Sammlung Göschen

Theoretische Physik

III

Elektrizität und Magnetismus

Von

Prof. Dr. Gustav Jäger

Mit 35 Figuren

78

Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen in kurzen, klaren, allgemeinverständlichen Einzeldarstellungen

Jeder Band in Leinwand geb. RM. 1.80

Bei gleichzeitiger Abnahme gleicher oder inhaltlich zusammengehöriger Bände treten folgende Gesamtpreise in Kraft: 10 Expl. RM. 16.—; 25 Exemplare RM. 37.50; 50 Exemplare RM. 70.—

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W. 10 und Leipzig

Zweck und Ziel der „Sammlung Göschen" ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leichtverständliche und übersichtliche Einführung in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und Technik zu geben; in engem Rahmen, auf streng wissenschaftlicher Grundlage und unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ausführliche Verzeichnisse der bisher erschienenen Bände umsonst und postfrei

Bibliothek zur Physik und Chemie

aus der Sammlung Göschen

Stand vom Frühjahr 1930

Kristallographie von Prof. Dr. W. Bruhns. Neubearbeitet von Prof. Dr. P. Ramdohr. Mit 184 Abb. . . . . Nr. 210

Einführung in die Kristalloptik von Dr. Eberh. Buchwald. Mit 124 Abb. . . . . Nr. 619

Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs . . . . . Nr. 532

Geschichte der Physik von Professor A. Kistner. Mit 16 Fig. 2 Bände . . . . . Nr. 293, 294

Theoretische Physik von Professor Dr. G. Jäger. Mit 107 Fig 5 Bände . . . . . Nr. 76—78, 374, 1017

Experimentalphysik von Professor Robert Lang. Mit 339 Fig. im Text. Band 1—4 . . . . . Nr. 611—614

Physikalische Messungsmethoden von Professor Dr. Wilh. Bahrdt. Mit 54 Fig. . . . . Nr. 301

Physikalische Formelsammlung von Prof. G. Mahler. Neubearbeitet von Prof. K. Mahler. Mit 71 Fig. . . . . Nr. 136

Physikalische Aufgabensammlung von Prof. G. Mahler. Neubearbeitet von Prof. K. Mahler. Mit den Resultaten. Nr. 213

Physikalische Tabellen von Dr. A. Leick u. Prof. Dr. W. Leick Nr. 650

Vektoranalysis von Prof. Dr. Siegfried Valentiner. Mit 13 Fig. Nr. 354

Röntgenstrahlen (Physik, Technik und Anwendungen) von Dr. phil. nat. Richard Herz. Mit 48 Fig. im Text und 36 Abb. auf 16 Tafeln . . . . . Nr. 950

Atomphysik von Dr. Hans Leßheim. I. Band. Mit 33 Abb. Nr. 1009

Luftelektrizität von Dr. Karl Kähler. Mit 19 Abb. . . . Nr. 649

Radioaktivität von Prof. P. Ludewig. Mit 37 Abb. . . . . Nr. 317

Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Dr. A. Lippoldt. Mit 7 Tafeln und 18 Fig. . . . . Nr. 175

Meteorologie von Prof. Dr. Albert Defant. Mit 38 Fig. u. 7 Taf. Nr. 54

Allgemeine und physikalische Chemie von Prof. Dr. Hugo Kauffmann. 2 Bände. Mit 14 Fig. . . . . Nr. 71, 698

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer.

I. Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier . . . . . Nr. 264

II. Von Lavoisier bis zur Gegenwart . . . . . Nr. 265

Chemische Grundbegriffe von Dr. E. Rabinowitsch . . Nr. 804

Komplexchemie. Einführung in die Chemie der komplexen Verbindungen. Von Prof. Dr. L. Dede. Mit 5 Fig. . . . . Nr. 981

Organische Chemie von Dr J. Klein . . . . . Nr. 38

Chemie der Kohlenstoffverbindungen v. Dr. H. Bauer. 4 Bände . . . . . Nr. 191—94

Stereochemie von Prof. Dr. E. Wedekind. Mit 44 Fig. . . Nr. 201

Anorganische Chemie von Dr. J. Klein . . . . . Nr. 37

Die Nichtmetalle und ihre Verbindungen von Prof. Dr. A. Benrath.
- I. Bor, Kohlenstoff, Silizium, Stickstoff. Mit 9 Fig. Nr. 211
- II. Wasserstoff, Sauerstoff, Halogene, Edelgase. Mit 24 Fig. Nr. 212

Die Metalle und ihre Verbindungen von Prof. Dr. J. Koppel.
- I. Alkalimetalle, Erdalkalimetalle, Magnesiumgruppe. Mit 8 Fig. . . . . Nr. 812
- II. Kupfergruppe, Aluminiumgruppe, Titangruppe, Bleigruppe. Mit 1 Fig. . . . . Nr. 813
- III. Vanadiumgruppe, Chromgruppe, Mangan, Eisengruppe, Platingruppe Mit 5 Fig. . . . . Nr. 814

Kolloidchemie von Prof. Dr. E. Wedekind. Mit 9 Fig. . . Nr. 897

Analytische Chemie von Dr. Johs. Hoppe. 2 Bände. Nr. 247, 248

Physiologische Chemie v. Dr. med. A. Legahn. 2 Bände. Nr. 240, 241

Agrikulturchemische Untersuchungsmethoden von Prof. Dr. E. Haselhoff . . . . . Nr. 470

Toxikologische Chemie von Prof. Dr. E. Mannheim. Ergänzt von Dr. Fr. X. Bernhard. Mit 5 Fig. . . . . Nr. 465

Pharmazeutische Chemie von Prof. Dr. E. Mannheim. 4 Bände . . . . . Nr. 543—544, 588 und 682

Neuere Arzneimittel, ihre Zusammensetzung, Wirkung und Anwendung von Prof. Dr. med. C. Bachem Nr. 669

Drogenkunde von Georg Ottersbach u. Rich. Dorstewitz Nr. 413

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel.
- I. Allgemeine Elektrochemie. Mit 19 Fig. . . . . Nr. 252
- II. Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Fig. . . . . Nr. 253
- III. Energie. Mit 18 Fig. und mehreren Tabellen . . . Nr. 941
- IV. Elektrolyse. Mit 41 Fig. und mehreren Tabellen . . Nr. 980

Elektrochemische Rechenaufgabensammlung mit einer kurzen Übersicht über die wichtigsten Lehrsätze und Konstanten. Von Professor Dr.-Ing. Gustav F. Hüttig . Nr. 892

Maßanalyse von Dr. O. Röhm. Mit 14 Fig. . . . . Nr. 221

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Prof. Dr. W. Bahrdt. Mit den Resultaten . . . . . Nr. 452

Chemisch-techn. Rechnungen v. Chemiker H. Deegener. Mit 2 Fig. . . . . Nr. 701

Chemische Technologie des Wassers von Stadtamtsrat W. Olszewski. Mit 42 Fig. . . . . Nr. 909

Die chemischen Pflanzenschutzmittel, ihre Anwendung und Wirkung von Dr. Ernst Vogt in Freiburg i. Br. Mit 12 Abb. Mit einer Einleitung von Geh.-Rat Prof. Dr. O. Appel in Berlin-Dahlem . . . . . Nr. 923

Weitere Bände sind in Vorbereitung

Sammlung Göschen

Theoretische Physik

III

Elektrizität und Magnetismus

Von

Dr. Gustav Jäger
Professor der Physik an der Universität in Wien

Mit 35 Figuren

Sechste, verbesserte Auflage

Berlin und Leipzig
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp.
1930

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht
von der Verlagshandlung vorbehalten.

141 165

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

D 319/74

Inhalt.

Elektrostatik.

		Seite
§ 1.	Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz	5
§ 2.	Komponenten der elektrischen Kraft — Potential	6
§ 3.	Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektrizität gleichmäßig verteilt ist	8
§ 4.	Potential einer Vollkugel	10
§ 5.	Die Laplacesche Gleichung	11
§ 6.	Die Poissonsche Gleichung	13
§ 7.	Potential einer Kreisscheibe	14
§ 8.	Der Gaußsche Satz	16
§ 9.	Wirkung einer homogenen Zylinderfläche	17
§ 10.	Wirkung einer unendlichen Ebene	18
§ 11.	Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter	19
§ 12.	Verteilung der Elektrizität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel	20
§ 13.	Allgemeine Beziehung zwischen Elektrizitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde	21
§ 14.	Der Kugelkondensator	23
§ 15.	Der Plattenkondensator	26
§ 16.	Kraftlinien — Niveauflächen	27
§ 17.	Der Greensche Satz	29
§ 18.	Anwendungen des Greenschen Satzes	31
§ 19.	Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte	34
§ 20.	Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel	37
§ 21.	Theorie der Dielektrika	39
§ 22.	Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektrizität	40
§ 23.	Leiter, die von einem Dielektrikum umgeben sind	44
§ 24.	Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator	47
§ 25.	Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik, Brechung der Kraftlinien	50

Magnetismus.

§ 26.	Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz	52
§ 27.	Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — Inklination — magnetisches Moment	53
§ 28.	Potential eines Magnets	57
§ 29.	Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments	60
§ 30.	Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch induzierten Körpers	62
§ 31.	Die homogen magnetisierte Kugel	65
§ 32.	Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld	70
§ 33.	Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien	72
§ 34.	Transversal magnetisierter Zylinder im homogen magnetischen Feld	73
§ 35.	Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld	78

Seite
§ 36. Die magnetische Kraft auf einen langen Zylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet 81
§ 37. Magnetische Energie 82

Elektromagnetismus.

§ 38. Der elektrische Strom — Oersteds Entdeckung — Ampères Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart 82
§ 39. Das magnetische Feld eines Stromelements 83
§ 40. Die Tangentenbussole — Maß der Stromstärke 84
§ 41. Potential eines elektrischen Stroms — Vektorpotential 87
§ 42. Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte 91
§ 43. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol 94
§ 44. Ersatz einer begrenzten magnetischen Platte durch eine unendliche — magnetische Arbeit 96
§ 45. Das Solenoid 98
§ 46. Ohmsches Gesetz — Arbeit des Stroms — Joulesches Gesetz. 100
§ 47. Wirkung eines magnetischen Felds auf ein Stromelement 102
§ 48. Faradays Pendel 103
§ 49. Der Induktionsstrom 104
§ 50. Das ballistische Galvanometer 106
§ 51. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand 108
§ 52. Galvanometerdämpfung 111
§ 53. Der Extrastrom 114
§ 54. Kondensator im Stromkreis 117
§ 55. Oszillierende Entladung eines Kondensators 119
§ 56. Der Wechselstrom 120
§ 57. Kondensator im Wechselstromkreis 122
§ 58. Der Stokessche Satz — rot, curl 124
§ 59. Unterschied zwischen geschlossenem Strom und magnetischer Platte — magnetische Arbeit bei einer Umkreisung des Stroms 128
§ 60. Die Wirkung elektrischer Ströme aufeinander — elektrodynamisches Potential 129
§ 61. Induktionswirkung zweier Stromleiter aufeinander 131
§ 62. Induktionsapparate — Transformatoren 132
§ 63. Das elektrostatische und elektromagnetische Maßsystem 135
§ 64. Absolute und praktische Einheiten 138
§ 65. Elektrische Ströme in einem Dielektrikum 139
§ 66. Allgemeine Gleichungen der Induktion 141
§ 67. Die Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren 144
Register 149

Lehrbücher der Elektrizität und des Magnetismus.

C. Christiansen, Elemente der theoretischen Physik. 4. Aufl. Leipzig 1921.

Försterling, Lehrbuch der Optik. Leipzig 1928.

A. Haas, Einführung in die theoretische Physik. 3. u. 4. Aufl. Berlin u. Leipzig 1923/24.

v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig 1911.

J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Berlin 1883.

Elektrostatik.

§ 1. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz.

An Seide geriebenes Glas oder an Wolle geriebene Harze ziehen leicht bewegliche Körper an und stoßen sie nach der Anziehung wieder ab. Als Ursache dieser Erscheinung sieht man die Elektrizität an, welche durch Reiben auf der Oberfläche des Glases oder Harzes entsteht und deshalb Reibungselektrizität genannt wird. Bringen wir einen Körper mit einem elektrischen in Berührung, so wird er in der Regel ebenfalls elektrisch. Es wird ihm Elektrizität mitgeteilt. Geschieht dies leicht und verteilt sich die Elektrizität sofort über den ganzen Körper, so nennen wir diesen einen Leiter, im entgegengesetzten Fall einen Nichtleiter der Elektrizität oder Isolator.

Zwei kleine Kugeln, welche durch einen Glasstab elektrisiert worden sind, stoßen sich ab, ebenso durch Harzstäbe elektrisierte Kugeln. Enthält aber die eine Glaselektrizität, die andere Harzelektrizität, so ziehen sie einander an. Glas- und Harzelektrizität haben in ihrer Kraftwirkung auf elektrisch geladene Körper entgegengesetzte Eigenschaften. Wir nennen die Glaselektrizität positiv, die Harzelektrizität negativ. Gleichnamige Elektrizitäten stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Befindet sich auf einer sehr kleinen Kugel die Elektrizitätsmenge m, auf einer zweiten m', so stoßen sie sich mit einer Kraft

$$K = \varepsilon \frac{m\,m'}{r^2} \tag{1}$$

ab, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte r ist. Der Proportionalitätsfaktor ε hängt von der Einheit ab, mit welcher wir Elektrizitätsmengen messen. Wir wollen künftig

$$\varepsilon = 1$$

setzen. Wählen wir für die Kraft und Länge die gewohnten (C-G-S)-Einheiten, so messen wir die Elektrizitätsmengen im absoluten elektrostatischen Maß. Das in der Gleichung (1) ausgesprochene Kraftgesetz wurde von Coulomb entdeckt.

§ 2. Komponenten der elektrischen Kraft — Potential.

Aus der mathematischen Formulierung des Coulombschen Gesetzes geht hervor, daß wir eine abstoßende Kraft als positiv, eine anziehende als negativ auffassen. Die Kraft K wirkt in der Richtung der Verbindungslinie r_1 zweier elektrischer Punkte, welche die Koordinaten x, y, z bzw. x_1, y_1, z_1 besitzen. Wir können sie daher in drei Komponenten nach den Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems zerlegen. Diese sind (Bd. I, §§ 5, 6)

$$X_1 = K \cos\alpha = \frac{m\,m_1}{r^2} \cdot \frac{x - x_1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,m_1}{r_1}\right)$$

und ebenso

$$Y_1 = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m\,m_1}{r_1}\right),$$

$$Z_1 = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m\,m_1}{r_1}\right).$$

Ist ein dritter elektrischer Punkt von der Menge m_2 in der Entfernung r_2 von m vorhanden, so übt er auf m die

Kraft $\frac{m\,m_2}{r_2^{\,2}}$ aus. Diese gibt parallel zur x-Achse eine Komponente

$$X_2 = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,m_2}{r_2}\right).$$

Wir haben daher als Gesamtkraft parallel zur x-Achse

$$X = X_1 + X_2 = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\,m_1}{r_1} + \frac{m\,m_2}{r_2}\right)$$

$$= -m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right).$$

Wir können diese Überlegung ohne weiteres auf beliebig viel (n) elektrische Punkte ausdehnen und erhalten so, wenn wir $m = 1$ setzen,

$$X = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_1^n \frac{m_i}{r_i},$$

$$Y = -\frac{\partial}{\partial y}\sum_1^n \frac{m_i}{r_i},$$

$$Z = -\frac{\partial}{\partial z}\sum_1^n \frac{m_i}{r_i}.$$

Die Größe $\sum_1^n \frac{m_i}{r_i}$ ist also nichts anderes als das Potential der Kräfte X, Y, Z (Bd. I, § 14). Man nennt daher $\sum_1^n \frac{m_i}{r_i}$ das elektrische Potential, die Potentialfunktion oder auch die Spannung der Elektrizität.

§ 3. Potential einer Kugel, auf deren Oberfläche die Elektrizität gleichmäßig verteilt ist.

Auf einer Kugelfläche vom Radius a (Fig. 1) befinde sich gleichmäßig verteilt die Elektrizitätsmenge M. Auf der Flächeneinheit ist somit die Menge

$$\sigma = \frac{M}{4\pi a^2}$$

und wir nennen σ die Flächendichte der Elektrizität. Auf dem Flächenelement ω sitzt daher die Menge $\omega\sigma$. Ihr Potential im Punkt A ist $\frac{\omega\sigma}{u}$. Das Potential der gesamten Elektrizität ist daher $\sum \frac{\omega\sigma}{u}$. Lassen wir ω um OA rotieren, so erhalten wir eine unendlich schmale Kugelzone, deren Punkte sämtlich von A gleich weit entfernt sind. Ihre Fläche ist $2\pi a^2 \sin\varphi\, d\varphi$ und ihr Potential $\frac{2\pi a^2 \sigma \sin\varphi\, d\varphi}{u}$. Das Potential der Kugelfläche ist daher

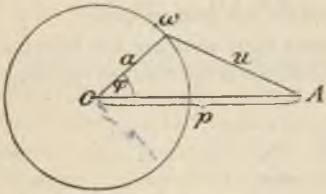

Fig. 1.

$$V = 2\pi a^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{u}. \tag{2}$$

Aus

$$u^2 = a^2 + p^2 - 2\,a\,p\cos\varphi$$

erhalten wir leicht

$$u\,du = a\,p\sin\varphi\, d\varphi$$

oder

$$\sin\varphi\, d\varphi = \frac{u\, du}{a\, p},$$

was, in Gleichung (2) eingesetzt,

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} \int_{u_0}^{u_\pi} du = \frac{2\pi a \sigma}{p} (u_\pi - u_0)$$

ergibt. Dabei ist u_0 der Wert von u für $\varphi = 0$, also

$$u_0 = p - a,$$

während

$$u_\pi = p + a$$

der Wert von u für $\varphi = \pi$ ist. Danach wird

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} (a + p - p + a) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{p}.$$

Nun ist aber

$$4\pi a^2 \sigma = M,$$

folglich

$$V = \frac{M}{p}.$$

Das heißt, die auf einer Kugelfläche gleichmäßig verteilte Elektrizität wirkt auf einen Punkt außerhalb der Kugel so, als wäre sie im Mittelpunkt vereinigt.

Liegt der Punkt innerhalb der Kugel, so ist

$$u_0 = a - p, \quad u_\pi = a + p;$$

daher

$$V = \frac{2\pi a \sigma}{p} (a + p - a + p) = 4\pi a \sigma.$$

Wir haben also wohl zu unterscheiden zwischen dem Wert des Potentials in einem Punkt außerhalb und in einem Punkt innerhalb der Kugelfläche. Für einen Punkt auf der Fläche selbst, d. h. für $p = a$ gehen natürlich beide Formeln ineinander über. Innerhalb der Kugel haben wir also ein konstantes Potential, wo immer der Punkt A liegt. Die Kraft (§ 2), welche auf den Punkt wirkt, ist daher Null.

§ 4. Potential einer Vollkugel.

Die Elektrizitätsmenge M sei im Innern einer Vollkugel gleichmäßig verteilt. Wir haben dann in der Volumeinheit die Menge

$$\varrho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

und nennen ϱ die Dichte der Elektrizität. Wir denken uns die Kugel in unendlich viel dünne konzentrische Schalen zerlegt. Eine jede Schale wirkt dann auf einen Punkt außerhalb so, als wäre die gesamte Elektrizität im Mittelpunkt vereinigt. Wir haben daher auch für die Vollkugel als Potential auf einen außerhalb liegenden Punkt

$$V = \frac{M}{p} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho}{p}.$$

Liegt jedoch der Punkt im Innern der Kugel, so setzt sich das Potential aus zwei Teilen zusammen. Der eine rührt von Kugelschalen her, welche innerhalb der Kugel vom Radius p liegen. Sie wirken wie auf einen außerhalb liegenden Punkt. Ihr Potential ist

$$V_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi p^3 \varrho}{p} = \frac{4\pi p^2 \varrho}{3}.$$

Für die übrigen Kugelschalen ist jedoch der Punkt ein innerhalb liegender. Wir haben für eine solche Schale als

$\frac{4\pi r^2 \varrho dr}{4\pi r^2}$

Potential $4\pi r \sigma$. In unserem Fall ist nun ϱdr

$$\sigma = \varrho\, dr$$

zu setzen, und es wird der zweite Teil des Potentials

$$V_2 = 4\pi\varrho \int_p^a r\, dr = 2\pi\varrho\,(a^2 - p^2)\,,$$

indem eine Schale den Anteil $4\pi\varrho\, r\, dr$ liefert. Es ist somit

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi\varrho\, p^2}{3} + 2\pi\varrho\,(a^2 - p^2)$$

$$= 2\pi\varrho\, a^2 - \frac{2\pi\varrho}{3}\, p^2\,.$$

§ 5. Die Laplacesche Gleichung.

Zwei Punkte in der Entfernung r haben die Koordinaten x, y, z bzw. x', y', z'. Es ist dann

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2\,. \tag{3}$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

ist. Wir haben nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\,\frac{x' - x}{r} = \frac{x' - x}{r^3}\,,$$

da nach Gleichung (3)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x' - x}{r}$$

ist. Wir erhalten nun durch weitere Differentiation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x'-x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} - \frac{3(x'-x)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x'-x)^2}{r^5}.$$

Gleicherweise ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y'-y)^2}{r^5}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z'-z)^2}{r^5}.$$

Addieren wir die drei letzten Gleichungen, so erhalten wir tatsächlich

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Haben wir anstatt zwei mehrere Punkte, so ist natürlich für einen bestimmten Punkt ebenfalls

$$\sum \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \Delta \sum\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Daran wird nichts geändert, wenn in jedem Punkt eine elektrische Masse sitzt und wir $\Delta \sum \frac{m}{r}$ bilden. Auch diese Größe muß gleich Null sein. Nun ist aber

$$\sum \frac{m}{r} = V$$

das Potential der elektrischen Massen auf einen Punkt.

Wir erhalten daher die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = 0 ,$$

welche nach ihrem Entdecker die Laplacesche Gleichung genannt wird.

§ 6. Die Poissonsche Gleichung.

Wir fanden für das Potential einer Vollkugel auf einen außerhalb liegenden Punkt (§ 4)

$$V_e = \frac{4\pi a^3 \varrho}{3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{4\pi a^3 \varrho}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

wenn wir uns den Mittelpunkt der Kugel zum Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems wählen. Es gilt für diesen Fall auch die im vorigen Paragraphen gefundene Gleichung

$$\Delta V_e = 0 .$$

Anders verhält es sich jedoch, wenn der Punkt im Innern der Vollkugel liegt. Wir haben dann

$$V_i = 2\pi \varrho a^2 - \frac{2\pi \varrho}{3} p^2 ,$$

wobei $p^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -\frac{4\pi \varrho}{3}$$

oder

$$\Delta V_i = -4\pi \varrho . \tag{4}$$

Diese Gleichung stimmt mit der Laplaceschen nicht überein. Das rührt daher, weil der Raum rings um unsern Punkt, für welchen wir das Potential bestimmt haben, von

Massen erfüllt ist, während wir die Gleichung von Laplace unter der Bedingung ableiteten, daß der Punkt von den übrigen Massen getrennt ist.

Was wir für die Kugel fanden, gilt aber für jeden mit Masse erfüllten Körper. Immer besteht für einen Punkt innerhalb zusammenhängender Massen die Gleichung (4). Wir können uns nämlich immer um diesen Punkt eine kleine Kugel geschlagen (Fig. 2) und uns das Potential des ganzen Körpers aus den zwei Teilen V_1, von den Massen außerhalb der Kugel herrührend, und dem Potential V_2 der Kugel bestehend denken. Es gilt dann

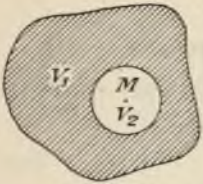

Fig. 2.

$$\Delta V_1 = 0\,, \quad \Delta V_2 = -4\pi\varrho\,,$$

also auch, da

$$\Delta V = \Delta(V_1 + V_2) = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

ist,

$$\Delta V = -4\pi\varrho\,.$$

Das ist die Poissonsche Gleichung.

§ 7. Potential einer Kreisscheibe.

Eine Kreisscheibe (Fig. 3) liege in der $(y\,z)$-Ebene mit ihrem Mittelpunkt O im Ursprung des Koordinatensystems. Sie sei mit Masse von der Flächendichte σ gleichmäßig belegt. Wir suchen ihr Potential auf den Punkt M in der x-Achse. Sämtliche Punkte des Flächenelements $2\pi r\,dr$ liegen in der Entfernung u von M, liefern daher das Potential $\dfrac{2\pi r\,dr\,\sigma}{u}$, und da

$$u^2 = r^2 + x^2\,,$$

so ist das Potential der gesamten Scheibe

$$V = \int_0^R \frac{2\pi r\,dr\,\sigma}{u} = 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$= 2\pi\sigma \left[\sqrt{r^2 + x^2}\right]_0^R = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right).$$

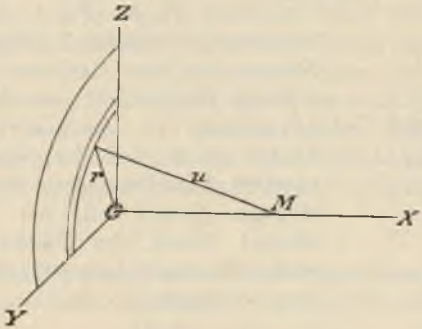

Fig. 3.

Für die Kraft auf den Punkt finden wir

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi\sigma\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - 1\right).$$

Rückt der Punkt sehr nahe an die Scheibe, so konvergiert $\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$ gegen Null, und wir erhalten für die Kraft in unmittelbarer Nähe der Scheibe

$$X = 2\pi\sigma.$$

Denselben Wert hat natürlich die Kraft auf der andern Seite der Scheibe, nur ist sie hier entgegengesetzt gerichtet.

Geht man also von der positiven Seite durch die Scheibe auf die negative, so ändert sich die Kraft um $4\pi\sigma$. Nennen wir das Potential auf der positiven Seite V_+, auf der negativen V_-, so ist

$$-\frac{\partial V_+}{\partial x}+\frac{\partial V_-}{\partial x}=4\pi\sigma.$$

Diese Gleichung gilt aber für jede Fläche. Wir können nämlich aus einer beliebigen Fläche (Fig. 4) eine kleine kreisförmige Scheibe herausschneiden. Nennen wir dann das zum Punkt M gehörige Potential V_+, das zum Punkt M' gehörige V_-, so ändert sich die Kraft, welche von der Scheibe NN' herrührt, beim Durchgang sprungweise, hingegen jener Teil, der von den übrigen Teilen der Fläche stammt, stetig. Es bleibt daher für den Durchgang wiederum

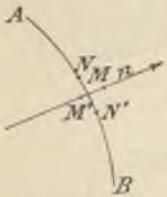

Fig. 4.

$$\frac{\partial V_+}{\partial n}-\frac{\partial V_-}{\partial n}=-4\pi\sigma, \tag{5}$$

wenn wir unter n die Normale zur Fläche verstehen.

§ 8. Der Gauss sche Satz.

Von Gauss wurde folgender Satz gefunden: Bezeichnen wir mit m die Menge Elektrizität in einem Punkt, dessen Entfernung von einem beliebigen Flächenelement dS mit r, mit N die Normalkraft, welche m in dS erzeugt, und mit ω den Raumwinkel, welchen die ganze Fläche S von m aus betrachtet bildet, so gilt die Gleichung

$$\int N\,dS=m\,\omega.$$

Die Kraft von m in dS ist $\frac{m}{r^2}$. Bildet die Normale zu dS mit r den Winkel α, so ist

$$N = \frac{m}{r^2} \cos \alpha$$

und

$$N\, dS = m \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = m\, d\omega\,.$$

Ziehen wir nämlich von m aus Gerade an die Umgrenzung von dS, so bilden sie einen Kegel, der aus einer Kugelfläche vom Radius Eins, die wir um m als Mittelpunkt schlagen, die Fläche $d\omega$ herausschneidet. Das ist aber gleichzeitig die Definition des Raumwinkels, welchen dS von m aus betrachtet bildet. Es ist damit der Gauss sche Satz

$$\int N\, dS = m\, \omega$$

bewiesen.

Spezielle Fälle erhalten wir für eine geschlossene Fläche. Liegt m innerhalb derselben, so ist $\omega = 4\pi$, also

$$\int N\, dS = 4\pi m\,.$$

Ist m außerhalb, so $\omega = 0$, da jedes Raumwinkelelement einmal positiv und einmal negativ in Rechnung kommt, daher

$$\int N\, dS = 0\,.$$

Liegen mehrere Punkte m, m', m'' ... zum Teil innerhalb, zum Teil außerhalb der geschlossenen Fläche, so

$$\int N\, dS = 4\pi \Sigma m_i\,,$$

wobei Σm_i die Summe aller wirksamen Punkte im Innern der Fläche bezeichnet.

§ 9. Wirkung einer homogenen Zylinderfläche.

Ein unendlich langer Kreiszylinder vom Radius R sei gleichförmig mit wirksamer Masse von der Dichte σ belegt. Die Anschauung ergibt, daß die Kraft senkrecht zur Zy-

linderachse gerichtet sein muß. Legen wir durch einen Punkt in der Entfernung r von der Achse eine konzentrische Zylinderfläche, und begrenzen wir sie außerdem durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen im Abstand Eins, so liegt innerhalb dieses Zylinders die Masse $2\pi R\sigma$, und es ist nach dem Gauss schen Satz

$$\int N_a\, dS = 2\pi r N_a = 4\pi \cdot 2\pi R\sigma$$

und somit die Kraft des Zylinders auf einen äußeren Punkt

$$N_a = \frac{4\pi R\sigma}{r}.$$

Für einen inneren Punkt ist

$$\int N_i\, dS = 2\pi r N_i = 0\,,$$

also

$$N_i = 0\,.$$

§ 10. Wirkung einer unendlichen Ebene.

Haben wir eine unendliche Ebene mit Masse von der Dichte σ belegt, so steht die Kraftrichtung natürlich senkrecht auf der Ebene und ist symmetrisch zu beiden Seiten der Ebene. Wir legen durch einen Punkt in der Entfernung x eine parallele Ebene und eine zweite symmetrisch dazu. Diese beiden Ebenen sollen einen mit seiner Achse zu ihnen senkrechten Zylinder vom Querschnitt Eins begrenzen. Für diesen Zylinder ergibt nun der Gauss sche Satz

$$\int N\, dS = 2N = 4\pi\sigma\,,$$

daher

$$N = 2\pi\sigma\,,$$

wie wir bereits S. 15 auf anderem Weg gefunden haben.

