt werden, und man nennt speziell den von uns untersuchten Apparat einen Kugelkondensator.

### § 12. Der Plattenkondensator.

Zwei gleichgestaltete Platten (Fig. 7) liegen parallel zu einander in der kleinen Entfernung $\delta$. Die linke sei zur Erde E abgeleitet, die rechte werde auf

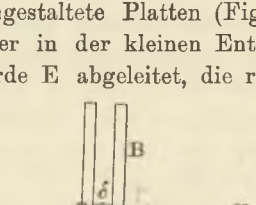


Fig. 7.

dem konstanten Potential B gehalten. In erster Annäherung können wir annehmen, das Potential steige zwischen den beiden Platten linear an. Wir haben daher

$$\frac{dV_+}{dx} = \frac{B}{\delta};$$

für das Innere der linken Platte gilt

$$\frac{dV_-}{dx} = 0.$$

Somit ist nach Gleichung (5)

$$\frac{B}{\delta} = -4\pi\sigma,$$

oder

$$\sigma = -\frac{B}{4\pi\delta}.$$

Wir haben also auf der ganzen inneren Seite der linken Platte eine Elektrizitätsmenge von der Dichte $-\frac{B}{4\pi\delta}$ sitzen. Für die innere Seite der rechten Platte haben wir analog

$$\frac{dV_+}{dn} = 0,$$

hingegen

$$\frac{dV_-}{dx} = \frac{B}{\delta},$$

mithin

$$\sigma = \frac{B}{4\pi\delta}.$$

Die Elektrizitätsmenge, welche sich auf der rechten Platte ansammelt, ist somit

$$E = \frac{FB}{4\pi\delta},$$

wenn wir mit F die Fläche der Platte bezeichnen. Wir erhalten somit auch für diesen Kondensator dieselbe Formel wie für den Kugelkondensator, doch ist nicht zu vergessen, dass jetzt die Formel nur angenähert gilt, dass der wahre Wert sich dem von uns berechneten jedoch umsomehr nähert, je kleiner die Entfernung $\delta$ ist.

### § 13. Kraftlinien — Niveauflächen.

Für ein ruhendes System von Leitern können wir das Potential als Funktion der Koordinaten x, y, z auffassen, also

$$V = f(x, y, z)$$

setzen. Halten wir das Potential V konstant, so stellt die letztere Gleichung eine Fläche dar, welche wir wegen der Konstanz des Potentials auf ihr eine Aequipotential- oder Niveaufläche nennen. In einer solchen Fläche liegt also keine Kraftkomponente. Die Kraft ist somit senkrecht darauf gerichtet. Erteilen wir nun dem V einen stetig wachsenden Wert, so erhalten wir eine Schar von Flächen, deren orthogonale Trajektorien die jeweilige Richtung der Kraft angeben. Diese Linien nennt man deshalb auch Kraftlinien.

Für einen einzigen Massenpunkt m ist das Potential

$$V = \frac{m}{r}.$$

Die Niveauflächen sind daher Kugelflächen mit m als Mittelpunkt, während die Kraftlinien die Radien sind. Nehmen wir an, es gehen N Kraftlinien vom Punkt m aus, so ist deren Dichte auf einer Niveaufläche vom Radius r

$$\sigma = \frac{N}{4\pi r^2},$$

und setzen wir

$$N = 4\pi m,$$

so

$$\sigma = \frac{m}{r^2}.$$

Es giebt dann die Dichte der Kraftlinien unmittelbar auch die Grösse der Kraft an. Es empfiehlt sich daher anzunehmen, dass jede Masse m $4\pi m$ Kraftlinien aussendet. Es ist dann durch die Kraftlinien Richtung und Grösse der Kraft vollständig bestimmt, da letztere gleich der Anzahl der Kraftlinien ist, welche die Flächeneinheit passieren. Einen von elektrischen Kraftlinien erfüllten Raum nennen wir ein elektrisches Feld.

Die Einführung der Kraftlinien ergibt auch eine bequeme Erläuterung der Sätze von Laplace und Poisson. Haben wir nämlich ein Elementarparallelepiped von den Seiten dx, dy, dz, so ist die Zahl der Kraftlinien, welche durch die linke Fläche dy dz eintreten, gleich $-\frac{\partial V}{\partial x} dy\,dz$, während auf der rechten Seite, wie man mit Zuhilfenahme der Entwickelung von $\frac{\partial V}{\partial x}$ nach der Taylor'schen Reihe leicht erkennt, die Zahl $-\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\right) dy\,dz$ austritt. Die Differenz giebt den Ueberschuss der austretenden Kraftlinien über die eintretenden an, also $-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\,dy\,dz$. Gleicherweise erhalten wir für die beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems $-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx\,dy\,dz$ und $-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx\,dy\,dz$. Für den Fall, als in unserm Volumelement keine elektrischen Massen vorhanden sind, muss die Zahl der eintretenden und austretenden Kraftlinien

gleich sein. Wir erhalten daher durch Addition der letzten drei Ausdrücke die Gleichung von Laplace

$$\Delta V = 0.$$

Ist hingegen in dem Volumelement die elektrische Masse m vorhanden, so ist der Ueberschuss der austretenden Kraftlinien über die eintretenden $4\pi m$, und wir haben

$$-\Delta V \, dx \, dy \, dz = 4\pi m = 4\pi \varrho \, dx \, dy \, dz,$$

falls wir voraussetzen, dass die Massen gleichförmig im Volumelement verteilt seien und die Dichte $\varrho$ besitzen. Diese letzte Gleichung ergiebt dann den Satz von Poisson.

$$\Delta V = -4\pi \varrho.$$

§ 14. **Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte.**

Der elektrische Massenpunkt m befinde sich in einem Raum vom Potential V. Der Punkt bewege sich auf dem Weg s. Die Kraft, welche in der Richtung des Wegs auf ihn wirkt, ist also $-m\frac{dV}{ds}$ und es leistet auf dem Weg ds die Kraft die Arbeit

$$dL = -m\frac{dV}{ds}\,ds.$$

Gelangt der Punkt von einer Stelle mit dem Potential $V_1$ zu einer andern vom Potential $V_2$, so haben die elektrischen Kräfte dabei die Gesamtarbeit

$$\int dL = -mV_2 + mV_1 = m(V_1 - V_2)$$

geleistet. Diese Arbeit ist von der Form der Bahn vollständig unabhängig. Sie ist nur durch den Anfangs- und Endwert des Poten-

tials bedingt. Ist der Endpunkt unendlich weit weg, und haben wir im Unendlichen das Potential

$$V_2 = 0,$$

so stellt das Produkt $m V_1$ die Arbeit dar, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn der Punkt ins Unendliche gebracht wird. Dieselbe Arbeit muss aufgewendet werden, wenn wir den Punkt aus dem Unendlichen in den Raum vom Potential $V_1$ bringen wollen. Es ist daher das Potential nichts anderes als der mechanische Wert oder der Arbeitswert der Masseneinheit.

Bringen wir einen Massenpunkt $m_2$ aus dem Unendlichen in die Entfernung $r_{12}$ von der Masse $m_1$, so haben wir dabei die Arbeit $\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ zu leisten. Bringen wir nun noch die dritte Masse $m_3$ aus dem Unendlichen dazu, so haben wir noch die Arbeit $\frac{m_1 m_3}{r_{13}}$ bezüglich $\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$ aufzuwenden, wenn $r_{13}$ die Entfernung zwischen $m_1$ und $m_3$, $r_{23}$ jene zwischen $m_2$ und $m_3$ ist. Um daher diese Anordnung zu bewerkstelligen, muss die Arbeit

$$A = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

geleistet werden. A ist daher der Arbeitswert dieses Systems.

Es sollen nun auf dieselbe Weise beliebig viel Punkte einander genähert werden. Der Gesamtarbeits-

wert A wird dann durch folgende Gleichung bestimmt sein.

$$2A = m_1\left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_4}{r_{14}} + \ldots\right) +$$
$$+ m_2\left(\frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{24}} + \ldots\right) +$$
$$+ m_3\left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{34}} + \ldots\right) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Summe auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem doppelten Arbeitswert ist, da wir jede Arbeit, welche bei der Zuführung eines Massenpunkts aus dem Unendlichen zu leisten ist, doppelt gezählt haben. So finden wir z. B. die Arbeit, welche wir bei der Annäherung von $m_2$ an $m_1$ zu leisten haben, einmal im ersten Summanden, dann noch einmal im zweiten u. s. w. Der Faktor von $m_1$ ist nun nichts anderes als das Potential aller Massenpunkte auf den Punkt $m_1$. Wir wollen es $V_1$ nennen. Desgleichen sei

$$V_2 = \frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \ldots$$

u. s. w. Darnach erhalten wir

$$2A = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \ldots$$

Befinden sich alle elektrischen Massen auf einem leitenden Körper, so muss

$$V_1 = V_2 = \ldots = V$$

sein, wobei also V das konstante Potential im Innern des Körpers vorstellt. Es ist dann

$$2A = (m_1 + m_2 + \ldots)\ V = MV$$

oder

$$A = \frac{MV}{2},$$

wobei A die gesamte Elektrizität auf dem Körper ist. Ueberlegen wir, dass

$$V = \frac{M}{C}$$

ist, wenn wir unter C die Kapazität des Körpers verstehen, so können wir den Arbeitswert auch durch die Gleichung

$$A = \frac{M^2}{2C}$$

darstellen.

Haben wir mehrere Leiter mit den Potentialen V, V', V'' ..., so ist der Arbeitswert des gesamten Systems

$$A = \frac{MV}{2} + \frac{M'V'}{2} + \ldots,$$

wenn M, M' ... die Elektrizitätsmengen auf den zugehörigen Körpern sind.

### § 15. Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel.

Eine leitende Kugel sei auf das Potential V geladen. Ist E die Elektrizitätsmenge und a der Radius der Kugel, so besteht die Gleichung

$$V = \frac{E}{a}.$$

Der Arbeitswert ist somit

$$A = \frac{EV}{2} = \frac{E^2}{2a}.$$

Wir nehmen nun an, die Kugel habe eine bewegliche Oberfläche, wie es etwa für eine Seifenblase gelten würde, und wir suchen nun die Arbeit, welche die

Elektrizität bei der Ausdehnung der Kugel leistet. Sie muss der Verkleinerung des Arbeitswerts entsprechen, ist daher durch die Gleichung

$$-\,d\,A = \frac{E^2}{2\,a^2}\,d\,a$$

bestimmt, wenn sich der Radius um d a vergrössert. $\frac{E^2}{2a^2}$ ist somit nichts anderes als die Gesamtkraft, welche senkrecht zur Kugeloberfläche nach aussen wirkt. Ihre Grösse sei für die Flächeneinheit P. Es muss also

$$4\,\pi\,a^2\,P = \frac{E^2}{2a^2}$$

oder

$$P = \frac{E^2}{8\,\pi\,a^4}$$

sein. Ist die Dichte der Elektrizität $\sigma$, so

$$E = 4\,\pi\,a^2\,\sigma,$$

mithin

$$P = \frac{16\,\pi^2\,a^4\,\sigma^2}{8\,\pi\,a^4} = 2\,\pi\,\sigma^2.$$

Dieses Resultat hätten wir auch folgendermassen finden können. Die Kraft auf einen Massenpunkt m in der Oberfläche ist nach § 7 gleich $2\,\pi\,\sigma\,m$. Die Gesamtmasse auf der Flächeneinheit ist $\sigma$, daher die Gesamtkraft $2\,\pi\,\sigma^2$.

### § 16. Theorie der Dielektrika.

Wir fanden für die Kapazität eines Kugelkondensators (§ 11) aus der Formel

$$E_2 = \frac{a^2}{\delta}\,B$$

die Grösse

$$C = \frac{a^2}{\delta},$$

da ja die angesammelte Elektrizität gleich dem Produkt aus Kapazität und Spannung sein muss. Diese Gleichung gilt aber nur dann, wenn wir den Zwischenraum zwischen den beiden Hohlkugeln mit Luft ausgefüllt haben. Bringen wir jedoch eine andere Substanz, etwa eine nicht leitende Flüssigkeit oder einen festen Isolator hinein, so ändert sich die Kapazität, sie wird grösser. Wir haben daher unsere Formel in

$$C = c \frac{a^2}{\delta}$$

abzuändern, wobei c eine Konstante ist, welche nur von der Natur des isolierenden Zwischenmittels abhängig ist. Da Faraday die Isolatoren Dielektrika nannte, so gab er der Grösse c den Namen „Dielektrizitätskonstante".

Man kann sich vorstellen, dass die Dielektrika aus Molekeln bestehen, welche zwar die Elektrizität sehr gut leiten, die aber unter einander isoliert sind. Bringen wir deshalb einen Isolator in ein elektrisches Feld, so tritt in jeder Molekel eine elektrische Verteilung ein, indem die positive Elektrizität das Bestreben hat, sich

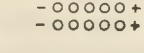

Fig. 8.

in der Richtung der Kraftlinien zu bewegen, die negative aber entgegengesetzt. Denken wir uns deshalb die Molekeln wie in Fig. 8 angeordnet, und es gehen

die Kraftlinien von links nach rechts, so wird die linke Seite der Molekeln negativ, die rechte positiv elektrisch. Im Innern des Körpers heben sich die Elektrizitäten der benachbarten Molekeln wieder auf, und es bleibt nur an der Oberfläche links eine negative, rechts eine positive Schicht freier Elektrizität übrig.

### § 17. Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektrizität.

Wir bringen in ein homogenes elektrisches Feld (Fig. 9), das ist ein solches, in welchem die Kraftlinien gerade, parallel und von konstanter

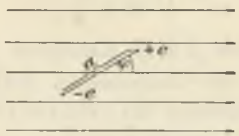


Fig. 9.

Dichte sind, zwei elektrische Massen + e und — e, welche starr miteinander verbunden sind. Ihre Entfernung sei a, die Feldstärke N. Es wirkt dann auf + e eine Kraft N e in der Richtung der Kraftlinien, auf — e in entgegengesetzter Richtung dieselbe Kraft, also — N e. Unser System erfährt daher ein Drehungsmoment N e a sin $\varphi$, und man nennt speziell die Grösse e a das elektrische Moment der beiden getrennten elektrischen Massen + e und — e.

Wir denken uns nun ein Dielektrikum in einem elektrischen Feld. Ueberall wirke dieselbe elektrische Kraft, d. h. wir haben ein homogenes Feld. Es werden also alle Molekeln des Dielektrikums gleichmässig polarisiert werden. Wir schneiden nun aus dem Dielektri-

kum ein Parallelepiped so heraus, dass eine Kante in die Richtung der Kraftlinien fällt. Es zeigt sich dann nach dem früheren nur auf jenen Flächen, welche senkrecht zu den Kraftlinien stehen, freie Elektrizität. Ihre Dichte sei $\sigma$, und wir machen nun die Annahme, dass $\sigma$ proportional der verteilenden elektrischen Kraft ist. Die Elektrizitätsmengen, welche auf den Endflächen sitzen, sind somit $q\,\sigma$ bezgl. $-q\,\sigma$, wenn wir mit q den Querschnitt des Parallelepipeds bezeichnen. Ist dieser sehr klein, so können wir

$$m = q\,\sigma\,l$$

das elektrische Moment des Parallelepipeds nennen, vorausgesetzt, dass wir unter l seine Länge verstehen. Man pflegt nun den Quotienten aus dem elektrischen Moment und dem Volumen des Körpers das elektrische Moment der Volumseinheit zu nennen, welches somit durch die Formel

$$\mu = \frac{q\,l\,\sigma}{v}$$

gegeben ist. Für unsern Fall ist aber das Volumen

$$v = q\,l,$$

daher

$$\mu = \sigma.$$

Das heisst: das elektrische Moment der Volumseinheit ist gleich der Flächendichte der freien Elektrizität.

Die elektrischen Kräfte können wir in drei Komponenten X, Y, Z zerlegen. Für die Endflächen eines Elementarparallelepipeds in einem Isolator seien die Flächendichten durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegeben, wobei sich $\alpha$ auf

die Fläche senkrecht zur x-Achse bezieht, u. s. w. Wir machen dann die Annahme, dass

$$\alpha = k\,X, \quad \beta = k\,Y, \quad \gamma = k\,Z$$

ist, und geben der Konstanten k den Namen „Elektrisierungszahl". Aendert sich der Wert von X, Y, Z mit den Koordinaten nicht, so sind auch die Flächendichten $\alpha, \beta, \gamma$ konstante Grössen und, wie bereits früher bemerkt, kann demnach im Innern eines Isolators, der von einem homogenen Feld beeinflusst wird, keine freie Elektrizität vorhanden sein. Wächst aber die elektrische Kraft X längs der Strecke d x, so dass wir auf der rechten Seite des Elementarprismas die Kraft X′ haben, dann befindet sich dort die Flächendichte

$$\alpha' = k\,X'.$$

Während wir also links etwa die freie Elektrizität $-\alpha\,d\,x\,d\,y$ haben, haben wir dann rechts $\alpha'\,d\,x\,d\,y$, und wir können schreiben

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\,d\,x.$$

Aendert sich nun $\alpha$ längs der x-Achse von Molekel zu Molekel, so können sich die durch Verteilung erzeugten Elektrizitätsmengen im Innern des Körpers nicht mehr vollständig aufheben, sondern es wird zwischen je zwei Molekeln eine freie Elektrizitätsmenge übrig bleiben, welche gleich der algebraischen Summe der beiden zusammenstossenden Mengen ist. Für das ganze Volumelement erhalten wir daher unter dem Einfluss der veränderlichen Kraft X eine freie Elektrizitätsmenge

$$-(\alpha' - \alpha)\,d\,y\,d\,z = -\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,x}\,d\,x\,d\,y\,d\,z,$$

indem ja der Zuwachs der Flächendichte multipliziert

mit der Fläche selbst die Menge der freien Elektrizität angiebt. Die frei werdende Elektrizität ist negativ, wenn wir (Fig. 10) die Kraft X mit der Abscisse x

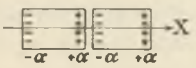


Fig. 10.

wachsen lassen. Die Kräfte Y und Z erzeugen analog die freien Elektrizitätsmengen $-\frac{\partial \beta}{\partial y} dx\,dy\,dz$ und $-\frac{\partial \gamma}{\partial y} dx\,dy\,dz$. Die im Volumelement vorhandene freie Elektrizität ist also gleich $-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$, wir können somit die Grösse

$$\varrho = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)$$

die Menge der Volumeinheit oder die Dichte der freien Elektrizität nennen, wobei unter $\varrho$ zum Unterschied von der Flächendichte $\sigma$ eine Raumdichte zu verstehen ist.

Wir setzen nun voraus, die elektrischen Kräfte haben ein Potential V. Wir haben dann

$$\alpha = k\,X = -\,k\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\beta = k\,Y = -\,k\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\gamma = k\,Z = -\,k\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Es lässt sich nun unter der Annahme, die Elektrisier-

ungszahl k sei eine konstante Grösse, leicht folgende Gleichung bilden.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = \frac{\varrho}{k}.$$

Von früher her (§ 6) wissen wir aber, dass

$$\Delta V = -4\pi\varrho$$

ist. Wir erhalten somit

$$-4\pi\varrho = \frac{\varrho}{k}$$

oder

$$(1 + 4\pi k)\,\varrho = 0.$$

Da k einen endlichen Wert hat, so folgt

$$\varrho = 0.$$

Das heisst, im Innern eines Dielektrikums entsteht unter dem Einfluss äusserer elektrischer Kräfte keine freie Elektrizität.

### § 18. Kapazität eines Leiters, der von einem Dielektrikum umgeben ist.

Ein Leiter (Fig. 11) besitze die Elektrizitätsmenge

Fig. 11.

E und befinde sich in der Mitte eines sehr grossen kugelförmigen Dielektrikums. Die Menge E wirkt verteilend auf das Dielektrikum. Es wird daher auf der Oberfläche der Kugel eine Elektrizitätsmenge E′ frei und ebenso an der Oberfläche des Leiters die Menge — E′, da wir annehmen, dass die Dielektrizitätskonstante k an allen Punkten des Isolators dieselbe Grösse hat. Der Radius der Kugel sei a. Die Kraft, welche daher an der Oberfläche der Kugel wirkt, ist $\frac{E-E'}{a^2}$, da wir bei sehr grossem a annehmen können, die gesamte Elektrizitätsmenge E und damit auch — E′ sei im Mittelpunkt der Kugel vereinigt. Auf der Oberfläche haben wir daher die Dichte

$$\sigma = k \frac{E-E'}{a^2}.$$

Da aber

$$E' = 4 \pi a^2 \sigma,$$

so folgt weiter

$$\frac{E'}{4 \pi a^2} = k \frac{E-E'}{a^2}$$

oder

$$E' = 4 \pi k (E - E') = \frac{4 \pi k}{1 + 4 \pi k} E.$$

Es sei die Kapazität unseres Leiters C. Er stände also ohne umhüllendes Dielektrikum auf dem Potential

$$V = \frac{E}{C},$$

hingegen bei Anwesenheit des Dielektrikums gilt für jeden Punkt im Innern des Leiters das Potential

$$V' = \frac{E-E'}{C} + \frac{E'}{a}$$

was allerdings nur unter der Voraussetzung giltig ist, dass a gegenüber den Dimensionen des Leiters sehr gross ist; denn nur dann haben wir eine gleichförmige Verteilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche der Kugel. Ist aber a sehr gross, so können wir $\frac{E'}{a}$ vernachlässigen und erhalten

$$V' = \frac{E - E'}{C}.$$

Um daher das alte Potential V wieder zu erhalten, haben wir unserm Leiter noch weiter Elektrizität zuzuführen. Das besagt aber nichts anderes, als: die Kapazität eines Leiters wird durch das Umhüllen mit einem Dielektrikum erhöht. Ist der umhüllende Isolator genügend ausgedehnt, so verhalten sich die Kapazitäten

$$C' : C = E : E - E',$$

oder

$$C' = (1 + 4\pi k)\, C.$$

Die Zahl

$$1 + 4\pi k = c,$$

welche die Zunahme der Kapazität angiebt, ist nichts anderes als die Dielektrizitätskonstante.

### § 19. Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator.

Was wir im vorhergehenden Paragraphen für einen Leiter gefunden haben, können wir unmittelbar auf einen Kondensator übertragen, dessen Raum zwischen den beiden Belegungen mit einem Dielektrikum ausgefüllt ist. Die Kraft, welche per Flächeneinheit von der einen Belegung A B (Fig. 12) auf die andere A′ B′,

die zur Erde abgeleitet sein soll, ausgeübt wird, ist ohne Zwischenmittel $4\pi\sigma$, wenn wir unter $\sigma$ wieder die Flächendichte der Elektrizität auf A B verstehen.

Fig. 12.

Ist ein Dielektrikum vorhanden, so wird sich an A B eine Elektrizitätsmenge von der Dichte $-\varepsilon$ ausscheiden, welche wir nach der Gleichung

$$\varepsilon = 4\pi k(\sigma - \varepsilon)$$

finden, da ja dann $4\pi(\sigma-\varepsilon)$ die auf das Dielektrikum wirkende Kraft ist. Die neue Dichte ist somit, wie leicht zu finden,

$$\sigma' = \sigma - \varepsilon = \sigma\left(1 - \frac{4\pi k}{1+4\pi k}\right) = \frac{\sigma}{1+4\pi k}.$$

Darnach erhalten wir auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Paragraphen, dass bei Vorhandensein des ausfüllenden Dielektrikums die Kapazität des Kondensators um $1+4\pi k = c$ mal grösser ist. Aus diesem Beispiel erkennen wir also unmittelbar, dass $1+4\pi k$ als die Dielektrizitätskonstante anzusehen ist.

## § 20. Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik.

Für einen stationären Zustand der Wärmeströmung gilt die Gleichung (Bd. II. § 35)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

vorausgesetzt, dass wir es mit einem isotropen Körper zu thun haben. Für die Grenzfläche zweier verschiedener Körper haben wir jedoch

$$k\frac{du}{dn} = k'\frac{du'}{dn},$$

wenn wir unter u die Temperatur, k die Wärmeleitungsfähigkeit, $\frac{du}{dn}$ das Temperaturgefälle in der Richtung der Normalen der Trennungsfläche verstehen. Die erste Gleichung gilt nun ohne weiters auch für die Elektrostatik. In allen Punkten eines elektrischen Feldes, wo keine freien Massen vorhanden sind, wenn wir unter u das Potential verstehen. Aber auch die zweite Gleichung findet ihr Analogon. Denken wir uns eine leitende Fläche A B (Fig. 13) mit der Flächendichte $\sigma$.

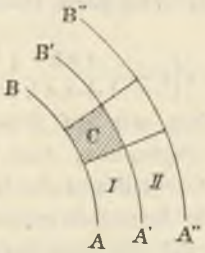


Fig. 13.

Es geht dann die Kraft $4\pi\sigma$ von der Flächeneinheit aus. Zwischen A B und A' B' sei nun ein Dielektrikum I. von der Dielektrizitätskonstanten $c = 1 + 4\pi k$, während zwischen A' B' und A'' B'' ein zweites Dielektrikum II mit der Konstanten $c' = 1 + 4\pi k'$ ist. Verfolgen wir in I eine Schar von Kraftlinien bis zur Fläche A' B', so sieht man leicht ein, dass sie in II

geradeso zahlreich eintreten müssten, wenn I gar nicht vorhanden wäre; denn es wird bei A B ebenso viel Elektrizität ausgeschieden wie bei A′ B′, da aber beide entgegengesetzt sind, so erleiden die Kraftlinien beim Passieren der Schicht I keinen Abbruch. Für die Grenzfläche A B gilt nun nach § 7

$$\frac{dV_+}{dn} - \frac{dV_-}{dn} = -4\pi\sigma.$$

In unserm Fall ist aber

$$\sigma = \sigma_1 - \varepsilon,$$

wobei $\sigma_1$ die Dichte auf A B wäre ohne Vorhandensein eines Dielektrikums. Nach § 19 ist aber

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{1 + 4\pi k}$$

oder

$$\sigma_1 = (1 + 4\pi k)\,\sigma.$$

Wäre das Dielektrikum II an Stelle von I, so gälte gleicherweise

$$\sigma_1 = (1 + 4\pi k')\,\sigma'.$$

In der Trennungsfläche A′ B′ sind nun thatsächlich I und II gleichzeitig vorhanden. Für diese gilt somit

$$(1 + 4\pi k')\,\sigma = (1 + 4\pi k')\,\sigma'.$$

Da nun die elektrische Kraft

$$K = 4\pi\sigma = -\frac{dV}{dn}$$

ist, so finden wir für die Trennungsfläche A′ B′ die Gleichung

$$(1 + 4\pi k)\frac{dV}{dn} = (1 + 4\pi k')\frac{dV'}{dn},$$

was wir auch schreiben können

$$c\frac{dV}{dn} = c'\frac{dV'}{dn}.$$

Dieselbe Gleichung gilt aber auch für die Wärmeleitung, wenn, wie wir oben sahen, unter c die Wärmeleitungsfähigkeit und unter V die Temperatur verstehen. Wir können somit ohne weiteres Probleme der Wärmeleitung auf die Elektrostatik und umgekehrt übertragen. Die Leiter der Elektrizität sind dabei als Dielektrika von unendlich grosser Dielektrizitätskonstanten aufzufassen. Wie also in einem Leiter das Potential in allen Punkten gleich gross ist, so ist in einem Körper von unendlich grosser Wärmeleitungsfähigkeit auch die Temperatur konstant. Für die Rechnung sind Aequipotentialflächen und Flächen gleicher Temperatur, Kraftlinien und Strömungslinien gleichbedeutend. Wir fanden auch zwischen der Flüssigkeits- und Wärmeströmung formale Analogien (Bd. II. § 35). Sie bestehen natürlich gleicherweise zwischen den Erscheinungen der Flüssigkeitsströmung und der Elektrostatik.

## Magnetismus.

### § 21. Grunderscheinungen — Coulomb's Gesetz.

Wir erkennen die magnetischen Kräfte an ihrer anziehenden Wirkung auf Eisen. Zwei Stellen eines Magnets pflegen in der Regel besonders kräftig zu wirken, wir nennen sie die Pole, weil sie entgegengesetzte Eigenschaften besitzen. Hängen wir nämlich den Magneten frei beweglich auf, so stellt sich die Verbindungslinie der beiden Pole immer in der Richtung Nord-Süd ein, und wir nennen den nach Norden zeigenden Pol den Nordpol, den andern den Südpol. Der Nordpol eines Magnets stösst den Nordpol eines

andern ab, zieht aber den Südpol an; gleicherweise stösst auch der Südpol des einen den Südpol des andern ab. Gleichnamige Pole stossen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Lange Stahlnadeln lassen sich so magnetisieren, dass fast nur die Enden Magnetismus zeigen. Mit solchen Nadeln fand Coulomb das Gesetz, dass sich zwei gleichnamige Magnetpole mit einer Kraft abstossen, welche verkehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist und direkt proportional dem Produkt der magnetischen Massen beider Pole. Wir haben somit genau dasselbe Gesetz wie bei elektrostatischen Kraftwirkungen (§ 1), können es deshalb auch in die Form

$$K = \frac{m\,m'}{r^2}$$

kleiden.

### § 22. Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — Inklination — magnetisches Moment.

Aus der Uebereinstimmung des Kraftgesetzes zwischen zwei magnetischen Massen mit jenem für die Elektrizität lässt sich leicht erkennen, dass man viele Begriffe der Elektrostatik ohne weiters auf den Magnetismus übertragen kann. Jede magnetische Masse erzeugt ein Kraftfeld, welches wir durch magnetische Kraftlinien darstellen können, deren Zahl pro Flächeneinheit die Grösse der magnetischen Kraft giebt. Von jeder Masse m gehen $4\pi m$ Kraftlinien aus. Positive magnetische Massen suchen sich in

der Richtung der Kraftlinien, negative entgegengesetzt zu bewegen.

Da jeder Magnet sich in der Richtung von Nord nach Süd einzustellen sucht, müssen wir den uns umgebenden Raum selbst als ein magnetisches Feld ansehen, und zwar zeigt sich, dass bei möglichster Fernhaltung von Eisen und ähnlichen Substanzen, die vom Magneten stark angezogen werden, wir es mit einem homogenen Feld zu thun haben. Das Vorhandensein dieses grossen magnetischen Feldes schreiben wir dem Erdmagnetismus zu. Die Vertikalebene, in welche sich ein nach allen Richtungen frei beweglicher, im Schwerpunkt aufgehängter Magnet einstellt, nennen wir den magnetischen Meridian, den Winkel, welchen dieser mit dem astronomischen Meridian einschliesst, die Deklination, den Neigungswinkel der Nadel zum Horizont, die Inklination.

Da sich in einem magnetischen Feld der positive und negative Magnetismus in entgegengesetzter Richtung zu bewegen sucht, müsste sich ein Körper, welcher die eine Art Magnetismus im Ueberschuss besitzt, nach der entsprechenden Richtung bewegen. Eine solche Bewegung konnte aber bisher noch an keinem Magneten nachgewiesen werden. Wir müssen deshalb annehmen, dass in jedem Magneten ebensoviel positiver als negativer Magnetismus vorhanden ist.

Wir wollen nun die Stärke des magnetischen Felds der Erde mit E bezeichnen. Wir können E in eine vertikale und eine horizontale Komponente zerlegen. Erstere ist

$$V = E \sin i,$$

letztere

$$H = E \cos i,$$

wenn wir unter i den Inklinationswinkel verstehen. Auf den Magnetpol m (Fig. 14) wirkt daher vertikal die Kraft m V, horizontal m H. Dieselben Kräfte, nur in entgegengesetzter Richtung greifen in — m an. Ist der Magnet um O drehbar, so erzeugen die Kräfte das Drehungsmoment (Bd. I. § 28)

$$m V l \cos\varphi - m H l \sin\varphi,$$

wenn wir l die Entfernung der beiden Magnetpole nennen. Der Schwerpunkt des Magnets sei in S in der Entfer-

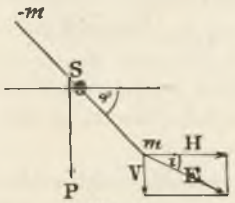


Fig. 14.

nung d von O. Das Gewicht des Magnets sei P. Dann erzeugt dieses das Drehungsmoment $-P d \cos\varphi$, wenn $\varphi$ der Winkel des Magnets mit dem Horizont ist. Soll sich der Magnet somit im Gleichgewicht befinden, so muss

$$m V l \cos\varphi - m H l \sin\varphi - P d \cos\varphi = 0$$

sein. Dabei ist also vorausgesetzt, dass die Drehachse des Magnets senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht. Die Grösse

$$m l = M$$

nennt man das Moment des Magnets oder kurz das

magnetische Moment. Aus der letzten Gleichung erhalten wir leicht

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MV - Pd}{MH},$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V}{H} - \frac{Pd}{MH} = \frac{E\sin i}{E\cos i} - \frac{Pd}{MH} = \operatorname{tg} i - \frac{Pd}{MH}.$$

Wenn wir nun die Nadel ummagnetisieren, so werden die Pole vertauscht. Dann wirkt das Moment des Schwerpunkts entgegengesetzt, und wir bekommen

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg} i + \frac{Pd}{MH},$$

folglich

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{2}.$$

Auf diese Weise bestimmt man mit Hilfe der Inklinationsnadel die Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Steht die Drehachse nicht senkrecht zum magnetischen Meridian, sondern schliesst die Schwingungsebene mit dem Meridian den Winkel $\psi$ ein, so kann, vorausgesetzt, dass die Achse horizontal steht, nicht mehr die gesamte Horizontalkraft H wirken, sondern nur die Komponente $H\cos\psi$, und die Gleichgewichtsbedingung wird

$$MV\cos\varphi - MH\cos\psi\sin\varphi - Pd\cos\varphi = 0,$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MV - Pd}{MH\cos\psi}.$$

Für $\cos\psi = \frac{\pi}{2}$ wird demnach $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die Magnetnadel stellt sich somit vertikal, wenn die

Schwingungsebene des Magnets senkrecht zum Meridian steht. Auf diese Weise kann man also auch ohne Deklinationsnadel die Richtung des magnetischen Meridians auffinden.

## § 23. Potential eines Magnets.

Wir nahmen bisher immer an, ein Magnet bestehe aus zwei punktförmigen magnetischen Massen. In einem homogenen magnetischen Feld ist dies immer gestattet, da ja dann sämtliche Massen im Massenmittelpunkt vereinigt gedacht werden können (Bd. I. § 21). Wir können daher den Magnet immer durch zwei punktförmige Massen, welche gleich gross aber entgegengesetzt sind, ersetzen. Diese Massen $+m$ und $-m$ (Fig. 15) seien vom Punkt P um $r_1$ bezüglich $r_2$ entfernt. Wie

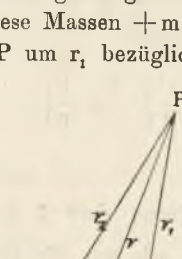


Fig. 15.

bei elektrischen Massen können wir nun auch hier vom Potential der magnetischen Massen auf den Punkt P sprechen. Es wird

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$$

sein; denn es wäre ja die Kraft, welche m auf die

positive magnetische Masseneinheit in P ausübt, gleich $\frac{m}{r_1^2}$ und ebenso die Kraft von $-m$ gleich $-\frac{m}{r_2^2}$. Die zugehörigen Potentiale sind also $\frac{m}{r_1}$ und $-\frac{m}{r_2}$, und die Summe beider ist das Potential V des Magneten auf den Punkt P.

Halbieren wir die Strecke $AB = \lambda$ in O und setzen wir $OP = r$, so folgt

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} - r\lambda\cos\varepsilon,$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} + r\lambda\cos\varepsilon.$$

Es ergiebt sich ferner

$$\frac{1}{r_1} = \left(r^2 - \lambda r\cos\varepsilon + \frac{\lambda^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda}{r}\cos\varepsilon + \frac{\lambda^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\lambda}{2r}\cos\varepsilon\right),$$

wenn wir voraussetzen, dass $\lambda$ gegen r eine kleine Grösse ist, so dass wir nur die erste Potenz von $\frac{\lambda}{r}$ zu berücksichtigen brauchen. Gleicherweise erhalten wir

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda}{2r}\cos\varepsilon\right),$$

mithin

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda\cos\varepsilon}{r^2}$$

und

$$V = \frac{m\lambda\cos\varepsilon}{r^2} = \frac{M\cos\varepsilon}{r^2}.$$

Der Punkt P habe nun die Koordinaten x, y, z, der Punkt O gleicherweise a, b, c. Ferner schliesse die

Gerade AB mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel f, g, h ein. Dann gilt

$$\cos\varepsilon = \frac{x-a}{r}\cos f + \frac{y-b}{r}\cos g + \frac{z-c}{r}\cos h,$$

und es wird

$$V = \frac{M(x-a)\cos f + M(y-b)\cos g + M(z-c)\cos h}{r^3}.$$

Die Grösse $AB = \lambda$ können wir nun auf die drei Koordinatenachsen projizieren und erhalten so die Längen $\lambda\cos f$, $\lambda\cos g$, $\lambda\cos h$. Folglich ist es erlaubt,

$$m\lambda\cos f = M\cos f = A,$$
$$m\lambda\cos g = M\cos g = B,$$
$$m\lambda\cos h = M\cos h = C$$

die Komponenten des magnetischen Moments bezüglich der drei Achsen zu nennen, und es wird so das Potential

$$V = \frac{A(x-a) + B(y-b) + C(z-c)}{r^3}. \quad (8)$$

Wir wollen dieses Potential jetzt benützen, um die magnetischen Kräfte zu berechnen, welche ein Magnet, der im Ursprung eines Koordinatensystems (Fig. 16) so

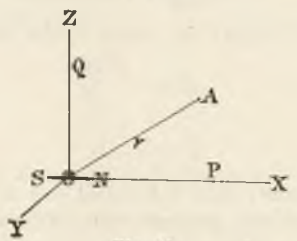


Fig. 16.

liegt, dass seine beiden Pole in der x-Achse und gleichweit vom Ursprung entfernt sind, in einem Punkt A

äussert. Es sind dann die Momente $B = C = 0$, während $A = M$ das Gesamtmoment bedeutet. Es ist weiter $a = b = c = 0$, mithin

$$V = \frac{Mx}{r^3}.$$

Für die magnetischen Kräfte erhalten wir sonach

$$X = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{r^3} + \frac{3Mx^2}{r^5},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3Mxy}{r^5},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{3Mxz}{r^5},$$

was ohne weiteres verständlich ist, wenn wir überlegen, dass

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

also

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ist. Befindet sich der Punkt in der x-Achse, etwa in P, so wird $x = r$, also

$$X = \frac{2M}{r^3}, \quad Y = Z = 0.$$

Für einen Punkt in der x-Achse ist $z = r$, somit

$$X = -\frac{M}{r^3}$$

und wieder

$$Y = Z = 0.$$

## § 24. Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments.

Wir legen einen Magnet (Fig. 17) so, dass er senkrecht zum magnetischen Meridian MN ist. Er erzeugt dann im Punkt P in der Entfernung r vom

Mittelpunkt O des Magnets ein magnetisches Feld von der Stärke $\frac{2M}{r^3}$. Er wird daher eine kleine Magnetnadel im Punkt P um den Winkel $\varphi$ ablenken, indem

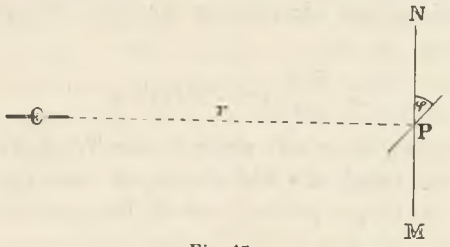


Fig. 17.

er auf sie ein Drehungsmoment $\frac{2M}{r^3} M' \cos\varphi$ ausübt, wenn M' das magnetische Moment der Nadel und $\varphi$ der Winkel der Nadel mit dem magnetischen Meridian ist. Gleichzeitig erzeugt die Horizontalintensität H des Erdmagnetismus das Drehungsmoment $-M'H\sin\varphi$. Für das Gleichgewicht der Nadel gilt somit

$$-M'H\sin\varphi + M'\frac{2M}{r^3}\cos\varphi = 0$$

oder

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Wir sind also in der Lage, den Quotienten $\frac{M}{H}$ zu bestimmen, erhalten aber keinen Aufschluss über den wahren Wert der Grössen M und H. Dies erreichen wir erst durch einen sogenannten Schwingungsversuch. Wir wollen zu dem Zweck unsern Magnet an

einem langen Faden aufhängen, so dass er leicht in einer Horizontalebene schwingen kann. Schliesst er mit dem magnetischen Meridian den Winkel $\varphi$ ein, so giebt ihm der Erdmagnetismus ein Drehungsmoment $-MH\sin\varphi$, und wir erhalten für seine Bewegung die Gleichung

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MH\sin\varphi\,.$$

(Bd. I § 28), wenn wir unter K sein Trägheitsmoment verstehen. Sind die Schwingungen nicht gross, so können wir $\sin\varphi = \varphi$ setzen, und die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K}\varphi.$$

Das ist aber dieselbe Gleichung wie jene für die Schwingungen eines Pendels (Bd. I § 9), und wir erhalten für die Schwingungsdauer

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{MH}},$$

woraus folgt, dass

$$MH = \frac{\pi^2 K}{\tau^2}$$

ist. Wir können also nach der von Gauss angegebenen Methode sowohl den Quotienten $\frac{M}{H}$, als das Produkt MH experimentell bestimmen und sind jetzt in der Lage, sowohl die Grösse des magnetischen Moments M, als auch die der Horizontalkomponenten des Erdmagnetismus anzugeben.