§ 11. Verteilung der Elektrizität auf einem Leiter.

Im § 1 lernten wir zweierlei Elektrizitäten kennen, die positive und die negative. Laden wir einen Körper positiv mit einer bestimmten Elektrizitätsmenge und geben dann so viel negative Elektrizität noch hinzu, bis der Körper wieder unelektrisch ist, so können wir sagen: er enthält gleichviel positive und negative Elektrizität. Jeder unelektrische Körper kann als mit gleichviel positiver und negativer Elektrizität geladen angesehen werden. Beide Elektrizitäten sind in derselben Weise verteilt, können daher keine Wirkung nach außen ausüben. Bringen wir nun einen zweiten elektrischen Körper in die Nähe des ersten, so wird dieser die gleichnamige Elektrizität des ersten abstoßen, die ungleichnamige anziehen. Es erweist sich der ursprünglich unelektrische Körper sodann elektrisch. Wir nennen diesen Vorgang Elektrizitätserregung durch Verteilung, und wir müssen annehmen, daß jeder Körper beide Arten von Elektrizität in sehr großer Menge enthält.

Laden wir einen Leiter mit Elektrizität, so wird sie sich auf ihm in bestimmter Weise anordnen. Es befindet sich die Elektrizität im Gleichgewicht, wenn alle Kräfte, welche die einzelnen elektrischen Teilchen aufeinander ausüben, im Gleichgewicht sind. Für alle Punkte im Innern des Leiters muß daher die Kraft gleich Null, folglich das Potential eine konstante Größe sein. Es ist dann aber im Innern des Körpers

$$\Delta V = 0,$$

das heißt, es muß die Dichte der Elektrizität $\varrho = 0$ sein; denn wäre dies nicht der Fall, so hätten wir ja nach Poisson

$$\Delta V = -4\pi\varrho.$$

Ist demnach die Elektrizität auf einem Leiter im Gleichgewicht, so befindet sie sich nur an der Oberfläche des Leiters.

§ 12. Verteilung der Elektrizität auf einer Kugel — Kapazität einer Kugel.

Aus der allseitigen Symmetrie einer Kugel geht ohne weiteres hervor, daß die Elektrizität sich auf ihr gleichmäßig verteilen muß, so daß die Dichte an allen Punkten der Kugeloberfläche gleich groß ist. Das Potential auf einen inneren Punkt ist dann nach § 3

$$V = 4\pi\, a\, \sigma = \frac{4\pi\, a^2\, \sigma}{a} = \frac{E}{a},$$

wenn wir mit E die gesamte Elektrizitätsmenge auf der Kugel bezeichnen. Die Elektrizitätsmenge ist also

$$E = V\, a\,.$$

Die Größe a, mit welcher das Potential multipliziert werden muß, damit man die Elektrizitätsmenge erhält, nennen wir die Kapazität der Kugel.

Sind zwei Kugeln sehr weit voneinander entfernt, so können wir den Einfluß, welchen die Elektrizitätsmengen dieser Kugeln aufeinander ausüben, vernachlässigen. Die Radien der beiden Kugeln seien a und a', ihre Elektrizitätsmengen E beziehungsweise E'. Die Kugeln besitzen dann das Potential

$$V = \frac{E}{a}, \qquad V' = \frac{E'}{a'}\,.$$

Wir verbinden nun beide Kugeln durch einen dünnen Draht. Demzufolge werden die Kugeln das gemeinschaftliche Potential P annehmen, da wir sie ja jetzt als einen einzigen Körper betrachten können. Es muß jetzt

$$P = \frac{e}{a} = \frac{e'}{a'}$$

sein, wenn wir mit e und e' die Elektrizitätsmengen bezeichnen, welche nunmehr auf den Kugeln sitzen. Es ist also auch

$$P = \frac{e + e'}{a + a'} = \frac{E + E'}{a + a'}.$$

Daraus folgt

$$e = a\,\frac{E + E'}{a + a'}, \qquad e' = a'\,\frac{E + E'}{a + a'}.$$

§ 13. Allgemeine Beziehung zwischen Elektrizitätsmenge, Potential und Kapazität — Potential der Erde.

Bestimmen wir für einen beliebigen Körper (Fig. 5) das Potential auf einen innerhalb liegenden Punkt M, so haben wir jedes Flächenelement ω mit der zugehörigen Flächendichte zu multiplizieren, durch die Entfernung u zu dividieren und über die ganze Oberfläche zu summieren. Das Potential ist also

$$V = \Sigma\,\frac{\omega\,\sigma}{u}$$

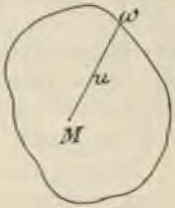

Fig. 5.

und zwar muß es im Innern des Körpers einen konstanten Wert haben. Wächst nun in allen Punkten des Körpers die Dichte der Elektrizität proportional, so wird das Gleichgewicht nicht gestört. Es besteht somit auch die Gleichung

$$n\,V = \Sigma\,\frac{\omega\,n\,\sigma}{u}.$$

$$\Sigma\,\omega\,n\,\sigma = n\,E$$

ist nun die auf dem Körper vorhandene Elektrizitätsmenge, welche früher den Wert

$$E = \Sigma\omega\,\sigma$$

hatte. Es wächst daher die Elektrizitätsmenge mit dem Potential proportional, so daß immer die Gleichung

$$E = CV$$

besteht, wobei C eine konstante Größe ist, die wir die Kapazität des Körpers nennen. Für die Kugel fanden wir sie gleich dem Radius a. Wir können daher sagen: Die Kapazität hat die Dimension einer Länge (§ 63).

Haben wir mehrere Körper von verschiedener Kapazität, die sehr weit voneinander entfernt sind, und verbinden wir sie durch sehr dünne Drähte, so werden sie ein gemeinsames Potential annehmen, während sich in diesem Fall die Kapazitäten einfach summieren. Die Kapazität ändert sich jedoch, wenn sich die Körper einander nähern. Die Elektrizitätsmengen auf den einzelnen Körpern können wir ebenso finden wie im vorhergehenden Paragraphen für die Kugeln, nur haben wir jetzt anstatt a die Kapazität C usw. zu setzen.

Bringen wir nun einen Körper mit der Erde in Verbindung, so nimmt er ihr Potential an. Wir setzen dies gewöhnlich gleich Null, doch ist das nicht notwendig; denn die Größe, welche wir das Potential eines Körpers nennen, ist immer nur die Differenz zum Potential der Erde. Es liegt sogar nahe, der Erde auch ein Potential zu geben. Die positiv und negativ elektrischen Körper weichen dann in verschiedenem Sinn vom Potential der Erde ab. Wir befolgen hier dieselbe Anschauungsweise wie bei der Wärme, wenn wir die Temperatur unter Null durch Kältegrade, die über Null durch Wärmegrade messen, obwohl wir beide, wie wir es nach Einführung des absoluten Nullpunktes ja auch getan haben (Bd. II, § 36), auch als gleichbezeichnete Größen ansehen können.

§ 14. Der Kugelkondensator.

Wir betrachten zwei konzentrische leitende Hohlkugeln (Fig. 6). Die Oberflächen der inneren Hohlkugel haben die Radien a_1 und a_2, die der äußeren a_3 und a_4. Durch einen sehr dünnen Draht sei die innere Hohlkugel mit einem Körper vom konstanten Potential A verbunden, die äußere werde auf dem Potential B gehalten. Wir nehmen nun an, auf den Kugelflächen sitzen entsprechend den Radien a_1, a_2 usw. die Elektrizitätsmengen E_1, E_2, E_3, E_4. Für einen innerhalb der inneren Hohlkugel liegenden Punkt M, der sich in der Entfernung r vom Mittelpunkt O befindet, kann also das Potential nur den Wert A, hingegen in einem Punkt M' der äußeren Hohlkugel in der Entfernung r' nur den Wert B haben. Die Elektrizitätsmengen E_1, E_2 usw. haben wir uns wegen der allseitigen Symmetrie auf den zugehörigen Kugelflächen gleichmäßig verteilt zu denken. E_1 wirkt daher auf M, als wäre die gesamte Menge im Punkt O vereinigt. Für die übrigen Kugelflächen ist M ein innerhalb liegender Punkt. Das Potential A setzt sich daher folgendermaßen zusammen:

Fig. 6.

$$A = \frac{E_1}{r} + \frac{E_2}{a_2} + \frac{E_2}{a_3} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Für den Punkt M' liefern die Elektrizitätsmengen E_1, E_2, E_3 ein Potential, als wären sie in O vereinigt. Nur für die äußerste Kugelfläche ist M' ein innerhalb liegender Punkt. Wir erhalten somit

$$B = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{r'} + \frac{E_4}{a_4}.$$

Wir müssen nun

$$E_1 = 0$$

setzen, da A für alle Punkte der inneren Hohlkugel konstant sein muß. Es bleibt somit

$$(6) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{E_2}{a_2} + \dfrac{E_3}{a_3} + \dfrac{E_4}{a_4} = A\,, \\[2ex] \dfrac{E_2 + E_3}{r'} + \dfrac{E_4}{a_4} = B\,. \end{array} \right.$$

Das Potential B muß wiederum für alle Punkte der äußeren Hohlkugel konstant sein. Daraus folgt

$$E_2 + E_3 = 0\,.$$

Es sitzt demnach auf den zwei einander zugekehrten Kugelflächen gleich viel, aber entgegengesetzte Elektrizität. Somit bleibt uns nur

$$(7) \qquad B = \frac{E_4}{a_4}\,.$$

Die äußere Kugeloberfläche besitzt daher eine Ladung, als wäre nur eine einzige leitende Kugel vom Radius a_4 vorhanden. Die Gleichungen (6) und (7) ergeben

$$\frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3} = A - B$$

und da

$$E_2 = -E_3\,,$$

so

$$E_2\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) = A - B\,,$$

oder

$$E_2 = \frac{a_2\,a_3}{a_3 - a_2}\,(A - B)\,.$$

Wir nehmen nun an, die innere Kugelschale sei isoliert und die äußere werde geladen. Dann muß $E_1 + E_2 = 0$, oder da $E_1 = 0$, so muß auch $E_2 = 0$ und damit auch $E_3 = 0$ sein. Es befindet sich also dann Elektrizität nur auf der äußeren Oberfläche, deren Menge die Gleichung

$$E_4 = a_4 B$$

angibt. Verbinden wir jetzt die innere Kugel mit der Erde, so daß $A = 0$ wird, so folgt

$$E_2 = -\frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \quad E_3 = \frac{a_2 a_3}{a_3 - a_2} B, \quad E_4 = a_4 B.$$

E_2 und E_3 sind also um so größer, je kleiner $a_3 - a_2$ ist, d. h. je näher die beiden inneren Kugelflächen aneinander rücken. Wir können dann in erster Annäherung

$$a_2 = a_3 = a, \quad a_2 a_3 = a^2$$

setzen, hingegen sei

$$a_3 - a_2 = \delta.$$

Es wird jetzt

$$E_3 = \frac{a^2}{\delta} B = \frac{4\pi a^2}{4\pi\delta} B.$$

Da aber $4\pi a^2$ die Oberfläche der Kugel ist, so heißt das, daß die angesammelte Elektrizitätsmenge E_3 proportional der Kugelfläche und verkehrt proportional dem Abstand δ der beiden Kugelflächen ist. Ein derartiges System von leitenden Flächen kann also als Elektrizitätssammler oder Kondensator benützt werden, und man nennt speziell den von uns untersuchten Apparat einen Kugelkondensator. $\frac{a^2}{\delta}$ ist seine Kapazität (§ 13).

§ 15. Der Plattenkondensator.

Zwei gleichgestaltete Platten (Fig. 7) liegen parallel zueinander in der kleinen Entfernung δ. Die linke sei zur Erde E abgeleitet, die Rechte werde auf dem konstanten Potential P gehalten. Sind die Platten groß im Vergleich zu ihrer Entfernung δ, so können wir nach § 7 die Kraft zwischen den beiden Platten als konstant annehmen. Im Zwischenraum muß daher beim Übergang von einer zur andern Platte das Potential einen linearen Anstieg zeigen.

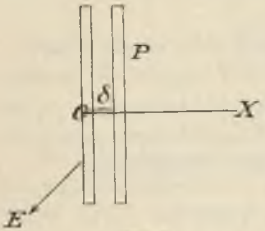

Fig. 7.

Wir haben somit (§ 7)

$$\frac{dV_+}{dx} = \frac{P}{\delta};$$

für das innere der linken Platte gilt

$$\frac{dV_-}{dx} = 0 .$$

Somit ist nach Gleichung (5)

$$\frac{P}{\delta} = -4\pi\sigma ,$$

oder

$$\sigma = -\frac{P}{4\pi\delta} .$$

Wir haben also auf der ganzen inneren Seite der linken Platte eine Elektrizitätsmenge von der Dichte $-\frac{P}{4\pi\delta}$ sitzen. Für die innere Seite der rechten Platte haben wir analog

$$\frac{dV_+}{dx} = 0 ,$$

hingegen

$$\frac{dV_-}{dx} = \frac{P}{\delta} ,$$

mithin

$$\sigma = \frac{P}{4\pi\delta}.$$

Die Elektrizitätsmenge, welche sich auf der rechten Platte ansammelt, ist somit

$$E = \frac{FP}{4\pi\delta},$$

wenn wir mit F die Fläche der Platte bezeichnen. Wir erhalten somit auch für die Kapazität des Plattenkondensators dieselbe Formel wie für den Kugelkondensator, doch ist nicht zu vergessen, daß jetzt die Formel nur annähernd gilt, daß der wahre Wert sich dem von uns berechneten jedoch um so mehr nähert, je kleiner die Entfernung δ ist.

§ 16. Kraftlinien — Niveauflächen.

Für ein ruhendes System von Leitern können wir das Potential als Funktion der Koordinaten x, y, z auffassen, also

$$V = f(x, y, z)$$

setzen. Halten wir das Potential V konstant, so stellt die letztere Gleichung eine Fläche dar, welche wir wegen der Konstanz des Potentials auf ihr eine Äquipotential- oder Niveaufläche nennen. In einer solchen Fläche liegt also keine Kraftkomponente. Die Kraft ist somit senkrecht darauf gerichtet. Erteilen wir nun dem V einen stetig fallenden Wert, so erhalten wir eine Schar von Flächen, deren orthogonale Trajektorien die jeweilige Richtung der Kraft angeben. Diese Linien nennt man deshalb auch Kraftlinien.

Für einen einzigen Massenpunkt m ist das Potential

$$V = \frac{m}{r}.$$

Die Niveauflächen sind daher Kugelflächen mit m als Mittelpunkt, während die Kraftlinien die Radien sind. Nehmen wir an, es gehen N Kraftlinien gleichmäßig nach allen Richtungen des Raums verteilt vom Punkt m aus, so ist deren Dichte auf einer Niveaufläche vom Radius r

$$\sigma = \frac{N}{4\pi r^2}$$

und setzen wir

$$N = 4\pi m\,,$$

so

$$\sigma = \frac{m}{r^2}\,.$$

Es gibt dann die Dichte der Kraftlinien unmittelbar auch die Größe der Kraft an. Es empfiehlt sich daher anzunehmen, daß jede Masse m $4\pi m$ Kraftlinien aussendet. Es ist dann durch die Kraftlinien Richtung und Größe der Kraft vollständig bestimmt, da letztere gleich der Anzahl der Kraftlinien ist, welche die Flächeneinheit passieren. Einen von elektrischen Kraftlinien erfüllten Raum nennen wir ein elektrisches Feld und die Größe der oben definierten Kraft die Feldstärke oder Feldintensität.

Die Einführung der Kraftlinien ergibt auch eine bequeme Erläuterung der Sätze von Laplace und Poisson. Haben wir nämlich ein Elementarparallelepiped mit den Kanten dx, dy, dz, so ist die Zahl der Kraftlinien, welche durch die linke Fläche $dy\,dz$ eintreten, gleich $-\frac{\partial V}{\partial x}\,dy\,dz$ während auf der rechten Seite, wie man mit Zuhilfenahme der Entwickelung von $\frac{\partial V}{dx}$ nach der Taylorschen Reihe leicht erkennt, die Zahl $-\left(\frac{\partial V}{dx} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) dx\,dy\,dz$ aus-

tritt. Die Differenz gibt den Überschuß der austretenden Kraftlinien über die eintretenden an, also $-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\,dy\,dz$. Gleicherweise erhalten wir für die beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems $-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx\,dy\,dz$ und $-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx\,dy\,dz$. Für den Fall, daß in unserem Volumelement keine elektrischen Massen vorhanden sind, muß die Zahl der eintretenden und austretenden Kraftlinien gleich sein. Wir erhalten daher durch Addition der letzten drei Ausdrücke die Gleichung von Laplace:

$$\Delta V = 0\,.$$

Ist hingegen in dem Volumelement die elektrische Masse m vorhanden, so ist der Überschuß der austretenden Kraftlinien über die eintretenden $4\pi m$, und wir haben

$$-\Delta V\,dx\,dy\,dz = 4\pi m = 4\pi\varrho\,dx\,dy\,dz\,,$$

falls wir voraussetzen, daß die Massen gleichförmig im Volumelement verteilt seien und die Dichte ϱ besitzen. Diese letzte Gleichung ergibt dann den Satz von Poisson:

$$\Delta V = -4\pi\varrho\,.$$

Es ergibt sich auch leicht der unmittelbare Zusammenhang dieser Sätze mit dem Gaussschen Satz (§ 8) sowie der Gleichung (5)

§ 17. Der Greensche Satz.

Es seien F und G Funktionen der laufenden Koordinaten x, y, z eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wir führen die oft angewandte Bezeichnung

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

ein und bilden

$$\iiint G \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \int G \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx$$

$$= \iint dy\, dz \left(G \frac{\partial F}{\partial x} - \int \frac{\partial F}{dx} \frac{\partial G}{\partial x} dx \right).$$

Danach finden wir weiter

$$\iiint G \Delta F\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint G \left(\frac{\partial F}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial F}{\partial y} dz\, dx + \frac{\partial F}{\partial z} dx\, dy \right)$$

$$- \iiint \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Diese Gleichung werde auf eine geschlossene Fläche bezogen. Dann stellt der erste Teil der rechten Seite ein Oberflächenintegral, der zweite ein Raumintegral dar. Die Normale n zu einem Oberflächenpunkt schließe mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ ein. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos\gamma.$$

Denken wir unsern Oberflächenpunkt auf dem Flächenelement dO, das wir auf die Koordinatenebenen projizieren, so ist $dy\, dz = dO \cos\alpha$ usw. Folglich können wir schreiben

$$\frac{\partial F}{\partial x} dy\, dz + \frac{\partial F}{\partial y} dz\, dx + \frac{\partial F}{\partial z} dx\, dy$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos\gamma \right) dO = \frac{\partial F}{\partial n} dO.$$

Danach wird unsere obige Gleichung

$$\iiint G \Delta F \, dx \, dy \, dz = \iint G \frac{\partial F}{\partial n} dO$$
$$- \iiint \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \, .$$

Diese Gleichung wurde von Green aufgestellt. Sie gilt, wie aus der Ableitung hervorgeht, für beliebige Formen der Funktionen F und G.

§ 18. Anwendungen des Greenschen Satzes.

1. Wir setzen in der letzten Gleichung des vorhergehenden Paragraphen $F = V$ und $G = 1$, wobei V ein Potential ist. Dann ist $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z} = 0$. Der Greensche Satz reduziert sich somit auf die Gleichung

$$\iiint \Delta V \, dx \, dy \, dz = \iint \frac{\partial V}{\partial n} dO \, .$$

Nach der Poissonschen Gleichung (§ 6) haben wir $\Delta V = -4\pi\varrho$, so daß der Greensche Satz weiter ergibt

$$-4\pi \int \varrho \, dx \, dy \, dz = \iint \frac{\partial V}{\partial n} dO \, .$$

Der Ausdruck $\int \varrho \, dx \, dy \, dz = M$ stellt die gesamte Menge der Elektrizität im Innern der geschlossenen Fläche dar. In der Form

$$-\iint \frac{\partial V}{\partial n} dO = \iint N \, dO = 4\pi M$$

erhalten wir also nichts anderes als einen Spezialfall des Gaussschen Satzes (§ 8).

Denken wir uns jetzt einen Leiter der Elektrizität in Form eines Hohlkörpers, der elektrisch geladen ist und auf den elektrische Massen von außen induzierend einwirken. Wir legen um den Hohlraum im Innern des massiven Teils des Körpers eine geschlossene Fläche. Auf allen deren Punkten ist, wie es im Innern eines Leiters stets sein muß (§ 11), das Potential konstant. Es ist somit $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, daher auch $M = 0$. Im Innern des Körpers ist keine Elektrizität vorhanden.

2. Eine geschlossene Fläche begrenze einen Körper. Innerhalb des Körpers sollen sich elektrische Massen befinden. Ein bestimmter Punkt außerhalb des Körpers habe die Koordinaten x', y', z'. Seine Entfernung von einem Punkte (x, y, z) im Innern sei r. Es ist also $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$.

Es sei nun $F = V$ wieder ein Potential, ferner sei $G = \frac{1}{r}$. Wir bilden

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x - x'}{r^3}$$

(§ 5) und analog $\frac{\partial G}{\partial y}$ und $\frac{\partial G}{\partial z}$. Danach wird der Greensche Satz

$$-4\pi \iiint \frac{\varrho\, dx\, dy\, dz}{r} = -\iint \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} dO$$

$$+\iiint \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{x - x'}{r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{y - y'}{r} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{z - z'}{r}\right)$$

$$\times\, dx\, dy\, dz.$$

Der Klammerausdruck des letzten Gliedes ist aber nichts anderes als $\frac{\partial V}{\partial r}$, so daß unsere Gleichung wird

$$-4\pi \iiint \frac{\varrho\, dx\, dy\, dz}{r}$$

$$= \iint \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} dO + \iiint \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dx\, dy\, dz}{r^2}.$$

Das Raumelement wollen wir jetzt durch Polarkoordinaten ausdrücken. Ist $d\omega$ das Raumwinkelelement vom Punkte (x', y', z') aus gezogen, so $dx\, dy\, dz = r^2\, d\omega\, dr$. Es wird dann

$$\iiint \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dx\, dy\, dz}{r^2} = \iiint \frac{\partial V}{\partial r} dr\, d\omega = \iint (V_2 - V_1)\, d\omega,$$

wenn V_1 bezügl. V_2 zu den Punkten gehört, an denen das Raumwinkelelement die geschlossene Fläche durchsetzt. Diese Fläche sei nun eine Niveaufläche (§ 16). In dieser ist V konstant also $V_1 = V_2$, folglich

$$\iiint \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dx\, dy\, dz}{r^2} = \iint (V_2 - V_1)\, d\omega = 0$$

und

$$-4\pi \iiint \frac{\varrho\, dx\, dy\, dz}{r} = \iint \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} dO.$$

Das dreifache Integral in dieser Gleichung ist nun nichts anderes als das Potential V' im Punkte (x', y', z') der von unserer Fläche umschlossenen Massen. Wir haben also

$$V' = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} dO.$$

Setzen wir

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}=\sigma,$$

so wird

$$V'=\iint\frac{\sigma\, dO}{r}.$$

Jetzt stellt die Gleichung aber nichts anderes dar als das Potential einer elektrischen Masse, die auf der Oberfläche mit der Flächendichte σ verteilt ist. Wenn wir also ein System von Massen haben und suchen das Potential auf einen äußeren Punkt, so können wir uns alle Massen auf einer Niveaufläche verteilt denken, wobei die Flächendichte so zu wählen ist, daß $\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ wird. So ist z. B. für einen Massenpunkt jede konzentrische Kugelfläche eine Niveaufläche. Es ist

$$V=\frac{m}{r},\quad \frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{m}{r^2},\quad \sigma=\frac{m}{4\pi r^2},$$

d. h., verteilen wir m gleichmäßig über eine konzentrische Kugelfläche, so bleibt die Wirkung nach außen unverändert (§ 3).

Es können so Aufgaben über die Verteilung der Elektrizität auf Leitern gelöst werden. Es lassen sich z. B. die auf einer Geraden gleichförmig verteilten Massen auf ein Rotationsellipsoid übertragen und sich die Verteilung der Elektrizität auf einem solchen finden.

§ 19. Arbeitswert eines Systems elektrischer Punkte.

Der elektrische Massenpunkt m befinde sich in einem Raum vom Potential V. Der Punkt bewege sich auf dem Weg s. Die Kraft, welche in der Richtung des Wegs auf

ihn wirkt, ist also $-m\frac{dV}{ds}$ und es leistet auf dem Weg ds die Kraft die Arbeit

$$dA = -m\frac{dV}{ds}ds\,.$$

Gelangt der Punkt von einer Stelle mit dem Potential V_1 zu einer andern vom Potential V_2, so haben die elektrischen Kräfte dabei die Gesamtarbeit

$$\int dA = -m\,V_2 + m\,V_1 = m\,(V_1 - V_2)$$

geleistet. Diese Arbeit ist von der Form der Bahn vollständig unabhängig. Sie ist nur durch den Anfangs- und Endwert des Potentials bedingt. Ist der Endpunkt unendlich weit weg, und haben wir im Unendlichen das Potential

$$V_2 = 0\,,$$

so stellt das Produkt $m\,V_1$ die Arbeit dar, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn der Punkt ins Unendliche gebracht wird. Dieselbe Arbeit muß aufgewendet werden, wenn wir den Punkt aus dem Unendlichen in den Raum vom Potential V_1 bringen wollen. Es ist daher das Potential nichts anderes als der mechanische Wert, der Arbeitswert oder die (potentielle) Energie der Masseneinheit.

Bringen wir einen Massenpunkt m_2 aus dem Unendlichen in die Entfernung r_{12} von der Masse m_1, so haben wir dabei die Arbeit $\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ zu leisten. Bringen wir nun noch die dritte Masse m_3 aus dem Unendlichen dazu, so haben wir noch die Arbeit $\frac{m_1 m_3}{r_{13}}$ bezüglich $\frac{m_2 m_3}{r_{23}}$ aufzuwenden, wenn r_{13} die Entfernung zwischen m_1 und m_3, r_{23} jene zwi-

schen m_2 und m_3 ist. Um daher diese Anordnung zu bewerkstelligen, muß die Arbeit

$$A = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

geleistet werden. A ist daher die Energie dieses Systems.

Es sollen nun auf dieselbe Weise beliebig viel Punkte einander genähert werden. Der Gesamtarbeitswert A wird dann durch folgende Gleichung bestimmt sein:

$$\begin{aligned} 2A = {} & m_1 \left(\frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \frac{m_4}{r_{14}} + \ldots \right) \\ & + m_2 \left(\frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{24}} + \ldots \right) \\ & + m_3 \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} + \frac{m_4}{r_{34}} + \ldots \right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Summe auf der rechten Seite der Gleichung gleich dem doppelten Arbeitswert ist, da wir jede Arbeit, welche bei der Zuführung eines Massenpunkts aus dem Unendlichen zu leisten ist, doppelt gezählt haben. So finden wir z. B. die Arbeit, welche wir bei der Annäherung von m_2 an m_1 zu leisten haben, einmal im ersten Summanden, dann noch einmal im zweiten usw. Der Faktor von m_1 ist nun nichts anderes als das Potential aller Massenpunkte auf den Punkt m_1. Wir wollen es V_1 nennen. Desgleichen sei

$$V_2 = \frac{m_1}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{23}} + \ldots$$

usw. Danach erhalten wir

$$2A = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \ldots$$

Befinden sich alle elektrischen Massen auf einem leitenden Körper, so muß

$$V_1 = V_2 = \ldots = V$$

sein, wobei also V das konstante Potential im Innern des Körpers vorstellt. Es ist dann

$$2\,A = (m_1 + m_2 + \ldots)\,V = E\,V$$

oder

$$A = \frac{E\,V}{2},$$

wobei E die gesamte Elektrizität auf dem Körper ist. Überlegen wir, daß (§ 13)

$$V = \frac{E}{C}$$

ist, wenn wir unter C die Kapazität des Körpers verstehen, so können wir den Arbeitswert auch durch die Gleichung

$$A = \frac{E^2}{2\,C}$$

darstellen.

Haben wir mehrere Leiter mit den Potentialen V, V', V'' ...., so ist die Energie des gesamten Systems

$$A = \frac{E\,V}{2} + \frac{E'\,V'}{2} + \ldots,$$

wenn $E, E' \ldots$ die Elektrizitätsmengen auf den zugehörigen Körpern sind.

§ 20. Der Druck in der Oberfläche einer elektrisch geladenen Kugel.

Eine leitende Kugel sei auf das Potential V geladen. Ist E die Elektrizitätsmenge und a der Radius der Kugel, so besteht die Gleichung (§ 12)

$$V = \frac{E}{a}.$$

Der Arbeitswert ist somit

$$A = \frac{EV}{2} = \frac{E^2}{2a}.$$

Wir nehmen nun an, die Kugel habe eine bewegliche Oberfläche, wie es etwa für eine Seifenblase gelten würde, und wir suchen nun die Arbeit, welche die Elektrizität bei der Ausdehnung der Kugel leistet. Sie muß der Verkleinerung des Arbeitswerts entsprechen, ist daher, wie sich durch Differentiation der letzten Gleichung ergibt, durch die Gleichung

$$-dA = \frac{E^2}{2a^2}da$$

bestimmt, wenn sich der Radius um da vergrößert. $\frac{E^2}{2a^2}$ ist somit nichts anderes als die Gesamtkraft, welche senkrecht zur Kugeloberfläche nach außen wirkt, da die geleistete Arbeit durch das Produkt aus der Kraft und dem Weg da gegeben ist, auf dem sie wirkt (Bd. I, § 13). Die Größe dieser Kraft sei für die Flächeneinheit P. Es muß also

$$4\pi a^2 P = \frac{E^2}{2a^2}$$

oder

$$P = \frac{E^2}{8\pi a^4}$$

sein. Ist die Flächendichte der Elektrizität σ, so

$$E = 4\pi a^2 \sigma,$$

mithin

$$P = \frac{16\pi^2 a^4 \sigma^2}{8\pi a^4} = 2\pi\sigma^2.$$

Dieses Resultat gilt übrigens für jeden elektrisch geladenen Leiter, wie man leicht durch folgende Überlegung

erkennt. Da sich eine unendlich große Raumdichte der Elektrizität praktisch nicht herstellen läßt, so müssen wir annehmen, daß die über die Oberfläche eines Leiters verteilte Elektrizität eine gewisse Schichtdicke besitzt. Diese Schicht teilen wir durch unendlich viele, unendlich nahe aneinanderliegende Niveauflächen in unendlich viele Schichten von der Dichte $d\sigma$ für einen bestimmten Punkt der Oberfläche. Es erfährt jede Schicht von den sie umschließenden Schichten keine Kraftwirkung, hingegen von den eingeschlossenen per Flächeneinheit die Kraft $4\pi\sigma d\sigma$ senkrecht nach außen (§ 7), wenn wir jetzt unter σ die Gesamtdichte der eingeschlossenen Elektrizität verstehen. Die Elektrizität steht somit unter einem Druck nach außen von der Größe

$$4\pi\int_0^\sigma \sigma\, d\sigma = 2\pi\sigma^2,$$

wobei jetzt σ die gewöhnliche Oberflächendichte bedeutet.