## § 25. Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch induzierten Körpers.

Bringen wir Eisen in die Nähe eines Magnets, so wird es selbst magnetisch. Wir können diese Erscheinung so auffassen wie die Elektrisierung eines Dielektrikums, welches wir in ein elektrisches Feld bringen (§ 16). Wir können annehmen, in jeder Molekel werde gleichviel positiver und negativer Magnetismus ausgeschieden u. s. w. und nennen diesen Vorgang „magnetische Induktion". Wir werden als magnetisches Moment der Volumeinheit

$$\mu = kP$$

erhalten, wenn wir unter P die magnetisierende Kraft verstehen, während jetzt k die Magnetisierungszahl heisst. Die Komponenten des Moments $\mu$ sind

$$\alpha = kX,\ \beta = kY,\ \gamma = kZ,$$

während X, Y, Z die Komponenten von P bedeuten. Das Potential des ganzen Körpers werden wir finden, wenn wir das Potential eines Volumelements suchen und dann über das ganze Volumen des Körpers integrieren. Das Potential eines Volumelements da db dc erhalten wir aber leicht nach Gleichung (8). Als magnetisches Moment des Volumelements bezüglich der drei Achsen haben wir

$$A = \alpha\, da\, db\, dc,$$
$$B = \beta\, da\, db\, dc,$$
$$C = \gamma\, da\, db\, dc,$$

folglich als Potential

$$dV = \frac{\alpha(x-a)+\beta(x-b)+\gamma(x-c)}{r^3}\, da\, db\, dc. \qquad (9)$$

Dabei ist

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach a, so finden wir leicht

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r},$$

was wir weiter benützen können, um folgende Gleichung zu bilden

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{x-a}{r^3}.$$

Auf ganz dieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x-b}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x-c}{r^3}.$$

Diese Grössen können wir nun in die Gleichung (9) einsetzen und erhalten dann durch Integration das Potential des gesamten Körpers

$$V = \int\int\int \left[\alpha \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) + \beta \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right) + \gamma \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right] da\, db\, dc.$$

Es ergiebt sich nun weiter

$$\int\int\int \alpha \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) da\, db\, dc =$$

$$= \int\int db\, dc \left[\frac{\alpha}{r} - \int \frac{1}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial a} da\right].$$

Fassen wir ein Oberflächenelement dO unseres Körpers ins Auge, dessen Normale mit den Koordinatenachsen die Winkel f, g, h einschliesst, so können wir

$$dO \cos f = db\, dc$$

setzen, gleicherweise

$$dO \cos g = da\, dc, \quad dO \cos h = da\, db.$$

Das erlaubt uns, unser Potential folgendermassen umzuändern

$$V = \int\int \frac{\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h}{r} \, dO - \int\int\int \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} \right) da\, db\, dc.$$

Es zerfällt also im Allgemeinen in zwei Teile, deren einer sich bloss auf die Oberfläche, der andere bloss auf das Volumen des Körpers bezieht. Es ist auch unmittelbar klar, dass

$$\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h = \sigma$$

sein muss, wenn wir unter $\sigma$ die Oberflächendichte des Magnetismus verstehen, während

$$-\left( \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} \right) = \varrho$$

die Dichte des freien Magnetismus im Innern des Körpers ist (§ 17). Unser Potential wird sonach

$$V = \int\int \frac{\sigma \, dO}{r} + \int\int\int \frac{\varrho}{r} \, da\, db\, dc.$$

Diesen Ausdruck hätten wir ohne weiteres bilden können, wenn wir von vornherein die Begriffe des freien Magnetismus in der Oberfläche und im Innern eines Körpers aufgestellt hätten, indem er ja nichts anderes besagt als die gewöhnliche Definition des Potentials, dass es gleich ist der Summe sämtlicher vorhandenen Massen, jede einzelne dividiert durch ihre Entfernung von jenem Punkt, für welchen das Potential bestimmt wird.

### § 26. Die homogen magnetisierte Kugel.

Ist eine Kugel homogen magnetisiert, so heisst das, das magnatische Moment der Volumeinheit ist in

allen ihren Punkten gleich gross und gleich gerichtet. Wir wollen es mit der Richtung der x-Achse eines Koordinatensystems zusammenfallen lassen. Für das magnetische Moment der Volumseinheit gilt also

$$\alpha = \text{konst.}, \quad \beta = \gamma = 0.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist nun

$$V = \int\int\int \frac{\alpha(x-a)}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

wobei wir

$$\frac{x-a}{r^3} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)$$

oder auch

$$\frac{x-a}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

setzen können. Sonach wird

$$V = -\int\int\int \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) da\, db\, dc =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\int\int\int \frac{\alpha}{r}\, da\, db\, dc.$$

Es ist dies erlaubt, weil ja nach der Variablen x keine Integration vorkommt. Für die Vollkugel haben wir nun, wenn der Punkt, auf welchen das Potential sich bezieht, ausserhalb gelegen ist (§ 4)

$$\int\int\int \frac{\alpha}{r}\, da\, db\, dc = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{p^3\alpha}{R},$$

wenn p der Radius der Kugel und R die Entfernung des Kugelmittelpunkts von dem ausserhalb gelegenen Punkt ist. Darnach finden wir

$$V = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{4\pi\alpha p^3}{3R} = \frac{4\pi\alpha p^3}{3}\frac{x}{R^3},$$

wenn wir den Kugel-Mittelpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems verlegen, indem dann

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x}{R^3}$$

ist. Da $\alpha$ das magnetische Moment der Volumeinheit $\frac{4\pi p^3}{3}$ das Volumen der Kugel ist, so ist

$$\frac{4\pi p^3 \alpha}{3} = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Kugel. Damit wird das Potential

$$V = \frac{Mx}{R^3}$$

Dasselbe Resultat haben wir aber für einen kleinen Magnet vom Moment M (§ 23) erhalten, dessen Pole in der x-Achse zu beiden Seiten des Ursprungs liegen. Es kann daher die Wirkung einer homogen magnetisierten Kugel durch einen kleinen Magnet vom selben magnetischen Moment ersetzt werden.

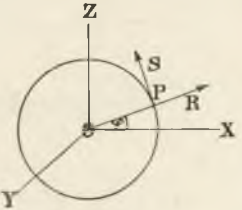


Fig. 18.

Suchen wir die magnetische Kraft in einem Punkt P (Fig. 18) der Kugeloberfläche, so haben wir

$$x = R\cos\varphi$$

zu setzen, das Potential wird also

$$V = \frac{M}{R^2}\cos\varphi.$$

Die Kraft im Punkt P wollen wir in eine Komponente in der Richtung des Radius und eine senkrecht darauf zerlegen. Erstere wird demnach sein

$$-\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2M}{R^3} \cos\varphi,$$

letztere

$$-\frac{\partial V}{R\,\partial \varphi} = \frac{M \sin\varphi}{R^3}.$$

Für die x-Achse selbst ist $\varphi = 0$. Wir haben daher nur eine Kraft in der Richtung des Radius. Eine Magnetnadel würde sich also dort senkrecht zur Kugeloberfläche stellen. In der yz-Ebene hingegen ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dort haben wir also nur eine Kraft parallel zur Kugeloberfläche. Ein ähnliches Verhalten zeigt unsere Erde, wenn wir die Verbindungslinie ihrer

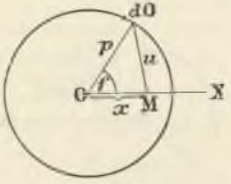


Fig. 19.

beiden magnetischen Pole als die x-Achse auffassen. An den beiden magnetischen Polen steht thatsächlich die Magnetnadel senkrecht, am Aequator horizontal. Doch trifft dies nur annähernd zu. Wir können demnach aus den Beobachtungen auf der Erdoberfläche nicht ohne weiteres auf die Verteilung des Erdmagnetismus schliessen, kann ja doch ein kleiner starker

Magnet eine homogen magnetisierte Kugel vollständig ersetzen.

Wir wollen nun das Potential unserer homogen magnetisierten Kugel auf einen innerhalb liegenden Punkt M (Fig. 19) berechnen, der vorerst in der x-Achse liegen soll. Da wir im Innern keinen freien Magnetismus haben, so ist $\varrho = 0$, und es wird

$$V = \int\int \frac{\sigma \, d0}{u}.$$

Es ist ferner

$$\sigma = \alpha \cos f,$$

daher

$$V = \alpha \int\int \frac{\cos f}{u} d0.$$

Da um die x-Achse alles symmetrisch ist, so können wir

$$d0 = p \, df . 2\pi p \sin f = 2\pi p^2 \sin f \, df$$

setzen. Darnach wird

$$V = 2\pi p^2 \alpha \int_0^{\pi} \frac{\cos f \sin f \, df}{u}. \qquad (10)$$

Wir haben ferner

$$u^2 = p^2 + x^2 - 2px \cos f$$

und durch Differentiation

$$u \, du = px \sin f \, df,$$

während aus der Gleichung für $u^2$

$$\cos f = \frac{p^2 + x^2 - u^2}{2px}$$

folgt. Führen wir diese Grössen für $\cos f$ und $\sin f \, df$ in die Gleichung (10) ein, so bleibt uns

$$V = \frac{2\pi p^2 \alpha}{2 p^2 x^2} \int_{p-x}^{p+x} (p^2 + x^2 - u^2)\, du =$$

$$= \frac{\pi \alpha}{x^2} \left[ (p^2 + x^2) u - \frac{u^3}{3} \right]_{p-x}^{p+x} = \frac{4\pi\alpha x}{3},$$

was durch Einsetzen der Grenzen $p - x$ und $p + x$ leicht gefunden wird. Diese sind die Werte des u für die Winkel $f = 0$ und $f = \pi$. Unser Potential ist also der Abscisse x proportional. Die Kraft parallel zur x-Achse wird daher

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi\alpha}{3},$$

während sie senkrecht darauf Null ist. Wenn wir aber keine Kraft senkrecht zur x-Achse haben, so heisst das: Die Kraftlinien sind parallel. Es gilt daher der Ausdruck unseres Potentials nicht nur für Punkte in der x-Achse, sondern überhaupt für jeden Punkt im Innern unserer Kugel. Für einen Punkt in der Oberfläche wird

$$x = p \cos f.$$

Ferner wissen wir von früher, dass

$$\frac{4\pi p^3 \alpha}{3} = M$$

das magnetische Moment der Kugel ist. Wir können daher

$$4\pi\alpha = \frac{3M}{p^3}$$

setzen und die Gleichung bilden

$$V = \frac{4\pi\alpha x}{3} = \frac{M p \cos f}{p^3} = \frac{M \cos f}{p^2}.$$

Dieselbe Formel fanden wir aber schon oben, nur ersetzten wir dort p durch R. Die Werte der beiden Ausdrücke für das Potential auf einen Punkt innerhalb und ausserhalb werden also, wie es ja auch sein muss, für die Oberfläche der Kugel gleich.

§ 27. **Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld.**

Bringen wir einen Körper in ein magnetisches Feld, so wird in ihm Magnetismus induziert, an seiner Oberfläche wird Magnetismus frei. Dieser freie Magnetismus wirkt nun abermals induzierend auf den Körper ein und verändert daher die Lage der magnetischen Kraftlinien sowohl im Innern des Körpers als auch ausserhalb. Diese neuen, infolge der Induktion erzeugten Kraftlinien pflegt man daher auch häufig die magnetischen Induktionslinien zu nennen.

Bringen wir eine Kugel in ein homogenes magnetisches Feld, so ist die erste Erscheinung eine homogene Magnetisierung. Von einer solchen Kugel wissen wir aber, dass in ihrem Innern die Kraftlinien parallel laufen. Folglich können auch die frei gewordenen Magnetismen das homogene Feld im Innern der Kugel nur seiner Stärke nach verändern.

Die ursprüngliche Feldstärke sei P. Diese ruft das magnetische Moment der Volumeinheit

$$\alpha = k P \qquad (11)$$

hervor, was das Potential

$$V = \frac{4 \pi \alpha x}{3}$$

und die Kraft

$$X = -\frac{\partial V}{dx} = \frac{4 \pi \alpha}{3}$$

auf einen Punkt im Innern der Kugel zur Folge hat. Den wahren Wert des $\alpha$ finden wir also nicht aus der Gleichung (11), sondern aus der Formel

$$\alpha = k\,(P + X),$$

wobei X jene magnetische Kraft ist, welche vom induzierten freien Magnetismus ausgeht. Daraus folgt

$$\frac{\alpha}{k} = P - \frac{4\pi\alpha}{3},$$

was wir weiter umformen können in

$$\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{4\pi}{3}\right) = P,$$

$$\alpha = \frac{P}{\frac{1}{k} + \frac{4\pi}{3}}.$$

Für Substanzen, wie Eisen, Nickel u. s. w. ist nun k so gross, dass wir $\frac{1}{k}$ gegenüber $\frac{4\pi}{3}$ vernachlässigen können. Es wird dann

$$\alpha = \frac{3P}{4\pi}.$$

Das magnetische Moment einer Kugel vom Radius p ist nun

$$M = \frac{4\pi}{3} p^3 \alpha = p^3 P.$$

Es ist also gleich dem Produkt aus der 3. Potenz des Radius und der Feldstärke, wenn nur der Körper eine grosse Magnetisierungszahl besitzt. Ist hingegen die Magnetisierungszahl wie bei den meisten Körpern

sehr klein, so kann $\frac{4\pi}{3}$ gegen $\frac{1}{k}$ vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$\alpha = k\,P.$$

§ 28. **Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien.**

Bezeichnen wir das Potential im Innern eines Körpers mit $V_-$, ausserhalb mit $V_+$, die Dichte des freien Magnetismus an der Oberfläche mit $\sigma$, so gilt für die Oberfläche die Gleichung (5)

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = 4\pi\sigma.$$

Für die Komponenten des magnetischen Moments der Volumeinheit haben wir

$$\alpha = -k\frac{\partial V_-}{\partial x},\ \beta = -k\frac{\partial V_-}{\partial y},\ \gamma = -k\frac{\partial V_-}{\partial z}.$$

Ferner ist

$$\sigma = \alpha\cos f + \beta\cos g + \gamma\cos h,$$

wenn f, g, h die Winkel der Normalen n zur Oberfläche mit den drei Achsen sind, folglich

$$\sigma = -k\left(\frac{\partial V_-}{\partial x}\cos f + \frac{\partial V_-}{\partial y}\cos g + \frac{\partial V_-}{\partial z}\cos h\right) = -k\frac{\partial V_-}{\partial n}$$

Obige Gleichung kann daher geschrieben werden

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi k\frac{\partial V_-}{\partial n}$$

oder

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial V_-}{\partial n} = \frac{\partial V_+}{\partial n},$$

eine Gleichung, die zuerst von Thomson aufgestellt wurde. Auch diese Gleichung ist uns schon aus der Theorie der Dielektrika bekannt. Sie existiert ja für

die Oberfläche eines Dielektrikums, welches mit dem freien Raum in Berührung steht, nur ist dort die Grösse $1+4\pi k$ die Dielektrizitätskonstante, während wir sie hier die magnetische Induktionskonstante nennen.

Stossen zwei Körper zusammen mit den Magnetisierungszahlen k und k', so gilt natürlich analog

$$(1+4\pi k)\frac{\partial V}{\partial n}=(1+4\pi k')\frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Diese Gleichung führt uns aber wiederum zur Analogie mit der Wärmeleitung und der Flüssigkeitsströmung.

## § 29. Transversal magnetisierter Cylinder im homogen magnetischen Feld.

Wir haben einen unendlich langen Kreiszylinder aus Eisen (Fig. 20), dessen Achse die y-Achse eines Koordinatensystems bilden soll. Der Cylinder befinde

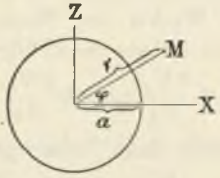


Fig. 20.

sich in einem ursprünglich homogenen magnetischen Feld, dessen Kraftlinien parallel zur x-Achse laufen. Durch die auf dem Zylinder frei werdenden magnetischen Massen wird das homogene Feld gestört; wir wollen die auf diese Weise entstandenen magnetischen Induktionslinien kennen lernen. Die Anschauung er-

giebt unmittelbar, dass längs einer zur y-Achse parallelen Geraden, das Potential einen konstanten Wert haben muss. Nennen wir das Potential im Innern des Zylinders $V_i$, ausserhalb $V_e$, so wird sonach

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial V_e}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{d y^2} = 0$$

sein. Ausserhalb und innerhalb des Zylinders gilt

$$\triangle V = 0,$$

da nur an der Oberfläche freie magnetische Massen vorhanden sind. Dies führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = 0.$$

Jede Funktion von $x + z\,i$ ist eine Lösung dieser Gleichung. Wir werden in der Folge sehen, dass die Gleichungen

$$V_e = A\,(x + z\,i) + \frac{B}{x + z\,i},$$

$$V_i = A'(x + z\,i) + \frac{B'}{x + z\,i}$$

sich mit den von uns gestellten Bedingungen vertragen, also als Lösungen unserer Aufgabe angesehen werden können. Es muss nun der reelle Teil der von uns aufgestellten Lösung für sich wieder eine Lösung sein, wodurch wir

$$V_e = A\,x + \frac{B\,x}{x^2 + z^2},$$

$$V_i = A'x + \frac{B'x}{x^2 + z^2}$$

erhalten.

Betrachten wir das Potential in einem von unserm Zylinder sehr weit entfernten Punkt, so wird $x^2+z^2$ sehr gross, $\frac{Bx}{x^2+z^2}$ sehr klein, daher

$$V_e = Ax$$

und die Kraft

$$-\frac{\partial V_e}{\partial x} = -A.$$

Wir haben also thatsächlich, wie wir es voraussetzten, in weiter Entfernung vom Zylinder ein homogenes magnetisches Feld. Für die Achse des Zylinders wird $x^2+z^2=0$. Da aber $V_i$ nicht unendlich werden kann, so muss $B'=0$ sein, und es bleibt

$$V_i = A'x, \quad -\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A'.$$

Also auch im Innern des Zylinders existiert ein homogenes magnetisches Feld. Der Zylinder ist transversal magnetisiert, und zwar laufen die magnetischen Induktionslinien parallel zur x-Achse.

Setzen wir nun

$$x = r\cos\varphi,$$

so wird

$$V_e = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\cos\varphi, \quad V_i = A'r\cos\varphi.$$

Für die Oberfläche des Zylinders muss

$$V_e = V_i$$

werden, das heisst, es muss

$$Aa + \frac{B}{a} = A'a \qquad (12)$$

sein, wenn wir unter a den Radius des Zylinders verstehen. Ferner muss

$$(1+4\pi k)\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial n}$$

sein, woraus folgt

$$(1+4\pi k)\,A' = A - \frac{B}{a^2}. \qquad (13)$$

Gleichung (12) können wir nun auch noch so schreiben

$$A + \frac{B}{a^2} = A'.$$

Eliminieren wir aus den beiden letzten Gleichungen $\frac{B}{a^2}$, so ergiebt sich leicht

$$A' = \frac{A}{1+2\pi k}, \quad \frac{B}{a^2} = -\frac{2\pi k}{1+2\pi k}\,A.$$

Das magnetische Moment der Volumeinheit des Zylinders ist

$$\alpha = -k\frac{\partial V_i}{\partial x} = -k\,A' = -\frac{k\,A}{1+2\pi k} = -\frac{A}{\frac{1}{k}+2\pi}.$$

Wir erhalten also eine ähnliche Formel wie für die Kugel (§ 27).

Ist eine Veränderliche durch eine Gleichung mit komplexen Zahlen gegeben und trennen wir sie in zwei Gleichungen, deren eine nur den reellen, die andere nur den imaginären Bestandteil enthält, so entsprechen diesen Gleichungen Kurvenscharen, deren eine die orthogonalen Trajektorien der anderen sind. Während also

$$V_i = A'x, \quad V_e = Ax + \frac{Bx}{r^2}$$

uns die Niveauflächen des Potentials geben, liefern uns die imaginären Bestandteile

$$U_i = A'z, \quad U_e = Az - \frac{Bz}{r^2}$$

die magnetischen Kraftlinien.

In grosser Entfernung vom Zylinder laufen die Kraftlinien parallel zur x-Achse. Wir wollen eine herausheben (Fig. 21), für welche $z = h$ ist. Wir haben dann, da $\frac{Bh}{r^2}$ als sehr klein zu betrachten ist,

$$U_e = Ah.$$

Die allgemeine Gleichung der Induktionslinien ausserhalb des Zylinders wird daher

$$Ah = Az - \frac{Bz}{r^2} = Az + \frac{2\pi k a^2}{(1+2\pi k) r^2} Az,$$

wenn wir den Wert von B dem Obigen entnehmen. Durch Kürzung ergiebt sich schliesslich

$$h = z + \frac{2\pi k a^2}{1+2\pi k} \cdot \frac{z}{x^2+z^2}.$$

Es sind die magnetischen Induktionslinien somit Kurven dritten Grads. Der Punkt C, in welchem die

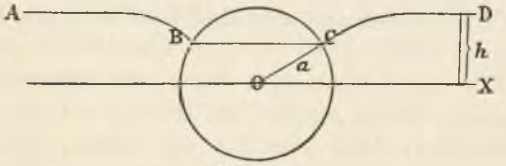


Fig. 21.

Induktionslinie die Oberfläche des Zylinders trifft, hat die Ordinate $z_1$. Für diese ist $x^2 + z^2 = a^2$. Unsere Gleichung wird

$$h = z_1 + \frac{2\pi k}{1+2\pi k} z_1.$$

Bei einem Eisenzylinder ist k so gross, dass wir Eins gegen $2\pi k$ vernachlässigen können, woraus folgt

$$z_1 = \frac{h}{2}.$$

Alle Kraftlinien, welche also im Unendlichen eine Ordinate kleiner als 2 a haben, gehen durch unsern Zylinder. Das Eisen zieht sozusagen die Kraftlinien gegen sich.

Auf ganz dieselbe Weise könnten wir die Strömungslinien der Wärme finden, wenn wir in einen Raum von konstantem Temperaturgefälle einen Zylinder brächten. Wäre dessen Wärmeleitungsfähigkeit gegenüber jenem des umgebenden Raums sehr gross, so würden die Strömungslinien genau so wie die magnetischen Induktionslinien des Eisens verlaufen.

Wie ein Vollzylinder lässt sich auch ein Hohlzylinder berechnen. Es zeigt sich da, dass im Innern des Hohlraums ein homogenes magnetisches Feld vorhanden ist, welches um so schwächer wird, je stärker die Wände des Zylinders sind. Man nennt diese Erscheinung die magnetische Schirmwirkung des Eisens.

## § 30. Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld.

Bei Körpern von sehr kleiner Magnetisierungszahl können wir die Rückwirkung der induzierten Magnetismen gegenüber den induzierenden Kräften vollständig

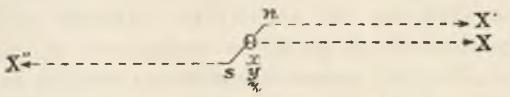


Fig. 22.

vernachlässigen. Durch die Kräfte X, Y, Z würden sonach die magnetischen Momente

$$\alpha = kX = -k\frac{\partial V}{\partial x}, \beta = kY = -k\frac{\partial V}{\partial y}, \gamma = kZ = -k\frac{\partial V}{\partial z}$$

erzeugt. Die Wirkung der Kraft X auf einen kleinen Magnet n s (Fig. 22) lässt sich folgendermassen darstellen. Haben wir im Punkt O mit den Koordinaten x, y, z die Kraft X, so finden wir in n die Kraft

$$X' = X + \frac{\partial X}{\partial x}\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\zeta,$$

wobei

$$\xi = \frac{\lambda}{2}\cos f,\ \eta = \frac{\lambda}{2}\cos g,\ \zeta = \frac{\lambda}{2}\cos h$$

ist. Unter $\lambda$ ist also die Länge des Magnets, unter f, g, h sind die Winkel, welche er mit den Achsen einschliesst, zu verstehen. In s haben wir analog die Kraft

$$X'' = X - \frac{\partial X}{\partial x}\xi - \frac{\partial X}{\partial y}\eta - \frac{\partial X}{\partial z}\zeta.$$

Unser Magnet habe in n die magnetische Masse + m, in s die Masse — m. Als Kraft auf unsern Magnet haben wir also

$$m X' - m X'' = 2m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\zeta\right)$$
$$= 2m\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos f + \frac{\partial X}{\partial y}\cos g + \frac{\partial X}{\partial z}\cos h\right).$$

Wir denken uns nun ein Volumelement $dx\,dy\,dz$ unseres Körpers im magnetischen Feld. Sein magnetisches Moment ist $\mu\,dx\,dy\,dz$. Darauf wird die magnetische Kraft gerade so wirken wie auf unseren kleinen Magnet, dessen magnetisches Moment $m\lambda$ ist. Wir können daher als Kraft auf das Volumelement

$$dK = \mu\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos f + \frac{\partial X}{\partial y}\cos g + \frac{\partial X}{\partial z}\cos h\right) =$$
$$= dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial X}{\partial x}\alpha + \frac{\partial Y}{\partial y}\beta + \frac{\partial Z}{\partial z}\gamma\right)$$

annehmen, da ja

$$\alpha = \mu \cos \mathfrak{f}$$

u. s. w. ist.

Setzen wir nun für X den Wert $-\frac{\partial V}{\partial x}$ u. s. f., desgl. für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Werte aus den eingangs erwähnten Gleichungen, so finden wir für die Kraft

$$k\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)=$$

$$=\frac{k}{2}\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{k}{2}\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}(X^2+Y^2+Z^2)=dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kR^2}{2}\right).$$

Gleicherweise finden wir für die Kräfte nach der y- und z-Achse

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kR^2}{2}\right)$$

und

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kR^2}{2}\right).$$

§ 31. **Die magnetische Kraft auf einen langen Cylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet.**

Wir nehmen an, wir hätten das eine Ende eines Cylinders in einem magnetischen Feld, etwa zwischen den zwei Polen eines Hufeisenmagnets (Fig. 23). Für die Kraft, welche der Magnet auf unseren Cylinder parallel zur x-Achse ausübt, erhalten wir nach den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kR^2}{2}\right)=\int\int dy\,dz\left(\frac{kR_1^2}{2}-\frac{kR_0^2}{2}\right).$$

Da wir aber zur yz-Ebene alles symmetrisch haben, so sind auch die Kräfte $R_0$ und $R_l$ einander gleich. Daher wirkt in der Richtung der x-Achse auf unseren Cylinder keine Kraft, ebenso in der Richtung der y-Achse. Für die Kraft in der Richtung der z-Achse haben wir jedoch

$$\int\int dx\,dy\left(\frac{k\,R''^2}{2}-\frac{k\,R'^2}{2}\right).$$

Dabei ist R′ die Kraft am Ende des Cylinders zwischen den Magnetpolen, R″ jene am entgegengesetzten Ende. Diese sei gleich Null. Es bleibt dann bloss

$$-\int\int\frac{k\,R'^2}{2}\,dx\,dy=-\frac{q\,k\,R'^2}{2},$$

wenn q der Querschnitt des Cylinders ist. Wir setzen hier voraus, dass das magnetische Feld am Ende des

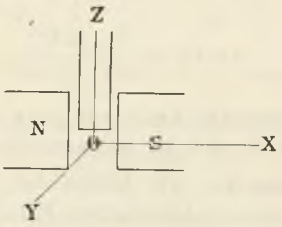


Fig. 23.

Cylinders an allen Punkten den konstanten Wert $R_l$ hat. $-\frac{q\,k\,R'^2}{2}$ ist also die Kraft, mit welcher unser Cylinder in das Feld hineingezogen wird. Diese Kraft lässt sich mit der Wage bestimmen, so dass wir hier

eine Methode haben, bei bekannter Kraft R' die Magnetisierungszahl k, oder bei bekannter Magnetisierungszahl die Feldstärke R' zu finden.

## § 32. Kraftfunktion und Potential der magnetischen Kräfte.

Wir fanden (§ 30) für die Kraftkomponenten, welche ein magnetisches Feld auf ein Volumelement ausübt, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k R^2}{2} dx\,dy\,dz\right)$ u. s. w. Wir können daher $\frac{k R^2}{2} dx\,dy\,dz$ als die Kraftfunktion für ein Volumelement ansehen. Gleicherweise wie die Kraftfunktion können wir nun auch das Potential finden. Wir suchen es erst wieder für einen kleinen Magnet s n (Fig. 22). Das Potential im Punkt O sei V, dann haben wir in n

$$V' = V + \frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{\partial V}{\partial y}\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

in s

$$V'' = V - \frac{\partial V}{\partial x}\xi - \frac{\partial V}{\partial y}\eta - \frac{\partial V}{\partial z}\zeta.$$

Das Potential auf unseren kleinen Magnet wird also $m V' - m V'' = \frac{\partial V}{\partial x} m \lambda \cos f + \frac{\partial V}{\partial y} m \lambda \cos g + \frac{\partial V}{\partial z} m \lambda \cos h$ sein. Für das magnetische Moment $m \lambda$ können wir nun wieder das Moment des Volumelements $\mu\,dx\,dy\,dz$ einsetzen und erhalten so

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mu \cos f + \frac{\partial V}{\partial y}\mu \cos g + \frac{\partial V}{\partial z}\mu \cos h\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= -k\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz =$$
$$= -k R^2\,dx\,dy\,dz.$$

Wir erhalten also das paradoxe Resultat, dass das Potential doppelt so gross ist als die Kraftfunktion. Das rührt daher, weil wir bei der Bildung der Kraftfunktion die Massen als konstant ansehen, was jedoch thatsächlich nicht der Fall ist, indem ja das magnetische Moment durch die Kraft selbst bedingt wird und sich mit dieser ändert. Während uns die Aenderung der Kraftfunktion die Grösse der mechanischen Kraft angiebt, liefert uns die Aenderung des Potentials die Aenderung der gesammten Energie. Diese besteht in unserm Fall aber nicht bloss in Erzeugung kinetischer Energie, sondern es wird gleichzeitig Arbeit zur Erzeugung des magnetischen Moments in dem induzierten Körper benötigt. Diese Arbeit ist, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, ebenso gross wie die Aenderung der kinetischen Energie des Körpers, weshalb das Potential auch doppelt so gross als die Kraftfunktion ausfallen muss.

### § 33. Die magnetische Molekularkraft.

Werden in einem Körper die ursprünglich vereinigten magnetischen Massen $+m$ und $-m$ durch die magnetische Kraft R getrennt, so wirkt auf $+m$ die Kraft $+mR$, auf $-m$ gleicherweise $-mR$. Ist die Entfernung, welche die beiden Massen dadurch erlangt haben, $\lambda$, so ist $m\lambda R$ die Arbeit, welche bei der Trennung geleistet werden musste. Das Differential der Arbeit bei konstanter Kraft ist also $Rd(m\lambda)$. Für ein Volumelement ergiebt dies (§ 25)

$$Rd(m\lambda) = Rd\mu\,dx\,dy\,dz.$$

Da

$$R = \frac{\mu}{k},$$

so

$$R\,d\mu\,dx\,dy\,dz = \frac{\mu\,d\mu}{k}\,dx\,dy\,dz.$$

Für die Volumeinheit ist daher die zur Ueberwindung der magnetischen Molekularkraft nötige Arbeit

$$\int_0^{\mu} \frac{\mu\,d\mu}{k} = \frac{\mu^2}{2k}$$

und für das Volumelement

$$\frac{\mu^2}{2k}\,dx\,dy\,dz = \frac{k\,R^2}{2}\,dx\,dy\,dz,$$

da ja $\mu = k\,R$ ist. Wir erhalten also in der That die Arbeit zur Ueberwindung der magnetischen Molekularkraft genau so gross wie die Kraftfunktion.

### § 31. Magnetische Energie.

Wir fanden für den Arbeitswert A eines Systems elektrischer Punkte (§ 14) die Gleichung

$$A = \Sigma \frac{m\,V}{2},$$

wobei wir unter m eine elektrische Masse verstanden, unter V das Potential, unter welchem sie steht. Diesen Ausdruck können wir unmittelbar auf den Magnetismus übertragen und so den Arbeitswert oder die Energie eines magnetischen Systems bestimmen. Wir nehmen an, dass wir es mit einem System von permanenten Magneten und verschiedenen anderen Körpern zu

thun haben, in welchen die Magnete freie magnetische Massen hervorrufen. Unter permanenten Magneten verstehen wir dabei magnetische Massen, welche bei einer Aenderung des Systems ihre Grösse nicht ändern, wie es etwa bei Stahlmagneten annähernd der Fall ist. Wir können sonach die gesamte magnetische Energie in drei Teile zerlegen. Den ersten liefert die Wirkung der fixen Magnete auf die freien magnetischen Massen der Körper. Der zweite besteht in der Wirkung der freien Massen auf sich selbst. Der dritte Teil ist jene Arbeit, welche zur Ueberwindung der magnetischen Molekularkraft in den Körpern erforderlich ist.

Freie magnetische Massen haben wir nur an der Oberfläche der Körper. Ihre Dichte nennen wir $\sigma$. Ist das Potential, welches die fixen Magnete erzeugen, V, so giebt uns

$$\int\int V\sigma\, dO = \int\int\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dx\, dy\, dz$$

den ersten Teil des magnetischen Arbeitswerts. Dass diese Gleichung wirklich besteht, können wir leicht ermitteln. Die partielle Integration ergiebt nämlich

$$\int\int\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\int \left(V\alpha\, dy\, dz + V\beta\, dx\, dz + V\gamma\, dx\, dy\right) -$$

$$- \int\int\int V\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Unter der Voraussetzung, dass wir nur auf der Oberfläche freie magnetische Massen haben, wird

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Das zweite Glied unseres Integralausdrucks fällt also weg, und es bleibt nur

$$\iint (V\alpha\, dy\, dz + V\beta\, dx\, dz + V\gamma\, dx\, dy) =$$
$$= \iint V(\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h)\, dO = \iint V\sigma\, dO$$

(§ 25), womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir haben nun als zweiten Bestandteil der magnetischen Energie das Potential der freien magnetischen Massen auf sich selbst, multipliziert mit der jeweiligen freien Masse, zu nehmen. Dieses Potential sei U. Wir erhalten somit für die Energie

$$\frac{1}{2}\int\int U\sigma\, dO = \frac{1}{2}\int\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma\right) dx\, dy\, dz.$$

Hier muss der Faktor $\frac{1}{2}$ stehen, weil wir bei der Bildung des Arbeitswerts geradeso wie beim Arbeitswert eines elektrischen Systems jede Masse zweimal in Rechnung gezogen haben. Beim ersten Teil war der Faktor $\frac{1}{2}$ nicht nötig, weil wir dort das Potential der fixen Massen auf die freien aber nicht umgekehrt einführten.

Die zur Ueberwindung der magnetischen Molekularkraft nötige Arbeit ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\int\int\int \frac{\alpha^2}{2k}\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2k}\int\int\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Dabei ist

$$\frac{\alpha}{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

und $-\frac{\partial V}{\partial x}$ die Kraft der fixen Magnete, $-\frac{\partial U}{\partial x}$ die rückwirkende Kraft der freien Magnetismen. Die Summe der drei massgebenden Bestandteile liefert uns nun die Gesamtenergie

$$E = \int\int\int \Big[ \Big( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\alpha}{2k} \Big)\alpha +$$

$$+ \Big( \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\beta}{2k} \Big)\beta +$$

$$+ \Big( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\gamma}{2k} \Big)\gamma \Big] dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\int\int \Big[ \Big( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} \Big)\alpha +$$

$$+ \ldots \Big] dx\,dx\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\int\int \Big( \frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma \Big)\, dx\,dy\,dz.$$

Es ist somit die Gesamtenergie nichts anderes als die Hälfte der Energie, welche die Wirkung der fixen Magnete auf die freien magnetischen Massen erzeugt.

Bei der Erzeugung der Momente $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind in erster Linie die Kräfte $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$ massgebend. Moment und erzeugende Kraft haben immer dasselbe Vorzeichen, folglich ist die Grösse $\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta +$ $+ \frac{\partial V}{\partial z}\gamma$ und damit die gesamte Energie negativ.

Bringen wir die Körper in unendliche Entfernung von den permanenten Magneten, so wird das Potential und damit der magnetische Arbeitswert E Null. Nähern sich nun die Körper, so muss Energie gewonnen werden. Es ist dies die kinetische Energie, welche die Körper durch die Anziehung der Magnete erlangen. Thatsächlich ist auch der Differentialausdruck für die Energie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dx\,dy\,dz$$

nichts anderes als die von uns bereits früher (§§ 30, 32) gefundene Kraftfunktion.

## Elektromagnetismus.

### § 35. Der elektrische Strom — Oersted's Entdeckung — Ampères Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart.

Halten wir zwei Punkte eines Leiters auf konstantem elektrischem Potential, so strömt beständig Elektrizität von dem Punkt höheren Potentials zu jenem tieferen, wir haben einen konstanten elektrischen Strom.

Oersted machte die Entdeckung, dass eine Magnetnadel durch einen nahe vorüberfliessenden elektrischen Strom abgelenkt wird. Die Ablenkung befolgt nach Ampère folgende Regel: Denken wir uns im Strom schwimmend, das Gesicht der Nadel zugewendet, so weicht der Nordpol nach links ab.

Befindet sich unter einem unendlich langen geradlinigen Strom eine Magnet-

nadel, so wird sie mit einer Kraft abgelenkt, welche verkehrt proportional ihrer Entfernung vom Strom ist. Dieses Gesetz fanden Biot und Savart. Die nähere Untersuchung ergiebt, dass das magnetische Feld, welches von einem geradlinigen Strom erzeugt wird, kreisförmige Kraftlinien besitzt, die mit ihrer Ebene senkrecht auf dem Strom stehen, während ihr Mittelpunkt im Strom selbst liegt. Zwei Ströme, welche also unendlich nahe, aber in entgegengesetzter Richtung und mit gleicher Stärke nebeneinander laufen, werden auf eine Magnetnadel keine Kraft ausüben, da sie sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben müssen.

### § 36. Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol.

Wir machen die Annahme, dass sich die Wirkung eines Stroms aus der Wirkung der einzelnen Stromelemente berechnen lässt. Stellen wir den Lauf des Stroms durch eine Kurve dar, das heisst, haben wir einen linearen Stromleiter, so können wir ein Kurvenelement als die Lage eines Stromelements ansehen. Denken wir uns einen Kreisstrom, in dessen Mitte sich eine kleine Magnetnadel befindet. Die Wirkung eines Stromelements wird nun proportional seiner Länge ds sein und einer Funktion des Radius r des Kreises. Wir können sie durch f (r) darstellen. Da alle Stromelemente vom Magnet gleichweit entfernt sind, so ist f(r) konstant, und die Wirkung des gesamten Kreisstroms auf die Nadel wird $2\pi r f(r)$, da

$2\pi r$ der Umfang des Kreises ist. Die Messung ergiebt nun, dass diese Kraft

$$2\pi r f(r) = \frac{K}{r}$$

ist, wobei K eine Konstante bedeutet. Es ist somit

$$f(r) = \frac{K}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

In unserem Fall steht jedes Stromelement senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen Magnetpol und Strom. Ist das nicht der Fall, sondern schliesst diese Gerade mit dem Stromelement im allgemeinen den Winkel $\vartheta$ ein, so kommt nur die Wirkung der senkrechten Stromkomponente $ds \sin\vartheta$ in Betracht. Die Kraft, welche somit von einem Stromelement auf einen Magnetpol ausgeübt wird, wird erstens der Masse des Magnetpols m, ferner der Länge der senkrechten Komponente des Stromelements $ds \sin\vartheta$, der Stärke des Stroms i direkt, und dem Quadrat der Entfernung des Elements vom Pol r verkehrt proportinal sein. Die Kraft ist somit

$$S = K \frac{m\, ds \sin\vartheta}{r^2} i.$$

Die Stromstärke bestimmt sich durch die Menge der Elektrizität, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert.

§ 37. **Die Tangentenbussole — Mass der Stromstärke.**

Wir bringen einen kreisförmigen Stromleiter in den magnetischen Meridian; in die Mitte des Kreises eine in einer Horizontalebene bewegliche Magnetnadel. Wird der Leiter von keinem Strom durchflossen, so

stellt sich die Nadel in die Richtung des magnetischen Meridians A B (Fig. 24). Fliesst ein Strom, so sucht er die beiden Pole in entgegengesetzter Richtung senkrecht zur Strombahn zu bewegen. Es wirkt also auf die Nadel ein Drehungsmoment, und es wird Gleich-

Fig. 24.

gewicht sein, wenn dieses Drehungsmoment gleich jenem des Erdmagnetismus wird. Letzteres ist $H\,M \sin \varphi$, unter H die Horizontalintensität des Erdmagnetismus und unter M das magnetische Moment der Nadel verstanden. Ersteres ist $S\,\lambda \cos \varphi$, wenn S die magnetische Kraft des Stromkreises auf einen Pol ist. Im Fall des Gleichgewichts der Nadel muss nun

$$H\,M \sin \varphi = S\,\lambda \cos \varphi$$

oder

$$S = \frac{H\,M}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi$$

sein. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber die ablenkende Kraft des Stroms

$$S = K\,m\,i \int \frac{\sin\vartheta}{r^2}\,ds.$$

Für unsern Fall ist für alle Stromelemente $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $\sin\vartheta = 1$. Ebenso ist der Radius des Kreises r konstant, und es bleibt

$$S = \frac{K\,m\,i}{r^2} \int ds,$$

wobei

$$\int ds = 2\pi r$$

der Umfang des Kreises ist. Es ergiebt sich somit

$$S = K\frac{2\pi\,m\,i}{r} = \frac{H\,M}{\lambda}\,tg\,\varphi$$

oder

$$i = \frac{H\,M\,r}{2\pi\,m\,\lambda\,K}\,tg\,\varphi.$$

Es ist nun das magnetische Moment der Nadel

$$M = m\,\lambda,$$

so dass wir

$$i = \frac{H\,r}{2\pi\,K}\,tg\,\varphi$$

setzen können. Falls wir uns also über die Konstante K einigen, haben wir in unserm Fall eine Methode, die Grösse der Stromstärke i zu bestimmen. Wählen wir $K = 1$, so sagen wir, wir haben die Stromstärke in absolutem Mass angegeben. Für die Praxis ist diese Einheit zu gross, man hat deshalb den 10. Teil davon als Einheit angenommen und sie ein Ampère genannt. Ein Strom von 10 Ampère entspricht somit

der absoluten Stromeinheit. Um die Stromstärke in Ampère auszudrücken, haben wir also $K = \frac{1}{10}$ zu setzen.

Der von uns zur Bestimmung der Stromstärke benützte Apparat besteht also aus einem kreisförmigen Draht, in dessen Mitte sich eine kleine Magnetnadel befindet. Die Grösse

$$\frac{H r}{2 \pi K} = A$$

ist eine Konstante. Die Stromstärke ist sonach durch

$$i = A \operatorname{tg} \varphi$$

bestimmt, d. h. sie ist proportional der Tangente des Ausschlagwinkels der Nadel. Man nennt daher einen derartigen Apparat auch eine Tangentenbussole und A ihren Reduktionsfaktor. Führen wir den Strom zweimal im Kreis herum, so wird die ablenkende Kraft die doppelte, bei n maligem Umlauf die n fache. Der Reduktionsfaktor ist dann natürlich $\frac{A}{n}$. Wir können so die Empfindlichkeit einer Tangentenbussole bedeutend steigern.