§ 21. Theorie der Dielektrika.

Wir fanden für die Kapazität eines Kugelkondensators (§ 14)

$$C = \frac{a^2}{\delta}.$$

Diese Gleichung gilt aber nur dann, wenn wir den Zwischenraum zwischen den beiden Hohlkugeln mit Luft angefüllt haben. Bringen wir jedoch eine andere Substanz, etwa eine nichtleitende Flüssigkeit oder einen festen Isolator hinein, so ändert sich die Kapazität, sie wird größer. Wir haben daher unsere Formel in

$$C = \varepsilon\frac{a^2}{\delta}$$

abzuändern, wobei ε eine Konstante ist, welche nur von der Natur des isolierenden Zwischenmittels abhängig ist. Da Faraday die Isolatoren Dielektrika nannte, so gab er der Größe ε den Namen „Dielektrizitätskonstante“.

Man kann sich vorstellen, daß die Dielektrika aus Molekeln bestehen, deren Elektrizitäten zwar an die Molekeln gebunden, aber innerhalb derselben verschiebbar sind. Bringen wir deshalb einen Isolator in ein elektrisches Feld, so tritt in jeder Molekel eine elektrische Verteilung ein, indem die positive Elektrizität das Bestreben hat, sich in der Richtung der Kraftlinien zu bewegen, die negative aber entgegengesetzt. Denken wir uns deshalb die Molekeln wie in Fig. 8 angeordnet, und es gehen die Kraftlinien von links nach rechts, so wird die linke Seite der Molekeln negativ, die rechte positiv elektrisch. Im Innern des Körpers heben sich die Elektrizitäten der benachbarten Molekeln wieder auf, und es bleibt nur an der Oberfläche links eine negative, rechts eine positive, Schicht freier Elektrizität übrig.

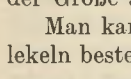

Fig. 8.

§ 22. Elektrisches Moment — Flächendichte und Raumdichte der Elektrizität.

Wir bringen in ein homogenes elektrisches Feld (Fig. 9), das ist ein solches, in welchem die Kraftlinien gerade, parallel und von konstanter Dichte sind, zwei elektrische Massen $+e$ und $-e$, welche starr miteinander verbunden sind. Ihre Entfernung sei a, die Feldstärke N. Es wirkt dann auf $+e$ eine Kraft Ne in der Richtung der Kraftlinien, auf $-e$ in entgegengesetzter Richtung dieselbe Kraft, also $-Ne$. Unser System erfährt daher ein

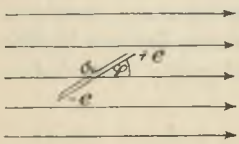

Fig. 9.

Drehungsmoment (Bd. I, § 28) $N\,e\,a \sin\varphi$, und man nennt speziell die Größe $e\,a$ das elektrische Moment der beiden getrennten elektrischen Massen $+e$ und $-e$.

Wir denken uns nun ein Dielektrikum in einem elektrischen Feld. Überall wirke dieselbe elektrische Kraft, d. h. wir haben ein homogenes Feld. Es werden also alle Molekeln des Dielektrikums gleichmäßig polarisiert werden. Wir schneiden nun aus dem Dielektrikum ein Parallelepiped so heraus, daß eine Kante in die Richtung der Kraftlinien fällt. Es zeigt sich dann nach dem Früheren nur auf jenen Flächen, welche senkrecht zu den Kraftlinien stehen, freie Elektrizität. Ihre Dichte sei σ, und wir machen nun die Annahme, daß σ proportional der verteilenden elektrischen Kraft ist. Die Elektrizitätsmengen, welche auf den Endflächen sitzen, sind somit $q\,\sigma$ bzw. $-q\,\sigma$, wenn wir mit q den Querschnitt des Parallelepipeds bezeichnen. Wir können nun

$$m = q\,\sigma\,l$$

das elektrische Moment des Parallelepipeds nennen, vorausgesetzt, daß wir unter l seine Länge verstehen. Man pflegt nun den Quotienten aus dem elektrischen Moment und dem Volumen des Körpers das elektrische Moment der Volumeinheit zu nennen, welches somit durch die Formel

$$\mu = \frac{q\,l\,\sigma}{v}$$

gegeben ist. Für unsern Fall ist aber das Volumen

$$v = q\,l\,,$$

daher

$$\mu = \sigma\,.$$

Das heißt: das elektrische Moment der Volumeinheit ist gleich der Flächendichte der freien Elektrizität.

Die elektrischen Kräfte können wir in drei Komponenten X, Y, Z zerlegen. Für die Endflächen eines Elemen-

tarparallelepipeds in einem Isolator seien die Flächendichten durch α, β, γ gegeben, wobei sich α auf die Fläche senkrecht zur x-Achse bezieht, usw. Wir machen dann die Annahme, daß

$$\alpha = k X , \quad \beta = k Y , \quad \gamma = k Z$$

ist, und geben der Konstanten k den Namen „Elektrisierungszahl". Ändert sich der Wert von X, Y, Z mit den Koordinaten nicht, so sind auch die Flächendichten α, β, γ konstante Größen und, wie bereits früher bemerkt, kann demnach im Innern eines Isolators, der von einem homogenen Feld beeinflußt wird, keine freie Elektrizität vorhanden sein. Wächst aber die elektrische Kraft X längs der Strecke dx, so daß wir auf der rechten Seite des Elementarprismas die Kraft X' haben, dann befindet sich dort die Flächendichte

$$\alpha' = k X' .$$

Während wir also links etwa die freie Elektrizität $-\alpha\, dy\, dz$ haben, haben wir dann rechts $\alpha'\, dy\, dz$, und wir können schreiben:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx .$$

Ändert sich nun α längs der x-Achse von Molekel zu Molekel, so können sich die durch Verteilung erzeugten Elektrizitätsmengen im Innern des Körpers nicht mehr vollständig aufheben, sondern es wird zwischen je zwei Molekeln eine freie Elektrizitätsmenge übrigbleiben, welche gleich der algebraischen Summe der beiden zusammenstoßenden Mengen ist. Für das ganze Volumelement erhalten wir daher unter dem Einfluß der veränderlichen Kraft X eine freie Elektrizitätsmenge

$$-(\alpha' - \alpha)\, dy\, dz = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx\, dy\, dz ,$$

indem ja der Zuwachs der Flächendichte multipliziert mit der Fläche selbst die Menge der freien Elektrizität angibt. Die frei werdende Elektrizität ist negativ, wenn wir (Fig. 10) die Kraft X mit der Abszisse x wachsen lassen. Die Kräfte Y und Z erzeugen analog die freien Elektrizitätsmengen $-\frac{\partial \beta}{\partial y} dx\,dy\,dz$ und $-\frac{\partial \gamma}{\partial z} dx\,dy\,dz$. Die im Volumelement vorhandene freie Elektrizität ist also gleich $-\left(\frac{\partial \alpha}{dx} + \frac{\partial \beta}{dy} + \frac{\partial \gamma}{dz}\right) dx\,dy\,dz$, wir können somit die Größe

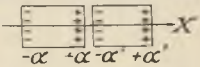

Fig. 10.

$$\varrho = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)$$

die Menge in der Volumeinheit oder die Dichte der freien Elektrizität nennen, wobei unter ϱ zum Unterschied von der Flächendichte σ eine Raumdichte zu verstehen ist.

Wir setzen nun voraus, die elektrischen Kräfte haben ein Potential V. Wir haben dann

$$\alpha = k\,X = -\,k\,\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\beta = k\,Y = -\,k\,\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\gamma = k\,Z = -\,k\,\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Es läßt sich nun unter der Annahme, die Elektrisierungszahl k sei eine konstante Größe, leicht folgende Gleichung bilden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = \frac{\varrho}{k}.$$

Von früher her (§ 6) wissen wir aber, daß

$$\Delta V = -4\pi\varrho$$

ist. Wir erhalten somit

$$-4\pi\varrho = \frac{\varrho}{k}$$

oder

$$(1 + 4\pi k)\varrho = 0 .$$

Da k einen endlichen positiven Wert hat, so folgt

$$\varrho = 0 .$$

Das heißt: im Innern eines Dielektrikums entsteht unter dem Einfluß äußerer elektrischer Kräfte keine freie Elektrizität.

§ 23. Leiter, die von einem Dielektrikum umgeben sind.

Ein Leiter (Fig. 11) besitze die Elektrizitätsmenge E und befinde sich in der Mitte eines sehr großen kugelförmigen Dielektrikums. Die Menge E wirkt verteilend auf das Dielektrikum. Es wird daher (§ 22) auf der Oberfläche der Kugel eine Elektrizitätsmenge E' frei und ebenso an der Oberfläche des Leiters die Menge $-E'$, da wir annehmen, daß die Elektrisierungszahl k an allen Punkten des Isolators dieselbe Größe hat. Der Radius der Kugel sei a. Die Kraft, welche daher an der Oberfläche der Kugel wirkt, ist $\frac{E - E'}{a^2}$, da wir bei sehr großem a annehmen können, die gesamte Elektrizitätsmenge E und damit auch $-E'$ sei im Mittelpunkt der Kugel vereinigt. Auf der Oberfläche haben wir daher die Dichte

$$\sigma = k\frac{E - E'}{a^2} .$$

Da aber

$$E' = 4\pi a^2 \sigma ,$$

so folgt weiter

$$\frac{E'}{4\pi a^2} = k \frac{E - E'}{a^2}$$

oder

$$E' = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} E .$$

Fig. 11.

Es sei die Kapazität unseres Leiters C. Er stände also (§ 13) ohne umhüllendes Dielektrikum auf dem Potential

$$V = \frac{E}{C} ,$$

hingegen bei Anwesenheit des Dielektrikums gilt für jeden Punkt im Innern des Leiters das Potential

$$V' = \frac{E - E'}{C} + \frac{E'}{a} ,$$

was allerdings nur unter der Voraussetzung gültig ist, daß a gegenüber den Dimensionen des Leiters sehr groß ist; denn nur dann haben wir eine gleichförmige Verteilung der freien Elektrizität auf der Oberfläche der Kugel. Ist aber a sehr groß, so können wir $\frac{E'}{a}$ vernachlässigen und erhalten

$$V' = \frac{E - E'}{C}.$$

Um daher das alte Potential V wiederzuerhalten, haben wir unserm Leiter noch weiter Elektrizität zuzuführen. Das besagt aber nichts anderes, als: die Kapazität eines Leiters wird durch das Umhüllen mit einem Dielektrikum erhöht. Führen wir zwei verschiedenen Leitern die gleiche Elektrizitätsmenge zu, so verhalten sich (§ 13) ihre Potentiale V und V' wie umgekehrt die zugehörigen Kapazitäten C und C'. Es ist also

$$\frac{C'}{C} = \frac{V}{V'}.$$

Wenden wir dies auf unsern Fall an, so ist

$$V = \frac{E}{C}, \qquad V' = \frac{E - E'}{C},$$

somit

$$\frac{C'}{C} = \frac{E}{E - E'}$$

oder

$$C' = (1 + 4\pi k)\, C.$$

Die Zahl

$$1 + 4\pi k = \varepsilon,$$

welche das Verhältnis der Kapazitäten angibt, ist nichts anderes als die Dielektrizitätskonstante.

§ 24. Wirkung des Dielektrikums in einem Kondensator.

Was wir im vorhergehenden Paragraphen für einen Leiter gefunden haben, können wir unmittelbar auf einen Kondensator übertragen, dessen Raum zwischen den beiden Belegungen mit einem Dielektrikum ausgefüllt ist. Die Kraft, welche von der einen Belegung AB (Fig. 12) auf die Mengeneinheit der Elektrizität ausgeübt wird, ist ohne Zwischenmittel $4\pi\sigma$, wenn wir unter σ wieder die Flächendichte der Elektrizität auf AB verstehen. Ist ein Dielektrikum vorhanden, so wird sich an AB eine Elektrizitätsmenge von der Dichte $-\delta$ ausscheiden, welche wir nach der Gleichung

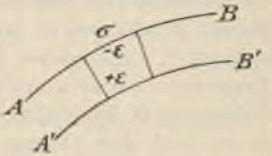

Fig. 12.

$$\delta = 4\pi k(\sigma - \delta)$$

finden, da ja dann $4\pi(\sigma - \delta)$ die auf das Dielektrikum wirkende Kraft ist. Die neue Dichte ist somit, wie leicht zu finden,

$$\sigma' = \sigma - \delta = \sigma\left(1 - \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k}\right) = \frac{\sigma}{1 + 4\pi k}.$$

Danach erhalten wir auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden Paragraphen, daß bei Vorhandensein des ausfüllenden Dielektrikums die Kapazität des Kondensators $1 + 4\pi k = \varepsilon$ mal größer ist. Aus diesem Beispiel erkennen wir also unmittelbar, daß $1 + 4\pi k$ als die Dielektrizitätskonstante anzusehen ist.

Wir können uns die Sache auch folgendermaßen zurechtlegen. Bringen wir in einen leeren Raum, der ein elektrisches Feld darstellt, einen Isolator, so zeigt sich, daß die Dichte der Kraftlinien im Isolator größer ist als im leeren

Raum. Man kann sich dies nach § 21 so vorstellen, daß in den kleinsten Teilchen des Isolators unter dem Einfluß der elektrischen Kräfte eine Elektrisierung durch Verteilung entsteht, derart, daß sich positive Elektrizität in der Richtung der Kraftlinien, negative entgegengesetzt verschiebt. Von Teilchen zu Teilchen werden nun von den positiven Massen Kraftlinien zu den negativen führen, und so die ursprünglich vorhandenen Kraftlinien des Feldes vermehren. Bezeichnen wir die ursprüngliche Intensität des elektrischen Feldes mit $\mathfrak{E}$, die Dichte der Kraftlinien im Isolator mit $\mathfrak{D}$, so ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}\,.$$

Der Größe $\mathfrak{D}$ hat man die Namen dielektrische Polarisation, dielektrische Verschiebung und elektrische Erregung gegeben.

Es lassen sich jetzt leicht verschiedene Fälle überblicken. Ein Körper vom Potential V erniedrigt sein Potential beim Eintauchen in ein ausgedehntes Dielektrikum auf $\frac{V}{\varepsilon}$, die Kraft $\mathfrak{E}$ wächst aber auf $\varepsilon\mathfrak{E}$. Da nun die Kraft gleich der negativen Ableitung des Potentials nach der gegebenen Richtung ist, so haben wir für die Kraft

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V}{\varepsilon}\right) = -\frac{\partial V}{\partial s}\,.$$

In diesem Fall ändert das Dielektrikum die Kraft $\mathfrak{E}$ nicht. Tauchen wir zwei kleine Kugeln ein, welche die Elektrizitätsmengen e bzw. e' tragen, so ist in der Entfernung r von e die Feldstärke $\frac{e}{r^2}$. Die Menge, die jetzt auf der zweiten Kugel sitzt, ist aber nur $\frac{e'}{\varepsilon}$, folglich ist die Kraft, die e auf e' ausübt, $\frac{e\,e'}{\varepsilon\,r^2}$. Bringen wir aber die beiden Kugeln auf ihr

ursprüngliches Potential, so erzeugt die erste in der Entfernung r eine Feldstärke $\frac{\varepsilon e}{r^2}$, die auf die Menge e' der zweiten Kugel wirkt. Die Kraft ist also in diesem Fall $\varepsilon \frac{e e'}{r^2}$.

Die Kapazität eines Plattenkondensators mit Dielektrikum ist

$$C = \frac{\varepsilon f}{4 \pi \delta}$$

(§ 15). Laden wir den Kondensator auf das Potential V, so nimmt er die Elektrizitätsmenge

$$E = CV = \frac{\varepsilon f V}{4 \pi \delta}$$

auf. Seine Energie ist (§ 17)

$$A = \frac{EV}{2} = \frac{\varepsilon f V^2}{8 \pi \delta} = \frac{\varepsilon f \delta V^2}{8 \pi \delta^2}.$$

Es ist aber

$$\frac{V}{\delta} = \mathfrak{E}$$

die im Dielektrikum wirkende elektrische Kraft. Folglich ist

$$A = \frac{\varepsilon v}{8 \pi} \mathfrak{E}^2,$$

wenn wir unter

$$v = f \delta$$

das Volumen verstehen, welches das Dielektrikum ausfüllt. Für ein Volumelement können wir also schreiben:

$$dA = \frac{1}{8 \pi} \varepsilon \mathfrak{E}^2 dv$$

und für einen beliebigen Raum:

$$A = \frac{1}{8 \pi} \int \varepsilon \mathfrak{E}^2 dv.$$

§ 25. Analogien zwischen der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik, Brechung der Kraftlinien.

Für einen stationären Zustand der Wärmeströmung gilt die Gleichung (Bd. II, § 35)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

vorausgesetzt, daß wir es mit einem isotropen Körper zu tun haben. Für die Grenzfläche zweier verschiedener Körper haben wir jedoch

$$K \frac{du}{dn} = K' \frac{du'}{dn},$$

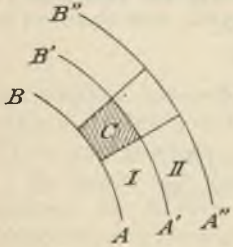

Fig. 13.

wenn wir unter u die Temperatur, K die Wärmeleitungsfähigkeit, $\frac{du}{dn}$ das Temperaturgefälle in der Richtung der Normalen der Trennungsfläche verstehen. Die erste Gleichung gilt nun ohne weiteres auch für die Elektrostatik in allen Punkten eines elektrischen Feldes, wo keine freien Massen vorhanden sind, wenn wir unter u das Potential verstehen. Aber auch die zweite Gleichung findet ihr Analogon. Denken wir uns, es stoßen zwei verschiedene Isolatoren I und II von den Elektrisierungszahlen k und k' in einer Fläche $A' B'$ (Fig. 13) zusammen, und es wirken in ihnen elektrische Kräfte. Zerlegen wir diese für einen Punkt der Grenzfläche in Komponenten senkrecht zur Fläche und in derselben, so rufen natürlich die in die Fläche selbst fallenden Komponenten keine freie Elektrizität in dem betrachteten Punkt hervor. Die senkrechten Kraftkomponenten sind für die verschiedenen Medien $-\frac{\partial V}{\partial n}$

und $-\frac{\partial V'}{\partial n}$. In der Grenzfläche werden daher nach § 22 Elektrizitätsmengen von den Dichten

$$\sigma = -k\frac{\partial V}{\partial n} \text{ und } \sigma' = k'\frac{\partial V'}{\partial n}$$

frei. Die freie Elektrizität in dem betrachteten Punkt der Grenzfläche hat somit die Dichte

$$\sigma + \sigma' = -k\frac{\partial V}{\partial n} + k'\frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Nun ist nach § 7

$$\frac{\partial V'}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi(\sigma + \sigma') = 4\pi\left(k\frac{\partial V}{\partial n} - k'\frac{\partial V'}{\partial n}\right),$$

woraus folgt

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial V}{\partial n} = (1 + 4\pi k')\frac{\partial V'}{\partial n}$$

oder

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial n} = \varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Steht die Richtung der Kraftlinien nicht senkrecht zur Trennungsfläche der beiden Medien, so muß die Komponente T in der Trennungsfläche wegen der Kontinuität für beide Medien dieselbe sein. Die senkrechten Komponenten sind aber $-\frac{\partial V}{\partial n}$ und $-\frac{\partial V'}{\partial n}$. Schließt die Richtung der Kraft mit der Normalen die (spitzen) Winkel ϑ bezüglich ϑ' ein, so ist

$$T = -\frac{\partial V}{\partial n}\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\partial V'}{\partial n}\operatorname{tg}\vartheta'.$$

Da aber nach dem Früheren

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} = \varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial n},$$

so

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Diese Gleichung können wir das Brechungsgesetz der Kraftlinien nennen.

Die Gleichungen der Elektrostatik gelten also auch für die Wärmeleitung, wenn wir, wie wir oben sahen, unter ε die Wärmeleitungsfähigkeit und unter V die Temperatur verstehen. Wir können somit ohne weiteres Probleme der Wärmeleitung auf die Elektrostatik und umgekehrt übertragen. Die Leiter der Elektrizität sind dabei als Dielektrika von unendlich großen Dielektrizitätskonstanten aufzufassen. Wie also in einem Leiter das Potential in allen Punkten gleich groß ist, so ist in einem Körper von unendlich großer Wärmeleitungsfähigkeit auch die Temperatur konstant. Für die Rechnung sind Äquipotentialflächen und Flächen gleicher Temperatur, Kraftlinien und Strömungslinien gleichbedeutend. Wir fanden auch zwischen der Flüssigkeits- und Wärmeströmung formale Analogien (Bd. II, § 32). Sie bestehen natürlich gleicherweise zwischen den Erscheinungen der Flüssigkeitsströmung und der Elektrostatik.

Magnetismus.

§ 26. Grunderscheinungen — Coulombs Gesetz.

Wir erkennen die magnetischen Kräfte an ihrer anziehenden Wirkung auf Eisen. Zwei Stellen eines Magnets pflegen in der Regel besonders kräftig zu wirken, wir nennen

sie die Pole, weil sie entgegengesetzte Eigenschaften besitzen. Hängen wir nämlich den Magneten frei beweglich auf, so stellt sich die Verbindungslinie der beiden Pole immer in der Richtung Nord-Süd ein, und wir nennen den nach Norden zeigenden Pol den Nordpol, den andern den Südpol. Der Nordpol eines Magnets stößt den Nordpol eines andern ab, zieht aber den Südpol an; gleicherweise stößt auch der Südpol des einen den Südpol des andern ab. Gleichnamige Pole stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Lange Stahlnadeln lassen sich so magnetisieren, daß fast nur die Enden Magnetismus zeigen. Mit solchen Nadeln fand Coulomb das Gesetz, daß sich zwei gleichnamige Magnetpole mit einer Kraft abstoßen, welche verkehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung ist und direkt proportional dem Produkt der magnetischen Massen beider Pole. Wir haben somit genau dasselbe Gesetz wie bei elektrostatischen Kraftwirkungen (§ 1), können es deshalb auch in die Form

$$K = \frac{m\,m'}{r^2}$$

kleiden. Damit ist schon eine bestimmte Maßeinheit für die Menge des Magnetismus gegeben. Da dieses Maß auch bei den magnetischen Wirkungen des elektrischen Stroms Anwendung findet (§§ 38—40), so nennt man es, falls alle Größen im (C-G-S)-System angegeben werden, das absolute elektromagnetische Maß.

§ 27. Magnetisches Feld — Erdmagnetismus — Deklination — Inklination — magnetisches Moment.

Aus der Übereinstimmung des Kraftgesetzes zwischen zwei magnetischen Massen mit jenem für die Elektrizität läßt sich leicht erkennen, daß man viele Begriffe der Elek-

trostatik ohne weiteres auf den Magnetismus übertragen kann. Jede magnetische Masse erzeugt ein Kraftfeld, welches wir durch magnetische Kraftlinien (§ 16) darstellen können, deren Zahl pro Flächeneinheit die Größe der magnetischen Kräfte gibt. Von jeder Masse m gehen $4\pi m$ Kraftlinien aus. Positive magnetische Massen suchen sich in der Richtung der Kraftlinien, negative entgegengesetzt zu bewegen.

Da jeder Magnet sich in der Richtung von Nord nach Süd einzustellen sucht, müssen wir den uns umgebenden Raum selbst als ein magnetisches Feld ansehen, und zwar zeigt sich, daß bei möglichster Fernhaltung von Eisen und ähnlichen Substanzen, die vom Magneten stark angezogen werden, wir es in einem mäßig großen Raum mit einem homogenen Feld (§ 22) zu tun haben. Wir sprechen vom Erdmagnetismus und vom magnetischen Feld der Erde. Die Vertikalebene, in welche sich eine nach allen Richtungen frei bewegliche, im Schwerpunkt aufgehängte Magnetnadel einstellt, nennen wir den magnetischen Meridian, den Winkel, welchen dieser mit dem astronomischen Meridian einschließt, die Deklination, den Neigungswinkel der Nadel zum Horizont die Inklination.

Da sich in einem magnetischen Feld der positive und negative Magnetismus in entgegengesetzter Richtung zu bewegen sucht, müßte sich ein Körper, welcher die eine Art Magnetismus im Überschuß besitzt, nach der entsprechenden Richtung bewegen. Eine solche Bewegung konnte aber noch an keinem Magneten nachgewiesen werden. Wir müssen deshalb annehmen, daß in jedem Magneten ebensoviel positiver als negativer Magnetismus vorhanden ist.

Wir wollen nun die Stärke des magnetischen Felds der Erde mit E bezeichnen. Wir können E in eine vertikale

und eine horizontale Komponente zerlegen. Erstere ist

$$V = E \sin i ,$$

letztere

$$H = E \cos i ,$$

wenn wir unter i den Inklinationswinkel verstehen. Auf den Magnetpol m (Fig. 14) wirkt daher vertikal die Kraft $M V$, horizontal $m H$. Dieselben Kräfte, nur in entgegengesetzter Richtung, greifen in $-m$ an. Ist der Magnet um O drehbar, so erzeugen die Kräfte das Drehungsmoment (Bd. I, § 28)

$$m V l \cos \varphi - m H l \sin \varphi ,$$

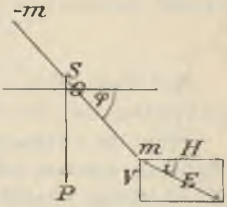

Fig. 14.

wenn wir l die Entfernung der beiden Magnetpole nennen. Der Schwerpunkt des Magnets sei in S in der Entfernung d von O. Das Gewicht des Magnets sei P. Dann erzeugt dieses das Drehungsmoment $-P d \cos \varphi$, wenn φ der Winkel der magnetischen Achse, d. i. der Geraden $m m'$, mit dem Horizont ist. Soll sich der Magnet somit im Gleichgewicht befinden, so muß

$$m V l \cos \varphi - m H l \sin \varphi - P d \cos \varphi = 0$$

sein. Dabei ist also vorausgesetzt, daß die Drehachse des Magnets senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht. Die Größe

$$m l = M$$

nennt man das Moment des Magnets oder das magnetische Moment. Aus der letzten Gleichung erhalten wir leicht

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M V - P d}{M H}$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{V}{H} - \frac{P\,d}{MH} = \frac{E\sin i}{E\cos i} - \frac{P\,d}{MH} = \operatorname{tg} i - \frac{P\,d}{MH}.$$

Wenn wir nun die Nadel ummagnetisieren, so werden die Pole vertauscht. Dann wirkt das Moment des Schwerpunkts entgegengesetzt und wir bekommen

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg} i + \frac{P\,d}{MH},$$

folglich

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{2}.$$

Auf diese Weise bestimmt man mit Hilfe der Inklinationsnadel die Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Steht die Drehachse nicht senkrecht zum magnetischen Meridian, sondern schließt die Schwingungsebene mit dem Meridian den Winkel ψ ein, so kann, vorausgesetzt, daß die Achse horizontal steht, nicht mehr die gesamte Horizontalkraft H wirken, sondern nur die Komponente $H\cos\psi$, und die Gleichgewichtsbedingung wird

$$MV\cos\varphi - MH\cos\psi\sin\varphi - P\,d\cos\varphi = 0$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MV - P\,d}{MH\cos\psi}.$$

Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ wird $\cos\psi = 0$, demnach $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die Magnetnadel stellt sich somit vertikal, wenn die Schwingungsebene des Magnets senkrecht zum Meridian steht. Auf diese Weise kann man also auch ohne Deklinationsnadel die Richtung des magnetischen Meridians auffinden.

§ 28. Potential eines Magnets.

Wir nahmen bisher immer an, ein Magnet bestehe aus zwei punktförmigen magnetischen Massen. In einem homogenen magnetischen Feld ist dies immer gestattet, da ja dann sämtliche Massen im Massenmittelpunkt vereinigt gedacht werden können (Bd. I, § 21). Wir können daher den Magnet immer durch zwei punktförmige Massen, welche gleich groß, aber entgegengesetzt sind, ersetzen. Diese Massen $+m$ und $-m$ (Fig. 15) seien vom Punkt P um r_1 bezüglich r_2 entfernt. Wie bei elektrischen Massen können wir nun auch hier vom Potential der magnetischen Massen auf den Punkt P sprechen. Es wird

$$V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$$

sein; denn es wäre ja die Kraft, welche m auf die positive magnetische Masseneinheit in P ausübt, gleich $\frac{m}{r_1^2}$ und ebenso die Kraft von $-m$ gleich $-\frac{m}{r_2^2}$. Die zugehörigen Potentiale sind also $\frac{m}{r_1}$ und $-\frac{m}{r_2}$, und die Summe beider ist das Potential V des Magnets auf den Punkt P.

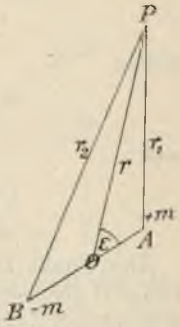

Fig. 15.