## § 38. Potential eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol.

Wir fanden für die Kraft, welche ein Stromelement auf einen Magnetpol ausübt (§ 36), die Grösse

$$dS = \frac{i m \sin \vartheta ds}{r^2}.$$

Die Richtung der Kraft ist senkrecht auf die Ebene, in welcher das Stromelement und der Magnetpol liegen. Sie bilde mit den Achsen eines Koordinatensystems die

Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Es sind dann die Komponenten der Kraft d S

$$dX = \frac{i\,m \sin\vartheta\, ds}{r^2} \cos\alpha,$$

$$dY = \frac{i\,m \sin\vartheta\, ds}{r^2} \cos\beta,$$

$$dZ = \frac{i\,m \sin\vartheta\, ds}{r^2} \cos\gamma.$$

Verbinden wir die Endpunkte des Stromelements mit dem Magnetpol, so erhalten wir ein Dreieck von der Grundlinie r und der Höhe $ds \sin\vartheta$.

$$r\,ds \sin\vartheta = 2\,\Delta$$

ist daher der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks. Wir können somit auch

$$dX = \frac{i\,m}{r^3} \cdot 2\,\Delta \cos\alpha$$

schreiben, wobei $2\,\triangle \cos\alpha$ der doppelte Flächeninhalt der Projektion unseres Dreiecks auf die yz-Ebene ist. Wir wollen die Koordinaten des Magnetpols a, b, c nennen, die des Anfangspunkts unseres Elements x, y, z, die des Endpunkts sind somit $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Die doppelte Fläche der Projektion des Dreiecks auf die yz-Ebene ist daher

$$2\triangle \cos\alpha = (b-y)\,dz - (c-z)\,dy,$$

und es wird

$$dX = \frac{i\,m}{r^3}\Big[(b-y)\,dz - (c-z)\,dy\Big].$$

Durch cyklische Vertauschung der Buchstaben finden wir ferner

$$dY = \frac{i\,m}{r^3}\Big[(c-z)\,dx - (a-x)\,dz\Big],$$

$$dZ = \frac{im}{r^3}\Big[(a-x)dy-(b-y)dx\Big].$$

Da

$$r^2=(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2, \qquad (14)$$

so ist

$$\frac{b-y}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)$$

u. s. w. Unsere Gleichungen werden daher

$$dX = -im\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dz+im\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dy$$

u. s. w. Durch Integration erhalten wir

$$X = -im\int\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dz+im\int\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dy =$$

$$= -im\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dz}{r}+im\frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dy}{r}.$$

Wir wollen nun

$$i\int\frac{dx}{r}=A,\ i\int\frac{dy}{r}=B,\ i\int\frac{dz}{r}=C \qquad (15)$$

einführen und anstatt m die Masseneinheit setzen. Es bestehen dann die Gleichungen

$$X=\frac{\partial B}{\partial c}-\frac{\partial C}{\partial b},\ J=\frac{\partial C}{\partial a}-\frac{\partial A}{\partial c},\ Z=\frac{\partial A}{\partial b}-\frac{\partial B}{\partial a}. \qquad (16)$$

Existiert ein Potential V, so dass $X=-\frac{\partial V}{\partial x}$ u. s. w. wird, dann muss

$$\frac{\partial Y}{\partial a}-\frac{\partial X}{\partial b}=0 \qquad (17)$$

sein u. s. w. Wir haben nun

$$\frac{\partial Y}{\partial a}-\frac{\partial X}{\partial b}=\frac{\partial^2 C}{\partial a^2}-\frac{\partial^2 A}{\partial a\partial c}-\frac{\partial^2 B}{\partial b\partial c}+\frac{\partial^2 C}{\partial b^2}=$$

$$=\frac{\partial^2 C}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial c^2}-\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}\right).$$

Nach der Bedeutung von $C = i\int\frac{dz}{r}$ ist die Summe

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial c^2}=0,$$

wenn der Magnetpol nicht im Strom selbst liegt, da dann

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{r}\right)=0$$

ist. Die Summe

$$\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}=i\int\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)dx+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dy+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dz\right]=-i\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dy+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dz\right]=-i\int d\left(\frac{1}{r}\right)=i\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Die Gleichung (17) wird also nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=0$$

ist, was allgemein nur bei einem geschlossenen Strom der Fall ist, da bei diesem der Anfangs- und Endwert des r zusammenfallen.

Liegt der Magnetpol im Strom selbst, so können wir unseren Leiter nicht mehr als linear auffassen. Die Stromstärke wird dann

$$i = q\,D,$$

wenn wir D die Dichte des Stroms, q den Querschnitt des Leiters nennen. Ferner wird

$$C=i\int\frac{dz}{r}=\int\frac{D\,q\,dz}{r}=\int\frac{Dq}{r}\cdot\frac{dz}{ds}ds.$$

Wir können

$$D\frac{dz}{ds}=w$$

die Komponente der Stromdichte parallel zur z-Achse nennen. Ebenso haben wir parallel zur x- und y-Achse die Komponenten der Stromdichte

$$u=D\frac{dx}{ds},\quad v=D\frac{dy}{ds}.$$

Ferner ist $q=\iint dx\,dy$. Es wird daher

$$C=\int\int\int\frac{w}{r}dx\,dy\,dz.$$

Dieser Ausdruck hat die Form des Potentials für Kräfte, welche verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirken, und wir wissen (§ 6), dass dann

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial c^2}=-4\pi w$$

ist. Daher werden für diesen Fall auch unsere obigen Gleichungen

$$\begin{aligned}4\pi u&=\frac{\partial Y}{\partial c}-\frac{\partial Z}{\partial b},\\ 4\pi v&=\frac{\partial Z}{\partial a}-\frac{\partial X}{\partial c},\\ 4\pi w&=\frac{\partial X}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial a}.\end{aligned}\qquad(18)$$

Diese Gleichungen geben also die Beziehung zwischen den Stromkomponenten und den magnetischen Kräften, welche auf den Magnetpol wirken. Dieselben Kräfte, aber entgegengesetzt ge-

richtet, greifen das Stromelement an. Wir haben daher dafür die Gleichungen

$$4\pi u = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$4\pi v = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$4\pi w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

was wir auch ohne weiters mit Rücksicht auf die Gleichung (14) aus den Gleichungen (18) erhalten.

## § 39. Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte.

Ein kleiner ebener geschlossener Strom liege um den Anfangspunkt eines Koordinatensystems in der yz-Ebene. Seine Koordinaten seien x, y, z, die eines Magnetpols a, b. c. Folglich ist

$$r^2 = a^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

da ja $x = 0$ ist. Die Entfernung des Magnetpols vom Ursprung O sei R, also

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Wir wollen nun die Ausdrücke für A, B, C nach den Gleichungen (15) bilden. Dabei haben wir den Vorteil, dass wir $\frac{1}{r}$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz in eine Reihe entwickeln können, von welcher wir nur die ersten Glieder in Betracht zu ziehen brauchen, da wir ja y und z als sehr klein annahmen. Wir haben daher

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right) \cdot -y + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right) \cdot -z.$$

Alle höheren Glieder können wir vernachlässigen. Daraus folgt

$$A = i \int \frac{dx}{r} = 0,$$

weil $x = 0$ ist, ferner

$$B = \frac{i}{R} \int dy - i \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right) \int y\, dy - i \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right) \int z\, dy.$$

Da wir über einen geschlossenen Strom integrieren, so ist

$$\int dy = \int y\, dy = 0,$$

hingegen ist

$$\int z\, dy = -f,$$

wenn wir unter f die von unserem Strom umflossene Fläche verstehen, indem wir den im Sinn des Uhrzeigers fliessenden Strom als positiv ansehen. Wir erhalten daher

$$B = i f \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right), \quad C = -i f \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right),$$

wobei C geradeso wie B gebildet wird. Diese Ausdrücke wollen wir nun in die Gleichungen (16) einsetzen. Es ergiebt sich demnach

$$X = \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = i f \left[\frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right] = -i f \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{R}\right),$$

da ja

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{R}\right) = 0$$

ist. Gleicherweise ergiebt sich

$$Y = -i f \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b}\left(\frac{1}{R}\right), \quad Z = -i f \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial c}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Setzen wir nun

$$i f \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right) = V,$$

so wird

$$X = -\frac{\partial V}{\partial a},\ Y = -\frac{\partial V}{\partial b},\ Z = -\frac{\partial V}{\partial c}.$$

Wir können sonach V als das Potential des Kreisstroms auf den Magnetpol auffassen. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{a}{R^3},$$

daher

$$V = \frac{i f a}{R^3}.$$

Dieselbe Formel haben wir nun auch für das Potential eines kleinen Magnets (§ 23) erhalten, welcher in der x-Achse im Ursprung O liegt. Nur haben wir dort

$$i f = M$$

gesetzt. Wenn wir also unseren kleinen geschlossenen Strom durch eine magnetische Platte vom magnetischen Moment $M = i f$ ersetzen, so haben wir in der Wirkung auf den Magnetpol gar nichts geändert. Hat die Platte die Dicke $\delta$ und die Flächendichte $\sigma$, so ist

$$\sigma \delta f = i f$$

das magnetische Moment. Daraus folgt also

$$i = \sigma \delta.$$

Dieses Resultat lässt sich nun auf einen beliebigen geschlossenen Strom übertragen. Wir können uns nämlich die von einem Strom umschlossene Fläche in sehr viele kleine Flächen zerlegt denken. Alle diese kleinen Flächen sollen von einem Strom i in derselben Rich-

tung umflossen werden. Man sieht dann ohne weiters, dass sich die Ströme im Innern der Fläche aufheben, da die Grenze von je zwei benachbarten Flächenstücken zweimal vom Strom und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Es bleibt also nur der Randstrom übrig. Die kleinen umströmten Flächen können wir aber alle durch magnetische Platten von der Flächendichte $\sigma$ und der Dicke $\delta$ ersetzen, was so zu wählen ist, das $\sigma\delta = i$ wird. Welche Gestalt wir dabei der vom Strom begrenzten Fläche geben, ist völlig gleichgiltig.

## § 40. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol.

Wir denken uns eine kreisförmige Scheibe (Fig. 25) in der yz-Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung

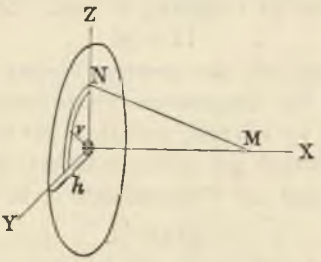


Fig. 25.

des Koordinatensystems. Ihre Flächendichte sei $\sigma$, der Radius h. Im Punkt M der x-Achse befinde sich ein Magnetpol. Das Potential auf ihn wird sein

$$V = \int_0^h \frac{2\pi\sigma r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \Big[2\pi\sigma\sqrt{x^2+r^2}\Big]_0^h = 2\pi\sigma(\sqrt{x^2+h^2}-x).$$

Dieses Resultat wollen wir nun auf eine magnetische Platte von der Dicke $\delta$ ausdehnen, welche wir so lagern, dass sie mit der negativen Seite rechts von der yz-Ebene (Fig. 26), mit der positiven links ist. Das Potential der rechten Seite auf M ist also

$$V_- = -2\pi\sigma\left[\sqrt{h^2+\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2}-x+\frac{\delta}{2}\right],$$

das der linken

$$V_+ = 2\pi\sigma\left[\sqrt{h^2+\left(x-\frac{\delta}{2}\right)^2}-x-\frac{\delta}{2}\right],$$

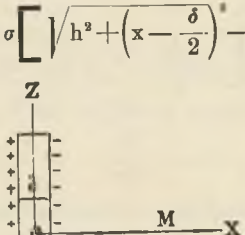


Fig. 26.

das Gesamtpotential somit

$$V = V_- + V_+ = 2\pi\sigma\left[\sqrt{h^2+\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{h^2+\left(x-\frac{\delta}{2}\right)^2}-\delta\right]=$$
$$=2\pi\sigma\delta\left[\frac{\sqrt{h^2+\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2}-\sqrt{h^2+\left(x-\frac{\delta}{2}\right)^2}}{\delta}-1\right].$$

Da $\delta$ eigentlich unendlich klein ist, so können wir den ersten Teil in der Klammer als den Differentialquotienten

$$\frac{d\sqrt{h^2+x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

ansehen. Wir erhalten somit

$$V = 2\pi\sigma\delta\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - 1\right).$$

Setzen wir hier $\sigma\delta = i$, so haben wir das Potential eines Kreisstroms auf den Punkt M. Die Kraft wird nun

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{x^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}\right] = -\frac{2\pi i h^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}.$$

Setzen wir nun $x = 0$, so wird

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2\pi i}{h}.$$

Das ist thatsächlich dieselbe Formel, welche wir bereits früher für die Wirkung eines Kreisstroms auf einen in seiner Mitte befindlichen Magnetpol fanden (§ 37).

## § 41. Das Solenoid.

Eine Reihe paralleler, gleich grosser und in gleichen Abständen von einander befindlicher Kreisströme, wie man sie angenähert in einer Drahtspule besitzt, nennt man ein Solenoid. Machen wir die Achse des Solenoids zur x-Achse, so ist nach dem vorhergehenden Paragraph das Potential eines Kreisstroms auf einen Punkt in der x-Achse

$$V = 2\pi i\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - 1\right).$$

Gehen auf die Längeneinheit unserer Drahtspule n Windungen, so ist das Potential, welches die Windungen auf der Länge dx des Solenoids besitzen,

$$dV = 2\pi n i \left( \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1 \right) dx,$$

woraus wir durch Integration erhalten

$$V = 2\pi n i (\sqrt{h^2 + x^2} - x) + C.$$

Nehmen wir als Grenzen der Integration $x - l_1$ und $l_2 - x$ (Fig. 27) an, wobei wir unter $l_1$ und $l_2$ die Abstände der Enden des Solenoids vom Ursprung verstehen, so ergiebt dies

$$V = 2\pi n i \left[ \sqrt{h^2 + (l_2 - x)^2} - (l_2 - x) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{h^2 + (x - l_1)^2} + x - l_1 \right] = 4\pi n i x +$$
$$+ 2\pi n i \left[ \sqrt{h^2 + (l_2 - x)^2} - l_2 - \sqrt{h^2 + (x - l_1)^2} - l_1 \right].$$

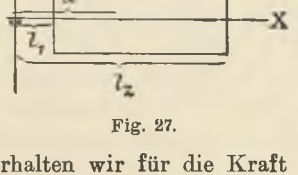


Fig. 27.

Darnach erhalten wir für die Kraft

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -4\pi n i -$$
$$- 2\pi n i \left[ \frac{l_2 - x}{\sqrt{h^2 + (l_2 - x)^2}} - \frac{x - l_1}{\sqrt{h^2 + (x - l_1)^2}} \right].$$

Hier rührt das zweite Glied lediglich von der Wirkung der Endflächen des Solenoids her; denn wenn wir dieselben möglichst weit vom Punkt x entfernen, d. h. wenn wir das Solenoid sehr lang machen und die Kraft auf einen Punkt in der Nähe der Mitte bestimmen, so wird das zweite Glied schliesslich so klein, dass es vernachlässigt werden kann, und es bleibt nur

$$X = -4\pi n i.$$

Es ist somit die Kraft unabhängig von der Lage des Punkts, und die Kraftlinien müssen parallel zur x-Achse verlaufen. Das Solenoid ist demnach ein bequemes Mittel, um ein homogenes magnetisches Feld herzustellen, dessen Stärke direkt porportional der Windungszahl per Längeneinheit und der Stromstärke ist.

### § 42. Der Stokes'sche Satz.

Wir werden im folgenden den von Stokes gefundenen Satz

$$\int\left(X\frac{da}{ds}+Y\frac{db}{ds}+Z\frac{dc}{ds}\right)ds=\int\int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial c}\right)\cos\alpha+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial X}{\partial c}-\frac{\partial Z}{\partial a}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Y}{\partial a}-\frac{\partial X}{\partial b}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

benötigen. X, Y, Z sind Funktionen der Koordinaten a, b, c einer Fläche, deren Randkurve s ist, während $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ Winkel sind, welche die Normale zum Flächenelement dS mit den drei Achsen einschliesst. Wir wollen den Beweis dafür mit Zuhilfenahme der Mechanik erbringen. X, Y, Z seien die Kraftkomponenten, welche auf einen Punkt wirken. Beschreibt der Punkt eine geschlossene Kurve, so ist die Arbeit, welche dabei die Kräfte leisten

$$\int(X\,da+Y\,db+Z\,dc).$$

Wir wollen nun zuerst die Formel für die Arbeit aufstellen, welche die Kräfte leisten, wenn ein Punkt in der yz-Ebene (Fig. 28) das unendlich kleine Rechteck OBCD umkreist. Auf dem Weg von O nach B leistet die Kraft Y die Arbeit Y db, von B bis C wirkt

die Kraft $Z+\frac{\partial Z}{\partial b}db$, und die Arbeit ist $\left(Z+\frac{\partial Z}{\partial b}db\right)dc$, hingegen haben wir von C nach D analog die Arbeit $-\left(Y+\frac{\partial Y}{\partial c}dc\right)db$ und von D nach O $-Z\,dc$. Die Gesamtarbeit beim Umkreisen der Fläche $db\,dc$ ist also

$$Y\,db+(Z+\frac{\partial Z}{\partial b}db)\,dc-(Y+\frac{\partial Y}{\partial c}dc)\,db-Z\,dc=$$

$$=\left(\frac{\partial Z}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial c}\right)db\,dc=\left(\frac{\partial Z}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial c}\right)dS_x=F.dS_x.$$

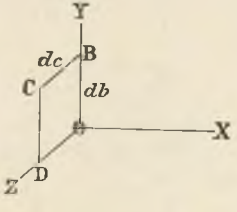


Fig. 28.

Analog ergiebt sich

$$G.dS_y=\left(\frac{\partial X}{\partial c}-\frac{\partial Z}{\partial a}\right)dS_y,$$

$$H.dS_z=\left(\frac{\partial Y}{\partial a}-\frac{\partial X}{\partial b}\right)dS_z,$$

wenn wir mit $dS_x, dS_y, dS_z$ Flächenelemente senkrecht zur x- bezügl. y- und z-Achse verstehen, während F, G, H die Arbeiten sind, welche zur Umkreisung der Flächeneinheit einer Ebene benötigt werden, welche zur x- beziehungsweise y- oder z-Achse senkrecht steht.

Es sei nun O A B C (Fig. 29) ein Elementartetraëder und es durchlaufe der Punkt der Reihe nach die Drei-

ecke OAB, OBC, OCA. Er hat dann die Strecken OA, OB und OC zweimal in entgegengesetzter Richtung zurückgelegt. Die dabei geleistete Arbeit ist also gleich Null, und es bleibt nur die Arbeit übrig, welche vom Durchlaufen des Dreiecks ABC herrührt. Nach dem früheren ist diese Arbeit

$$F\,dS_x + G\,dS_y + H\,dS_z = F\,dS\cos\alpha + G\,dS\cos\beta + H\,dS\cos\gamma = (F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma)\,dS = J\,dS,$$

wenn wir mit $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel bezeichnen, welche die Normale N zur Fläche ABC mit den Koordinatenachsen einschliesst.

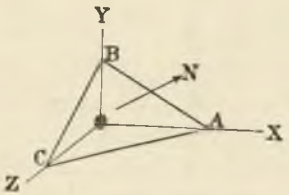


Fig. 29.

$$J = F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma$$

ist somit die Arbeit, welche beim Umkreisen der Flächeneinheit der Fläche $ABC = dS$ geleistet wird.

Eine geschlossene Kurve sei gleichzeitig die Randkurve einer beliebigen Fläche (Fig. 30), die wir in ihre Elemente auflösen wollen. Ein Punkt umkreise in derselben Richtung ein jedes Flächenelement. Er durchläuft dann jede Begrenzungslinie eines Flächenelements im Innern der Fläche zweimal in entgegengesetzter Richtung, so dass die dabei geleistete Gesamtarbeit Null ist. Es bleibt somit nur die Arbeit übrig, welche beim

Umkreisen der Randkurve geleistet wird. Dieselbe ist also

$$\int\int J\,dS = \int\int (F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma)\,dS = \\ = \int (X\,da + Y\,db + Z\,dc),$$

und wir können nach dem früheren diese Gleichung umwandeln in

$$\int (X\,da + Y\,db + Z\,dc) = \int\int \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)\cos\alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right)\cos\gamma\right] dS.$$

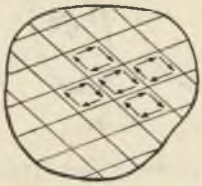

Fig. 30.

Das ist aber der Satz von Stokes, den wir somit bewiesen haben.

§ 43. **Die Wirkung elektrischer Ströme aufeinander.** Zwei geschlossene Ströme A und B (Fig. 31) können als zwei magnetische Lamellen (§ 39) angesehen werden. Eine Gerade CDE soll die Lamelle B in C und D senkrecht durchschneiden. CD ist also die Dicke der Lamelle. In C sei das Potential, welches A entwirft, V, und ein Flächenelement $dS'$ in C besitze die magnetische Masse $-\sigma dS$. Die Arbeit, welche bei der

Annäherung beider Ströme aus dem Unendlichen von $dS'$ geleistet wird, ist $-V\sigma dS'$. In D haben wir das Potential $V+\frac{\partial V}{\partial \nu}d\nu$, wenn wir mit $d\nu$ die Strecke CD bezeichnen. Die zugehörige Arbeit ist nach dem Vorhergegangenen $(V+\frac{\partial V}{\partial \nu}d\nu)\,\sigma dS'$ und die Gesamtarbeit

$$\frac{\partial V}{\partial \nu}d\nu\sigma dS'.$$

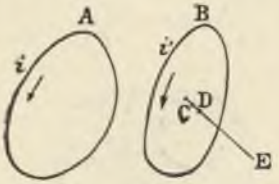


Fig. 31.

Beachten wir, dass $\sigma d\nu = i'$ die Stromstärke ist (§ 39), so wird die Arbeit für die ganze Lamelle

$$W = i'\int\int\frac{\partial V}{\partial \nu}\,.\,dS'.$$

$-\frac{\partial V}{\partial \nu}$ ist nun nichts anderes als die Kraft, welche in der Richtung CD wirkt. Wir können deren Komponenten X, Y, Z bestimmen und erhalten, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel der Richtung der Kraft mit den Koordinatenachsen sind,

$$W = -i'\int\int(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dS',$$

wobei also nach § 38

$$X = i\left[\frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dy}{r} - \frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dz}{r}\right],$$
$$Y = i\left[\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{dz}{r} - \frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dx}{r}\right],$$
$$Z = i\left[\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dx}{r} - \frac{\partial}{\partial a}\int\frac{dy}{r}\right]$$

ist.

Wir setzen nun in dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Stokes'schen Satz

$$X = \int\frac{ii'}{r}\cdot\frac{dx}{ds}ds,\quad Y = \int\frac{ii'}{r}\cdot\frac{dy}{ds}ds,\quad Z = \int\frac{ii'}{r}\cdot\frac{dz}{ds}ds$$

und erhalten dadurch

$$ii'\int\int\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{da}{ds'}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{db}{ds'}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dc}{ds'}\right)\frac{ds\,ds'}{r} =$$
$$= \int\int\int i'\left\{\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dz}{ds} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dy}{ds}\right]\cos\alpha +\right.$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dx}{ds} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dz}{ds}\right]\cos\beta +$$
$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial x}{\partial s}\right]\cos\gamma\right\}ds\,dS'.$$

Der zweite Teil dieser Gleichung ist aber nach dem früheren nichts anderes als

$$-\int\int i'(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dS' = W,$$

während wir den ersten Teil

$$ii'\int\int\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{da}{ds'}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{db}{ds'}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dc}{ds'}\right)\frac{ds\,ds'}{r} =$$
$$= ii'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'$$

setzen können, wenn wir unter $\varepsilon$ den Winkel verstehen, welchen die beiden Stromelemente $ds$ und $ds'$ mit ein-

ander einschliessen. Wir erhalten schliesslich die Gleichung

$$W = ii' \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds',$$

und wir nennen W das elektrodynamische Potential der beiden geschlossenen Ströme i und i' auf einander.

Man kann dieses Potential auch für die Wirkung eines Stroms auf sich selbst bilden. Es wird dann den Wert

$$U = \frac{i^2}{2} \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds'$$

erhalten. Hier sind ds und ds' zwei beliebige Stromelemente des geschlossenen Stroms i. Es wird somit bei der Integration jedes Element zweimal in Rechnung gesetzt, weshalb wir auch von der gewöhnlichen Potentialformel nur die Hälfte nehmen dürfen.

### § 44. Die Gesetze von Ohm und Joule — Arbeit des Stroms.

Wir erfuhren im § 35, dass ein elektrischer Strom entsteht, wenn zwei Punkte eines Leiters sich auf verschiedener elektrischer Spannung befinden. Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Stromstärke i proportional dem Spannungsunterschied e ist, den man deshalb auch die elektromotorische Kraft nennt. Ferner wird sie auch durch die Gestalt und Natur des Leiters bedingt, weshalb Ohm die Beziehung der Stromstärke zur elektromotorischen Kraft in die Formel

$$i = \frac{e}{w}$$

zusammenfasst, wobei die Konstante w der Widerstand genannt wird.

Hat der Strom keine Arbeit zu leisten, so findet er ein Aequivalent in der Erwärmung des Leiters, und es ist nach den Versuchen von Joule die im Leiter in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge $W = wi^2 = ei$.

Das Produkt aus Stromstärke und elektromotorischer Kraft ist somit eine auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit, ein Effekt.

Haben wir in die Strombahn eine Zersetzungszelle eingeschaltet, so muss der Strom chemische Arbeit leisten. Diese ist erfahrungsgemäss wiederum pro Sekunde proportional der Stromstärke. Der gesamte Effekt kann daher dargestellt werden durch

$$ei = wi^2 + pi,$$

wobei p ein entsprechender Proportionalitätsfaktor ist. Daraus folgt $e - p = wi$.

p hat also ebenfalls die Dimension einer elektromotorischen Kraft. Man nennt es die elektromotorische Gegenkraft der Zersetzungszelle oder die galvanische Polarisation.

### § 45. Der Induktionsstrom.

Verändern wir die Lage eines Magnets zu einem Stromleiter, so wird das Potential des Stroms auf den Magnet ein anderes, d. h. wir haben bei der Veränderung Arbeit zu leisten. Diese Arbeit findet ihr Aequivalent in einer vorübergehenden Aenderung des Stroms im Leiter. Derartig entstehende Ströme nennt man Induktionsströme.

Wir können auf veränderliche Ströme die Gleich-

ung des vorhergehenden Paragraphen anwenden, wenn wir sie auf eine unendlich kleine Zeit beziehen. Wir erhalten sonach

$$e\,i\,dt = w\,i^2\,dt + p\,i\,dt.$$

$p\,i\,dt$ ist die Arbeit des Stroms. Besteht sie in magnetischer Arbeit, so können wir sie $dA$ schreiben, und unsere Gleichung wird

$$e\,i\,dt = w\,i^2\,dt + dA,$$

wobei $dA$ die Aenderung des Potentials bedeutet. Dieses ist gegeben durch

$$U = i\,V$$

(§ 39), also $\quad dA = -dU = -i\,dV$

und

$$e\,i\,dt = w\,i^2\,dt - i\,dV,$$

was wir wieder in die Form des Ohm'schen Gesetzes kleiden können

$$e + \frac{dV}{dt} = w\,i, \qquad (19)$$

wobei $\frac{dV}{dt}$ also nichts anderes ist als die elektromotorische Kraft, welche durch die Veränderung der gegenseitigen Lage von Strom und Magnet erzeugt wird. Ist in unserm Stromkreis ursprünglich keine elektromotorische Kraft da, so wird in Gleichung (19) $e = 0$, also

$$\frac{dV}{dt} = w\,i,$$

was integriert

$$V_1 - V_0 = w \int_0^t i\,dt$$

ergiebt. Damit lassen sich alle Fälle der Induktion

darstellen, ob sie nun von bewegten Magneten oder Stromleitern ausgeht.

### § 46. Das ballistische Galvanometer.

Die Stärke der Induktionsströme misst man mit Galvanometern von sehr geringer Dämpfung und grosser Schwingungsdauer, sogenannten ballistischen Galvanometern. Die Kräfte, welche auf die Magnetnadel vom magnetischen Moment M einwirken, sind der Erdmagnetismus und der Strom. Jener liefert das Drehungsmoment $-HM\sin\varphi$, wenn H die Horizontalkomponente ist (§§ 22 u. 24), der Strom hingegen erzeugt das Moment $GMi\cos\varphi$, wobei wir G die Galvanometerkonstante nennen. Der Drehungswinkel $\varphi$ ist also durch die Gleichung

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -HM\sin\varphi + GMi\cos\varphi$$

gegeben. K ist das Trägheitsmoment der Nadel (Bd. I. § 28).

Der Induktionsstrom sei von so kurzer Dauer, dass die Nadel während dieser Zeit ihre Ruhelage kaum verlässt, so dass wir $\varphi = 0$ setzen können. Es vereinfacht sich dann die Gleichung in

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = GMi.$$

Durch Integration erhalten wir

$$K\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]_0^T = GM\int_0^T i\,dt.$$

Für die Zeit $t = 0$ ist die Geschwindigkeit der Nadel

ebenfalls Null, wir haben also $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$; hingegen nach der Zeit T, nach welcher der Strom wieder aufhört, soll die Nadel die Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_T = \alpha$ haben. Somit ist

$$K\alpha = GM \int_0^T i\,dt.$$

Sind die Ausschläge der Nadel nicht gross, so folgt für deren Bewegung nach Verlauf des Induktionsstroms die Gleichung

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MH\varphi$$

(§ 24). Diese Gleichung lässt sich genau so wie die Pendelgleichung (Bd. I. § 9) behandeln. Wir erhalten als Lösung

$$\varphi = A \sin \gamma t,$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\gamma \cos \gamma t.$$

Dabei ist

$$\gamma = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{HM}{K}}.$$

Nun ist für $t = 0$ $\frac{d\varphi}{dt} = \alpha$, also

$$\alpha = \gamma A$$

und

$$\varphi = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma t,$$

folglich der grösste Ausschlag der Nadel

$$\varphi_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{GM}{K} \int_0^T i\,dt.$$

Damit ist uns aber alles gegeben, das $\int_0^T i\,dt$ auszuwerten.

## § 47. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand.

Der Erdinduktor besteht seinem Wesen nach aus einer kreisförmigen Drahtrolle, welche um einen Durchmesser drehbar ist. Wird sie gedreht, so wird das magnetische Feld der Erde Ströme inducieren, die wir, wenn die Drehung rasch erfolgt und nur kurze Zeit andauert, nach der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methode messen können. Für das Potential eines Kreisstroms auf einen Magnetpol m fanden wir (§ 39)

$$U = iV = \frac{ifam}{R^3}.$$

Dabei ist

$$\frac{a}{R} = \cos\alpha,$$

wenn wir unter $\alpha$ den Winkel der Normalen zur Stromebene mit der Verbindungsgeraden Strom-Magnetpol verstehen. $\frac{m}{R^2}$ ist aber nichts anderes als die magnetische Intensität J an der Stelle des Stromkreises. Wir können daher das Potential auch schreiben

$$U = iV = iJf\cos\alpha$$

oder

$$V = Jf\cos\alpha.$$

Diese Formel können wir nun für das Potential des Erdmagnetismus auf den Erdinduktor anwenden. Derselbe sei um eine vertikale Achse drehbar. Die

Fläche des Induktors sei F und $\psi$ der Winkel, welchen die Normale zur Fläche F mit der Richtung der Horizontalkomponenten H einschliesst. Dann ist

$$V = F H \cos \psi,$$

folglich

$$\frac{dV}{dt} = wi = -FH \sin \psi \frac{d\psi}{dt},$$

wenn w der Widerstand der Induktorrolle ist. Diese Gleichung ergiebt durch Integration

$$V_1 - V_0 = w \int i\,dt = FH(\cos \psi_1 - \cos \psi_0).$$

Wählen wir nun $\psi_1$ und $\psi_0$ so, dass der Induktor eine halbe Drehung macht und dass zu Beginn als auch zum Schluss der Bewegung die Ebene des Induktors senkrecht zum magnetischen Meridian steht, so ist $\psi_1 = 0$, $\psi_0 = \pi$, folglich $\cos \psi_1 - \cos \psi_0 = 2$ und

$$w \int i\,dt = 2FH.$$

Stellen wir die Drehungsachse des Induktors horizontal, so erhalten wir auf gleiche Weise

$$w \int i'\,dt = 2FV',$$

wenn V' die Vertikalkomponente der gesamten magnetischen Intensität ist. Wir erhalten nun durch ein ballistisches Galvanometer Ausschläge, welche den Werten $i\,dt$ und $\int i'\,dt$ proportional sind. Sie seien $\varphi_1$ und $\varphi_2$. Dann wird

$$2FH = C\varphi_1, \qquad 2FV' = C\varphi_2$$

und

$$\frac{V'}{H} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \operatorname{tg} J',$$

wenn wir unter J' die Inklination verstehen (§ 22).

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist der grösste Ausschlag des ballistischen Galvanometers

$$\varphi_1 = \frac{GM}{\gamma K}\int i\,dt = \frac{2\pi G}{H\tau}\int i\,dt,$$

da ja

$$\gamma = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{HM}{K}}$$

ist. Wir haben somit

$$\int i\,dt = \frac{H\tau}{2\pi G}\varphi_1,$$

nach dem obigen aber auch

$$\int i\,dt = \frac{2FH}{w}$$

folglich

$$\frac{2FH}{w} = \frac{H\tau}{2\pi G}\varphi_1,$$

$$w = \frac{4\pi FG}{\varphi_1 \tau}.$$

In dieser Formel können wir alle Grössen der rechten Seite in absolutem Mass bestimmen. Wir haben somit hier ein Mittel, den elektrischen Widerstand einer Leitung in absolutem Mass auszudrücken.

### § 48. Das elektrostatische und elektromagnetische Masssystem.

Wir sind in der Lage, alle uns aufstossenden physikalischen Grössen durch die absoluten Einheiten der Länge, Masse und Zeit auszudrücken, und wir nennen dann die so erhaltenen neuen Einheiten die abgeleiteten. Die Formel, welche uns die Zusammensetzung einer abgeleiteten Einheit aus den absoluten

ergiebt, nennen wir die Dimension der abgeleiteten Einheit. So wird z. B. eine Kraft dargestellt durch das Produkt aus einer Masse [M] und einer Beschleunigung. Die Beschleunigung ist aber eine Geschwindigkeit, dividiert durch eine Zeit [T], die Geschwindigkeit wiederum eine Länge [L], geteilt durch eine Zeit. Die Dimension der Kraft ist also $\frac{[L\,M]}{[T^2]}$, was man jedoch gewöhnlich in der Form $[L\,M\,T^{-2}]$ schreibt.

Die Kraft, mit welcher sich zwei Elektricitätsmengen e und e' anziehen, ist gegeben durch

$$F = \frac{e\,e'}{r^2}$$

(§ 1). Drücken wir dies in Form einer Dimensionsgleichung aus, so haben wir

$$[M\,L\,T^{-2}] = \frac{[e^2]}{[L^2]}$$

oder

$$[e] = [L^{3/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}].$$

Das elektrostatische Potential $\Psi$ hat die Dimension der Grösse $\frac{e}{r}$ (§ 2), also

$$[\Psi] = [L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}],$$

hingegen hat die Capacität C die Dimension der Grösse $\frac{e}{\Psi}$ (§ 10), also

$$[C] = [L].$$

Wir haben diese Dimensionen alle aus dem elektrostatischen Kraftgesetz abgeleitet; wir sagen: wir

haben die Grössen in elektrostatischem Mass gemessen.

Zwei magnetische Massen ziehen sich nach demselben Gesetz an wie zwei elektrische. Wir haben für die Anziehungskraft

$$F = \frac{m\,m'}{r^2}.$$

Folglich erhalten wir für die Dimension einer magnetischen Masse ebenfalls den Ausdruck

$$[m] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Wir fanden für die Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol (§ 36) die Kraft

$$S = \frac{m\,ds \sin\vartheta}{r^2}\,i,$$

oder

$$i = \frac{Sr^2}{m\,ds \sin\vartheta},$$

daher

$$[i] = \frac{[L\,M\,T^{-2}L^2]}{[L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} L]} = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}],$$

da $\sin\vartheta$ eine dimensionslose Zahl ist.

Die Stromstärke ist nichts anderes als die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert. Das Produkt aus Stromstärke und Zeit giebt uns daher die Elektricitätsmenge an, und wir finden somit für deren Dimension

$$[e] = [L^{1/2} M^{1/2}].$$

Die durch den Strom in der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge $wi^2$ (§ 44) hat die Dimension einer Energie, dividiert durch eine Zeit, also einer

Kraft multipliciert mit einem Weg, geteilt durch eine Zeit, folglich

$$[w i^2] = [L^2 M T^{-3}],$$

woraus folgt

$$[w] = \frac{[L^2 M T^{-3}]}{[L M T^{-2}]} = [L T^{-1}].$$

Für die Dimension der elektromotorischen Kraft E haben wir somit (§ 44)

$$[E] = [w i] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}].$$

Vergleichen wir die in elektrostatischen und die in elektromagnetischem Mass gemessenen Grössen, so zeigt sich die auffallende Erscheinung, dass ein und dieselbe Grösse, nach den verschiedenen Systemen gemessen, verschiedene Dimension hat. So fanden wir in elektromagnetischem Mass für die Dimension der Stromstärke

$$[e] = [L^{1/2} M^{1/2}],$$

in elektrostatischem Mass hingegen

$$[e] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}].$$

Das Verhältnis der letzteren zur ersteren ist

$$V = [L T^{-1}],$$

hat also die Dimension einer Geschwindigkeit. Messen wir eine Elektricitätsmenge einmal mit der Coulomb'schen Drehwage, das andere Mal mit dem Galvanometer, so erhalten wir sie in den zwei verschiedenen Systemen gemessen, und es zeigt sich, dass ihr Verhältnis

$$V = 3.10^{10} \frac{cm}{sec},$$

d. i. gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

Wie die Elektricitätsmengen stimmen auch die übrigen elektrischen Grössen, die Energie ausgenommen, in beiden Systemen gemessen, in ihren Dimensionen nicht überein, und zwar ist das Verhältnis natürlich immer eine Potenz der Lichtgeschwindigkeit V.

### § 49. Absolute und praktische Einheiten.

Für praktische Zwecke sind die absoluten Einheiten in der Regel unbequem, da sie entweder sehr grosse oder sehr kleine Zahlen ergeben. Man hat daher für die Bedürfnisse des alltäglichen Lebens andere Einheiten gewählt. Es ist uns bereits das praktische Mass der Stromstärke, das Ampère (§ 37) bekannt, welches $\frac{1}{10}$ der absoluten Stromeinheit ist. Die absolute Einheit des Widerstandes ist so klein, dass man das $10^9$fache als praktische Einheit gewählt und mit dem Namen Ohm belegt hat. Analogerweise führt das $10^8$fache der absoluten Einheit der elektromotorischen Kraft den Namen Volt. Ampère, Ohm und Volt stehen also in solchen Verhältnissen zu einander, dass auch für sie das Ohm'sche Gesetz

$$i = \frac{e}{w}$$

aufrecht bleibt.

Für die Energie per Sekunde

$$ei = wi^2$$

haben wir als praktisches Mass das Watt oder Volt-Ampère, welches somit gleich $10^7$ absoluten Einheiten ist. Die Elektricitätsmenge, welche in der Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters von der Stromstärke eines Ampère geschickt wird, nennen wir ein Coulomb.

Leiten wir die eine Belegung eines Condensators zur Erde ab und erzielen wir durch die Ladung von ein Coulomb auf der zweiten Belegung gerade die Spannung eines Volts, so hat der Condensator die Capacität von einem Farad. Dieses besitzt also $\frac{10^{-1}}{10^{9}} = 10^{-9}$ absolute Einheiten. Das Verhältnis der Masseinheiten in den beiden Systemen ist für die Elektricitätsmenge V (§ 48), für das Potential $\frac{1}{V}$, für die Capacität somit $V.^{2}$ Ein Farad hat also $\frac{V^{2}}{10^{9}}$ elektrostatische Einheiten. Es ist dies eine so grosse Einheit, dass man in der Regel als praktische Einheit den millionten Teil, das Mikrofarad, benützt.

### § 50. Der Extrastrom.

Ein von einem Strom durchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung ein magnetisches Feld, dessen Stärke proportional der Stromstärke i ist (§ 37). Das Potential eines magnetischen Felds auf einen Strom ist der Stromstärke proportional. Das vom Strom i erzeugte magnetische Feld besitzt daher auf den Strom i ein Potential, welches $i^{2}$ proportional ist. Wir können es somit

$$U = A\,i^{2}$$

setzen, wenn A eine Constante ist. Aendert sich die Stromstärke während der Zeit dt, so ändert sich das Potential um

$$A\,di^{2} = 2\,A\,i\,di,$$

und die Energiegleichung ergiebt

$$E i dt = w i^2 dt - 2A i di,$$

oder

$$E = w i - 2A \frac{di}{dt}.$$

Der Ausdruck $C = -2A$ lässt sich im allgemeinen mathematisch nur sehr schwer, meist gar nicht bestimmen. Um so leichter ist es, ihn mit Zuhilfenahme der Gleichung

$$E = w i + C \frac{di}{dt}$$

experimentell zu finden. Als Lösung dieser Gleichung haben wir

$$i = A + B e^{\alpha t}, \qquad (20)$$

wenn wir unter A, B und $\alpha$ Constanten verstehen. Wir finden dann nämlich

$$E = wA + wB e^{\alpha t} + CB\alpha e^{\alpha t}.$$

Denken wir uns etwa, wir hätten ein constantes galvanisches Element von der elektromotorischen Kraft E, so ist E natürlich eine constante Grösse, d. h. es muss von der Zeit unabhängig sein. Das ist aber nach unserer Gleichung nur möglich, wenn

$$wB + CB\alpha = 0$$

ist, woraus

$$\alpha = -\frac{w}{C}$$

folgt. Ferner ist $E = wA$, oder $A = \frac{E}{w}$. Es wird somit nach Gleichung (20) die Stromstärke

$$i = \frac{E}{w} + B e^{-\frac{w}{C} t}.$$

Wir wollen nun zu einer bestimmten Zeit $t = o$ den Strom schliessen. Dann ist für $t = o$ auch $i = 0$, also auch $\frac{E}{w} + B = 0$, oder $B = -\frac{E}{w}$. Somitergiebtsich

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{C}t}\right).$$

In dem Augenblick, wo wir den Strom schliessen, ist also die Stromstärke Null und steigt dann mit der Zeit an. Da $\frac{w}{C}$ fast immer eine sehr grosse Zahl ist, so geht das Anwachsen sehr rasch, da dann das Glied $e^{-\frac{w}{C}t}$ sehr rasch Null wird. Es ist dann der Strom constant $i = \frac{E}{w}$. Wir haben also beim Schliessen des Stroms einen Gegenstrom $-\frac{E}{w}e^{-\frac{w}{C}t}$, welchen wir den Extrastrom nennen.

Oeffnen wir nun den Strom, so ist unmittelbar nach der Unterbrechung die elektromotorische Kraft nicht mehr vorhanden. Es gilt dann also

$$o = wi + C\frac{di}{dt}.$$

Wir haben jetzt als Lösung

$$i = Be^{-\frac{w}{C}t}.$$

Für $t = o$ ist nun $i = \frac{E}{w}$, daher $B = \frac{E}{w}$, folglich

$$i = \frac{E}{w}e^{-\frac{w}{C}t}.$$

Wir haben also auch bei der Oeffnung einen Extrastrom,

welcher gleich gerichtet ist dem ursprünglich vorhandenen Strom.

Beim Oeffnen haben wir die volle Stromstärke im Leiter, beim Schliessen ist sie Null. Wir erhalten daher beim Oeffnen einen intensiven elektrischen Funken, beim Schliessen hingegen nur einen sehr schwachen. Die Grösse C nennt man den Coefficienten der Selbstinduction.