Halbieren wir die Strecke $AB = \lambda$ in O und setzen wir $OP = r$, so folgt

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} - r\lambda\cos\varepsilon\,,$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\lambda^2}{4} + r\lambda\cos\varepsilon\,.$$

Es ergibt sich ferner

$$\frac{1}{r_1} = \left(r^2 - \lambda\, r \cos\varepsilon + \frac{\lambda^2}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda}{r}\cos\varepsilon + \frac{\lambda^2}{4\,r^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\lambda}{2\,r}\cos\varepsilon\right),$$

wenn wir voraussetzen, daß λ gegen r eine kleine Größe ist, so daß wir nur die erste Potenz von $\frac{\lambda}{r}$ zu berücksichtigen brauchen. Gleicherweise erhalten wir

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda}{2\,r}\cos\varepsilon\right),$$

mithin

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda\cos\varepsilon}{r^2}$$

und

$$V = \frac{m\,\lambda\cos\varepsilon}{r^2} = \frac{M\cos\varepsilon}{r^2}.$$

Der Punkt P habe nun die Koordinaten x, y, z, der Punkt O gleicherweise a, b, c. Ferner schließe die Gerade AB mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel f, g, h ein. Dann gilt

$$\cos\varepsilon = \frac{x-a}{r}\cos f + \frac{y-b}{r}\cos g + \frac{z-c}{r}\cos h,$$

und es wird

$$V = \frac{M\,(x-a)\cos f + M\,(y-b)\cos g + M\,(z-c)\cos h}{r^3}.$$

Die Größe $AB = \lambda$ können wir nun auf die drei Koordinatenachsen projizieren und erhalten so die Längen $\lambda\cos f$,

$\lambda \cos g$, $\lambda \cos h$. Folglich ist es erlaubt,

$$m \lambda \cos f = M \cos f = A\,,$$
$$m \lambda \cos g = M \cos g = B\,,$$
$$m \lambda \cos h = M \cos h = C$$

die Komponenten des magnetischen Moments bezüglich der drei Achsen zu nennen, und es wird so das Potential

$$V = \frac{A\,(x-a) + B\,(y-b) + C\,(z-c)}{r^3}\,. \tag{8}$$

Wir wollen dieses Potential jetzt benützen, um die magnetischen Kräfte zu berechnen, welche ein Magnet, der im Ursprung eines Koordinatensystems (Fig. 16) so liegt, daß seine beiden Pole in der x-Achse und gleichweit vom Ursprung entfernt sind, in einem Punkt D äußert. Es sind dann die Momente $B = C = 0$, während $A = M$ das Gesamtmoment bedeutet. Es ist weiter $a = b = c = 0$, mithin

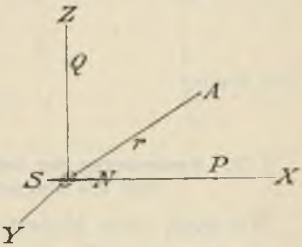

Fig. 16.

$$V = \frac{M\,x}{r^3}\,.$$

Für die magnetischen Kräfte erhalten wir sonach

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{M}{r^3} + \frac{3\,M\,x^2}{r^5}\,,$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3\,M\,x\,y}{r^5}\,,$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{3\,M\,x\,z}{r^5}\,,$$

was ohne weiteres verständlich ist, wenn wir überlegen, daß

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 ,$$

also

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} , \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} , \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

ist. Befindet sich der Punkt in der x-Achse, etwa in P, so wird $x = r$, also

$$X = \frac{2\,M}{r^3} , \qquad Y = Z = 0 .$$

Für einen Punkt in der z-Achse ist $z = r$, somit

$$X = -\frac{M}{r^3}$$

und wieder

$$Y = Z = 0 .$$

§ 29. Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus und des magnetischen Moments.

Wir legen einen Magnet (Fig. 17) so, daß er senkrecht zum magnetischen Meridian MN ist. Er erzeugt dann im Punkt P in der Entfernung r vom Mittelpunkt O des Magnets ein magnetisches Feld von der Stärke $\frac{2\,M}{r^3}$. Dieses Feld setzt sich mit der Horizontalintensität H des Erdfelds zu einem resultierenden Feld zusammen, dessen Größe und Richtung man nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm findet. Die Magnetnadel stellt sich in die Richtung des Felds ein; sie bilde mit dem magnetischen Meridian den Winkel φ, dann ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\,M}{r^3\,H}$$

oder

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2}\operatorname{tg}\varphi .$$

Wir sind also in der Lage, den Quotienten $\frac{M}{H}$ zu bestimmen, erhalten aber keinen Aufschluß über den wahren Wert der Größen M und H. Dies erreichen wir erst durch einen sogenannten Schwingungsversuch. Wir wollen zu dem Zweck unsern Magnet an einem langen Faden aufhängen, so daß er leicht in einer Horizontalebene schwingen kann. Schließt er mit dem magnetischen Meridian den Winkel φ ein, so gibt ihm der Erdmagnetismus ein

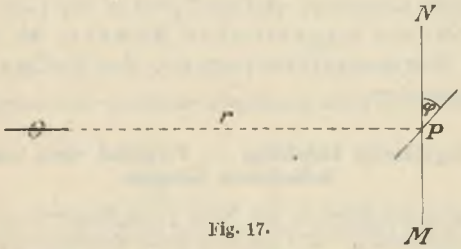

Fig. 17.

Drehungsmoment (§ 27) $- M H \sin\varphi$, und wir erhalten für seine Bewegung die Gleichung

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - MH \sin\varphi$$

(Bd. I, § 28), wenn wir unter K sein Trägheitsmoment verstehen. Sind die Schwingungen nicht groß, so können wir $\sin\varphi = \varphi$ setzen, und die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{MH}{K} \varphi .$$

Das ist aber dieselbe Gleichung wie jene für die Schwingungen eines Pendels (Bd. I, § 9), und wir erhalten für die

Schwingungsdauer

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}},$$

woraus folgt, daß

$$MH = \frac{\pi^2 K}{\tau^2}$$

ist. Wir können also nach der von Gauß angegebenen Methode sowohl den Quotienten $\frac{M}{H}$, als das Produkt MH experimentell bestimmen und sind jetzt in der Lage, sowohl die Größe des magnetischen Moments M, als auch die der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus anzugeben.

§ 30. Magnetische Induktion — Potential eines magnetisch induzierten Körpers.

Bringen wir Eisen in die Nähe eines Magnets, so wird es selbst magnetisch. Wir können diese Erscheinung so auffassen, wie die Elektrisierung eines Dielektrikums, welches wir in ein elektrisches Feld bringen (§ 21). Wir können annehmen, in jeder Molekel werde gleichviel positiver und negativer Magnetismus ausgeschieden usw. und nennen diesen Vorgang „magnetische Induktion". Wir werden als magnetisches Moment der Volumeinheit

$$\mu = kP$$

erhalten, wenn wir unter P die magnetisierende Kraft verstehen, während jetzt k die Magnetisierungszahl heißt. Die Komponenten des Moments μ sind

$$\alpha = kX, \quad \beta = kY, \quad \gamma = kZ,$$

während X, Y, Z die Komponenten von P bedeuten. Das Potential des ganzen Körpers werden wir finden, wenn wir das Potential eines Volumelements suchen und dann über

das ganze Volumen des Körpers integrieren. Das Potential eines Volumelements $da\,db\,dc$ erhalten wir aber leicht nach Gleichung (8). Als magnetisches Moment des Volumelements bezüglich der drei Achsen haben wir

$$A = \alpha\, da\, db\, dc\,,$$
$$B = \beta\, da\, db\, dc\,,$$
$$C = \gamma\, da\, db\, dc\,,$$

folglich als Potential

$$(9) \qquad dV = \frac{\alpha\,(x-a) + \beta\,(y-b) + \gamma\,(z-c)}{r^3}\, da\, db\, dc\,.$$

Dabei ist

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\,.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach a, so finden wir leicht

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r}\,,$$

was wir weiter benützen können, um folgende Gleichung zu bilden:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{x-a}{r^3}\,.$$

Auf ganz dieselbe Weise erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{y-b}{r^3}\,,\quad \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{z-c}{r^3}\,.$$

Diese Größen können wir nun in die Gleichung (9) einsetzen und erhalten dann durch Integration das Potential des gesamten Körpers

$$V = \iiint \left[\alpha\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) + \beta\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\right] da\, db\, dc\,.$$

Es ergibt sich nun weiter

$$\iiint \alpha \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) da\, db\, dc = \iint db\, dc \left[\frac{\alpha}{r} - \int \frac{1}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial a} da\right].$$

Fassen wir ein Oberflächenelement dO unseres Körpers ins Auge, dessen Normale mit den Koordinatenachsen die Winkel f, g, h einschließt, so können wir

$$dO \cos f = db\, dc$$

setzen, gleicherweise

$$dO \cos g = da\, dc\,, \qquad dO \cos h = da\, db\,.$$

Das erlaubt uns, unser Potential folgendermaßen umzuändern:

$$V = \iint \frac{\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h}{r} dO$$
$$- \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right) da\, db\, dc\,.$$

Es zerfällt also im allgemeinen in zwei Teile, deren einer sich bloß auf die Oberfläche, der andere bloß auf das Volumen des Körpers bezieht. Es ist auch unmittelbar klar, daß

$$\alpha \cos f + \beta \cos g + \gamma \cos h = \sigma$$

sein muß, wenn wir unter σ die Oberflächendichte des Magnetismus verstehen, während

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right) = \varrho$$

die Dichte des freien Magnetismus im Innern des Körpers ist (§ 22). Unser Potential wird sonach:

$$V = \iint \frac{\sigma\, dO}{r} + \iiint \frac{\varrho}{r} da\, db\, dc\,.$$

Diesen Ausdruck hätten wir ohne weiteres bilden können, wenn wir von vornherein die Begriffe des freien Magnetismus in der Oberfläche und im Innern eines Körpers aufgestellt hätten, indem er ja nichts anderes besagt als die gewöhnliche Definition des Potentials, daß es gleich ist der Summe sämtlicher vorhandenen Massen, jede einzelne dividiert durch ihre Entfernung von jenem Punkt, für welchen das Potential bestimmt wird.

§ 31. Die homogen magnetisierte Kugel.

Ist eine Kugel homogen magnetisiert, so heißt das, das magnetische Moment der Volumeinheit ist in allen ihren Punkten gleich groß und gleich gerichtet. Wir wollen seine Richtung mit jener der x-Achse eines Koordinatensystems zusammenfallen lassen. Für das magnetische Moment der Volumeinheit gilt also

$$\alpha = \text{konst.}, \quad \beta = \gamma = 0 .$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist nun

$$V = \iiint \frac{\alpha (x - a)}{r^3} \, da \, db \, dc ,$$

wobei wir

$$\frac{x - a}{r^3} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right)$$

oder auch

$$\frac{x - a}{r^3} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$$

setzen können. Sonach wird

$$V = - \iiint \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) da \, db \, dc$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} \iiint \frac{\alpha}{r} \, da \, db \, dc .$$

Es ist dies erlaubt, weil ja nach der Variablen x keine Integration vorkommt. Für die Vollkugel haben wir nun, wenn der Punkt, auf welchen das Potential sich bezieht, außerhalb gelegen ist (§ 4),

$$\iiint \frac{\alpha}{r}\, da\, db\, dc = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{p^3 \alpha}{R},$$

wenn p der Radius der Kugel und R die Entfernung des Kugelmittelpunkts von dem außerhalb gelegenen Punkt ist. Danach finden wir

$$V = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{4\pi\alpha p^3}{3R} = \frac{4\pi\alpha p^3}{3} \frac{x}{R^3},$$

wenn wir den Kugelmittelpunkt in den Ursprung des Koordinatensystems verlegen, indem dann

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x}{R^3}$$

ist. Da α das magnetische Moment der Volumeinheit, $\frac{4\pi p^3}{3}$ das Volumen der Kugel ist, so ist

$$\frac{4\pi p^3 \alpha}{3} = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Kugel. Damit wird das Potential

$$V = \frac{M x}{R^3}.$$

Dasselbe Resultat haben wir aber für einen kleinen Magnet vom Moment M (§ 28) erhalten, dessen Pole in der x-Achse zu beiden Seiten des Ursprungs liegen. Es kann daher die Wirkung einer homogen magnetisierten Kugel

durch einen kleinen Magnet vom selben magnetischen Moment ersetzt werden.

Suchen wir die magnetische Kraft in einem Punkt P (Fig. 18) der Kugeloberfläche, so haben wir

$$x = R \cos \varphi$$

zu setzen, das Potential wird also

$$V = \frac{M}{R^2} \cos \varphi \, .$$

Die Kraft im Punkt P wollen wir in eine Komponente in der Richtung des Radius und eine senkrecht darauf zerlegen. Erstere wird demnach sein

$$-\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2\,M}{R^3} \cos \varphi \, ,$$

letztere

$$-\frac{\partial V}{R\,\partial \varphi} = \frac{M \sin \varphi}{R^3} \, .$$

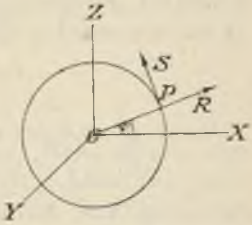

Fig. 18.

Für die x-Achse selbst ist $\varphi = 0$. Wir haben daher nur eine Kraft in der Richtung des Radius. Eine Magnetnadel würde sich also dort senkrecht zur Kugeloberfläche stellen. In der $y\,z$-Ebene hingegen ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dort haben wir also nur eine Kraft parallel zur Kugeloberfläche. Ein ähnliches Verhalten zeigt unsere Erde, wenn wir die Verbindungslinie ihrer beiden magnetischen Pole als die x-Achse auffassen. An den beiden magnetischen Polen steht tatsächlich die Magnetnadel senkrecht, am Äquator horizontal. Doch trifft dies nur annähernd zu. Wir können demnach aus den Beobachtungen auf der Erdoberfläche nicht ohne weiteres auf die Verteilung des Erdmagnetismus

im Innern der Erde schließen, kann ja doch ein kleiner starker Magnet im Kugelmittelpunkt eine homogen magnetisierte Kugel vollständig ersetzen.

Wir wollen nun das Potential unserer homogen magnetisierten Kugel auf einen innerhalb liegenden Punkt M (Fig. 19) berechnen, der vorerst in der x-Achse liegen soll. Da wir im Innern keinen freien Magnetismus haben, so ist $\varrho = 0$ und es wird

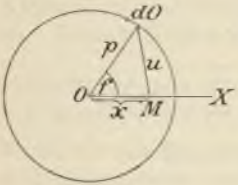

Fig. 19.

$$V = \iint \frac{\sigma\, dO}{u}.$$

Es ist ferner

$$\sigma = \alpha \cos f,$$

daher

$$V = \alpha \iint \frac{\cos f}{u}\, dO.$$

Da um die x-Achse alles symmetrisch ist, so können wir

$$dO = p\, df \cdot 2\pi\, p \sin f = 2\pi\, p^2 \sin f\, df$$

setzen (vgl. § 3). Danach wird

$$V = 2\pi\, p^2 \alpha \int_0^\pi \frac{\cos f \sin f\, df}{u}. \tag{10}$$

Wir haben ferner

$$u^2 = p^2 + x^2 - 2\, p\, x \cos f$$

und durch Differentiation

$$u\, du = p\, x \sin f\, df,$$

während aus der Gleichung für u^2

$$\cos f = \frac{p^2 + x^2 - u^2}{2\, p\, x}$$

folgt. Führen wir diese Größen für $\cos f$ und $\sin f\, df$ in die Gleichung (10) ein, so bleibt uns

$$V = \frac{2\pi p^2 \alpha}{2 p^2 x^2} \int_{p-x}^{p+x} (p^2 + x^2 - u^2)\, du$$

$$= \frac{\pi \alpha}{x^2} \left[(p^2 + x^2)\, u - \frac{u^3}{3} \right]_{p-x}^{p+x} = \frac{4\pi \alpha x}{3},$$

was durch Einsetzen der Grenzen $p - x$ und $p + x$ leicht gefunden wird. Diese sind die Werte des u für die Winkel $f = 0$ und $f = \pi$. Unser Potential ist also der Abszisse x proportional. Die Kraft parallel zur x-Achse wird daher

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi \alpha}{3},$$

während sie senkrecht darauf Null ist. Wenn wir aber eine konstante Kraft in der Richtung der x-Achse und keine senkrecht dazu haben, so heißt das: die Kraftlinien sind parallel. Es gilt daher der Ausdruck unseres Potentials nicht nur für Punkte in der x-Achse, sondern überhaupt für jeden Punkt im Innern unserer Kugel. Für einen Punkt in der Oberfläche wird

$$x = p \cos f.$$

Ferner wissen wir von früher, daß

$$\frac{4\pi p^3 \alpha}{3} = M$$

das magnetische Moment der Kugel ist. Wir können daher

$$4\pi \alpha = \frac{3M}{p^3}$$

setzen und die Gleichung bilden:

$$V = \frac{4\pi\alpha x}{3} = \frac{M p \cos f}{p^3} = \frac{M \cos f}{p^2}.$$

Dieselbe Formel fanden wir aber schon oben, nur ersetzten wir dort p durch R und f durch φ. Die Werte der beiden Ausdrücke für das Potential auf einen Punkt innerhalb und außerhalb werden also, wie es ja auch sein muß, für die Oberfläche der Kugel gleich.

§ 32. Magnetische Induktionslinien — Potential einer Kugel in einem homogenen magnetischen Feld.

Bringen wir einen Körper in ein magnetisches Feld, so wird in ihm Magnetismus induziert, an seiner Oberfläche wird Magnetismus frei. Dieser freie Magnetismus wirkt nun abermals induzierend auf den Körper ein und verändert daher die Lage der magnetischen Kraftlinien sowohl im Innern des Körpers als auch außerhalb. Diese neuen, infolge der Induktion erzeugten Kraftlinien pflegt man daher auch häufig die magnetischen Induktionslinien zu nennen.

Bringen wir eine Kugel in ein homogenes magnetisches Feld, so ist die erste Erscheinung eine homogene Magnetisierung. Von einer solchen Kugel wissen wir aber, daß in ihrem Innern die Kraftlinien parallel laufen. Folglich können auch die frei gewordenen Magnetismen das homogene Feld im Innern der Kugel nur seiner Stärke nach verändern.

Die ursprüngliche Feldstärke sei P. Diese ruft das magnetische Moment der Volumeinheit

$$\alpha = k P \tag{11}$$

hervor, was das Potential

$$V = \frac{4\pi\alpha x}{3}$$

und die Kraft

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi\alpha}{3}$$

auf einen Punkt im Innern der Kugel zur Folge hat. Den wahren Wert des α finden wir also nicht aus der Gleichung (11), sondern aus der Formel

$$\alpha = k(P + X),$$

wobei X jene magnetische Kraft ist, welche vom induzierten freien Magnetismus herrührt. Daraus folgt

$$\frac{\alpha}{k} = P - \frac{4\pi\alpha}{3},$$

was wir weiter umformen können in

$$\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{4\pi}{3}\right) = P,$$

$$\alpha = \frac{P}{\frac{1}{k} + \frac{4\pi}{3}}.$$

Für Substanzen wie Eisen, Nickel usw. ist nun k so groß, daß wir $\frac{1}{k}$ gegenüber $\frac{4\pi}{3}$ vernachlässigen können. Es wird dann

$$\alpha = \frac{3P}{4\pi}.$$

Das magnetische Moment einer Kugel vom Radius p ist nun

$$M = \frac{4\pi}{3} p^3 \alpha = p^3 P.$$

Es ist also gleich dem Produkt aus der 3. Potenz des Radius und der Feldstärke, wenn nur der Körper eine große

Magnetisierungszahl besitzt. Ist hingegen die Magnetisierungszahl wie bei den meisten Körpern sehr klein, so kann $\frac{4\pi}{3}$ gegen $\frac{1}{k}$ vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$\alpha = k\,P\,.$$

§ 33. Satz von Thomson — magnetische Induktionskonstante — formale Analogien.

Bezeichnen wir das Potential im Innern eines Körpers mit V_-, außerhalb mit V_+, die Dichte des freien Magnetismus an der Oberfläche mit σ, so gilt für die Oberfläche die Gleichung (5)

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = -4\pi\sigma\,.$$

Für die Komponenten des magnetischen Moments der Volumeinheit haben wir

$$\alpha = -k\frac{\partial V_-}{\partial x}, \quad \beta = -k\frac{\partial V_-}{\partial y}, \quad \gamma = -k\frac{\partial V_-}{\partial z}\,.$$

Ferner ist

$$\sigma = -k\frac{\partial V_-}{\partial n}\,.$$

Obige Gleichung kann daher geschrieben werden

$$\frac{\partial V_+}{\partial n} - \frac{\partial V_-}{\partial n} = 4\pi k\frac{\partial V_-}{\partial n}$$

oder

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial V_-}{\partial n} = \frac{\partial V_+}{\partial n}\,,$$

eine Gleichung, die zuerst von Thomson aufgestellt wurde. Auch diese Gleichung ist uns schon aus der Theorie der Dielektrika bekannt. Sie existiert ja für die Oberfläche eines

Dielektrikums, welches mit dem freien Raum in Berührung steht; nur ist dort die Größe $1 + 4\pi k$ die Dielektrizitätskonstante, während wir sie hier die magnetische Induktionskonstante oder magnetische Permeabilität μ nennen.

Wir können nach Analogie des Vorgangs in § 24 auch folgende Darstellungsform wählen. Ist die Intensität des induzierenden magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$, die Dichte der Induktionslinien in einem ins Feld gebrachten Körper $\mathfrak{B}$, so ist

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

$\mathfrak{B}$ nennt man die magnetische Induktion oder magnetische Erregung.

Stoßen zwei Körper zusammen mit den Magnetisierungszahlen k und k', so gilt natürlich analog

$$(1 + 4\pi k) \frac{\partial V}{\partial n} = (1 + 4\pi k') \frac{\partial V'}{\partial n}.$$

Diese Gleichung führt uns aber wiederum zur Analogie mit der Wärmeleitung und der Flüssigkeitsströmung (§ 25).

§ 34. Transversal magnetisierter Zylinder im homogen magnetischen Feld.

Wir haben einen unendlich langen Kreiszylinder aus Eisen (Fig. 20), dessen Achse die y-Achse eines Koordinatensystems bilden soll. Der Zylinder befinde sich in einem ursprünglich homogenen magnetischen Feld, dessen Kraftlinien parallel zur x-Achse laufen. Durch die auf dem Zylinder frei werdenden magnetischen Massen wird das homogene Feld gestört; wir wollen die auf diese Weise entstandenen magnetischen Induktionslinien kennenlernen. Die Anschauung ergibt unmittelbar, daß längs einer zur y-Achse parallelen Geraden das Potential einen konstanten Wert haben muß. Nennen wir das Potential im Innern des

Zylinders V_i, außerhalb V_e, so wird sonach

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\partial V_e}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = 0$$

sein. Außerhalb und innerhalb des Zylinders gilt

$$\Delta V = 0\,,$$

da nur an der Oberfläche freie magnetische Massen vorhanden sind. Dies führt zu den Gleichungen

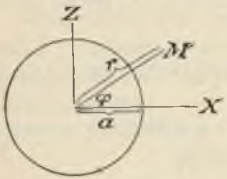

Fig. 20.

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = 0\,.$$

Jede Funktion von $x + z\,i$ ist eine Lösung dieser Gleichung. Wir werden in der Folge sehen, daß die Gleichungen

$$V_e = A\,(x + z\,i) + \frac{B}{x + z\,i}\,,$$

$$V_i = A'\,(x + z\,i) + \frac{B'}{x + z\,i}$$

sich mit den von uns gestellten Bedingungen vertragen, also als Lösungen unserer Aufgaben angesehen werden können. Es muß nun der reelle Teil der von uns aufgestellten Lösung für sich wieder eine Lösung sein, wodurch wir

$$V_e = A\,x + \frac{B\,x}{x^2 + z^2}\,,$$

$$V_i = A'x + \frac{B'\,x}{x^2 + z^2}$$

erhalten.

Betrachten wir das Potential in einem von unserem Zylinder sehr weit entfernten Punkt, so wird $x^2 + z^2$ sehr groß, $\frac{B\,x}{x^2 + z^2}$ sehr klein, daher

$$V_e = A\,x$$

und die Kraft

$$-\frac{\partial V_e}{\partial x} = -A\,.$$

Wir haben also tatsächlich, wie wir es voraussetzten, in weiter Entfernung vom Zylinder ein homogenes magnetisches Feld. Für die Achse des Zylinders wird $x^2 + z^2 = 0$. Da aber V_i nicht unendlich werden kann, so muß $B' = 0$ sein, und es bleibt

$$V_i = A'\,x\,, \qquad -\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A'\,.$$

Also auch im Innern des Zylinders existiert ein homogenes magnetisches Feld. Der Zylinder ist transversal magnetisiert, und zwar laufen die magnetischen Induktionslinien parallel zur x-Achse.

Setzen wir nun

$$x = r\cos\varphi\,,$$

so wird

$$V_e = \left(A\,r + \frac{B}{r}\right)\cos\varphi\,, \qquad V_i = A'r\cos\varphi\,.$$

Für die Oberfläche des Zylinders muß

$$V_e = V_i$$

werden, das heißt, es muß

$$A\,a + \frac{B}{a} = A'\,a \tag{12}$$

sein, wenn wir unter a den Radius des Zylinders verstehen.

Ferner muß

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial n}$$

sein, woraus folgt

$$(13) \qquad (1 + 4\pi k)\, A' = A - \frac{B}{a^2}.$$

Gleichung (12) können wir nun auch noch so schreiben:

$$A + \frac{B}{a^2} = A'.$$

Eliminieren wir aus den beiden letzten Gleichungen $\frac{B}{a^2}$, so ergibt sich leicht

$$A' = \frac{A}{1 + 2\pi k}, \qquad \frac{B}{a^2} = -\frac{2\pi k}{1 + 2\pi k} A.$$

Das magnetische Moment der Volumeinheit des Zylinders ist

$$\alpha = -k\frac{\partial V_i}{\partial x} = -k A' = -\frac{k A}{1 + 2\pi k} = -\frac{A}{\frac{1}{k} + 2\pi}.$$

Wir erhalten also eine ähnliche Formel wie für die Kugel (§ 32).

Ist eine Veränderliche durch eine Gleichung mit komplexen Zahlen gegeben und trennen wir sie in zwei Gleichungen, deren eine nur den reellen, die andere nur den imaginären Bestandteil enthält, so entsprechen diesen Gleichungen Kurvenscharen, deren eine die orthogonalen Trajektorien der andern darstellt. Während also

$$V_i = A' x, \qquad V_e = A x + \frac{B x}{r^2}$$

uns die Niveauflächen des Potentials geben, liefern uns die imaginären Bestandteile

$$U_i = A'z\,, \qquad U_e = A\,z - \frac{B\,z}{r^2}$$

die magnetischen Kraftlinien.

In großer Entfernung vom Zylinder laufen die Kraftlinien parallel zur x-Achse. Wir wollen eine herausheben (Fig. 21), für welche $z = h$ ist. Wir haben dann, da $\frac{Bh}{r^2}$ als sehr klein zu betrachten ist,

$$U_e = A\,h\,.$$

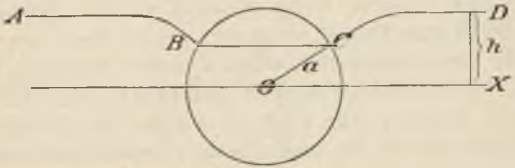

Fig. 21.

Die allgemeine Gleichung der Induktionslinien außerhalb des Zylinders wird daher

$$A\,h = A\,z - \frac{B\,z}{r^2} = A z + \frac{2\pi\,k\,a^2}{(1 + 2\pi\,k)\,r^2}\,A\,z\,,$$

wenn wir den Wert von B dem Obigen entnehmen. Durch Kürzung ergibt sich schließlich

$$h = z + \frac{2\pi\,k a^2}{1 + 2\pi\,k} \cdot \frac{z}{x^2 + z^2}\,.$$

Es sind die magnetischen Induktionslinien somit Kurven dritten Grades. Der Punkt C, in welchem die Induktionslinie die Oberfläche des Zylinders trifft, hat die Ordi-

nate z_1. Für diese ist $x^2 + z^2 = a^2$. Unsere Gleichung wird

$$h = z_1 + \frac{2\pi k}{1 + 2\pi k} z_1 .$$

Bei einem Eisenzylinder ist k so groß, daß wir Eins gegen $2\pi k$ vernachlässigen können, woraus folgt

$$z_1 = \frac{h}{2}.$$

Alle Kraftlinien, welche also im Unendlichen eine Ordinate kleiner als $2a$ haben, gehen durch unsern Zylinder. Das Eisen zieht sozusagen die Kraftlinien gegen sich.

Auf ganz dieselbe Weise könnten wir die Strömungslinien der Wärme finden, wenn wir in einen Raum von konstantem Temperaturgefälle einen Zylinder brächten. Wäre dessen Wärmeleitungsfähigkeit gegenüber jener des umgebenden Raumes sehr groß, so würden die Strömungslinien genau so wie die magnetischen Induktionslinien des Eisens verlaufen.

Wie ein Vollzylinder läßt sich auch ein Hohlzylinder berechnen. Es zeigt sich da, daß im Innern des Hohlraums ein homogenes magnetisches Feld vorhanden ist, welches um so schwächer wird, je stärker die Wände des Zylinders sind. Man nennt diese Erscheinung die magnetische Schirmwirkung des Eisens.

§ 35. Verhalten der Körper von sehr kleiner Magnetisierungszahl im magnetischen Feld.