§ 51. **Dämpfung einer schwingenden Magnetnadel.**

Die Bewegung einer Magnetnadel besteht in einer Drehung um ihren Aufhängepunkt. Es muss somit ihr Trägheitsmoment K multipliciert mit der Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ gleich der Summe aller Drehungsmomente sein (Bd. I. § 28). Der Erdmagnetismus übt auf die Magnetnadel das Drehungsmoment $-HM\sin\varphi$ aus (§ 22). Die Magnetnadel hänge in der Mitte eines kreisförmigen geschlossenen Stromleiters. Für das Potential eines solchen Stroms auf einen Magnetpol fanden wir (§ 40)

$$U = 2\pi i\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - 1\right).$$

Die Entfernung der beiden Pole $+m$ und $-m$ unserer Nadel sei $\lambda$, und zwar sei sie so klein, dass wir annehmen können, die Wirkung des Stroms auf die Pole sei gerade so, als lägen sie in der x-achse (Fig. 32). Die y-achse habe die Richtung des magnetischen Meridians. Für den Südpol S ist dann die Abscisse

$$x = \frac{\lambda}{2}\sin\varphi,$$

für den Nordpol

$$x = -\frac{\lambda}{2}\sin\varphi.$$

Das Potential des Stroms auf den Magnetpol wird sich daher zusammensetzen aus dem Potential $U_+$ auf den Südpol und $U_-$ auf den Nordpol. Nach dem Obigen ist nur

$$U_+ = 2\pi i\left(\frac{-\frac{\lambda}{2}\sin\varphi}{h} - 1\right)m,$$

$$U_- = 2\pi i\left(\frac{\frac{\lambda}{2}\sin\varphi}{h} - 1\right).-m,$$

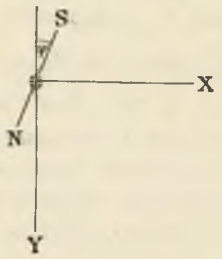


Fig 32.

folglich

$$W = U_+ + U_- = -\frac{2\pi i M}{h}\sin\varphi,$$

da ja

$$m\lambda = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Nadel ist.

$$-\frac{\partial W}{\partial\varphi} = \frac{2\pi i M}{h}\cos\varphi$$

ist somit das Drehungsmoment, welches der Strom auf die Nadel ausübt. Somit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -HM\sin\varphi + \frac{2\pi i M}{h}\cos\varphi. \qquad (21)$$

Setzen wir $W = Vi$, also

$$V = -\frac{2\pi M}{h}\sin\varphi,$$

so gilt für unsern Leiter, in welchem sonst keine elektromotorische Kraft wirkt (§ 50)

$$o = wi - \frac{dV}{dt} = w\,i + \frac{2\pi M}{h}\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Daraus folgt

$$i = -\frac{2\pi M}{hw}\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}$$

Diesen Wert führen wir nun in Gleichung (22) ein und erhalten demnach

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -HM\sin\varphi - \frac{4\pi^2M^2}{h^2w}\cos^2\varphi.\frac{d\varphi}{dt}.$$

Wir setzen nun voraus, dass die Ausschlagswinkel $\varphi$ der Nadel nur klein seien. Dann können wir $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, folglich

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{HM}{K}\varphi - \frac{4\pi^2M^2}{h^2wK}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

setzen. Das ist aber die Gleichung einer gedämpften schwingenden Bewegung, wie sie etwa ein Pendel im widerstehenden Mittel ausführt (Bd. I. § 10.). Da die Grössen H, M, K nach bekannten Methoden bestimmbar sind, so haben wir auch hier ein Mittel, aus der Abnahme der Schwingungsweite den Widerstand w unseres Stromleiters in absolutem Mass zu finden.

### § 52. Inductionswirkung zweier Stromleiter aufeinander.

Wir fanden im § 43 als Potential zweier Ströme aufeinander

$$W = i i' \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds' = - i i' V.$$

Das Potential eines jeden Leiters auf sich selbst ist hingegen

$$\frac{i^2}{2} \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds' = - \frac{U i^2}{2}$$

und

$$\frac{i'^2}{2} \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds' = - \frac{U' i'^2}{2},$$

wobei aus den Gleichungen ohne weiters hervorgeht, was wir unter V, U und U' zu verstehen haben.

Wir wollen nun die Stromkreise während der unendlich kleinen Zeit dt beobachten und alle Vorgänge in Rechnung ziehen. Die gesamte Energieänderung wird wiedergegeben sein durch $E i \, dt + E' i' \, dt$, wenn wir unter E und E' die elektromotorischen Kräfte in den beiden Kreisen verstehen. Diese Energieänderung wird sich erstens als Wärmewirkung zeigen — diese ist $w i^2 \, dt + w i'^2 \, dt$ — ferner als Aenderung des Potentials der Ströme auf sich selbst $d\left(\frac{U i^2}{2}\right) + d\left(\frac{U' i'^2}{2}\right)$ und gegeneinander $d(V i i')$, schliesslich als geleistete mechanische Arbeit, wenn die Ströme ihre gegenseitige Lage als auch die Gestalt ändern, was sich darstellen lässt durch $i i' \, dV + \frac{i^2}{2} \, dU + \frac{i'^2}{2} \, dU'$. Wir erhalten somit die Gleichung

$$E i \, dt + E' i' \, dt = w i^2 \, dt + w' i'^2 \, dt + d\left(\frac{U i^2}{2}\right)$$

$$+ d\left(\frac{U' i'^2}{2}\right) + d(V i i') + i i' dV + \frac{i^2}{2} dU + \frac{i'^2}{2} dU'.$$

Führen wir die Differentiation durch und dividieren wir alle Glieder durch $dt$, so bleibt uns

$$E i + E' i' = w i^2 + w' i'^2 + U i \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dU}{dt} + U' i' \frac{di'}{dt} + \\ + i'^2 \frac{dU'}{dt} + V i' \frac{di}{dt} + V i \frac{di'}{dt} + 2 i i' \frac{dV}{dt}.$$

Dabei haben wir also gleich die gleichartigen Glieder zusammengezogen. Ein Blick über die Gleichung ergiebt, dass die Glieder mit i für sich und jene mit i' gültige Gleichungen ergeben werden, wobei demnach das letzte Glied $2 i i' \frac{dV}{dt}$ zu halbieren ist. Das Resultat ist somit

$$E i = w i^2 + U i \frac{di}{dt} + i^2 \frac{dU}{dt} + V i \frac{di'}{dt} + i i' \frac{dV}{dt},$$

$$E' i' = w' i'^2 + U' i' \frac{di'}{dt} + i'^2 \frac{dU'}{dt} + V i' \frac{di}{dt} + i i' \frac{dV}{dt}.$$

Dividieren wir die eine dieser Gleichungen durch i, die andere durch i', so bleibt uns

$$\begin{aligned} E &= w i + \frac{d}{dt}(U i + V i'), \\ E' &= w' i' + \frac{d}{dt}(U' i' + V i). \end{aligned} \qquad (22)$$

Man nennt diese Gleichungen auch manchmal die Grundgleichungen der elektrodynamischen Induktion. U, U' und V sind die Induktionskoeffizienten, U und U' die Koeffizienten der Selbstinduktion, V jener der gegenseitigen Induktion.

## § 53. Induktionsapparate — Transformatoren.

Wir denken uns zwei ineinander befindliche Drahtspulen, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert. Es ist dann ihre Selbstinduktion als auch die gegenseitige von der Zeit unabhängig. In der einen Spule wirke die veränderliche elektromotorische Kraft E. Die Gleichungen (22) werden somit

$$\begin{aligned} E &= w i + U \frac{di}{dt} + V \frac{di'}{dt}, \\ 0 &= w i' + U' \frac{di'}{dt} + V \frac{di}{dt}. \end{aligned} \qquad (23)$$

Es wird also der induzierte Strom i' lediglich durch die Aenderung des primären Stroms i bestimmt werden. Ist $\frac{di}{dt} = 0$, so folgt auch $i' = 0$.

Wir nehmen nun an, dass i eine rasche Aenderung erfährt und dann wieder konstant bleibt. Es nimmt also $\frac{di}{dt}$ für kurze Zeit einen positiven oder negativen Wert an, vorher und nachher ist i konstant, daher $\frac{di}{dt} = 0$. Ueber die Zeit $\tau$ der Stromänderung wollen wir unsere Gleichungen integrieren, erhalten also

$$\int_0^\tau w' i' dt + U' \int_0^\tau \frac{di'}{dt} dt = -V \int_0^\tau \frac{di}{dt} dt,$$

oder

$$w' \int_0^\tau i' dt + U' (i'_\tau - i'_0) = -V (i_\tau - i_0).$$

Zu Beginn und zu Ende der Zeit $\tau$ haben wir keinen Induktionsstrom, es ist daher $i'_\tau = i'_0 = 0$, folglich

$$w' \int_0^\tau i' \, dt = - V (i_\tau - i_0).$$

Wächst der Strom i, d. h. ist $i_\tau > i_0$, so wird der Induktionsstrom i' negativ sein, nimmt i hingegen ab, so ist i' positiv. i' wird um so grösser ausfallen, je kleiner $\tau$ wird, d. h. je rascher der Strom i sich ändert, und je grösser die gegenseitige Induktion V ist. Es ist jetzt auch ein Leichtes, den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion experimentell zu bestimmen, da wir ja alle übrigen Grössen unserer Gleichung leicht messen können.

Wir nehmen nun an, es sei in der primären Leitung eine periodische elektromotorische Kraft vorhanden, also

$$E = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t.$$

Das heisst, die primäre Leitung wird von einem Wechselstrom durchflossen. Es genügt dann für die Gleichungen (23) die Lösung

$$i = a \sin \alpha t + b \cos \alpha t,$$
$$i' = a' \sin \alpha t + b' \cos \alpha t.$$

Führen wir nämlich diese Werte in die Gleichungen ein, so erhalten wir

$$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t = w a \sin \alpha t + w b \cos \alpha t + \\ + U a \alpha \cos \alpha t - U b \alpha \sin \alpha t + V a' \alpha \cos \alpha t - \\ - V b' \alpha \sin \alpha t$$

und

$$0 = w' a' \sin \alpha t + w' b' \cos \alpha t + U' a' \alpha \cos \alpha t - \\ - U' b' \alpha \sin \alpha t + V a \alpha \cos \alpha t - V b \alpha \sin \alpha t.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn die Glieder mit $\sin \alpha t$ für sich einander gleich sind und ebenso jene mit $\cos \alpha t$. Wir können dann durch $\sin \alpha t$ bezüglich $\cos \alpha t$ kürzen und erhalten die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} A &= w a - U b \alpha - V b' \alpha, \\ B &= w b + U a \alpha + V a' \alpha, \\ 0 &= w' a' - U' b' \alpha - V b \alpha, \\ 0 &= w' b' + U' a' \alpha + V a \alpha. \end{aligned}$$

Diese vier Gleichungen reichen hin, um die Grössen $a, b, a' b'$ zu bestimmen, womit auch der Verlauf des primären und sekundären Stroms gegeben ist.

Daraus ergeben sich mehrere wichtige Erscheinungen. Da $A, B, a, b, a', b'$ im allgemeinen voneinander verschieden sind, so besitzt sowohl der primäre als auch der sekundäre Strom gegenüber der elektromotorischen Kraft eine Phasenverschiebung, während die Stärke beider Ströme auch noch durch die Schwingungszahl, die Widerstände und die Induktionskoeffizienten bestimmt wird, was alles bei der Konstruktion von Induktionsapparaten und Transformatoren in Betracht zu ziehen ist.

### § 54. Oscillierende Entladung eines Kondensators.

Verbinden wir die beiden Belegungen eines Kondensators mit einer Funkenstrecke, zu welcher die Elektrizität durch einen sehr grossen Widerstand, etwa eine nasse Schnur, geleitet wird, so sehen wir bei einer Entladung nur einen einzigen Funken, ist hingegen der Widerstand der Zuleitung klein, so zeigt ein rotierender Spiegel, dass mehrere Funken hintereinander auftreten,

dass wir es also mit mehreren aufeinander folgenden Entladungen zu thun haben.

Wir setzen nun voraus, die eine Belegung des Kondensators sei zur Erde abgeleitet, die andere befinde sich vor der Entladung auf dem Potential $P_0$ und enthalte die Elektricitätsmenge $Q_0$. Zu einer beliebigen Zeit t seien diese Grössen etwa P und Q. Geht die Entladung vor sich, so entsteht in der Leitung ein Strom i, und es ist die Veränderung der Elektricitätsmenge Q in der Zeit dt

$$dQ = -i\,dt$$

(§ 48). Ferner ist nach dem Ohmschen Gesetz die elektromotorische Kraft oder, was dasselbe ist, die Spannung

$$P = wi + U\frac{di}{dt},$$

wenn U der Koeffizient der Selbstinduktion der Leitung ist. Zwischen P und Q besteht nun die Gleichung

$$Q = CP,$$

wobei C die Kapazität des Kondensators darstellt. Es ist also

$$\frac{Q}{C} = wi + U\frac{di}{dt},$$

woraus durch Differentiation nach der Zeit folgt

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{dQ}{dt} = w\frac{di}{dt} + U\frac{d^2i}{dt^2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\frac{dQ}{dt} = -i,$$

woraus die Gleichung folgt

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{w}{U}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{i}{UC} = 0. \qquad (24)$$

Das ist genau dieselbe Gleichung wie jene für ein Pendel im widerstehenden Mittel (Bd. I. § 10). Wir können also auch hier die Stromstärke

$$i = A e^{\alpha t}$$

setzen, woraus für $\alpha$ folgt

$$\alpha = -\frac{w}{2U} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4U^2} - \frac{1}{UC}}.$$

Ist somit $\frac{w^2}{4U^2} > \frac{1}{UC}$, so haben wir keine periodische Bewegung. Es tritt nur ein einziger Funken auf. Ist hingegen $\frac{w^2}{4U^2} < \frac{1}{UC}$, so wird die Wurzel imaginär, wir haben eine periodische Bewegung vor uns, es tritt eine oscillierende Entladung ein.

Haben wir einen sehr kleinen Leitungswiderstand, so können wir in Gleichung (24) das Glied $\frac{w}{U} \cdot \frac{di}{dt}$ vernachlässigen, und wir erhalten

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{i}{UC}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine schwingende Bewegung von der Dauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{UC}.$$

§ 55. **Elektrische Ströme in einem Dielektrikum.**

Leiten wir die eine Belegung eines Plattenkondensators (§ 12) zur Erde ab, und es befindet sich zwischen den beiden Platten bloss Luft, so ladet sich die andere Belegung mit Elektricität von der Dichte

$$\sigma = \frac{B}{4\pi\delta},$$

wenn wir unter B das Potential dieser Belegung verstehen. Ist zwischen den Platten ein Dielektrikum, so erhalten wir eine andere Dichte der Elektricität

$$\sigma = \frac{KB}{4\pi\delta},$$

wobei wir die Konstante K die Dielektricitätskonstante nennen. Die Oberflächendichte $\sigma$ denken wir uns nun auf die Weise entstanden, dass innerhalb der Molekeln die positive und negative Elektricität infolge der Einwirkung der elektromotorischen Kraft

$$F = \frac{B}{\delta}$$

getrennt wird. Wenn wir demnach senkrecht zur Richtung der Kraft F eine Fläche legen, so wird per Flächeneinheit, sobald F zu wirken beginnt, eine Elektricitätsmenge $\sigma$ hindurch getrieben. Zerlegen wir demnach die elektromotorische Kraft in die drei Komponenten X, Y, Z, so sind die Elektricitätsmengen, welche parallel den drei Achsen die Flächeneinheit passieren

$$f = \frac{K}{4\pi} X,\ g = \frac{K}{4\pi} Y,\ h = \frac{K}{4\pi} Z.$$

Man pflegt die Grössen f, g, h auch die Komponenten der elektrischen Verschiebung zu nennen. Ist $\Psi$ das Potential der Elektrizität, so haben wir

$$X = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},\ Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Wir definierten die Stromstärke (§ 48) als die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters durchfliesst, und die Stromdichte als das Verhältnis zwischen Stromstärke und Quer-

schnitt, d. i. die durch die Flächeneinheit per Zeiteinheit fliessende Elektricitätsmenge. Für eine elektrische Verschiebung in einem Dielektrikum haben wir somit für die Stromdichten parallel zu den drei Achsen

$$\begin{aligned} u &= \frac{df}{dt} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}, \\ v &= \frac{dg}{dt} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t}, \\ w &= \frac{dh}{dt} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}, \end{aligned} \qquad (25)$$

### § 56. Allgemeine Gleichungen der Induktion.

Wie wir für ein Dielektrikum eine Verteilung der Elektricität durch Einwirkung elektrischer Kräfte feststellen konnten, können wir dies gleichermassen für die Verteilung des Magnetismus in einem Körper thun. Nennen wir a, b, c die Komponenten der magnetischen Induktionskonstanten (§ 28), $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Winkel, welche die Normale des Flächenelements dS mit den Koordinatenachsen einschliesst, so können wir die Zahl N der Kraftlinien, welche durch einen Leiter der Elektricität gehen, der die Fläche S umschliesst, durch

$$N = \int\int (a \cos\lambda + b \cos\mu + c \cos\nu)\, dS$$

darstellen. Ein derartiges Flächenintegral lässt sich nun nach dem Stokes'schen Satz (§ 42) in ein Linienintegral von der Form

$$\int (F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds})\, ds$$

verwandeln, wenn wir die Grössen a, b und c in die Form

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$
$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (26)$$
$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

bringen können. Das muss aber möglich sein, da ja die Zahl der Kraftlinien lediglich durch die Form des linearen Leiters bestimmt ist, indem die Fläche S vollständig willkürlich bleibt.

Die elektromotorische Kraft e in unserm Leiter ist gegeben durch die negative Aenderung des magnetischen Potentials auf den Leiter, d. h. durch die Abnahme der Zahl der Kraftlinien, welche die von ihm umschlossene Fläche durchsetzen. Es ist also

$$e = -\frac{dN}{dt} = -\int \left(\frac{dF}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dt}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dt}\cdot\frac{dz}{ds}\right) ds$$
$$= \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Daraus erkennen wir nun ohne weiters, dass

$$X = -\frac{dF}{dt},\ Y = -\frac{dG}{dt},\ Z = -\frac{dH}{dt} \qquad (27)$$

nichts anderes als die Komponenten der elektromotorischen Kraft sind. Aus den Gleichungen (26) und (27) gewinnen wir nun leicht

$$-\frac{da}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dH}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dG}{dt}\right) = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$
$$-\frac{db}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dF}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad (28)$$
$$-\frac{dc}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dG}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Wir wollen nun noch die Beziehung aufstellen, welche zwischen den Komponenten der magnetischen Induktion a, b, c und den Komponenten der magnetischen Kraft $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ besteht. Wie eine elektrische Kraft eine Verschiebung der Elektricität, so bringt eine magnetische eine Verschiebung des Magnetismus hervor. Wird demnach ein Körper im magnetischen Feld (Fig. 33) von der (yz)-Ebene durchschnitten, so wird auf der linken Seite der Magnetismus von der Dichte

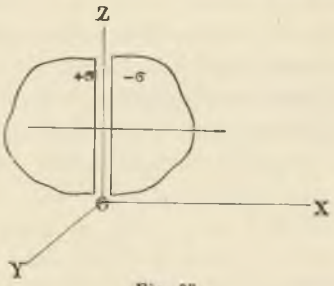


Fig. 33.

$$\sigma = k\alpha$$

auf der rechten

$$\sigma = -k\alpha$$

frei. Denken wir uns anstatt der (yz) = Ebene also wirklich einen sehr schmalen Raum, so wird auf einen Punkt von der magnetischen Masse Eins von links die Kraft $2\pi\sigma$ ausgeübt, welche den Punkt in der Richtung der x-achse zu treiben sucht. Dieselbe Kraft in derselben Richtung übt auch die rechte Seite aus. Der Punkt erfährt somit die Gesamtkraft $4\pi\sigma$. Diese Grösse ist also auch die Zahl der pro Flächeneinheit inducier-

ten Kraftlinien, welche noch zu den ursprünglich vorhandenen $\alpha$ hinzukommen. Wir haben somit als Zahl der Kraftlinien parallel zur x-achse

$$a = \alpha + 4\pi\sigma = \alpha + 4\pi k\alpha = (1 + 4\pi k)\alpha = \mu\alpha,$$

wobei demnach

$$\mu = 1 + 4\pi k$$

nichts anderes als die magnetische Inductionsconstante ist. Ganz dieselbe Ueberlegung können wir natürlich auch für die übrigen Componenten der Induction machen, so dass wir die drei Gleichungen

$$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = \mu\gamma \tag{29}$$

erhalten.

## § 57. Die Grundgleichungen der Elektricitätsbewegung in Isolatoren.

Aus den Gleichungen (28) und (29) ergiebt sich

$$\begin{aligned} -\mu\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ -\mu\frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ -\mu\frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned} \tag{30}$$

In § 38 fanden wir für die Beziehung zwischen der Stromstärke und den von ihr erzeugten magnetischen Kräften die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \end{aligned} \tag{31}$$

welche mit den Gleichungen (25) ergeben

$$K\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z},$$
$$K\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \qquad (32)$$
$$K\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Durch partielle Differentation der ersten dieser Gleichungen nach der Zeit erhalten wir

$$K\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right).$$

Die Werte für $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ können wir nun den Gleichungen (30) entnehmen und erhalten so

$$\mu K\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial z}$$

Addieren und subtrahieren wir gleichzeitig $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, so können wir unsere Gleichung schliesslich in die Form bringen

$$\mu K\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Das letzte Glied dieser Gleichung wird aber gleich Null, wenn von vornherein keine elektrischen Ladungen im Raum vorhanden sind, da dann auch keine elektrischen Verschiebungen auftreten können. Es bleibt somit nur

$$\mu K\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \qquad (33)$$

Aus § 48 wissen wir, dass die Stromstärke, in elektrostatischem Mass gemessen, V mal grösser ist als in elektromagnetischem. Bei der elektromotorischen Kraft ist es umgekehrt. Wir wollen die elektromotorischen Kräfte X, Y, Z und ebenso die Componenten u, v, w

der Stromdichte von nun an in elektrostatischem Mass ausdrücken. Die magnetischen Kräfte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ messen wir in elektromagnetischen Einheiten. Um also die Gleichungen (31) mit den Gleichungen (25) identisch zu machen, haben wir (31) in der Form

$$\frac{4\pi u}{V} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$
$$\frac{4\pi v}{V} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$
$$\frac{4\pi w}{V} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

zu schreiben. In ähnlicher Weise haben wir die Gleichungen (30) umzuformen in

$$V\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = -\mu \frac{\partial \alpha}{\partial t},$$
$$V\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = -\mu \frac{\partial \beta}{\partial t},$$
$$V\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = -\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Es wird dann Gleichung (33) und analog noch die zwei zugehörigen für die Elektricitätsbewegung parallel zur y- und z-achse

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2},$$
$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}, \qquad (34)$$
$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

Dieselben Gleichungen, welche wir hier für die elektrischen Kräfte erhalten haben, ergeben sich auch für die magnetischen Wirkungen. Wir brauchen ja nur

die Gleichungen (30) nach der Zeit t partiell zu differenzieren und die Werte für $\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$ aus den Gleichungen (32) einzuführen. Es ergeben sich dann, wenn wir wieder, wie es gewöhnlich geschieht, die elektrischen Grössen in elektrostatischen Einheiten, die magnetischen Grössen in elektromagnetischem Mass messen, nach demselben Vorgehen wie bei den elektrischen Kräften für die magnetischen Kräfte die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}, \\
\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}, \\
\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{35}$$

indem wir ja auch hier

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

setzen können (§ 25), da wir von vorn herein keine magnetischen Massen in dem von uns betrachteten Raum voraussetzen.

## § 58. Elektrische Wellen.

Zur Erläuterung der im vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Grundgleichungen für die Elektricitätsbewegung in Isolatoren wollen wir folgenden speciellen Fall betrachten. Wir nehmen an, es sei in unserem Isolator eine elektrische Störung vorhanden, indem etwa irgendwo eine elektrische Entladung stattfindet. Diese Störung sei nur derart, dass sie in allen Punkten einer zur yz-ebene parallelen Ebene einen con-

stanten Wert besitzt. Das heisst, von den Ordinaten y und z sind alle vorkommenden Grössen unabhängig. Es vereinfachen sich daher die Gleichungen (34) in folgende

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.$$

Aus dem vorhergehenden Paragraphen wissen wir nun weiter, dass

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

ist, und nach dem obigen muss

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

folglich auch

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

sein, so das sich die erste unserer drei Bewegungsgleichungen auf

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

reduciert. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $X = 0$ ist, d. h. parallel zur x-achse keine elektrische Kraft wirkt.

Die Richtung der elektrischen Kraftwirkung erfolgt also parallel zur yz-ebene. Wir werden somit unser Coordinatensystem immer so drehen können, dass die y-achse mit der Richtung der Kraftwirkung zusammenfällt. Wir haben dann keine elektrische Wirkung parallel zur z-achse. Es ist also auch $Z = 0$, und es bleibt uns nur die Gleichung

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

oder

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{V^2}{\mu K} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}. \qquad (36)$$

Das ist aber genau dieselbe Gleichung wie jene für die Transversalschwingungen von Saiten (Bd. I § 78), wenn wir die Grösse

$$\frac{V^2}{\mu K} = a^2$$

setzen. Als allgemeine Lösung für die Gleichung (36) fanden wir (Bd. I § 68)

$$Y = f(x - at),$$

woraus ohne weiters folgt, dass sich die elektrische Störung mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{V}{\sqrt{\mu K}}$$

parallel zur x-achse fortpflanzt. Wir haben es also hier wie bei den Transversalschwingungen der Saiten mit Transversalwellen zu thun. Während die elektrische Bewegung parallel zur y-achse stattfindet, erfolgt die Fortpflanzung des elektrischen Zustands parallel zur x-achse. Für den leeren Raum und nahezu auch für den lufterfüllten ist $\mu = K = 1$, daher

$$a = V.$$

Das heisst, es pflanzen sich hier die elektrischen Wellen mit der Geschwindigkeit V fort.

### § 59. Magnetische Wellen.

Nach den von uns im vorhergehenden Paragraphen gemachten Voraussetzungen vereinfachen sich auch die

Gleichungen (35) für die magnetischen Kräfte. Wir erhalten vorerst

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\mu K}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}.$$

ferner ist

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

folglich nach der Gleichung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

auch

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0.$$

Die magnetische Störung ist nur eine Folgeerscheinung der elektrischen, folglich muss nach dem früheren auch $\alpha = 0$ sein und gleicherweise nach der zweiten der Gleichungen (30) $\beta = 0$, da ja X und Z ebenfalls Null sind. Es bleibt uns somit nur die dritte der Gleichungen (30) in der Form

$$-\frac{V}{\mu} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

für Y fanden wir aber im vorhergehenden Paragraphen die Lösung

$$Y = f(x - at),$$

woraus folgt

$$\frac{\partial Y}{dx} = f'(x - at),$$

somit

$$-\frac{\mu}{V} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} = f'(x - at),$$

was nach t integriert ergiebt

$$-\frac{\mu}{V}\gamma = -\frac{1}{a}f(x - at),$$

oder wegen $a = \frac{V}{\sqrt{\mu K}}$

$$\mu\gamma = \sqrt{\mu K}\, f(x - at).$$

Es gilt also für die magnetische Kraftwirkung dieselbe Funktion wie für die elektrische, nur erfolgt sie parallel zur z-achse. Es ist die Richtung der magnetischen Kraft senkrecht auf der Richtung der elektrischen und beide sind wieder senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der elektrischen bezüglich magnetischen Veränderungen.

### § 60. Die elektromagnetische Lichttheorie.

Maxwell nahm an, dass die Lichtschwingungen nichts anderes als elektrische Schwingungen seien, weshalb man die von ihm begründete Theorie des Lichts die elektromagnetische nennt. Aus der Gleichung (36) geht unmittelbar hervor, dass auch eine periodische Funktion der Zeit, wie sie für die Lichtschwingungen gilt, als Lösung angesehen werden kann. Für alle durchsichtigen Körper kann die magnetische Inductionsconstante $\mu = 1$ gesetzt werden. Es ist somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener elektrischer Wellen durch

$$a = \frac{V}{\sqrt{K}}$$

gegeben. Für das Licht fanden wir jedoch (Bd. II § 12)

$$a = \frac{V}{n},$$

wobei wir unter V die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen im leeren Raum verstehen, die mit der Lichtgeschwindigkeit daselbst identisch ist (§ 48). Es folgt somit, dass

$$K = n^2$$

sein muss, d. h. die Dielektricitätsconstante ist gleich dem Quadrat des Brechungsexponenten, was thatsächlich für viele Körper experimentell nachgewiesen wurde.

Diese Beziehung und der Umstand, dass das Verhältnis der in elektrostatischen Einheiten gemessenen Elektricitätsmenge zu jener in elektromagnetischen Einheiten gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, veranlasste Maxwell zur Aufstellung seiner so epochemachenden Theorie, welche bereits auf die meisten optischen Erscheinungen, wie Polarisation, Doppelbrechung, Dispersion u, s. w. Anwendung gefunden hat.

# Druckfehlerverzeichnis.

## I. Band.

Seite 22 Zeile 9 v. u. lies $\frac{d\varphi}{dt}$ statt $\frac{d}{dt}$.

„ 24 „ 1 „ „ b statt l.

„ 26 „ 5 v. o. „ $m\frac{dv}{dt}$ statt $\frac{dv}{dt}$.

„ 28 „ 7 v. u. „ $\frac{d^2s}{dt^2}$ statt $m\frac{d^2s}{dt^2}$.

„ 33 „ 9 „ „ x= statt x, =.

„ 33 „ 4 „ „ von statt vor.

„ 34 „ 3 „ „ $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ statt $\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

„ 36 „ 2 v. o. „ $=\alpha^2$ statt $-\alpha^2$.

„ 36 „ 2 v. u. „ M statt m.

„ 38 „ 1 „ „ $+Z\delta z$ statt $=Z\delta z$.

„ 41 „ 6 v. o. „ X=Y=o,Z= statt x=y=o,z=.

„ 47 „ 8 „ „ dl statt db.

„ 60 „ 10 „ „ Halbseiten statt Seiten.

„ 68 „ 2 „ „ $\frac{C-B}{A}$ statt $\frac{C-A}{A}$.

„ 76 „ 4 v. u. „ $\Sigma m$ statt m.

„ 78 „ 9 v. o. „ $\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ statt $\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$.

Seite 79 Zeile 9 v. u. lies $\frac{\partial U}{\partial \psi}\,\delta\psi$ statt $\frac{\partial U}{\partial \psi}\,\delta\varphi$.

„ 82 „ 9 v. o. „ $=X$ statt $=x$.

„ 85 „ 3 v. u. „ nördl. Halbkugel statt Erdoberfläche.

„ 89 „ 9 v. o. „ z statt x.

„ 89 „ 10 v. u. „ für statt Für.

„ 93 „ 1 „ „ $\Big]$ statt $\Big)$.

„102 „ 9 v. o. „ $u\frac{\partial v}{\partial x}$ statt $v\frac{\partial v}{\partial x}$.

„104 „ 8 v. o. „ $z_1$ statt $z'$.

„107 „ 4 v. u. „ v statt o.

„107 „ 2 „ „ $\zeta =$ statt $=$.

„117 „ 13 v. o. „ $\frac{P}{\varrho}$ statt $\frac{P}{\varphi}$.

„118 „ 11 v. u. „ wenn statt wen.

„122 „ 7 v. o. „ $\frac{\pi a}{2\eta}$ statt $\frac{\pi a}{2\pi}$.

„122 „ 10 v. u. „ $-\frac{\pi a r^4_1}{8\eta}$ statt $\frac{\pi a r^4}{8\eta}$.

„122 „ 9 „ „ $r_1$ statt r.

„125 „ 10 „ „ $\varkappa$ statt k.

„130 „ 4 „ „ $(1+\sigma)^{\varkappa}$ statt $(1+\sigma)\varkappa$.

„133 „ 9 v. o. „ deren statt der deren.

„145 „ 3 v. u. „ $t^2$ statt t.

„146 „ 6 „ „ $2\pi$ statt 2.

„151 „ 2 v. o. „ l, statt l.

## II. Band.

Seite 7 Zeile 11 v. u. u. a. a. O. lies Young statt Jonng.

„ 11 „ 8 v. u. lies AA statt AB.

„ 11 „ 3 „ „ AA statt AB.

„ 56 „ 8 „ „ Brechung statt Berechnung.

Seite 37 Zeile 12 v. u. lies C′ statt C.

„ 47 „ 12 v. o. „ $\frac{1-\beta^2 e^{\psi i}}{1-\beta^2 e^{\psi i}}$ statt $\frac{1-\beta^2 e^{\psi}}{1-\beta^2 e^{\psi}}$

„ 47 „ 13 „ - $e^{\psi i}$ statt $e\psi i$.

„ 48 „ 6 v. u. „ $\beta^4$ statt $\beta''$.

„ 62 „ 5 v. u. „ $\psi$ statt $\varphi$.

„ 63 „ 3 v. o. „ — statt +.

„ 63 „ 4 „ „ $2i \sin \frac{n\eta}{2}$ statt $2 \sin \frac{n\eta}{2}$.

„ 66 „ 2 v. u. „ $\frac{2\pi}{\tau}$ statt $\frac{2\pi}{t}$.

„ 72 „ 9 v. o. „ — $tg\varphi$ statt $tg\varphi$.

„ 72 „ 14 „ „ $\varphi'$ statt $\varphi$.

„ 91 „ 6 „ „ verhältnismässig statt sehr.

„ 96 „ 10 „ „ $\partial$ statt d.

„ 97 „ 1 „ „ $\partial$ statt d.

„ 110 „ 9 „ „ $\frac{\pi^2}{\varrho^2}$ statt $\frac{\pi_2}{\varrho_2}$.

„ 110 „ 5 v. u. „ $\frac{\pi^2}{\varrho^2}$ statt $\frac{\pi_2}{\varrho_2}$.

„ 110 „ 1 „ „ $\pi$ statt v.

„ 111 „ 6 „ „ neun statt Quadrat.

„ 127 „ 8 v. o. „ $\partial$ statt $\gamma$.

„ 138 „ 6 „ „ müsste statt musste.

„ 146 „ 10 v. u. „ nm statt um.

# Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband. 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

103 **Wechselkunde** von Dr. Georg Funk. Mit vielen Formularen.

104 **Oesterreich. Geschichte** von der Urzeit bis 1526 von Prof. Dr. Franz v. Krones.

106 **Forstwissenschaft** von Prof. Dr. Ad. Schwappach.

107 **Geschichte d. Malerei I.** von Prof. Dr. Rich. Muther.

108 **Geschichte d. Malerei II.** von Prof. Dr. Rich. Muther.

109 **Geschichte d. Malerei III.** von Prof. Dr. Rich. Muther.

110 **Geschichte d. Malerei IV.** von Prof. Dr. Rich. Muther.

111 **Geschichte d. Malerei V.** von Prof. Dr. Rich. Muther.

114 **Klimalehre** von Prof. Dr. W. Köppen.

115 **Buchführung** von Oberlehrer Rob. Stern.

116 **Plastik** von Dr. Hans Stegmann.

117 **Griechische Grammatik** I: Formenlehre von Prof. Dr. Hans Meltzer.

119 **Burgenkunde** von Hofrat Dr. O. Piper.

## Urteile der Presse über „Sammlung Göschen".

Deutsche Lehrerzeitg., Berlin: ..... Nach den vorliegenden Bändchen stehen wir nicht an, die ganze Sammlung aufs angelegentlichste nicht allein zum Gebrauch in höheren Schulen, sondern auch zur Selbstbelehrung zu empfehlen.

Natur: Es ist geradezu erstaunlich, wie es der rühmlichst bekannte Verlag ermöglicht, **für so enorm billige Preise so vorzüglich ausgestattete Werkchen** zu liefern. Das vorliegende Bändchen bringt in knapper und verständlicher Form das Wissenswerteste der **Mineralogie** zum Ausdruck. Saubere Abbildungen erleichtern das Verständnis.

Globus: Es ist **erstaunlich, wie viel diese kleine Kartenkunde bringt,** ohne an Klarheit zu verlieren, wobei noch zu berücksichtigen ist, **daß viele Abbildungen** den Raum stark beengen. **Vortrefflich wird** die **Kartenprojektionslehre** und die **Topographie geschildert.**

Nationalzeitg.: Es ist **bis jetzt in der deutschen Litteratur wohl noch nicht dagewesen,** daß ein Leinwandband von fast 300 Seiten in vorzüglicher Druck- und Papierausstattung zu einem Preis zu haben war, wie ihn die „Sammlung Göschen" in ihrem neuesten Bande, Max

**Koch's Geschichte der deutschen Litteratur** für den Betrag von sage **achtzig Pfennige** der deutschen Leserwelt bietet.

Prakt. Schulmann: Ein **Meisterstück kurzen und bündigen,** und doch **klaren** und **vielsagenden Ausdrucks** wie die „Deutsche Litteraturgeschichte" von Prof. M. Koch ist auch die vorliegende **„Deutsche Geschichte im Mittelalter".**

Natur: In der **Chemie** von Dr. Klein empfängt der Schüler fast mehr, wie er als Anfänger bedarf, mindestens aber so viel, daß er das Wissenswürdigste als unentbehrliche Grundlage zum Verständnisse der Chemie empfängt. . .

Kunst f. Alle (München): K. Kimmich behandelt in seinem Bändchen, „Zeichenschule" benannt, in **knapper, kerniger, sachlich-zielbewußter Form** das weite Gebiet des bildmäßigen Zeichnens und Malens. . . . Gleich nutzbringend und in reichstem Maße bildend für Lehrer, Schüler und Liebhaberkünstler, möchte ich das **wirklich vorzügliche Werk** mit warmen anerkennenden Worten der Einführung in Schule, Haus und Werkstatt zugänglich machen. Die Ausstattung ist dabei eine so vornehme, daß mir der Preis von 80 Pfennigen für das gebundene Werk von 138 Seiten kl. 8° wirklich **lächerlich billig** erscheint. Nicht weniger als 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck, sowie 135 Voll- und Textbilder illustrieren den **äußerst gesunden Lehrgang** dieser Zeichenschule in **feinfühlender Weise.**

Schwäb. Merkur: **Prof. G. Mahler** in Ulm legt uns eine Darstellung der **ebenen Geometrie** vor, die bis zur Ausmessung des Kreises einschließlich geht. Besondere Sorgfalt ist der Auswahl und Anordnung der Figuren zu teil geworden, deren saubere Ausführung in 2 Farben angenehm berührt.

Globus: **Hoernes, Urgeschichte.** Der bewährte Forscher auf **vorgeschichtlichem Gebiete** giebt hier in knappster Form die lehrreiche Zusammenstellung des Wissenswertesten der Urgeschichte. **Vortrefflich geeignet zur Einführung und zum Ueberblick.**

Jahresberichte der Geschichtswissenschaft: Hommel, auf dem Gebiet der altorientalischen Geschichte eine anerkannte Autorität, behandelt in diesem Bändchen die morgenländische Geschichte mit großer Genauigkeit und wissenschaftlicher Gründlichkeit in knappster Form. Das kleine Büchlein muß warm empfohlen werden.

Lpzgr. Ztg. (Wissensch. Beil.): „Die **Pflanze" von Dr. E. Dennert** können wir bestens empfehlen. In kürzester, knappester, **sehr klarer und verständlicher Form** weiß sein Verfasser alles Wissenswerteste über den inneren und äußeren Bau und über die Lebensverrichtungen der Pflanze zur Anschauung zu bringen, wozu seine **ganz vortrefflichen, selbstgezeichneten Textabbildungen** außerordentlich viel beitragen helfen.

Weimarsche Zeitg.: **Waltharilied.** Mit dieser Uebersetzung wird uns eine hochwillkommene und von Litteraturfreunden längst ersehnte Gabe geboten. . . . Von einer guten Uebersetzung ist zu verlangen, daß sie, sinn- und zugleich möglichst **wortgetreu,** ohne dem Urtext, wie der deutschen Sprache Gewalt anzuthun, den Geist des Originals

klar und ungetrübt wiederspiegele. Dieser Forderung gerecht zu werden, hat Althof in meisterhafter Weise verstanden.

Blätter f. d. bayr. Gymn.-Schulw.: Swoboda, Griech. Geschichte. Schon der Name und der Ruf des Verfassers bürgt dafür, daß wir nicht etwa bloß eine trockene Kompilation vor uns haben, überall zeigen sich die Spuren selbständiger Arbeit.

Prakt. Schulmann: Seyfert, Schulpraxis. Es wird in gedrängter Darstellung ein reicher, wohldurchdachter, den neuesten pädagogischen Bestrebungen gerecht werdender Inhalt geboten und für den, der tiefer eindringen will, ist gesorgt durch reichhaltige Litteraturnachweise.

Zeitschr. f. d. Realschulw.: Es war ein glücklicher Gedanke der rührigen Verlagshandlung, die Abfassung des der Einführung in die Arithmetik und Algebra dienenden Bändchens ihrer „Sammlung" dem hochgeachteten Fach- und Schulmanne Prof. Dr. Schubert zu übertragen . . . . Der Verfasser wußte die Schwierigkeiten mit großem Geschick zu bewältigen, indem er durch einen streng systematischen Aufbau des arithmetischen Lehrgebäudes der Fassungskraft des Anfängers möglichst Rechnung trug und dabei nur das Hauptsächliche ins Auge faßte. — Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik von Prof. Th. Bürklen . . . . Die durch reinen Druck und geschmackvolle Ausstattung sich auszeichnende „Formelsammlung" wird infolge ihres reichen vielseitigen Inhaltes, ihrer zweckentsprechenden Anordnung und orientierenden Gliederung als Nachschlagebuch vorzügliche Dienste leisten.

Grenzboten: Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul. Ein lehrreiches Büchlein, das in seinen engen Wänden . . . . eine Fülle von Sprachbelehrung bietet, die jeden fesseln muß, der nur einigermaßen das Bedürfnis fühlt, sich über Sprachdinge Aufklärung zu verschaffen. Der Verfasser hat sich schon durch zahlreiche volkstümliche Bücher über die Sprache und ihr Leben bekannt gemacht, er hat eine ausgebreitete, sichere Kenntnis der Sprach- und Wortgeschichte, hat mit Ausdauer auf diesem Gebiete gesammelt und weiß seinen Stoff immer geschickt zu gruppieren und vorzutragen. . . .

Staatsanzeiger: Die Römische Litteraturgeschichte ist eine geistvolle glänzende Arbeit. Einsender hat dieselbe von Anfang bis Ende mit größtem Genuß durchgelesen und dabei Art und Entwicklung des römischen Schrifttums und damit des römischen Geisteslebens überhaupt besser und gründlicher verstehen gelernt, als durch manches vielständige Universitätskolleg oder dickleibige Handbücher.

Meteorologische Zeitschrift: Trabert hat in der Meteorologie seine schwierige Aufgabe vortrefflich gelöst. In allen Fragen vertritt er den neuesten und letzten Standpunkt.

Schweizerische Lehrerzeitung: Wer die Perspektive von Freyberger und das Geometrische Zeichnen von Becker durchgeht, wird seine Freude daran haben. So viel für so wenig Geld wird wohl kaum anderswo geboten. Die Illustrationen sind sauber und exakt. Der Text ist knapp und klar und auch da, wo er mehr andeutet als ausführt, anregend.

G. J. Göschen'sche Verlagsbandlung, Leipzig.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
Gab. Dyr.
1207
Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 49 50