Bei Körpern von sehr kleiner Magnetisierungszahl können wir die Rückwirkung der induzierten Magnetismen gegenüber den induzierenden Kräften vollständig vernachlässigen. Durch die Kräfte X, Y, Z werden sonach

die magnetischen Momente

$$\alpha = k\,X = -\,k\,\frac{\partial V}{\partial x}\,, \qquad \beta = k\,Y = -\,k\,\frac{\partial V}{\partial y}\,,$$

$$\gamma = kZ = -\,k\,\frac{\partial V}{\partial z}$$

erzeugt. Die Wirkung der Kraft X auf einen kleinen Magnet $n\,s$ (Fig. 22) läßt sich folgendermaßen darstellen. Haben wir im Punkt O mit den Koordinaten x, y, z die Kraft X, so finden wir in n die Kraft

$$X' = X + \frac{\partial X}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\,\zeta\,,$$

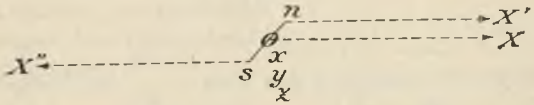

Fig. 22.

wobei

$$\xi = \frac{\lambda}{2}\cos f\,, \quad \eta = \frac{\lambda}{2}\cos g\,, \quad \zeta = \frac{\lambda}{2}\cos h$$

ist. Unter λ ist also die Länge des Magnets, unter f, g, h sind die Winkel, welche er mit den Achsen einschließt, zu verstehen. In s haben wir analog die Kraft

$$X'' = X - \frac{\partial X}{\partial x}\,\xi - \frac{\partial X}{\partial y}\,\eta - \frac{\partial X}{\partial z}\,\zeta\,.$$

Unser Magnet habe in n die magnetische Masse $+\,m$, in s die Masse $-\,m$. Als Kraft auf unsern Magnet haben wir also

$$m\,X' - m\,X'' = 2\,m\left(\frac{\partial X}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial X}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial X}{\partial z}\,\zeta\right)$$

$$= m\,\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos f + \frac{\partial X}{\partial y}\cos g + \frac{\partial X}{\partial z}\cos h\right).$$

Wir denken uns ein Volumelement $dx\,dy\,dz$ unseres Körpers im magnetischen Feld. Sein magnetisches Moment ist $\mu\,dx\,dy\,dz$. Darauf wird die magnetische Kraft gerade so wirken wie auf unseren kleinen Magnet, dessen magnetisches Moment $m\,\lambda$ ist. Wir können daher als Kraft auf das Volumelement

$$dK = \mu\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos f + \frac{\partial X}{\partial y}\cos g + \frac{\partial X}{\partial z}\cos h\right)$$

$$= dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial X}{\partial x}\alpha + \frac{\partial X}{\partial y}\beta + \frac{\partial X}{\partial z}\gamma\right)$$

annehmen, da ja

$$\alpha = \mu\cos f$$

usw. ist.

Setzen wir nun für X den Wert $-\frac{\partial V}{\partial x}$ usf., desgleichen für α, β, γ die Werte aus den eingangs erwähnten Gleichungen, so finden wir für die Kraft

$$k\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$= \frac{k}{2}\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$= \frac{k}{2}\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

$$= dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\,\mathfrak{H}^2}{2}\right).$$

Gleicherweise finden wir für die Kräfte nach der y- und z-Achse,

$$dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k\,\mathfrak{H}^2}{2}\right)$$

und

$$dx\,dy\,dz\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k\mathfrak{H}^2}{2}\right),$$

wobei wir $X^2 + Y^2 + Z^2 = \mathfrak{H}^2$ setzen.

§ 36. Die magnetische Kraft auf einen langen Zylinder, dessen eines Ende sich im magnetischen Feld befindet.

Wir nehmen an, wir hätten das eine Ende eines Zylinders in einem magnetischen Feld, etwa zwischen den zwei Polen eines Hufeisenmagnets (Fig. 23). Für die Kraft, welche der Magnet auf unseren Zylinder parallel zur x-Achse ausübt, erhalten wir nach den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen

$$\iiint dx\,dy\,dz\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k\mathfrak{H}^2}{2}\right)$$

$$= \iint dy\,dz\left(\frac{k\mathfrak{H}_1^2}{2} - \frac{k\mathfrak{H}_0^2}{2}\right).$$

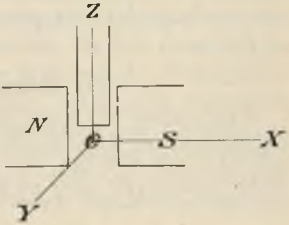

Fig. 23.

Da wir aber zur $y\,z$-Ebene alles symmetrisch haben, so sind auch die magnetischen Kräfte $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{H}_1$ einander gleich. Daher wirkt in der Richtung der x-Achse auf unsern Zylinder keine mechanische (ponderomotorische) Kraft, ebenso in der Richtung der y-Achse. Für die Kraft in der Richtung der z-Achse haben wir jedoch

$$\iint dx\,dy\left(\frac{k\mathfrak{H}''^2}{2} - \frac{k\mathfrak{H}'^2}{2}\right).$$

Dabei ist $\mathfrak{H}'$ die magnetische Kraft, d. i. die Feldstärke, am Ende des Zylinders zwischen den Magnetpolen, $\mathfrak{H}''$ jene am entgegengesetzten Ende. Diese sei gleich Null. Es

bleibt dann bloß

$$-\iint \frac{k\mathfrak{H}'^2}{2}\,dx\,dy = -\frac{q\,k\,\mathfrak{H}'^2}{2},$$

wenn q der Querschnitt des Zylinders ist. Wir setzen hier voraus, daß das magnetische Feld am Ende des Zylinders an allen Punkten den konstanten Wert $\mathfrak{H}'$ hat. $\frac{q\,k\,\mathfrak{H}'^2}{2}$ ist also die mechanische Kraft, mit welcher unser Zylinder in das Feld hineingezogen wird. Diese Kraft läßt sich mit der Waage bestimmen, so daß wir hier eine Methode haben, bei bekannter magnetischer Kraft $\mathfrak{H}'$ die Magnetisierungszahl k, oder bei bekannter Magnetisierungszahl die Feldstärke $\mathfrak{H}'$ zu finden.

§ 37. Magnetische Energie.

Übertragen wir alles, was wir für die elektrischen Erscheinungen in Nichtleitern gefunden haben (§ 24), auf den Magnetismus, so läßt sich die magnetische Energie in irgendeinem Raum darstellen durch

$$A = \frac{1}{8\pi}\int \mu\,\mathfrak{H}^2\,dv,$$

wobei also μ die magnetische Induktionskonstante, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke bedeutet (§ 33).

Elektromagnetismus.

§ 38. Der elektrische Strom — Oersteds Entdeckung — Ampères Schwimmregel — das Gesetz von Biot und Savart.

Halten wir zwei Punkte eines Leiters auf konstantem elektrischen Potential, so strömt beständig Elektrizität von dem Punkt höheren Potentials zu jenem tieferen, wir haben einen konstanten elektrischen Strom.

Oersted machte die Entdeckung, daß eine Magnetnadel durch einen nahe vorüberfließenden elektrischen Strom abgelenkt wird. Die Ablenkung befolgt nach Ampère folgende Regel: Denken wir uns im Strom schwimmend, das Gesicht der Nadel zugewendet, so weicht der Nordpol nach links ab.

Befindet sich unter einem unendlich langen geradlinigen Strom eine Magnetnadel, so wird sie mit einer Kraft abgelenkt, welche verkehrt proportional ihrer Entfernung vom Strom ist. Dieses Gesetz fanden Biot und Savart. Die nähere Untersuchung ergibt, daß das magnetische Feld, welches von einem geradlinigen Strom erzeugt wird, kreisförmige magnetische Kraftlinien besitzt, die mit ihrer Ebene senkrecht auf dem Strom stehen, während ihr Mittelpunkt im Strom selbst liegt. Zwei Ströme, welche also unendlich nahe, aber in entgegengesetzter Richtung und mit gleicher Stärke nebeneinander laufen, werden auf eine Magnetnadel keine Kraft ausüben, da sie sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben müssen.

§ 39. Das magnetische Feld eines Stromelements.

Wir machen die Annahme, daß sich die Wirkung eines Stroms aus der Wirkung der einzelnen Stromelemente berechnen läßt. Stellen wir den Lauf des Stroms durch eine Kurve dar, das heißt, haben wir einen linearen Stromleiter, so können wir ein Kurvenelement als die Lage eines Stromelements ansehen. Wir denken uns einen Kreisstrom. Die durch ein Stromelement im Mittelpunkt des Kreises erzeugte magnetische Feldstärke $d\mathfrak{H}$ wird proportional der Länge ds des Elements und eine Funktion des Radius r des Kreises sein. Wir können letztere durch $f(r)$ darstellen. Da alle Stromelemente vom Mittelpunkt gleichweit entfernt sind, so ist $f(r)$ konstant, und die gesamte

Feldstärke $\mathfrak{H}$ wird $2\pi r f(r)$, da $2\pi r$ der Umfang des Kreises ist. Die Messung ergibt nun, daß diese Feldintensität

$$2\pi r f(r) = \frac{k}{r}$$

ist, wobei k eine Konstante bedeutet. Es ist somit

$$f(r) = \frac{k}{2\pi} \frac{1}{r^2}.$$

In unserm Fall steht jedes Stromelement senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen Feldpunkt und Stromelement. Ist das nicht der Fall, sondern schließt diese Gerade mit dem Stromelement im allgemeinen den Winkel ϑ ein, so kommt nur die Wirkung der senkrechten Stromkomponente $ds \sin\vartheta$ in Betracht. Die Feldstärke, welche somit von einem Stromelement in einem Punkt erzeugt wird, wird der Länge der senkrechten Komponente des Stromelements $ds \sin\vartheta$, der Stärke des Stroms i direkt und dem Quadrat der Entfernung r des Elements vom Feldpunkt verkehrt proportional sein. Die Feldstärke ist somit

$$d\mathfrak{H} = K \frac{ds \sin\vartheta}{r^2} i,$$

wobei unter K die entsprechende Proportionalitätskonstante zu verstehen ist.

Die Stromstärke bestimmt sich durch die Menge der Elektrizität, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert.

§ 40. Die Tangentenbussole — Maß der Stromstärke.

Wir bringen einen kreisförmigen Stromleiter in den magnetischen Meridian; in die Mitte des Kreises eine in einer Horizontalebene bewegliche Magnetnadel. Wird der Leiter

von keinem Strom durchflossen, so stellt sich die Nadel in die Richtung des magnetischen Meridians AB (Fig. 24). Fließt ein Strom, so erzeugt er in der Mitte des Kreises ein Magnetfeld senkrecht zum magnetischen Meridian. Dieses setzt sich nach dem Kräfteparallelogramm mit der Horizontalkomponenten H des Erdmagnetismus (§ 27) zu einem resultierenden Feld zusammen, in dessen Richtung sich die Magnetnadel einstellt. Für den Ablenkungswinkel φ erhalten wir somit die Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{H}}{H}.$$

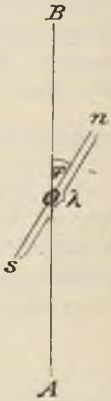

Fig. 24.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber

$$\mathfrak{H} = K\,i \int \frac{\sin\vartheta}{r^2}\,ds\,.$$

Für unsern Fall ist für alle Stromelemente $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $\sin\vartheta = 1$. Ebenso ist der Radius des Kreises r konstant, und es bleibt

$$\mathfrak{H} = \frac{K\,i}{r^2}\int ds\,,$$

wobei

$$\int ds = 2\,\pi\,r$$

der Umfang des Kreises ist. Es ergibt sich somit

$$\mathfrak{H} = K\,\frac{2\,\pi\,i}{r}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\,\pi\,K\,i}{r\,H}$$

oder

$$i = \frac{H r}{2 \pi K} \operatorname{tg} \varphi .$$

Falls wir uns also über die Konstante K einigen, haben wir in unserm Fall eine Methode, die Größe der Stromstärke i zu bestimmen. Wählen wir $K = 1$, so sagen wir, wir haben die Stromstärke in absolutem Maß angegeben. Für die Praxis ist diese Einheit zu groß, man hat deshalb den 10. Teil davon als Einheit angenommen und sie ein Ampere genannt. Ein Strom von 10 Ampere entspricht somit der absoluten Stromeinheit. Um die Stromstärke in Ampere auszudrücken, haben wir also $K = \frac{1}{10}$ zu setzen.

Der von uns zur Bestimmung der Stromstärke benützte Apparat besteht also aus einem kreisförmigen Draht, in dessen Mitte sich eine kleine Magnetnadel befindet. Die Größe

$$\frac{H r}{2 \pi K} = A$$

ist ein Konstante. Die Stromstärke ist sonach durch

$$i = A \operatorname{tg} \varphi$$

bestimmt, d. h. sie ist proportional der Tangente des Ausschlagswinkels der Nadel. Man nennt daher einen derartigen Apparat auch eine Tangentenbussole und A ihren Reduktionsfaktor. Führen wir den Strom zweimal im Kreis herum, so wird die ablenkende Kraft die doppelte, bei n-maligem Umlauf die n-fache. Der Reduktionsfaktor ist dann natürlich $\frac{A}{n}$. Wir können so die Empfindlichkeit einer Tangentenbussole steigern.

§ 41. Potential eines elektrischen Stroms — Vektorpotential.

Wir fanden für die Feldstärke, welche ein Stromelement erzeugt (§ 39), die Größe

$$d\mathfrak{H} = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cdot$$

Die Richtung des Felds ist senkrecht auf der Ebene, in welcher das Stromelement und der Feldpunkt liegen. Sie bilde mit den Achsen eines Koordinatensystems die Winkel λ, μ, ν. Es sind dann die Komponenten der Feldstärke $d\mathfrak{H}$

$$d\alpha = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \lambda \,,$$

$$d\beta = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \mu \,,$$

$$d\gamma = \frac{i \sin \vartheta \, ds}{r^2} \cos \nu \,.$$

Verbinden wir die Endpunkte des Stromelements mit dem Feldpunkt, so erhalten wir ein Dreieck von der Grundlinie r und der Höhe $ds \sin \vartheta$.

$$r \, ds \sin \vartheta = 2 \Delta$$

ist daher der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks. Wir können somit auch

$$d\alpha = \frac{i}{r^3} \cdot 2 \Delta \cos \lambda$$

schreiben, wobei $2 \Delta \cos \lambda$ der doppelte Flächeninhalt der Projektion unseres Dreiecks auf die $y\,z$-Ebene ist. Wir wollen die Koordinaten des Feldpunkts a, b, c nennen, die des Anfangspunkts unseres Elements x, y, z; die des Endpunkts sind somit $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Die doppelte Fläche der Projektion des Dreiecks auf die $y\,z$-Ebene ist daher

$$2 \Delta \cos \lambda = (b - y) \, dz - (c - z) \, dy \,,$$

und es wird

$$d\alpha = \frac{i}{r^3}\left[(b-y)\,dz - (c-z)\,dy\right].$$

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben finden wir ferner

$$d\beta = \frac{i}{r^3}\left[(c-z)\,dx - (a-x)\,dz\right],$$

$$d\gamma = \frac{i}{r^3}\left[(a-x)\,dy - (b-y)\,dx\right].$$

Da

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2, \tag{14}$$

so ist

$$\frac{b-y}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)$$

usw. Unsere Gleichungen werden daher:

$$d\alpha = -i\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dz + i\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dy$$

usw. Durch Integration erhalten wir

$$\alpha = -i\int\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dz + i\int\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dy$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dz}{r} + i\frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dy}{r}.$$

Wir wollen nun

$$i\int\frac{dx}{r} = A, \quad i\int\frac{dy}{r} = B, \quad i\int\frac{dz}{r} = C \tag{15}$$

einführen. Es bestehen dann die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b}, \quad \beta = \frac{\partial C}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial c}, \quad \gamma = \frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a}. \tag{16}$$

Existiert ein Potential V, so daß $\alpha = -\frac{\partial V}{\partial a}$ usw. wird, dann muß

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial b} = 0 \tag{17}$$

sein usw. Wir haben nun

$$\frac{\partial \beta}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial b} = \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial c} - \frac{\partial^2 B}{\partial b \partial c} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2}$$

$$= \frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c}\right).$$

Nach der Bedeutung von $C = i\int \frac{dz}{r}$ ist die Summe

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = 0,$$

wenn der Feldpunkt nicht im Strom selbst liegt, da dann (§ 5)

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

ist. Die Summe

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c}$$

$$= i\int\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)dx + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)dy + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)dz\right]$$

$$= -i\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)dz\right]$$

$$= -i\int d\left(\frac{1}{r}\right) = i\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Die Gleichung (17) wird also nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{konst.}$$

ist. Da nach der Erfahrung jeder konstante Strom ein geschlossener ist, für welchen wegen des mit dem Anfangswert zusammenfallenden Endwerts von r

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0$$

ist, so ist obige Bedingung immer erfüllt, d. h. es existiert immer ein Potential.

Liegt der Feldpunkt im Strom selbst, so können wir unseren Leiter nicht mehr als linear auffassen. Die Stromstärke wird dann

$$i = q\,D\,,$$

wenn wir D die Dichte des Stroms, q den Querschnitt des Leiters nennen. Ferner wird

$$C = i\int\frac{dz}{r} = \int\frac{D\,q\,dz}{r} = \int\frac{D\,q}{r}\cdot\frac{dz}{ds}\,ds\,.$$

Wir können

$$D\,\frac{dz}{ds} = w$$

die Komponente der Stromdichte parallel zur z-Achse nennen. Ebenso haben wir parallel zur x- und y-Achse die Komponenten der Stromdichte

$$u = D\,\frac{dx}{ds}\,, \qquad v = D\,\frac{dy}{ds}\,.$$

Ferner kann das Volumelement $q\,ds$ durch $dx\,dy\,dz$ ersetzt werden. Es wird daher

$$C = \iiint\frac{w}{r}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Dieser Ausdruck hat die Form des Potentials für Kräfte, welche verkehrt proportional dem Quadrat der Entfernung wirken, und wir wissen (§ 6), daß dann

$$\frac{\partial^2 C}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial c^2} = -4\pi w$$

ist. Daher werden für diesen Fall auch unsere obigen Gleichungen:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial \beta}{\partial c} - \frac{\partial \gamma}{\partial b}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial \gamma}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial c}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial \alpha}{\partial b} - \frac{\partial \beta}{\partial a}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen geben also die Beziehung zwischen den Stromkomponenten und den Komponenten des magnetischen Felds.

Es sei noch erwähnt, daß man die Ausdrücke A, B, C als die Komponenten einer Größe auffassen kann, die den Namen Vektorpotential führt.

§ 42. Ersatz eines geschlossenen Stroms durch eine magnetische Platte.

Ein kleiner ebener geschlossener Strom liege um den Anfangspunkt eines Koordinatensystems in der yz-Ebene. Seine Koordination seien x, y, z, die eines Feldpunkts a, b, c. Folglich ist

$$r^2 = a^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

da ja $x = 0$ ist. Die Entfernung des Feldpunkts vom Ursprung O sei R, also

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Wir wollen nun die Ausdrücke für A, B, C nach den Gleichungen (15) bilden. Dabei haben wir den Vorteil, daß wir $\frac{1}{r}$ nach dem Taylorschen Lehrsatz in eine Reihe entwickeln können, von welcher wir nur die ersten Glieder in Betracht zu ziehen brauchen, da wir ja y und z als sehr klein annahmen. Wir haben daher

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) z$$

$$= \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right) y - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right) z .$$

Alle höheren Glieder können wir vernachlässigen. Daraus folgt

$$A = i \int \frac{dx}{r} = 0 ,$$

weil $x = 0$ ist, ferner

$$B = \int \frac{i}{R} dy - i \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right) \int y\, dy - i \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right) \int z\, dy .$$

Da wir über einen geschlossenen Strom integrieren, so ist

$$\int dy = \int y\, dy = 0 ;$$

hingegen ist

$$\int z\, dy = - f ,$$

wenn wir unter f die von unserem Strom umflossene Fläche verstehen, indem wir den im Sinn des Uhrzeigers fließenden Strom, von der positiven x-Richtung aus betrachtet, als positiv ansehen. Wir erhalten daher

$$B = i f \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right), \quad C = - i f \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right),$$

wobei C gerade so wie B gebildet wird. Diese Ausdrücke

wollen wir nun in die Gleichungen (16) einsetzen. Es ergibt sich demnach

$$\alpha = \frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = i f \left[\frac{\partial^2}{\partial c^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{R} \right) \right]$$

$$= - i f \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{R} \right),$$

da ja (§ 5)

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left(\frac{1}{R} \right) = 0$$

ist. Gleicherweise ergibt sich

$$\beta = - i f \frac{\partial^2}{\partial a \, \partial b} \left(\frac{1}{R} \right), \qquad \gamma = - i f \frac{\partial^2}{\partial a \, \partial c} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Setzen wir nun

$$i f \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{R} \right) = V,$$

so wird

$$\alpha = - \frac{\partial V}{\partial a}, \quad \beta = - \frac{\partial V}{\partial b}, \quad \gamma = - \frac{\partial V}{\partial c}.$$

Wir können sonach V als das Potential des geschlossenen Stroms auffassen. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{a}{R^3},$$

daher

$$V = - \frac{i f a}{R^3}.$$

Dieselbe Formel haben wir nun auch für das Potential eines kleinen Magnets (§ 28) erhalten, welcher in der x-

Achse im Ursprung O liegt. Nur haben wir dort

$$-if = M$$

gesetzt. Wenn wir also unseren kleinen geschlossenen Strom durch eine magnetische Platte vom magnetischen Moment $M = -\mathrm{i}f$ ersetzen, so haben wir genau dasselbe magnetische Feld. Das negative Vorzeichen ist nur durch die entgegengesetzte Lage der Pole bedingt. Hat die Platte die Dicke δ und die Flächendichte σ, so ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\sigma\,\delta\,f = i\,f$$

das magnetische Moment. Daraus folgt also

$$i = \sigma\,\delta\,.$$

Dieses Resultat läßt sich nun auf einen beliebigen geschlossenen Strom übertragen. Wir können uns nämlich die von einem Strom umschlossene Fläche in sehr viele kleine Flächen zerlegt denken. Alle diese kleinen Flächen sollen von einem Strom i in derselben Richtung umflossen werden. Man sieht dann ohne weiteres, daß sich die Ströme im Innern der Fläche aufheben, da die Grenze von je zwei benachbarten Flächenstücken zweimal vom Strom, und zwar in entgegengesetzter Richtung, durchlaufen wird. Es bleibt also nur der Randstrom übrig. Die kleinen umströmten Flächen können wir aber alle durch magnetische Platten von der Flächendichte σ und der Dicke δ ersetzen, was so zu wählen ist, daß $\sigma\,\delta = i$ wird. Welche Gestalt wir dabei der vom Strom begrenzten Fläche geben, ist völlig gleichgültig.

§ 43. Wirkung einer kreisförmigen magnetischen Platte auf einen Magnetpol.

Wir denken uns eine kreisförmige Scheibe (Fig. 25) in der $y\,z$-Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Ihre Flächendichte sei σ, der Radius h.

Das Potential auf den Punkt M der x-Achse wird sein (§ 7)

$$V = \int_0^h \frac{2\pi\sigma r\,dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \left[2\pi\sigma\sqrt{x^2+r^2}\right]_0^h$$
$$= 2\pi\sigma\left(\sqrt{x^2+h^2} - x\right).$$

Dieses Resultat wollen wir nun auf eine magnetische Platte von der Dicke δ ausdehnen, welche wir so lagern, daß sie mit der negativen Seite in der $y\,z$-Ebene (Fig. 26),

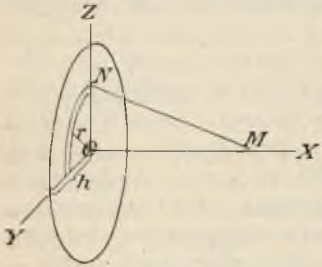

Fig. 25.

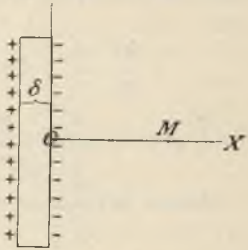

Fig. 26.

mit der positiven links davon ist. Das Potential der rechten Seite auf M ist also

$$V_- = -2\pi\sigma\left[\sqrt{h^2+x^2} - x\right],$$

das der linken

$$V_+ = 2\pi\sigma\left[\sqrt{h^2+(x+\delta)^2} - (x+\delta)\right],$$

das Gesamtpotential somit

$$V = V_+ + V_-$$
$$= 2\pi\sigma\left[\sqrt{h^2+(x+\delta)^2} - x - \delta - \sqrt{h^2+x^2} + x\right]$$
$$= 2\pi\sigma\,\delta\left[\frac{\sqrt{h^2+(x+\delta)^2} - \sqrt{h^2+x^2}}{\delta} - 1\right].$$

Da δ eigentlich unendlich klein ist, so können wir den ersten Teil in der Klammer als den Differentialquotienten

$$\frac{d\sqrt{h^2+x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

ansehen. Wir erhalten somit

$$V = 2\pi\sigma\delta\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - 1\right).$$

Setzen wir hier $\sigma\delta = i$, so haben wir das Potential eines Kreisstroms auf den Punkt M. Die Kraft wird nun

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi i\left[\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{x^2}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= -\frac{2\pi i h^2}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzen wir nun $x = 0$, so wird

$$X = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\pi i}{h}.$$

Das ist tatsächlich dieselbe Formel, welche wir bereits früher für die Wirkung eines Kreisstroms auf einen in seiner Mitte befindlichen Einheitspol fanden (§ 40).

§ 44. Ersatz einer begrenzten magnetischen Platte durch eine unendliche — magnetische Arbeit.

Nach §§ 7, 10 und 43 ist die Kraft, welche eine unendliche Ebene mit der Flächendichte σ auf die Masseneinheit ausübt, unabhängig von der Entfernung des Punktes von der Ebene gleich $2\pi\sigma$. Haben wir demnach eine unendliche ebene magnetische Platte mit den Belegungen $+\sigma$ und $-\sigma$, so ist ihre Wirkung auf einen magnetischen Massenpunkt gleich Null. Mit einer solchen Platte bringen wir nun eine

begrenzte Platte von derselben magnetischen Dichte so zur Deckung, daß die entgegengesetzten Magnetismen aufeinanderfallen (Fig. 27). Die Wirkung dieses Systems auf den Punkt M ist natürlich gerade so wie die der begrenzten Platte allein, da ja die unendliche Platte keine Wirkung hervorbringt. Das System selbst stellt jetzt aber eine unendliche magnetische Platte mit einem Loch von der Größe und Form der begrenzten Platte dar, da sich die zusammenfallenden positiven und negativen Magnetismen in ihrer Wirkung aufheben. Es kann somit eine magnetische endliche Platte durch eine unendliche mit einem Loch von der Form, Größe und Flächendichte σ der endlichen Platte ersetzt werden, wenn gleichzeitig das Vorzeichen der Flächenbelegungen in das entgegengesetzte verwandelt wird.

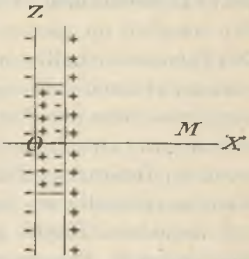

Fig. 27.

Durch diesen Satz sind wir in der Lage, auch dann einen geschlossenen Strom durch eine magnetische Platte zu ersetzen, wenn wir die Wirkung auf einen Punkt wissen wollen, der in die Platte selbst hineinfallen würde. Wir brauchen die begrenzte Platte dann nur mit einer unendlichen zu vertauschen, so daß der Punkt ins Loch zu liegen kommt.

Führen wir eine magnetische Masse durch ein magnetisches Feld, so müssen die magnetischen Kräfte Arbeit leisten. Beschreibt die magnetische Masse eine geschlossene Bahn, so ist die Gesamtarbeit gleich Null, da die Masse dabei ja wieder auf den Anfangswert ihrer potentiellen Energie zurückgebracht wird (§ 19). Teilen wir demnach irgendeine geschlossene Bahn in zwei Teile, so muß die Arbeit der ma-

gnetischen Kräfte in dem einen Teil gleich groß, aber entgegengesetzt bezeichnet der Arbeit im anderen Teil sein.

Wir bringen nun in unmittelbare Nähe der positiven Oberfläche unserer magnetischen Platte, durch welche wir einen geschlossenen Strom ersetzen, die magnetische Masseneinheit und gehen mit ihr um den Rand der Platte herum bis auf die negative Seite, so werden die magnetischen Kräfte dieselbe Arbeit leisten, als wenn wir mit der Masseneinheit direkt durch die Platte hindurch von der positiven zur negativen Seite gehen. Letztere Arbeit ist aber leicht zu bestimmen. Von der positiven Flächeneinheit werden nämlich im ganzen $4\pi\sigma$ Kraftlinien ausgehen (§ 16). Der Symmetrie halber werden $2\pi\sigma$ Kraftlinien nach außen, ebensoviel nach innen gerichtet sein. Dasselbe ist bei der negativen Seite der Platte der Fall; da dort die Kraftlinien aber negativ zu zählen sind, so addieren sie sich zu den positiven im Innern der Platte und ergeben eine Liniendichte oder, was dasselbe ist, eine Kraft $4\pi\sigma$, die von der positiven zur negativen Fläche gerichtet ist. Der Abstand beider Flächen ist δ. Bringen wir somit die Masseneinheit von der positiven zur negativen Seite, so leisten die magnetischen Kräfte die Arbeit $4\pi\sigma\delta$. Dieselbe Arbeit müssen sie aber auch leisten, wenn wir die magnetische Masseneinheit von der einen Seite der Platte um deren Rand herum nach der anderen führen.

§ 45. Das Solenoid.

Eine Reihe paralleler, gleich großer und in gleichen Abständen voneinander befindlicher Kreisströme, wie man sie angenähert in einer Drahtspule besitzt, nennt man ein Solenoid. Wollen wir die Wirkung eines solchen Solenoids auf einen außerhalb liegenden Punkt kennenlernen, so brauchen wir jede Drahtwindung nur durch eine kreisförmige magnetische Platte zu ersetzen. Gehen n Win-

dungen auf die Längeneinheit, so hat eine solche Platte die Dicke $\delta = \frac{1}{n}$ und somit nach § 42 eine Flächendichte

$$\sigma = \frac{i}{\delta} = n\,i\,.$$

Da im Innern des Solenoids die zusammenfallenden positiven und negativen Magnetismen sich in ihrer Wirkung nach außen aufheben, so wirkt das Solenoid auf einen äußeren Punkt wie ein gleich großer Zylinder, dessen Endflächen mit magnetischer Masse von der Dichte $n\,i$ bzw. $-\,n\,i$ belegt sind.

Wollen wir die Wirkung auf einen Punkt im Innern kennen, so brauchen wir nach § 44 jeden Kreisstrom nur durch eine unendliche ebene magnetische Platte mit einem kreisförmigen Loch zu ersetzen. Auf jener Seite, von welcher besehen der Strom im Sinne des Uhrzeigers fließt, hat nach dem Früheren die positive Belegung $\sigma = n\,i$ zu sein. Es heben sich dann wieder sämtliche Magnetismen mit Ausnahme jener der beiden Endflächen auf. Die Achse des Solenoids falle mit der x-Achse eines Koordinatensystems zusammen, von rechts besehen fließe der Strom im Sinne des Uhrzeigers. Es haben dann unsere unendlichen Flächen rechts positiven, links negativen Magnetismus. Die Wirkung einer solchen unendlichen Platte auf einen Punkt in der Achse des Solenoids läßt sich ersetzen durch eine unendliche Platte ohne Loch, welche eine Kraft $2\,\pi\,\sigma$ ausübt, und eine Kreisscheibe, die mit dem Loch zusammenfällt und mit Magnetismen von gleicher Dichte, aber entgegengesetztem Vorzeichen belegt ist.

Denken wir uns ein sehr langes Solenoid, so kann die Wirkung der Kreisscheiben auf einen Punkt im Innern, der weit von den Endflächen entfernt ist, vernachlässigt werden, und es bleiben nur die Kräfte der beiden unendlichen

Ebenen. Diese suchen die positive Masseneinheit nach links zu bewegen, jede mit der Kraft $2\pi\sigma$. Die Kraft im Solenoid ist demnach

$$X = -4\pi\sigma = -4\pi n i.$$

Es ist somit die Kraft unabhängig von der Lage des Punkts, und die Kraftlinien müssen parallel zur x-Achse verlaufen. Das Solenoid ist demnach ein bequemes Mittel, um ein homogenes magnetisches Feld herzustellen, dessen Stärke direkt proportional der Windungszahl per Längeneinheit und der Stromstärke ist.

§ 46. Ohmsches Gesetz — Arbeit des Stroms — Joulesches Gesetz.

Nach § 38 erhalten wir einen konstanten elektrischen Strom, wenn zwei Punkte eines Leiters konstanten Potentialunterschied besitzen. Ohm fand, daß die Stromstärke i dem Potentialunterschied e, den man gewöhnlich die elektromotorische Kraft nennt, proportional ist. Ferner wird sie auch durch die Gestalt und Natur des Leiters bedingt, weshalb Ohm die Beziehung der Stromstärke zur elektromotorischen Kraft in die Formel

$$i = \frac{e}{w}$$

zusammenfaßt, wobei die Konstante w der Widerstand genannt wird. Nach § 19 ist die Arbeit, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn sich eine elektrische Masse m auf einem beliebigen Weg von einem Punkt des Potentials V_1 zu einem vom Potential V_2 bewegt, $m(V_1 - V_2)$. Die Stromstärke ist die in der Sekunde durch den Leiter fließende Elektrizitätsmenge (§ 39). Die Arbeit der elektrischen Kräfte oder, wie man gewöhnlich sagt, die Arbeit des Stroms in der Sekunde ist somit

$$i(V_1 - V_2) = c i.$$

Das Produkt aus Stromstärke und elektromotorischer Kraft ist also eine auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit, ein Effekt.

Hat der Strom sonst keine Arbeit zu leisten, so findet er ein Äquivalent in der Erwärmung des Leiters, und es ist somit die vom Strom in der Sekunde erzeugte Wärmemenge

$$W = e\,i\,,$$

oder wenn wir nach dem Ohmschen Gesetz $e = w\,i$ setzen,

$$W = w\,i^2\,.$$

In dieser Form fand Joule das Gesetz der Wärmewirkung eines Stromes.

Haben wir in die Strombahn eine Zersetzungszelle eingeschaltet, so muß der Strom chemische Arbeit leisten. Diese ist erfahrungsgemäß wiederum pro Sekunde proportional der Stromstärke. Der gesamte Effekt kann daher nach dem Satz von der Erhaltung der Energie (Bd. II, § 37) dargestellt werden durch

$$e\,i = w\,i^2 + p\,i\,,$$

wobei p ein entsprechender Proportionalitätsfaktor ist. Daraus folgt

$$e - p = w\,i\,.$$

p hat also ebenfalls die Dimension einer elektromotorischen Kraft. Man nennt es die elektromotorische Gegenkraft der Zersetzungszelle oder die galvanische Polarisation.

Die elektrische Energie $e\,i$ wird erzeugt durch Umformung einer anderen Energie, so z. B. in den galvanischen Elementen durch Aufwand von chemischer Energie. Das Gesetz von der Konstanz der Energie behält in jedem Falle seine Gültigkeit.

§ 47. Wirkung eines magnetischen Felds auf ein Stromelement.

Nach den §§ 39 und 41 erzeugt ein Stromelement in einem bestimmten Punkt ein magnetisches Feld

$$d\mathfrak{H} = \frac{i\,ds \sin\vartheta}{r^2}.$$

Befindet sich in diesem Punkt ein Magnetpol m, so übt das Element auf ihn eine Kraft

$$dK = \frac{m\,i\,ds \sin\vartheta}{r^2}$$

aus, deren Richtung durch die Ampèresche Schwimmregel (§ 38) gefunden wird. Dieselbe Kraft übt der Magnetpol m auf das Element ids nur in entgegengesetzter Richtung aus.

Wir können die Sache also auch so auffassen, daß ein Stromelement, das sich in einem magnetischen Feld befindet, eine Kraftwirkung erfährt. Die Stärke des von m erzeugten magnetischen Felds ist

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{r^2}.$$

Wir wollen ferner annehmen, das Stromelement stehe senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien, dann ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Somit wird

$$dK = \mathfrak{H}\,i\,ds\,.$$

Wie leicht ersichtlich, können wir für die Richtung der Kraft die Regel aufstellen: Denken wir uns im Strom schwimmend und blicken in der Richtung der Kraftlinien, so erfährt der Strom eine Ablenkung nach der linken Hand. Die Richtungen des Stromelements, der magnetischen Kraftlinien und der Kraftwirkung auf das Stromelement stehen aufeinander senkrecht.

Legt das Stromelement in der Richtung der ponderomotorischen Kraft den Weg dl zurück, so leistet der Strom die Arbeit

$$\mathfrak{H}\, i\, ds\, dl = \mathfrak{H}\, i\, df = i\, dN\,.$$

Dabei ist

$$df = ds\, dl$$

die vom Stromelement bestrichene Fläche und

$$dN = \mathfrak{H}\, df$$

die Zahl der Kraftlinien (§ 16), die vom Element geschnitten werden. Die Arbeit des Stroms ist also gleich dem Produkt aus Stromstärke und Zahl der geschnittenen Kraftlinien, ein Satz, der, wie leicht einzusehen, ganz allgemein gilt, wie immer der Stromleiter im Vergleich zu den Kraftlinien gerichtet ist.

Andererseits ist die geleistete Arbeit gleich der Abnahme der potentiellen Energie des Systems, so daß also die Änderung der potentiellen Energie gleichbedeutend ist mit der Zahl der geschnittenen Kraftlinien multipliziert mit der Stromstärke. Die potentielle Energie bezieht sich natürlich immer auf das System Strom—magnetisches Feld. Man spricht häufig vom Potential eines Stroms auf einen Magnetpol oder vom Potential eines Magnetpols auf einen Strom. Das ist ein und dasselbe und bedeutet immer die potentielle Energie, welche das System Strom—Magnetpol besitzt.

§ 48. Faradays Pendel.

Ein halbkreisförmiger Leiter AB (Fig. 28) sei in den Lagern A, B beweglich. NS sei ein Stabmagnet, dessen gesamte freie nordmagnetische Masse m in N, die südmagnetische $-m$ in S vereinigt sei. Von N als Mittelpunkt des Halbkreises AB gehen $4\pi m$ Kraftlinien aus (§ 16), die der Halbkreis bei einer ganzen Umdrehung alle durch-

schneidet. Der Strom leistet also nach dem Obigen eine Arbeit $4\pi m i$.

Wir setzen nun voraus, der Bügel AB drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Er macht somit in der Sekunde $\frac{\omega}{2\pi}$ Umdrehungen und der Strom leistet in der Sekunde die Arbeit

$$4\pi m i \frac{\omega}{2\pi} = 2 m i \omega .$$

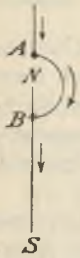

Fig. 28.

Für die geleistete Arbeit gilt somit nach § 46 die Gleichung

$$e i = w i^2 + 2 m i \omega$$

oder

(19) $$e = w i + 2 m \omega .$$

In der Form

$$e - 2 m \omega = w i$$

erkennt man die elektromotorische Gegenkraft $2 m \omega$.

Die hier behandelte Bewegungserscheinung ist verwirklicht in einem der verschiedenen Faradayschen Rotationsapparate, die man gewöhnlich Faradaysche Pendel nennt.

§ 49. Der Induktionsstrom.

Die Gleichung (19) des vorigen Paragraphen bleibt erfahrungsgemäß gültig, wenn ursprünglich keine elektromotorische Kraft vorhanden, also $e = 0$ ist und wir durch irgendein mechanisches Drehmoment dem Leiter eine beliebige Winkelgeschwindigkeit ω erteilen. Dann wird

$$i = -\frac{2 m \omega}{w} ;$$

in dem ursprünglich stromlosen Leiter fließt ein Strom, den man den Induktionsstrom nennt.

Wir können allgemein so sagen: So oft ein geschlossener Leiter magnetische Kraftlinien schneidet, wird in ihm ein Strom induziert. Seine Richtung ist durch die Regel von Lenz gegeben, die folgendes aussagt: Befindet sich ein stromdurchflossener Leiter in einem magnetischen Feld, so suchen ihm die auftretenden Kräfte eine bestimmte Bewegungsrichtung zu erteilen (§ 47). Wird in dieser Richtung der stromlose Leiter durch mechanische Kräfte bewegt, so entsteht in ihm ein Induktionsstrom, der dem früheren Strom entgegengesetzt gerichtet ist.

Die Induktionsströme sind im allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Dem können wir in der Arbeitsgleichung (§ 46) dadurch gerecht werden, daß wir sie auf eine unendlich kleine Zeit dt beziehen und sie in der Form schreiben:

$$e\,i\,dt = w\,i^2\,dt + dA\,,$$

wobei also dA die in der Zeit dt geleistete Stromarbeit ist.

Nach dem Satz von der Erhaltung der Energie ist

$$dA + dP = 0\,,$$

wenn wir unter P den Arbeitswert oder die potentielle Energie eines Systems verstehen. Auf den Induktionsstrom angewendet, ist dA, also auch dP, immer proportional der jeweils vorhandenen Stromstärke i. Wir können daher auch

$$P = i\,V$$

schreiben und erhalten so die Gleichung

$$e\,i\,dt = w\,i^2\,dt - i\,dV$$

oder

$$e + \frac{dV}{dt} = w\,i\,,$$

wobei $\frac{dV}{dt}$ also nichts anderes als die Zahl der vom Stromleiter in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien des ma-

gnetischen Felds bedeutet. V kann somit auch als die Zahl der magnetischen Kraftlinien angesehen werden, die der Stromleiter umschließt, und $\frac{dV}{dt}$ ist nichts anderes als die elektromotorische Kraft, welche durch die Veränderung der gegenseitigen Lage von Strom und Magnet erzeugt wird. Ist in unserem Stromkreis ursprünglich keine elektromotorische Kraft da, so wird in Gleichung (19) $e = 0$, also

$$\frac{dV}{dt} = w\,i\,,$$

was integriert

$$V_1 - V_0 = w \int_0^t i\,dt$$

ergibt. Damit lassen sich alle Fälle der Induktion darstellen, ob sie nun von bewegten Magneten oder Stromleitern ausgeht.

§ 50. Das ballistische Galvanometer.

Das Zeitintegral des Stroms $\int_0^t i\,dt$ kurz andauernder Induktionsströme mißt man mit Galvanometern von sehr geringer Dämpfung und großer Schwingungsdauer, sog. ballistischen Galvanometern. Die Kräfte, welche auf die Magnetnadel vom magnetischen Moment M einwirken, sind der Erdmagnetismus und der Strom. Jener liefert das Drehungsmoment $-H\,M \sin\varphi$, wenn H die Horizontalkomponente ist (§§ 27 und 29); der Strom hingegen erzeugt das Moment $G M\,i \cos\varphi$, wobei die Konstante G dem Galvanometer eigentümlich ist. Der Drehungswinkel φ ist also

durch die Gleichung

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - HM \sin\varphi + GM\, i \cos\varphi$$

gegeben. K ist das Trägheitsmoment der Nadel (Bd. I, § 28).

Der Induktionsstrom sei von so kurzer Dauer, daß die Nadel während dieser Zeit ihre Ruhelage kaum verläßt, so daß wir $\varphi = 0$ setzen können. Es vereinfacht sich dann die Gleichung in

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = GM\, i\,.$$

Durch Integration erhalten wir

$$K \left[\frac{d\varphi}{dt}\right]_0^T = GM \int_0^T i\, dt\,.$$

Für die Zeit $t = 0$ ist die Geschwindigkeit der Nadel ebenfalls Null, wir haben also $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$; hingegen nach der Zeit T, nach welcher der Strom wieder aufhört, soll die Nadel die Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_T = \alpha$ haben. Somit ist

$$K\,\alpha = GM \int_0^T i\, dt\,.$$

Sind die Ausschläge der Nadel nicht groß, so folgt für deren Bewegung nach Ablauf des Induktionsstroms die Gleichung

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - MH\varphi$$

(§ 29). Diese Gleichung läßt sich genau so wie die Pendel-

gleichung (Bd. I, § 9) behandeln. Wir erhalten als Lösung

$$\varphi = A \sin \gamma t ,$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{dt} = A \gamma \cos \gamma t .$$

Dabei ist

$$\gamma = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{MH}{K}} .$$

Nun ist für $t = 0$ $\quad \frac{d\varphi}{dt} = \alpha ,$ also

$$\alpha = \gamma A$$

und

$$\varphi = \frac{\alpha}{\gamma} \sin \gamma t ,$$

folglich der größte Ausschlag der Nadel

$$\varphi_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{GM}{K} \int_0^T i \, dt .$$

Damit ist uns aber alles gegeben, das $\int_0^T i \, dt$ auszuwerten.

§ 51. Der Erdinduktor — absoluter Widerstand.

Der Erdinduktor besteht seinem Wesen nach aus einer kreisförmigen Drahtrolle, welche um einen Durchmesser drehbar ist. Wird sie gedreht, so wird das magnetische Feld der Erde Ströme induzieren, die wir, wenn die Drehung rasch erfolgt und nur kurze Zeit andauert, nach der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methode messen können. Ist $\mathfrak{H}$ die Intensität eines homogenen, magnetischen Felds, f die Fläche eines kreisförmigen Stromleiters, α der

Winkel zwischen Kraftlinienrichtung des magnetischen Felds und Normalen der Strombahn, so werden vom Strom $f \mathfrak{H} \cos \alpha$ Kraftlinien umschlossen. Wir können daher (§ 49)

$$V = f \mathfrak{H} \cos \alpha$$

setzen.

Diese Formel läßt sich ohne weiteres auf den Erdinduktor anwenden. Derselbe sei um eine vertikale Achse drehbar. Die Fläche des Induktors sei F und ψ der Winkel, welchen die Normale zur Fläche F mit der Richtung der Horizontalkomponenten H einschließt. Dann ist

$$V = FH \cos \psi ,$$

folglich

$$\frac{dV}{dt} = w\,i = -FH \sin \psi \frac{d\psi}{dt} ,$$

wenn w der Widerstand der Induktorrolle ist. Diese Gleichung ergibt durch Integration

$$V_1 - V_0 = w \int i\,dt = FH (\cos \psi_1 - \cos \psi_0) .$$

Wählen wir nun ψ_1, und ψ_0 so, daß der Induktor eine halbe Drehung macht und daß zu Beginn als auch zum Schluß der Bewegung die Ebene des Induktors senkrecht zum magnetischen Meridian steht, so ist $\psi_1 = 0$, $\psi_0 = \pi$, folglich $\cos \psi_1 - \cos \psi_0 = 2$ und

$$w \int i\,dt = 2\,FH .$$

Stellen wir die Drehungsachse des Induktors horizontal, so erhalten wir auf gleiche Weise

$$w \int i'\,dt = 2\,FV' ,$$

wenn V' die Vertikalkomponente der gesamten magnetischen Intensität ist. Wir erhalten nun durch ein ballistisches Galvanometer Ausschläge, welche den Werten $\int i\,dt$

und $\int i' \, dt$ proportional sind. Sie seien φ_1 und φ_2. Dann wird

$$2FH = C\varphi_1, \quad 2FV' = C\varphi_2$$

und

$$\frac{V'}{H} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \operatorname{tg} J',$$

wenn wir unter J' die Inklination verstehen (§ 27).

Nach den vorhergehenden Paragraphen ist der größte Ausschlag des ballistischen Galvanometers

$$\varphi_1 = \frac{GM}{\gamma K} \int i \, dt = \frac{2\pi G}{H\tau} \int i \, dt,$$

da ja

$$\gamma = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{HM}{K}}$$

ist. Wir haben somit

$$\int i \, dt = \frac{H\tau}{2\pi G} \varphi_1;$$

nach dem Obigen aber auch

$$\int i \, dt = \frac{2FH}{w},$$

folglich

$$\frac{2FH}{w} = \frac{H\tau}{2\pi G} \varphi_1,$$

$$w = \frac{4\pi FG}{\varphi_1 \tau}.$$

In dieser Formel können wir alle Größen der rechten Seite in absolutem Maß bestimmen. Wir haben somit hier ein Mittel, den elektrischen Widerstand einer Leitung in absolutem Maß auszudrücken.

§ 52. Galvanometerdämpfung.

Die Bewegung einer Magnetnadel bestehe in einer Drehung um ihren Aufhängepunkt. Es muß somit ihr Trägheitsmoment K multipliziert mit der Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ gleich der Summe aller Drehungsmomente sein (Bd. I, § 28). Der Erdmagnetismus übt auf die Magnetnadel das Drehungsmoment $-HM\sin\varphi$ aus (§ 27). Die Magnetnadel hänge in der Mitte eines kreisförmigen geschlossenen Stromleiters. Für ein System aus einem solchen Strom und einem Magnetpol fanden wir die potentielle Energie (§§ 43 u. 47)

$$U = 2\pi i\left(\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - 1\right).$$

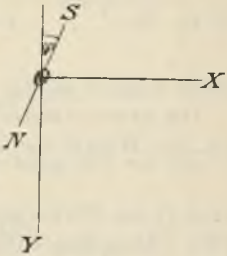

Fig. 29.

Die Entfernung der beiden Pole $+m$ und $-m$ unserer Nadel sei λ, und zwar sei sie so klein, daß wir annehmen können, die Wirkung des Stroms auf die Pole sei geradeso, als lägen sie in der x-Achse (Fig. 29). Die y-Achse habe die Richtung des magnetischen Meridians. Für den Südpol S ist dann die Abszisse

$$x = \frac{\lambda}{2}\sin\varphi,$$

für den Nordpol

$$x = -\frac{\lambda}{2}\sin\varphi.$$

Das Potential des Stroms auf den Magnet wird sich daher zusammensetzen aus dem Potential U_+ auf den Nordpol

und U_- auf den Südpol. Nach dem Obigen ist nun

$$U_+ = 2\pi i \left(\frac{-\frac{\lambda}{2}\sin\varphi}{h} - 1 \right) m ,$$

$$U_- = 2\pi i \left(\frac{\frac{\lambda}{2}\sin\varphi}{h} - 1 \right) \cdot - m ,$$

folglich

$$W = U_+ + U_- = - \frac{2\pi i M}{h} \sin\varphi ,$$

da ja

$$m\lambda = M$$

nichts anderes als das magnetische Moment der Nadel ist.

Die Arbeit dA des Stroms bei einer Drehung der Nadel um den Winkel $d\varphi$ ist

$$dA = D d\varphi ,$$

wenn D das Drehungsmoment des Kräftepaares ist (Bd. I, § 28). Nach dem Satz von der Erhaltung der Energie ist aber

$$dA = - dW ,$$

daher

$$D = \frac{dA}{d\varphi} = - \frac{dW}{d\varphi} = \frac{2\pi i M}{h} \cos\varphi .$$

Das hätten wir auch unmittelbar aus der Kraft eines Kreisstroms auf einen im Mittelpunkt befindlichen Magnetpol (§ 40) finden können. Die Kraft ist $\frac{2\pi i m}{h}$. Die Kräfte auf den Nord- und Südpol bilden ein Drehmoment

$$D = \frac{2\pi m i}{h} \lambda \cos\varphi = \frac{2\pi i M}{h} \cos\varphi .$$

Somit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -HM\sin\varphi + \frac{2\pi i M}{h}\cos\varphi\,. \tag{20}$$

Setzen wir $W = V i$, also

$$V = -\frac{2\pi M}{h}\sin\varphi\,,$$

so gilt für unsern Leiter, in welchem sonst keine elektromotorische Kraft wirkt (§ 49),

$$o = w i - \frac{dV}{dt} = w i + \frac{2\pi M}{h}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Daraus folgt

$$i = -\frac{2\pi M}{h w}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Diesen Wert führen wir nun in Gleichung (20) ein und erhalten demnach

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -HM\sin\varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w}\cos^2\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Daß auch in diesem Fall wie immer V nichts anderes als die Zahl der magnetischen Kraftlinien ist, die der Stromleiter umschließt, läßt sich leicht nachweisen. Es sei im Punkt M (Fig. 25) ein Magnetpol m. Dieser sendet $4\pi m$ Kraftlinien aus. Wir legen um M eine Kugel vom Radius p. Die yz-Ebene schneidet eine Kalotte ab, deren Fläche $2\pi p^2(1-\cos\alpha)$ ist, wenn wir unter α den Winkel verstehen, den ein von M gegen die Peripherie der Kalotte gezogener Strahl mit OM einschließt. Es ist ferner

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\,.$$

Da durch die Flächeneinheit der Kugel

$$\frac{4\pi m}{4\pi p^2} = \frac{m}{p^2}$$

Kraftlinien gehen, so gehen durch die Kalotte

$$2\pi m (1 - \cos\alpha) = 2\pi m \left(1 - \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right).$$

Diesen Wert haben wir jedoch negativ zu setzen, weil wir positiv die Kraftlinien rechnen, wenn sie die $y\,z$-Ebene von links nach rechts durchsetzen. Alles Weitere ergibt sich analog dem Früheren.

Wir setzen nun voraus, daß die Ausschlagswinkel φ der Nadel nur klein seien. Dann können wir $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, folglich

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{HM}{K}\varphi - \frac{4\pi^2 M^2}{h^2 w K} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

setzen. Das ist aber die Gleichung einer gedämpften schwingenden Bewegung, wie sie etwa ein Pendel im widerstehenden Mittel ausführt (Bd. I, § 10). Da die Größen H, M, K nach bekannten Methoden bestimmbar sind, so haben wir auch hier ein Mittel, aus der Abnahme der Schwingungsweite den Widerstand w unseres Stromleiters in absolutem Maß zu finden.

§ 53. Der Extrastrom.

Einen geschlossenen Strom können wir uns stets durch eine magnetische Platte ersetzt denken (§ 42). Daraus ergibt sich, daß die Zahl der magnetischen Kraftlinien, die vom Leiter umschlossen werden, proportional der Stromstärke ist. Diese und die Kraftlinienzahl müssen sich im selben Verhältnis ändern, was wir auch so auffassen können,

daß der Leiter bei Änderung der Stromstärke von magnetischen Kraftlinien geschnitten wird. In diesem Fall muß aber eine elektromotorische Kraft auftreten, die sich ganz analog wie in §49 finden läßt. Es muß nach Gleichung (19)

$$e + \frac{dV}{dt} = w\,i$$

sein. Wird der Strom verstärkt, so leistet er magnetische Arbeit, indem der ganze umgebende Raum stärker magnetisiert wird. Die geweckte elektromotorische Kraft muß also eine Gegenkraft sein. Wir können somit

$$V = -L\,i$$

setzen, wobei L lediglich durch die Form des Leiters und die Art seiner Umgebung bestimmt ist, d. h. L ist konstant, solange der Leiter und die ihn umgebenden Körper sich in relativer Ruhe befinden.

Die Größe L läßt sich, da sie nicht nur von der Form der Strombahn, sondern auch von der Umgebung abhängt, in der Regel mathematisch nur sehr schwer, meist gar nicht bestimmen, doch gibt es Mittel, sie mit Zuhilfenahme unserer Gleichung experimentell zu ermitteln.

Da wir im folgenden die Basis e der natürlichen Logarithmen benützen werden, wollen wir, um Verwechslungen zu vermeiden, die elektromotorische Kraft mit E bezeichnen. Unsere Gleichung wird also

$$E = w\,i + L\frac{di}{dt}.$$

Als Lösung haben wir

$$i = A + B\,e^{\alpha t}, \tag{21}$$

wenn wir unter A, B und α Konstanten verstehen. Wir finden dann nämlich

$$E = w\,A + w\,B\,e^{\alpha t} + L\,B\,\alpha\,e^{\alpha t}.$$

Denken wir uns etwa, wir hätten ein konstantes galvanisches Element von der elektromotorischen Kraft E, so ist E von der Zeit unabhängig. Das ist aber nach unserer Gleichung nur möglich, wenn

$$w B + L B \alpha = o$$

ist, woraus

$$\alpha = -\frac{w}{L}$$

folgt. Ferner ist $E = w A$ oder $A = \frac{E}{w}$. Es wird somit nach Gleichung (21) die Stromstärke

$$i = \frac{E}{w} + B e^{-\frac{w}{L} t}.$$

Wir wollen nun zu einer bestimmten Zeit $t = o$ den Strom schließen. Dann ist für $t = o$ auch $i = 0$, also auch $\frac{E}{w} + B = 0$ oder $B = -\frac{E}{w}$. Somit ergibt sich

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L} t}\right).$$

In dem Augenblick, wo wir den Strom schließen, ist also die Stromstärke Null und steigt dann mit der Zeit an. Da $\frac{w}{L}$ fast immer eine sehr große Zahl ist, so geht das Anwachsen sehr rasch, da dann das Glied $e^{-\frac{w}{L} t}$ sehr rasch Null wird. Es ist dann der Strom konstant $i = \frac{E}{w}$. Wir haben also beim Schließen des Stroms einen Gegenstrom $-\frac{E}{w} e^{-\frac{w}{L} t}$, welchen wir den Extrastrom nennen.

Öffnen wir nun den Strom, so ist unmittelbar nach der Unterbrechung die elektromotorische Kraft nicht mehr vor-

handen. Es gilt dann also

$$o = w\,i + L\frac{di}{dt}\,.$$

Wir haben jetzt als Lösung

$$i = B\,e^{-\frac{w}{L}t}\,.$$

Für $t = o$ ist nun $i = \frac{E}{w}$, daher $B = \frac{E}{w}$, folglich

$$i = \frac{E}{w}\,e^{-\frac{w}{L}t}\,.$$

Wir haben also auch bei der Öffnung einen Extrastrom, welcher gleich gerichtet ist dem ursprünglich vorhandenen Strom.

Beim Öffnen haben wir die volle Stromstärke im Leiter, beim Schließen ist sie Null. Wir erhalten daher beim Öffnen einen intensiven elektrischen Funken, beim Schließen hingegen nur einen sehr schwachen. Die Größe L nennt man den Koeffizienten der Selbstinduktion.

§ 54. Kondensator im Stromkreis.

Es sei in eine Stromleitung S (Fig. 30) ein Kondensator (Kapazität C) eingeschaltet. Das Potential am Anfang der Leitung bezeichnen wir mit V, das der linken Kondensatorplatte mit V'. Die rechte O sei zur Erde abgeleitet, hat also das Potential Null. Die Stromstärke in der Leitung ist durch die Gleichung

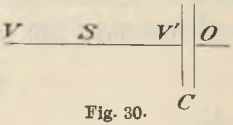

Fig. 30.

$$E = V - V' = w\,i + L\frac{di}{dt} \tag{22}$$

(§ 53) gegeben. Die Zunahme der Ladung des Kondensators ist

$$dQ = i\,dt\,.$$

Ferner besteht (§ 13) die Beziehung

$$Q = C V'$$

also

$$dQ = C\,dV' = i\,dt$$

oder

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{i}{C}.$$

Durch Differentiation der Gleichung (22) erhalten wir

$$\frac{dV}{dt} - \frac{dV'}{dt} = w\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2},$$

was durch Einsetzen des Wertes für $\frac{dV'}{dt}$ ergibt

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{C} + w\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2}. \tag{23}$$

Wir nehmen jetzt eine Leitung von kleiner Selbstinduktion an, so daß wir diese gegen den Widerstand w, der entsprechend groß sein soll, vernachlässigen können. Zu Beginn der Zeit sei der Kondensator ungeladen und es werde an die Leitung eine konstante elektromotorische Kraft E angelegt. Es ist also

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} = o$$

und Gleichung (23) wird

$$o = \frac{i}{C} + w\frac{di}{dt}$$

oder

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{C\,w}\,dt,$$

was integriert ergibt

$$\ln i = -\frac{1}{C\,w}\,t + \ln A$$

(A = const), was sich weiter umwandeln läßt in

$$i = A\, e^{-\frac{1}{Cw}t}.$$

Wir haben einen „quasistationären" Strom, d. h. wir können für ihn das Ohmsche Gesetz jederzeit als gültig annehmen, da wir ja die Selbstinduktion L vernachlässigt haben (§ 53). Für $t = o$ ist also

$$i = \frac{E}{w}$$

daher

$$A = \frac{E}{w}$$

und wir erhalten

$$i = \frac{E}{w}\, e^{-\frac{1}{Cw}t}.$$

Der Strom nimmt mit der Zeit bis zum Verschwinden ab, was in der Regel sehr rasch erfolgt. Es ist dann auch

$$V' = V.$$

§ 55. Oszillierende Entladung eines Kondensators.

Wir denken uns (Fig. 30) das Ende V der Leitung mit O verbunden. w sei gegen L zu vernachlässigen. Wegen der Erdung von O und damit auch von V ist beständig die elektromotorische Kraft $E = o$. Somit wird Gleichung (23)

$$o = \frac{i}{C} + L\frac{d^2 i}{dt^2}$$

oder

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{1}{CL}\, i.$$

Wir erhalten für i eine harmonische periodische Bewegung (Bd. I, § 9). Die Schwingungsdauer wird

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Nehmen wir auch Rücksicht auf den Widerstand der Leitung, so wird unsere Gleichung

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{w}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = o\,. \tag{24}$$

Das ist genau dieselbe Gleichung wie jene für ein Pendel im widerstehenden Mittel (Bd. I, § 10).

Elektrische Schwingungen kann man etwa folgendermaßen erzeugen. Man verbindet die beiden Belegungen eines Kondensators mit einer Funkenstrecke und lädt auf, bis eine Entladung erfolgt. In einem rotierenden Spiegel beobachtet man das Funkenbild. Man sieht entweder nur einen Funken oder mehrere, was die Diskussion der Gleichung (24) ohne weiteres ergibt.

Wir können (Bd. I, § 10) die Stromstärke

$$i = A\, e^{\alpha t}$$

setzen, woraus folgt

$$\alpha = -\frac{w}{2L} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,.$$

Ist somit $\frac{w^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, so haben wir keine periodische Bewegung. Es tritt nur ein einziger Funken auf. Ist hingegen $\frac{w^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, so wird die Wurzel imaginär, wir haben eine periodische Bewegung vor uns und es tritt eine oszillierende Entladung ein.

§ 56. Der Wechselstrom.

Wir setzen voraus, daß die elektromotorische Kraft E eine periodische Funktion der Zeit sei. Es entsteht dann im Leiter ein Strom, den man einen Wechselstrom nennt.

Wir setzen etwa

$$E = E_0 \sin \alpha t .$$

Eine Lösung der Gleichung

$$E = w\, i + L \frac{di}{dt}$$

ist dann

$$i = i_0 \sin \alpha (t - \delta) = i_0 \sin \alpha t \cos \alpha \delta - i_0 \cos \alpha t \sin \alpha \delta ,$$

$$\frac{di}{dt} = i_0 \alpha \cos \alpha (t - \delta) = i_0 \alpha \cos \alpha t \cos \alpha \delta + i_0 \alpha \sin \alpha t \sin \alpha \delta .$$

Setzen wir diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir nach leicht durchführbarer Reduktion

$$(E_0 - w\, i_0 \cos \alpha \delta - L\, i_0 \alpha \sin \alpha \delta) \sin \alpha t$$
$$- (L\, i_0 \alpha \cos \alpha \delta - w\, i_0 \sin \alpha \delta) \cos \alpha t = 0 .$$

Soll diese Gleichung für jeden Wert von αt erfüllt sein, so ist das nur möglich, wenn jeder der Klammerausdrücke für sich Null ist (Bd. II, § 12). Wir erhalten somit

$$E_0 = w\, i_0 \cos \alpha \delta + L\, i_0 \alpha \sin \alpha \delta$$

und

$$L\, i_0 \alpha \cos \alpha \delta = w\, i_0 \sin \alpha \delta .$$

Aus der letzen Gleichung läßt sich δ und sodann aus der vorletzten i_0 berechnen. Wir finden so leicht

$$\sin \alpha \delta = \frac{L \alpha}{w} \cos \alpha \delta ,$$

$$\sin^2 \alpha \delta = \frac{L^2 \alpha^2}{w^2} (1 - \sin^2 \alpha \delta) ,$$

woraus folgt

$$\sin \alpha \delta = \frac{L \alpha}{\sqrt{w^2 + L^2 \alpha^2}} .$$

Analog ergibt sich

$$\cos\alpha\,\delta = \frac{w}{\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}}\,.$$

Aus der Gleichung für E_0 finden wir nun

$$i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{w\cos\alpha\,\delta + L\alpha\sin\alpha\,\delta}}$$

oder nach Einsetzen der Werte für $\sin\alpha\,\delta$ und $\cos\alpha\,\delta$

$$i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}}$$

und schließlich

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + L^2\alpha^2}}\sin\alpha\,(t - \delta)\,.$$

Der Strom hat also eine Phasenverschiebung δ (Bd. II, §§ 7 u. 8) und er ist schwächer, als aus dem Ohmschen Gesetz folgen würde. $L\alpha$ hat die Dimension eines Widerstands (§ 63). Man nennt diese Größe den induktiven Widerstand oder die Induktanz, wogegen $\sqrt{w^2+L^2\alpha^2}$ den Namen „scheinbarer Widerstand“ oder „Impedanz“ führt.

Wird $L\alpha$ verschwindend klein, so befolgt der Wechselstrom das Ohmsche Gesetz. Das ist also bei sehr kleiner Selbstinduktion oder bei entsprechend kleiner Schwingungszahl der Fall.

§ 57. Kondensator im Wechselstromkreis.

Wir legen (§ 55) an den Punkt V (Fig. 30) die elektromotorische Kraft

$$E = E_0\sin\alpha\,t$$

an. Es wird also

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} = E_0 \alpha \cos \alpha t$$

und Gleichung (23) wird

$$E_0 \alpha \cos \alpha t = \frac{i}{C} + w \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} .$$

Wir untersuchen, ob

$$i = i_0 \sin \alpha (t - \delta)$$

diese Gleichung erfüllt und schlagen für die weitere Rechnung ganz denselben Weg wie im vorhergehenden Paragraphen ein. Wir erhalten so

$$\sin \alpha \delta = \frac{L\alpha - \frac{1}{C\alpha}}{\sqrt{w^2 + \left(L\alpha - \frac{1}{C\alpha}\right)^2}},$$

$$\cos \alpha \delta = \frac{w}{\sqrt{w^2 + \left(L\alpha - \frac{1}{C\alpha}\right)^2}}$$

und

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{w^2 + \left(L\alpha - \frac{1}{C\alpha}\right)^2}} \sin \alpha (t - \delta) .$$

Der Kondensator vermindert also den Einfluß der Selbstinduktion, was eine Vergrößerung der Amplitude von i und eine Verkleinerung der Phasenverschiebung zur Folge hat, da ja

$$\operatorname{tg} \alpha \delta = \frac{\sin \alpha \delta}{\cos \alpha \delta} = \frac{L\alpha - \frac{1}{C\alpha}}{w}$$

ist.

Den größten Wert nimmt die Amplitude an, wenn

$$L\alpha = \frac{1}{C\alpha} \tag{25}$$

ist. Sie wird dann $\frac{E_0}{w}$ und wir haben $\delta = 0$. Ferner ergibt die Gleichung (25)

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und da $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$ (Bd. II, § 7) ist, so folgt

$$\tau = 2\pi\sqrt{CL}\,.$$

Es muß also die Schwingungsdauer der einwirkenden elektromotorischen Kraft gleich der Eigenschwingungsdauer (§ 55) des Systems sein. Wir haben dann elektrische Resonanz.

Erzeugt die Selbstinduktion eine Phasenverschiebung des Stroms gegenüber der elektrischen Kraft im Sinne eines Nachfolgens, so hat ein Kondensator die Wirkung eines Vorauseilens der Stromphase gegenüber der Phase der elektromotorischen Kraft.

§ 58. Der Stokessche Satz — rot, curl.

Wir werden im folgenden den von Stokes gefundenen Satz

$$\int\left(X\frac{da}{ds} + Y\frac{db}{ds} + Z\frac{dc}{ds}\right)ds = \iint\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right)\cos\gamma\right]dS$$

benötigen. Die Komponenten X, Y, Z einer Vektorgröße K sind Funktionen der Koordinaten a, b, c einer Fläche, deren

Randkurve s ist, während α, β, γ Winkel sind, welche die Normale zum Flächenelement dS mit den drei Achsen einschließt. Wir wollen den Beweis dafür mit Zuhilfenahme der Mechanik erbringen. X, Y, Z seien die Kraftkomponenten, welche auf einen Punkt wirken. Beschreibt der Punkt eine geschlossene Kurve, so ist die Arbeit, welche dabei die Kräfte leisten (Bd. I, § 13),

$$\int K \cos \vartheta \, ds = \int (X \, da + Y \, db + Z \, dc) \, .$$

Wir wollen nun zuerst die Formel für die Arbeit aufstellen, welche die Kräfte leisten, wenn ein Punkt in der $y\,z$-Ebene (Fig. 31) das unendlich kleine Rechteck $OBCD$ umkreist. In irgendeinem Punkt von der Ordinate b der unendlich kleinen Strecke $OB = \beta$ ist die Kraft $Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial b} b$, wenn wir im Ursprung O den Wert Y_0 haben. Auf der Strecke $BC = \gamma$ haben wir analog $Z = Z_0' + \frac{\partial Z}{\partial c} c$. Es läßt sich aber die Kraft Z_0' im Punkte B darstellen durch $Z_0' = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} \beta$, folglich $Z = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b} \beta + \frac{\partial Z}{\partial c} c$, wobei es gleichgültig ist, ob wir das zur Strecke BC oder OD gehörige $\frac{\partial Z}{\partial c}$ einführen, da wegen des unendlich kleinen c wir hierbei nur unendlich Kleines höherer Ordnung vernachlässigen. In gleicher Weise finden wir, daß auf der Strecke von D nach C die Kraft $Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial c} \gamma + \frac{\partial Y}{\partial b} b$ und auf der Strecke OD die Kraft $Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c$ wirkt.

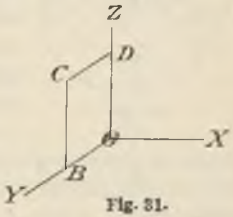

Fig. 31.

Legt nun der Punkt den Weg $OBCDO$ zurück, so leisten die ihn angreifenden Kräfte die Arbeit

$$dA = \int_0^\beta \left(Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial b} b\right) db + \int_0^\gamma \left(Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial b}\beta + \frac{\partial Z}{\partial c} c\right) dc$$

$$- \int_0^\beta \left(Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial c}\gamma + \frac{\partial Y}{\partial b} b\right) db - \int_0^\gamma \left(Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial c} c\right) dc .$$

Die einfache Auswertung der Integrale ergibt das Resultat

$$dA = \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)\beta\gamma = \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right) dS_x = F \cdot dS_x .$$

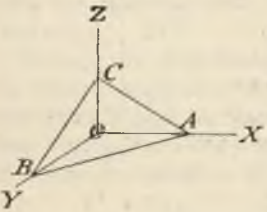

Fig. 32.

Analog ergibt sich

$$G \cdot dS_y = \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right) dS_y ,$$

$$H \cdot dS_z = \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right) dS_z ,$$

wenn wir mit dS_x, dS_y, dS_z Flächenelemente senkrecht zur x- bzw. y- und z-Achse verstehen, während F, G, H die Arbeiten sind, welche zur Umkreisung der Flächeneinheit einer Ebene benötigt werden, die zur x- bzw. y- oder z-Achse senkrecht steht.

Es sei nun $OABC$ (Fig. 32) ein Elementartetraeder, und es durchlaufe der Punkt der Reihe nach die Dreiecke OAB, OBC, OCA. Er hat dann die Strecken OA, OB und OC zweimal in entgegengesetzter Richtung zurückgelegt. Die dabei geleistete Arbeit ist also gleich Null, und es bleibt nur die Arbeit übrig, welche vom Durchlaufen des Dreiecks

ABC herrührt. Nach dem Früheren ist diese Arbeit

$$\begin{aligned} & F\,dS_x + G\,dS_y + H\,dS_z \\ &= F dS \cos\alpha + G\,dS \cos\beta + H\,dS \cos\gamma \\ &= (F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma)\,dS = J\,dS\,, \end{aligned}$$

wenn wir mit α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Normale N zur Fläche ABC mit den Koordinatenachsen einschließt.

$$J = F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma$$

ist somit die Arbeit, welche beim Umkreisen der Flächeneinheit der Fläche $ABC = dS$ geleistet wird.

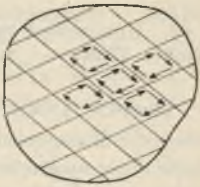

Fig. 33.

Eine geschlossene Kurve sei gleichzeitig die Randkurve einer beliebigen Fläche (Fig. 33), die wir in ihre Elemente auflösen wollen. Ein Punkt umkreise in derselben Richtung ein jedes Flächenelement. Er durchläuft dann jede Begrenzungslinie eines Flächenelements im Innern der Fläche zweimal in entgegengesetzter Richtung, so daß die dabei geleistete Gesamtarbeit Null ist. Es bleibt somit nur die Arbeit übrig, welche beim Umkreisen der Randkurve geleistet wird. Dieselbe ist also

$$\begin{aligned} \iint J\,dS &= \iint (F\cos\alpha + G\cos\beta + H\cos\gamma)\,dS \\ &= \int (X\,da + Y\,db + Z\,dc)\,, \end{aligned}$$

und wir können nach dem Früheren diese Gleichung umwandeln in

$$\begin{aligned} \int (X\,da + Y\,db + Z\,dc) = \iint \Bigg[& \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)\cos\alpha \\ & + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right)\cos\gamma \Bigg]\,dS\,. \end{aligned}$$

Das ist aber der Satz von Stokes, den wir somit bewiesen

haben. Wir können ihn mit den von uns gebrauchten Bezeichnungen am kürzesten in der Form

$$\int K \cos \vartheta \, ds = \iint J \, dS$$

schreiben. Die Größe J mit den Komponenten F, G, H ist eine Funktion der Komponenten X, Y, Z der Größe K und somit in letzter Linie eine Funktion dieser Größe K selbst. Man hat daher der Funktion J auch einen bestimmten Namen gegeben und sie mit „rot K" (Rotation) oder mit „curl K" bezeichnet. Das Wort curl läßt sich mit „Locke" und „Quirl" wiedergeben.

§ 59. Unterschied zwischen geschlossenem Strom und magnetischer Platte — magnetische Arbeit bei einer Umkreisung des Stroms.

Dieselbe Arbeit, welche die magnetischen Kräfte leisten, wenn die Masseneinheit sich von der positiven zur negativen Seite einer magnetischen Platte begibt, leisten auch die magnetischen Kräfte eines geschlossenen Stroms. Während jedoch beim Durchsetzen der Platte die Arbeit wieder vollkommen aufgehoben wird, ist dies im magnetischen Feld des Stroms nicht der Fall. Wir haben nämlich zu beachten, daß ein geschlossener Strom durch eine magnetische Platte nur insofern ersetzt werden kann, als wir den Raum außerhalb der Platte in Betracht ziehen. Führen wir demnach die magnetische Masseneinheit einmal vollständig um den Stromleiter herum, so leisten die magnetischen Kräfte des Stroms dabei immer die Arbeit $4 \pi \sigma \delta$, oder da jetzt $\sigma \delta = i$ (§ 42) gesetzt werden kann, so ist die Arbeit bei einem Umlauf immer gleich $4 \pi i$. Selbstverständlich hat der Umlauf in dem Sinne zu geschehen, in welchem die Kraftlinien den Leiter umkreisen. Denken wir uns den Strom gegen uns fließend, so umkreisen die magnetischen Kraftlinien, von uns aus betrachtet, in entgegengesetztem Sinn der Uhrzeigerbewegung den Leiter. Die Ge-

stalt der geschlossenen Bahn, in welcher wir die magnetische Masseneinheit um den elektrischen Strom herumführen, ist nach dem Früheren natürlich ganz gleichgültig.

Nennen wir die Stärke des magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$, so ist nach § 58 die Arbeit bei einem Umlauf

$$\mathfrak{H} \cos \vartheta \, ds = \iint \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot dS \, .$$

Für unsern speziellen Fall ergibt sich also die Gleichung

$$- 4 \pi i = \iint \operatorname{rot} \mathfrak{H} \cdot dS \, .$$

§ 60. Die Wirkung elektrischer Ströme aufeinander — elektrodynamisches Potential.

Zwei geschlossene Ströme A und B (Fig. 34) können als zwei magnetische Lamellen (§ 42) angesehen werden. A erzeugt ein magnetisches Feld. Der Strom B umschließt also eine bestimmte Zahl von A herrührenden Kraftlinien. Die Intensität von A sei i, von B i'. Die potentielle Energie des Systems wird daher sein $i' N$ (§ 47), wenn N die Zahl der vom Leiter B umschlossenen Kraftlinien ist. N können wir folgendermaßen darstellen. In einem Punkt der Lamelle B fassen wir ein Flächenelement dS' ins Auge. Ist dort die von A herrührende magnetische Kraftkomponente senkrecht zu dS' gleich $\mathfrak{H}_n$, so ist $\mathfrak{H}_n \, dS'$ die Zahl der durch dS' gehenden Kraftlinien und somit

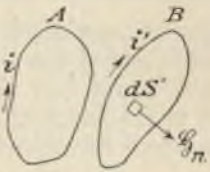

Fig. 34.

$$N = \iint \mathfrak{H}_n \, dS'$$

und die potentielle Energie des Systems

$$W = i' \iint \mathfrak{H}_n \, dS' \, ,$$

wobei sich das Doppelintegral über die Fläche der Lamelle

B erstreckt. Führen wir die Komponenten X, Y, Z von $\mathfrak{H}_n$ ein, so können wir auch schreiben:

$$W = i' \iint (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma)\, dS' ,$$

wenn wir unter α, β, γ die Winkel verstehen, die $\mathfrak{H}_n$ mit den bezüglichen Achsen einschließt.

Nach § 41 ist nun

$$X = i\left[\frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dy}{r} - \frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dz}{r}\right],$$

$$Y = i\left[\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{dz}{r} - \frac{\partial}{\partial c}\int\frac{dx}{r}\right],$$

$$Z = i\left[\frac{\partial}{\partial b}\int\frac{dx}{r} - \frac{\partial}{\partial a}\int\frac{dy}{r}\right],$$

so daß wir schließlich erhalten

$$W = -i\,i'\iiint\left\{\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dz}{ds} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dy}{ds}\right]\cos\alpha\right.$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dx}{ds} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dz}{ds}\right]\cos\beta$$
$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dx}{ds}\right]\cos\gamma\right\} ds\, dS' .$$

Nach dem Stokesschen Satz (§ 58) können wir diese Gleichung aber umformen in

$$W = -i\,i'\iint\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{da}{ds'} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{db}{ds'} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dc}{ds'}\right) ds\, ds'.$$

Wenn wir unter ε den Winkel verstehen, welchen die beiden Stromelemente ds und ds' miteinander einschließen, erhalten wir schließlich die Gleichung

$$W = -i\,i'\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds' ,$$

und wir nennen W das elektrodynamische Potential der beiden geschlossenen Ströme i und i' aufeinander.

Man kann dieses Potential auch für die Wirkung eines Stroms auf sich selbst bilden. Es wird dann den Wert

$$U = -\frac{i^2}{2}\iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'$$

erhalten. Hier sind ds und ds' zwei beliebige Stromelemente des geschlossenen Stroms i. Es wird somit bei der Integration jedes Element zweimal in Rechnung gesetzt, weshalb wir auch von der gewöhnlichen Potentialformel nur die Hälfte nehmen dürfen.

§ 61. Induktionswirkung zweier Stromleiter aufeinander.

Es sollen zwei Stromleiter in der Weise, wie im vorhergehenden Paragraphen erörtert wurde, aufeinander wirken. Ändert sich die Kraftlinienzahl, die vom Strom i umschlossen wird, so muß im Leiter A (§ 60), wie wir im § 53 kennengelernt haben, eine elektromotorische Kraft auftreten.

Diese Kraftlinienänderung kann nun von einer Änderung des Stroms i selbst herrühren. In diesem Fall gilt die Beziehung

$$e = w\, i + \frac{d}{dt}(L i)$$

(§ 53). Es wird sich aber auch die Zahl der vom Strom i umschlossenen Kraftlinien ändern, wenn sich der Strom i' ändert. Die vom Strom i' herrührende Kraftlinienzahl ist nach dem vorigen Paragraphen

$$-i'\iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds' = -M\, i'.$$

Die gesamte vom Strom i umschlossene Kraftlinienzahl ist also $-(L\,i + M\,i')$ und die Gleichung für den Verlauf des Stroms i wird

$$e = w\,i + \frac{d}{dt}(L\,i + M\,i')\,. \tag{26}$$

Analog erhalten wir für den Strom i' die Gleichung

$$e' = w\,i' + \frac{d}{dt}(L'\,i' + M\,i)\,. \tag{26}$$

Wir können diese Gleichungen die Grundgleichungen der elektrodynamischen Induktion nennen; L, L' und M sind die Induktionskoeffizienten, L und L' die Koeffizienten der Selbstinduktion, M jener der gegenseitigen Induktion.

Wir haben die Gleichungen (26) in der Voraussetzung abgeleitet, daß der umgebende Raum frei von ferromagnetischen Körpern und Leitern der Elektrizität ist. Ist dies nicht der Fall, so ändern sich, wie leicht zu erkennen ist, die Gleichungen ihrer Form nach zwar nicht, doch die Werte der Induktionskoeffizienten werden andere. Ändern wir die Gestalt und die gegenseitige Lage der Stromleiter oder die Umgebung, indem wir ferromagnetische Körper oder permanente Magnete relativ zu den Leitern bewegen, so sind L, L' und M Funktionen der Zeit, was bei der Anwendung der Gleichungen (26), die ihre Form beibehalten, nicht aus dem Auge gelassen werden darf.

§ 62. Induktionsapparate — Transformatoren.

Wir denken uns zwei ineinander befindliche Drahtspulen, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert. Es ist dann ihre Selbstinduktion wie auch die gegenseitige von der Zeit unabhängig. In der einen Spule wirke die veränderliche

elektromotorische Kraft e. Die Gleichungen (26) werden somit:

$$(27)\quad \begin{cases} e = w\,i + L\dfrac{di}{dt} + M\dfrac{di'}{dt}, \\[2ex] 0 = w'\,i' + L'\dfrac{di'}{dt} + M\dfrac{di}{dt}. \end{cases}$$

Es wird also der induzierte Strom i' lediglich durch die Änderung des primären Stroms i bestimmt werden. Ist $\frac{di}{dt} = 0$, so folgt auch $i' = 0$.

Wir nehmen nun an, daß i eine rasche Änderung erfährt und dann wieder konstant bleibt. Es nimmt also $\frac{di}{dt}$ für kurze Zeit einen positiven oder negativen Wert an, vorher und nachher ist i konstant, daher $\frac{di}{dt} = 0$. Über die Zeit τ der Stromänderung wollen wir unsere Gleichung integrieren, erhalten also

$$\int_0^\tau w'\,i'\,dt + L'\int_0^\tau \frac{di'}{dt}\,dt = -M\int_0^\tau \frac{di}{dt}\,dt,$$

oder

$$w'\int_0^\tau i'\,dt + L'\,(i_\tau' - i_0') = -M\,(i_\tau - i_0).$$

Zu Beginn und zu Ende der Zeit τ haben wir keinen Induktionsstrom, es ist daher $i_\tau' = i_0' = 0$, folglich

$$w'\int_0^\tau i'\,dt = -M\,(i_\tau - i_0).$$

Wächst der Strom i, d. h. ist $i_\tau > i_0$, so wird der Induk-

tionsstrom i' negativ sein; nimmt i hingegen ab, so ist i' positiv. i' wird um so größer ausfallen, je kleiner τ wird, d. h. je rascher der Strom i sich ändert, und je größer die gegenseitige Induktion M ist. Es ist jetzt auch ein leichtes, den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion experimentell zu bestimmen, da wir ja alle übrigen Größen unserer Gleichung leicht messen können.

Wir nehmen nun an, es sei in der primären Leitung eine periodische elektromotorische Kraft vorhanden, also

$$e = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t .$$

Das heißt, die primäre Leitung wird von einem Wechselstrom durchflossen. Es genügt dann für die Gleichungen (27) die Lösung:

$$i = a \sin \alpha t + b \cos \alpha t ,$$
$$i' = a' \sin \alpha t + b' \cos \alpha t .$$

Führen wir nämlich diese Werte in die Gleichungen ein, so erhalten wir

$$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t = w a \sin \alpha t + w b \cos \alpha t$$
$$+ L a \alpha \cos \alpha t - L b \alpha \sin \alpha t + M a' \alpha \cos \alpha t$$
$$- M b' \alpha \sin \alpha t$$

und

$$0 = w' a' \sin \alpha t + w' b' \cos \alpha t + L' a' \alpha \cos \alpha t$$
$$- L' b' \alpha \sin \alpha t + M a \alpha \cos \alpha t - M b \alpha \sin \alpha t .$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn die Glieder mit $\sin \alpha t$ für sich einander gleich sind und ebenso jene mit $\cos \alpha t$ (§ 56). Wir können dann durch $\sin \alpha t$ bzw. $\cos \alpha t$ kürzen und erhalten die vier Gleichungen:

$$A = w a - L b \alpha - M b' \alpha ,$$
$$B = w b + L a \alpha + M a' \alpha ,$$
$$0 = w' a' - L' b' \alpha - M b \alpha ,$$
$$0 = w' b' + L' a' \alpha + M a \alpha .$$

Diese vier Gleichungen reichen hin, um die Größen a, b,

a', b' zu bestimmen, womit auch der Verlauf des primären und sekundären Stroms gegeben ist.

Daraus ergeben sich mehrere wichtige Erscheinungen. Da A, B, a, b, a', b' im allgemeinen voneinander verschieden sind, so besitzt sowohl der primäre als auch der sekundäre Strom gegenüber der elektromotorischen Kraft eine Phasenverschiebung, während die Stärke beider Ströme auch noch durch die Schwingungszahl, die Widerstände und die Induktionskoeffizienten bestimmt wird, was alles bei der Konstruktion von Induktionsapparaten und Transformatoren in Betracht zu ziehen ist.

§ 63. Das elektrostatische und elektromagnetische Maßsystem.

Wir sind in der Lage, die uns aufstoßenden physikalischen Größen durch die absoluten Einheiten der Länge, Masse und Zeit, den Grundeinheiten, auszudrücken, und wir nennen dann die so erhaltenen neuen Einheiten die abgeleiteten. Die Formel, welche uns die Zusammensetzung einer abgeleiteten Einheit aus den Grundeinheiten ergibt, nennen wir die Dimension der abgeleiteten Einheit. So wird z. B. eine Kraft dargestellt durch das Produkt aus einer Masse $[M]$ und einer Beschleunigung. Die Beschleunigung ist aber eine Geschwindigkeit, dividiert durch eine Zeit $[T]$, die Geschwindigkeit wiederum eine Länge $[L]$, geteilt durch eine Zeit. Die Dimension der Kraft ist also $\frac{[LM]}{[T^2]}$, was man jedoch gewöhnlich in der Form $[LMT^{-2}]$ schreibt.

Die Kraft, mit welcher sich zwei Elektrizitätsmengen e und e' anziehen, ist gegeben durch

$$K = \frac{e\,e'}{r^2}$$

(§ 1). Drücken wir dies in Form einer Dimensionsgleichung aus, so haben wir

$$[M\,L\,T^{-2}] = \frac{[e^2]}{[L^2]}$$

oder

$$[e] = [L^{3/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}]\,.$$

Das elektrostatische Potential V hat die Dimension der Größe $\frac{e}{r}$ (§ 2), also

$$[V] = [L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}];$$

hingegen hat die Kapazität C die Dimensionen der Größe $\frac{e}{V}$ (§ 13), also

$$[C] = [L]\,.$$

Wir haben diese Dimensionen alle aus dem elektrostatischen Kraftgesetz abgeleitet; wir sagen: wir haben die Größen in elektrostatischem Maß gemessen.

Zwei magnetische Massen ziehen sich nach demselben Gesetz an wie elektrische. Wir haben für die Anziehungskraft

$$K = \frac{m\,m'}{r^2}\,.$$

Folglich erhalten wir für die Dimension einer magnetischen Masse ebenfalls den Ausdruck

$$[m] = [L^{3/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}]\,.$$

Wir fanden für die Wirkung eines Stromelements auf einen Magnetpol (§§ 39 u. 41) die Kraft

$$dS = \frac{m\,ds\sin\vartheta}{r^2}\,i\,,$$

oder

$$i = \frac{dS\, r^2}{m\, ds \sin\vartheta},$$

daher

$$[i] = \frac{[L M T^{-2} L^2]}{[L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} L]} = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}],$$

da $\sin\vartheta$ eine dimensionslose Zahl ist.

Die Stromstärke ist nichts anderes als die Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passiert. Das Produkt aus Stromstärke und Zeit gibt uns daher die Elektrizitätsmenge an, und wir finden somit für deren Dimensionen

$$[e] = [M^{1/2} L^{1/2}].$$

Die durch den Strom in der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge $w\, i^2$ (§ 46) hat die Dimension einer Energie, dividiert durch eine Zeit, also einer Kraft multipliziert mit einem Weg, geteilt durch eine Zeit, folglich

$$[w\, i^2] = [L^2 M T^{-3}],$$

woraus folgt

$$[w] = \frac{[L^2 M T^{-3}]}{[L M T^{-2}]} = [L T^{-1}].$$

Für die Dimension der elektromotorischen Kraft E haben wir somit (§ 46)

$$[E] = [w\, i] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}].$$

Vergleichen wir die in elektrostatischem und die in elektromagnetischem Maß gemessenen Größen, so zeigt sich die auffallende Erscheinung, daß ein und dieselbe Größe, nach den verschiedenen Systemen gemessen, verschiedene Dimension hat. So fanden wir in elektromagnetischem Maße für die Dimension der Elektrizitätsmenge

$$[e] = [L^{1/2} M^{1/2}],$$

in elektrostatischem Maß hingegen

$$[e] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}] .$$

Das Verhältnis der letzteren zur ersteren ist

$$c = [L T^{-1}] ,$$

hat also die Dimension einer Geschwindigkeit. Messen wir eine Elektrizitätsmenge einmal mit der Coulombschen Drehwaage, das andere Mal mit dem Galvanometer, so erhalten wir sie in den zwei verschiedenen Systemen gemessen, und es zeigt sich, daß ihr Verhältnis

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} ,$$

d. i. gleich der Lichtgeschwindigkeit, ist.

Wie die Elektrizitätsmengen stimmen auch die übrigen elektrischen Größen, die Energie ausgenommen, in beiden Systemen gemessen, in ihren Dimensionen nicht überein, und zwar ist das Verhältnis immer eine Potenz der Lichtgeschwindigkeit c.

§ 64. Absolute und praktische Einheiten.

Für praktische Zwecke sind die absoluten Einheiten in der Regel unbequem, da sie entweder sehr große oder sehr kleine Zahlen ergeben. Man hat daher für die Bedürfnisse des alltäglichen Lebens andere Einheiten gewählt. Es ist uns bereits das praktische Maß der Stromstärke, das Ampere (§ 40), bekannt, welches $^1/_{10}$ der absoluten Stromeinheit ist. Die absolute Einheit des Widerstandes ist so klein, daß man das 10^9fache als praktische Einheit gewählt und mit dem Namen Ohm belegt hat. Analogerweise führt das 10^8fache der absoluten Einheit der elektromotorischen Kraft den Namen Volt, damit Ampere, Ohm und Volt

ebenfalls in solchen Verhältnissen zueinander stehen, daß auch für sie das Ohmsche Gesetz

$$i = \frac{e}{w}$$

aufrecht bleibt.

Für die Energie per Sekunde

$$e\,i = w\,i^2$$

haben wir als praktisches Maß das Watt oder Volt-Ampere, welches somit gleich 10^7 absoluten Einheiten (erg/sec) ist. Die Elektrizitätsmenge, welche in der Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters von der Stromstärke eines Ampere geschickt wird, nennen wir ein Coulomb.

Leiten wir die eine Belegung eines Kondensators zur Erde ab, und erzielen wir durch die Ladung von einem Coulomb auf der zweiten Belegung gerade die Spannung eines Volts, so hat der Kondensator die Kapazität von einem Farad. Dieses besitzt also $\frac{10^{-1}}{10^8} = 10^{-9}$ absolute Einheiten. Das Verhältnis der Maßeinheiten in den beiden Systemen ist für die Elektrizitätsmenge c (§ 61), für das Potential $\frac{1}{c}$, für die Kapazität somit c^2. Ein Farad hat also $\frac{c^2}{10^9}$ elektrostatische Einheiten. Es ist dies eine so große Einheit, daß man in der Regel als praktische Einheit den millionten Teil, das Mikrofarad, benützt.

§ 65. Elektrische Ströme in einem Dielektrikum.

Leiten wir die eine Belegung des Plattenkondensators (§ 15) zur Erde ab, und es befindet sich zwischen den beiden Platten bloß Luft, so ladet sich die andere Belegung mit

Elektrizität von der Dichte

$$\sigma = \frac{P}{4\pi\delta},$$

wenn wir unter P das Potential dieser Belegung verstehen. Ist zwischen den Platten ein Dielektrikum, so erhalten wir eine andere Dichte der Elektrizität (§ 24):

$$\sigma = \frac{\varepsilon P}{4\pi\delta},$$

wobei wir die Konstante ε die Dielektrizitätskonstante nennen. Die Oberflächendichte σ denken wir uns nun auf die Weise entstanden, daß innerhalb der Molekeln die positive und negative Elektrizität infolge der Einwirkung des Potentialgefälles, d. i. der elektromotorischen Kraft per Längeneinheit

$$\mathfrak{E} = \frac{P}{\delta}$$

getrennt werden. Wenn wir also senkrecht zur Richtung der Kraft $\mathfrak{E}$ eine Fläche legen, so wird per Flächeneinheit, sobald $\mathfrak{E}$ zu wirken beginnt, eine Elektrizitätsmenge σ hindurchgetrieben. Zerlegen wir demnach die elektromotorische Kraft in die drei Komponenten X, Y, Z, so sind die Elektrizitätsmengen, welche parallel den drei Achsen die Flächeneinheit passieren:

$$f = \frac{\varepsilon}{4\pi} X, \quad g = \frac{\varepsilon}{4\pi} Y, \quad h = \frac{\varepsilon}{4\pi} Z.$$

Man pflegt die Größen f, g, h auch die Komponenten der elektrischen Verschiebung zu nennen.

Wir definieren die Stromstärke (§ 39) als die Elektrizitätsmenge, welche in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters durchfließt, und die Stromdichte als das Verhältnis zwischen Stromstärke und Querschnitt, d. i. die durch die

Flächeneinheit per Zeiteinheit fließende Elektrizitätsmenge. Wir haben somit für die Stromdichten parallel zu den drei Achsen

$$(28)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{df}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\,\dfrac{\partial X}{\partial t}, \\[2ex] v = \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\,\dfrac{\partial Y}{\partial t}, \\[2ex] w = \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\,\dfrac{\partial Z}{\partial t}. \end{cases}$$

während die resultierende Stromdichte nach den Bezeichnungen des § 24

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

gesetzt werden kann, wobei auch $\frac{d\mathfrak{D}}{dt}$ häufig die dielektrische Verschiebung genannt wird, obwohl wir diese Bezeichnung auch für $\mathfrak{D}$ kennenlernten. Der durch die Änderung von $\mathfrak{D}$ entstehende Strom heißt Verschiebungsstrom.

§ 66. Allgemeine Gleichungen der Induktion.

Wir wollen die Beziehung aufstellen, welche zwischen den Komponenten der magnetischen Induktion a, b, c und den Komponenten der magnetischen Kraft α, β, γ besteht. Wie eine elektrische Kraft eine Verschiebung der Elektrizität, so bringt eine magnetische eine Verschiebung des Magnetismus hervor. Wird demnach ein Körper im magnetischen Feld (Fig. 35) von der $(y\,z)$-Ebene durchschnitten, so wird auf der linken Seite der Magnetismus von der Dichte

$$\sigma = k\,\alpha\,,$$

auf der rechten

$$\sigma = -k\alpha$$

frei. Denken wir uns anstatt der $(y\,z)$-Ebene also wirklich einen sehr schmalen Raum, so wird auf einen Punkt von der magnetischen Masse Eins von links die Kraft $2\pi\sigma$ ausgeübt, welche den Punkt in der Richtung der x-Achse zu treiben sucht. Dieselbe Kraft in derselben Richtung übt auch die rechte Seite aus. Der Punkt erfährt somit die Gesamtkraft $4\pi\sigma$. Diese Größe ist also auch die Zahl der pro Flächeneinheit induzierten Kraftlinien, welche noch zu den ursprünglich vorhandenen α hinzukommen. Wir haben somit als Zahl der Kraftlinien parallel zur x-Achse

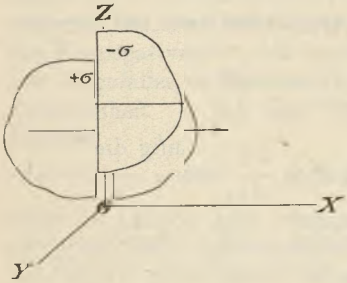

Fig. 35.

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi\sigma \\ &= \alpha + 4\pi k\alpha \\ &= (1 + 4\pi k)\alpha = \mu\alpha, \end{aligned}$$

wobei demnach

$$\mu = 1 + 4\pi k$$

nichts anderes als die magnetische Induktionskonstante ist (§ 33). Ganz dieselbe Überlegung können wir natürlich auch für die übrigen Komponenten der Induktion machen, so daß wir die drei Gleichungen

$$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = \mu\gamma \tag{29}$$

erhalten.

Nennen wir λ, μ, ν die Winkel, welche die Normale des Flächenelements dS mit den Koordinatenachsen einschließt, so können wir die Zahl N der Kraftlinien, welche

durch die Fläche S gehen, durch

$$N = \iint (a \cos \lambda + b \cos \mu + c \cos \nu)\, dS \tag{30}$$

darstellen.

Nach § 49 ist die durch Induktion in einem Leiter erzeugte elektromotorische Kraft E gegeben durch die Änderung des Potentials oder der Zahl der Kraftlinien nach der Zeit, also

$$E = \frac{dN}{dt}. \tag{31}$$

Diese elektromotorische Kraft in der Randkurve unserer Fläche ist natürlich immer vorhanden, auch wenn die Leitfähigkeit unendlich klein ist, d. h. es läßt sich diese Betrachtung auch unmittelbar auf einen Isolator übertragen.

Dividieren wir die elektromotorische Kraft E durch die Länge der Randkurve, so erhalten wir die elektromotorische Kraft per Längeneinheit oder die elektrische Feldintensität $\mathfrak{E}$. Sind deren Komponenten X, Y, Z, so läßt sie sich darstellen durch

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds};$$

für das Kurvenelement ds wird sie

$$\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}\right) ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Die gesamte elektromotorische Kraft in der Randkurve läßt sich somit auch darstellen durch

$$\left\{\begin{aligned} E = \int (X dx + Y dy + Z dz) = \iint \Bigg[& \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \cos \lambda \\ & + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) \cos \mu + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \cos \nu \Bigg] dS, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

wenn wir den Stokesschen Satz (§ 58) zu Hilfe nehmen. Aus den Gleichungen (30) und (31) folgt nun

$$E = \frac{dN}{dt} = \iint \left(\frac{da}{dt} \cos \lambda + \frac{db}{dt} \cos \mu + \frac{dc}{dt} \cos \nu \right) dS .$$

Bringen wir diese Gleichung in Übereinstimmung mit Gleichung (32), so folgt, wenn wir noch überlegen, daß nach den Gleichungen (29)

$$a = \mu \alpha , \quad b = \mu \beta , \quad c = \mu \gamma$$

ist,

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} , \\ \mu \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} , \\ \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} . \end{aligned} \right.$$

Führen wir an Stelle der Kraftliniendichte die magnetische Feldintensität $\mathfrak{H}$ ein, so können wir nach § 58 die Gleichungen (33) als die Komponenten der Gleichung

$$\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

ansehen.

§ 67. Die Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren.

Die Gleichungen für die Beziehung zwischen den Komponenten der Stromdichte und den von ihnen erzeugten magnetischen Kräften, welche wir in § 41 fanden, lassen sich, wenn wir die Koordinaten anstatt mit a, b, c mit x, y, z

bezeichnen, leicht in die Form bringen:

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} -4\pi u &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}, \\ -4\pi v &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \\ -4\pi w &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Diese ergeben mit den Gleichungen (28):

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} -\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}, \\ -\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \\ -\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Wegen der Wichtigkeit dieser Gleichungen sei noch darauf hingewiesen, daß wir sie auch leicht aus der Schlußgleichung des § 59

$$4\pi i = -\iint \operatorname{rot}\mathfrak{H}\cdot dS$$

gewinnen können. Nennen wir nämlich die Stromdichte D und den Querschnitt des Stroms S, so ist

$$i = \iint D\,dS$$

oder

$$di = D\,dS\,.$$

Die Differentiation der obigen Gleichung ergibt daher

$$4\pi\,di = 4\pi D\,dS = -\operatorname{rot}\mathfrak{H}\cdot dS$$

oder

$$4\pi D = -\operatorname{rot}\mathfrak{H}\,,$$

was (§ 58) mit den Gleichungen (34) identisch ist.

Da wir nach § 65

$$D = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

setzen können, so gilt auch

$$\varepsilon \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = - \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

was für die einzelnen Komponenten das Gleichungssystem (35) ergibt. Nach ganz analoger Schlußweise hätten wir auch die Schlußgleichung des § 66

$$\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

gewinnen können.

Aus § 63 wissen wir, daß die Stromstärke, in elektrostatischem Maß gemessen, $c$mal größer ist als in elektromagnetischem. Wir wollen die elektrischen Kräfte X, Y, Z und ebenso die Komponenten u, v, w der Stromdichte von nun an in elektrostatischem Maß ausdrücken. Die magnetischen Kräfte α, β, γ messen wir in elektromagnetischen Einheiten. Die Gleichungen (34) haben demnach zu lauten:

$$-\frac{4\pi u}{c} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$-\frac{4\pi v}{c} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$-\frac{4\pi w}{c} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

In ähnlicher Weise haben wir die Gleichungen (33) umzuformen in

$$c\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)=\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t},$$

$$c\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\mu\frac{\partial\beta}{\partial t},$$

$$c\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}.$$

Wie aus dem Obigen leicht zu ersehen ist, können wir diese sechs letzten Gleichungen in zwei symmetrische Gruppen folgendermaßen zusammenfassen:

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z},\\ -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x},\\ -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y};\end{aligned}\right.$$

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mu}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Nach anderer Schreibweise läßt sich dieses Gleichungssystem durch die zwei Gleichungen

$$(38)\qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}=-\operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

und

$$(39)\qquad \frac{\mu}{c}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}=\operatorname{rot}\mathfrak{E}$$

wiedergeben. Das sind die Grundgleichungen für die Bewegung der Elektrizität und des Magnetismus in Isolatoren, welche zuerst von J. Cl. Maxwell aufgestellt und sowohl zur Darstellung der elektromagnetischen als auch der Lichterscheinungen in den Nichtleitern der Elektrizität benutzt wurden, womit wir uns im Band IV ausführlicher beschäftigen werden.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

Register.

(Die beigesetzten Zahlen geben die Seite des Buches an.)

Absolute Maßeinheiten 138.
— Stromeinheit 86.
— Widerstandseinheit 138.
Absoluter Widerstand 110, 114.
Absolutes elektromagnetisches Maß 53, 86.
— elektrostatisches Maß 6.
Allgemeine Gleichungen der Induktion 141ff.
Ampere 86.
Ampères Schwimmregel 83.
Äquipotentialfläche 27.
Arbeit des elektrischen Stroms 100, 105.
— elektrischer Kräfte 35.
Arbeitswert elektrischer Ladungen 34ff.

Ballistisches Galvanometer 106ff.
Biot-Savarts Gesetz 83.
Brechungsgesetz der Kraftlinien 52.

Chemische Arbeit des elektrischen Stroms 101.
Coulomb 139.
Coulombs Gesetz 5, 53.

Dämpfung des Galvanometers 111.
Deklination 54.
Dichte der Elektrizität 10, 19.
— — Kraftlinien 28.
Dielektrika 39ff.
Dielektrikum im Kondensator 47.
Dielektrische Polarisation 48.
Dielektrische Verschiebung 48, 141.
Dielektrizitätskonstante 40, 46, 47.
Dimension 135.
Dimensionsgleichung 136.

Elektrische Ebene 18.
— Energie 35.
— — des Kondensators 49.
— — im Dielektrikum 49.
— Erregung 48.
— Fläche 16.
— Kraft 6.
— — einer Kreisscheibe 15.
— Resonanz 124.
— Schwingungen 120.
— Spannung 7.
— Ströme, Wirkung aufeinander 129ff.
— — im Dielektrikum 139ff.
— Zylinderfläche 17.
Elektrischer Druck 39.
— — auf einer Kugel 37.
— Punkt 6.
— Strom 82ff.
— — als magnetische Platte 91ff.
Elektrisches Feld 28.
— Gleichgewicht 20.
— Moment 41.
— — der Volumeinheit 41.
— Potential 7.
Elektrisierungszahl 42.
Elektrizität 5ff.
Elektrizitätsbewegung in Isolatoren 144ff.
Elektrizitätsmenge 20ff.
Elektrodynamische Induktion 128.
Elektrodynamisches Potential 129ff.
— — eines Leiters auf sich selbst 131.
Elektromagnetisches Maß 53.
— Maßsystem 135.
Elektromagnetismus 82ff.
Elektromotorische Gegenkraft 101, 104, 106.
— Kraft 100.
Elektrostatik 5ff.
— und Wärmeleitung 50.
Elektrostatisches Maß 136.
— Maßsystem 135.
Energie elektrischer Körper 35, 49.
Erdinduktor 108ff.
Erdmagnetismus 54ff., 68.
Extrastrom 114ff.

Farad 139.
Faradays Pendel 103.
Feldintensität 28.
Feldstärke 28.
Flächendichte der Elektrizität 8, 41.
Freie Elektrizität 40ff.
Freier Magnetismus 64.

Galvanische Polarisation 101.
Galvanometerdämpfung 111.
Gaussscher Satz 16, 31.
Gegenseitige Induktion 128.
Geschlossene Fläche 17.
Gesetz von Biot und Savart 83.
Glaselektrizität 5.
Gleichgewicht der Elektrizität 19.
Greenscher Satz 29ff.

Grunderscheinungen der Elektrizität 5.
— — elektrodynamischen Induktion 128.
— des Magnetismus 52.
Grundgleichungen der Elektrizitätsbewegung in Isolatoren 144ff.

Harzelektrizität 5.
Homogen elektrische Zylinderfläche 17.
Homogen magnetisierte Kugel 65ff.
Homogenes elektrisches Feld 40.
— magnetisches Feld 54, 100.
Horizontalintensität des Erdmagnetismus 60ff.

Impedanz 122.
Induktanz 122.
Induktionsapparate 135.
Induktionskoeffizienten 128.
Induktionsstrom 104ff.
Induktionswirkungen zweier Stromleiter aufeinander 131.
Induktiver Widerstand 122.
Inklination 54, 110.
Inklinationsnadel 56.
Inklinationswinkel 55.
Intensität des Erdmagnetismus 60ff.
Isolator 5, 40, 144ff.

Joulesches Gesetz 101.

Kapazität 22, 45.
— einer Kugel 20.
Koeffizient der Selbstinduktion 117.
Komponenten der elektrischen Kraft 6.
— — — Verschiebung 140.
— — Stromdichte 90.
— des magnetischen Moments 59.
Kondensator 23ff.
— im Stromkreis 117ff.
— — Wechselstromkreis 122ff.
Kondensator mit Dielektrikum 47.
Konstanter elektrischer Strom 82ff.
Kraftgesetz elektrisch geladener Körper 5.
Kraftlinien 52.
Kraftsprung beim Passieren einer elektrischen Fläche 16.
Kreisförmige magnetische Platte 94ff.
Kreisstrom 83, 96.
Kugel, homogen magnetisierte 65ff.
— im homogen magnetischen Feld 70ff.
Kugelkondensator 23ff.
Kugel, Potential einer 8ff.

Laplacesche Gleichung 11ff.
Lehrbücher der Elektrizität 4.
— des Magnetismus 4.
Leiter der Elektrizität 5.
— im Dielektrikum 44.
Lenzsche Regel 105.
Lichtgeschwindigkeit 138.

Magnetische Achse 55.
— Arbeit 96ff.
— Energie 82.
— Erregung 73.
— Induktion 62, 73.
— Induktionskonstante 73, 142.
— Induktionslinien 70.
— Kraft 53.
— Kräfte auf Körper kleiner Magnetisierungszahl 62.
— Kraftlinien 54, 77.
— Permeabilität 73.
— Platte 91.
— Schirmwirkung 78.
Magnetischer Meridian 54.
Magnetisches Feld 54.
— — eines geradlinigen Stroms 83.
— — eines Stromelements 84.
— Kraftgesetz 53.
Magnetisches Moment 55, 60ff.
— — der Volumeinheit 62.
Magnetisierter Zylinder 73.
Magnetisierungszahl 62.
Magnetismus 52ff.
Magnetismusmenge 53.
Magnetpole 53.
Maßeinheiten 6, 53, 138.
Mikrofarad 139.
Moment des Magnets 55.

Negative Elektrizität 5.
Nichtleiter der Elektrizität 5.
Niveauflächen 27ff.
Nordpol 53.

Oberflächendichte des Magnetismus 64.
Oersteds Entdeckung des Elektromagnetismus 83.
Ohm 138.
Ohmsches Gesetz 100.
oszillierende Entladung 119.

Phasenverschiebung 122, 135.
Plattenkondensator 26.
Poissonsche Gleichung 13ff.
Polarisation 101.
Pole 53.
Positive Elektrizität 5.
Potential 7.
— der Erde 22.
— des elektrischen Stroms 87ff.
— — geschlossenen Stroms 93ff.
— einer homogen magnetisierten Kugel 68.
— — Kreisscheibe 14.
— — Kugelschale 8ff.
— — Vollkugel 10.
— eines Magnets 57ff.
Potentialfunktion 7.
Potentialunterschied 22, 100.
Potentielle Energie elektrischer Ladungen 35.
Praktische Maßeinheiten 138.

Quasistationärer Strom 119.

Raumdichte der Elektrizität 43.
Raumwinkel 17.
Reduktionsfaktor der Tangentenbussole 86.
Reibungselektrizität 5.

Scheinbarer Widerstand 122.
Schwimmregel von Ampère 83.
Schwingende Entladung 119.
Schwingungsversuch (Magnet) 61.
Selbstinduktion 117, 128.
Solenoid 98ff.
Spannung der Elektrizität 7.
Stokesscher Satz 124ff.
Stromarbeit 100, 103, 105.
Stromdichte 90, 141.
Stromeinheit 86.
Stromelement 83.
— im magnetischen Feld 102.
Stromstärke 84, 100.
Stromwärme 101.
Südpol 53.

Tangentenbussole 84ff.
Theorie der Dielektrika 39ff.
Thomsonscher Satz 72.
Transformatoren 135.
Transversal magnetisierter Zylinder 73ff.

Unendliche elektrische Ebene 18.
— magnetische Platte 96ff.

Vektorpotential 87.
Verschiebungsstrom 141.
Verteilung der Elektrizität 19.
— — — auf einer Kugel 20.
Volt 138.
Volt-Ampere 139.

Wärmeleitung und Elektrostatik 50.
— — Magnetismus 73.
Wärmewirkung des elektrischen Stroms 101.
Watt 139.
Wechselstrom 120ff., 134.
Widerstand 100.

Zeitintegral des Stroms 106.
Zylinderfläche (elektrische) 17.
Zylinder im magnetischen Feld 73.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

Sommer *1929*

Literatur zur Physik

Mit einem Anhang: Mathematische Literatur für den Physiker

WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 10

Sammlung Göschen ab 1.1.1930 nur noch Leinenband RM 1.80

Lehrbuch der Physik. Von Eduard Riecke, weiland Geheimer Regierungsrat, o. Professor an der Universität Göttingen. Zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen herausgegeben von Professor Dr. Ernst Lecher †, Vorstand des I. Physikalischen Instituts der Universität Wien, und Professor Dr. Adolf Smekal, o. Assistent am II. Physikalischen Institut der Universität Wien. Siebente, verbesserte und um eine Darstellung der Atomphysik vermehrte Auflage. Groß-Oktav.

I. Band: Mechanik und Akustik. Wärme. Optik. Mit 458 Figuren im Text. XVI, 656 Seiten. 1923 . . . . . RM. 12.60, geb. RM. 14.—

II. Band: Magnetismus und Elektrizität. Atomphysik. Mit einem Bildnis von E. Lecher † und 319 Figuren im Text. XVI, 725 Seiten. 1928. RM. 15.—, geb. RM. 17.—

Rieckes berühmtes „Lehrbuch der Physik", das die Mitte zwischen ausführlichen Werken und kurzen Kompendien hält, liegt nach Erscheinen des zweiten Bandes nunmehr vollständig in siebenter Auflage vor. Smekal hat den vorliegenden zweiten Band auf den letzten Stand der Forschungsergebnisse gebracht, verschiedentliche Änderungen vorgenommen und das Kapitel „Atomphysik" neu eingefügt.

Lehrbuch der Physik. Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule zu München. Von H. Ebert, weil. Professor an der Technischen Hochschule München.

I. Band. Mechanik. Wärmelehre. Mit 168 Abbildungen. Zweite Auflage. Groß-Oktav. XX, 661 Seiten. 1917. Anastatischer Neudruck. 1920. Geb. RM. 21.50

II. Band, I. Teil. Die elektrischen Energieformen. Fertiggestellt und herausgegeben von Professor C. Heinke. Mit 341 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XX, 687 Seiten. 1920 . . . . . RM 22.— geb. RM. 24.—

II. Band, II. Teil. Die strahlende Energie. Mit 196 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. XII, 416 Seiten. 1923 . . . . . RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Das Lehrbuch ist nach Umfang und Stoffbehandlung für diejenigen Physikstudierenden bestimmt, denen die Anwendung bei der Lösung technischer Probleme Endzweck des Studiums ist.

Die Physik. Von Dr. Leo Graetz, o. ö. Professor der Physik an der Universität München. Mit 395 teils farbigen Abbildungen im Text und 12 farbigen und schwarzen Tafeln. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Royal-Oktav. XII, 582 Seiten. 1923 . . . . . RM. 10.—, geb. RM. 12.50

Der Stoff ist in folgende Abschnitte eingeteilt: Die materiellen Körper. Die Elektronen. Strahlungserscheinungen und der Äther. Strahlen, Elektronen und Materien. Die Darstellung ist trotz aller Wissenschaftlichkeit allgemeinverständlich und lebhaft.

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. Clemens Schäfer, Professor an der Universität Breslau.

I. Band. Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929 . . . . . RM. 45.—, geb. RM. 48.—

II. Band. Theorie der Wärme. Molekular-kinetische Theorie der Materie. Zweite Auflage. 1929 . . . . . Im Druck.

III. Band. 1930 . . . . . In Vorbereitung.

Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht. *Annalen der Physik.*

Einführung in die theoretische Physik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien.

I. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 58 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 307 Seiten. 1923. RM. 7.50, geb. RM. 9.—

II. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 72 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 379 Seiten. 1924 . . . . . RM. 8.50, geb. RM. 10.—

Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfanges, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw., vertraut macht.

Monatshefte für Mathem. u. Physik.

Theoretische Physik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien.

I. Mechanik und Akustik. Mit 24 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. Neudruck. 167 Seiten. 1922. (Sammlung Göschen Bd. 76.) Geb. RM. 1.50

II. Licht und Wärme. Mit 47 Figuren. Fünfte Auflage. 156 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 77) . . . . . Geb. RM. 1.50

III. Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Figuren. Fünfte, verbesserte Auflage. 140 Seiten. 1922. (Sammlung Göschen Bd. 78) . Geb. RM. 1.50

IV. Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 17 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 146 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 374) Geb. RM. 1.50

Eine Anleitung für Studenten, auf der sich das Studium größerer Werke aufbauen kann.

Methoden der praktischen Analysis. Von Dr. Fr. A. Willers, o. Professor an der Bergakademie Freiberg (Sachsen). Mit 132 Figuren. Groß-Oktav. 344 Seiten. 1928 . . . . . RM. 20.—, geb. RM. 21.50

Das Buch befaßt sich mit dem Zahlenrechnen und seinen Hilfsmitteln, mit der Interpolation, mit der angenäherten Integration und Differentation, der praktischen Gleichungslehre, der Analyse empirischer Funktionen und der angenäherten Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 149 Seiten. 1922.
RM. 4.—, geb. RM. 5.—

Eine gemeinverständliche Darstellung der Vektor- und Tensoranalysis. Zur Einführung fürs Hauptfach — zum Studium fürs Neben- und Grenzfach.

Vektoranalysis. Von Dr. Siegfried Valentiner, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Sammlung Göschen Bd. 354) . . . . . Geb. RM. 1.50

Ein für Studium und Praxis mit Erfolg benutztes Hilfsmittel zur Lösung technischer Aufgaben.

Atomtheorie. Von Dr. phil. Arthur Haas, Professor für Physik an der Universität in Wien. Mit 64 Figuren im Text und auf 4 Tafeln. Zweite, völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Groß-Oktav. VIII, 258 Seiten. 1929 . . . . . RM. 10.—, geb. RM. 11.50

Inhalt: Elektronen, Atome und Lichtquanten. Die Grundlagen der Atommechanik. Die Spektren der Atome. Die Röntgenstrahlen. Die Atomkerne. Die Molekeln. Wechselwirkung zwischen Licht und Materie.

Die Welt der Atome. Zehn gemeinverständliche Vorträge. Von Arthur Haas, Dr. phil., a. o. Professor für Physik an der Universität Wien. Mit 37 Figuren im Text und auf 3 Tafeln. Oktav. XII, 130 Seiten. 1926.
RM. 4.80, geb. RM. 6.—

Materie und Elektrizität. Die Bausteine der Atome. Die Quanten des Lichtes. Spektren und Energiestufen. Das Wasserstoffatom. Die Grundstoffe. Das Atom als Planetensystem. Die Molekeln. Die Radioaktivität. Die Umwandlungen der Grundstoffe.

Künstliche Verwandlung der Elemente (Zertrümmerung der Atome). Von Dr. Hans Pettersson in Göteborg (Schweden). Aus dem Schwedischen übersetzt von Elisabeth Kirsch. Mit 59 Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 151 Seiten. 1929 . . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.—

Die Grundlagen der Physik. Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie. Von Dr. Hugo Dingler, a. o. Professor an der Universität München. Zweite Auflage. Oktav. XIV, 336 Seiten. 1923.
RM. 4.—, geb. RM. 5.—

Aus dem Inhalt: Das Geltungsproblem. Das Zweckprinzip. Die Logik. Raum und Zeit. Kausalität. Die Mechanik.

Physik und Hypothese. Versuch einer induktiven Wissenschaftslehre nebst einer kritischen Analyse der Fundamente der Relativitätstheorie. Von Dr. Hugo Dingler, a. o. Professor an der Universität München. Oktav. XI, 200 Seiten. 1921 . . . . . RM. 3.—, geb. RM. 4.—

Das Naturbild der neuen Physik. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Zweite Auflage. Mit 6 Figuren im Text. Oktav. V, 160 Seiten. 1924 . . . . . RM. 5.—, geb. RM. 6.—

Elektromagnetische Theorie des Lichtes. Molekularstatistik, Elektronentheorie. Quantentheorie. Theorie der Grundstoffe. Relativitätstheorie. Physik der Sterne. Weltall.

Wörterbuch der Physik. Von Dr. Felix Auerbach, a. o. Professor an der Universität Jena. Mit 267 Figuren. Oktav. X, 466 Seiten. 1920. Geb. RM. 4.50

Ein unentbehrliches Nachschlagewerk für Wissenschaft und Praxis der Physiker, Chemiker, Mediziner und Techniker.

Experimentalphysik. Von Professor Robert Lang, Rektor des Realgymnasiums in Stuttgart.

I. Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper. Dritte Auflage. Mit 125 Figuren im Text. 146 Seiten. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 611.) Geb. RM. 1.50

II. Wellenlehre und Akustik. Mit 69 Figuren im Text. Zweite Auflage. 96 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 612) . . . . . Geb. RM. 1.50

III. Wärmelehre. Mit 55 Figuren im Text. 98 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 613) . . . . . Geb. RM. 1.50

IV. Optik. Mit vielen Figuren im Text. 110 Seiten. 1925. (Sammlung Göschen Bd. 614) . . . . . Geb. RM. 1.50

Eine bewährte Einführung für Studierende.

Physikalische Formelsammlung. Von G. Mahler †, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Fünfte, völlig umgearbeitete Auflage, besorgt von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen in Württemberg. Mit 71 Figuren. 162 Seiten. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 136) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das Buch gibt fertige Resultate und ermöglicht einen raschen Überblick über die Teilgebiete der Physik.

Physikalische Aufgabensammlung. Von G. Mahler †, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Dritte, völlig umgearbeitete Auflage, besorgt von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen. 136 Seiten. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 243) . . . . . Geb. RM. 1.50

Zum Studium und Selbststudium für den Anfänger und zum Gebrauch in der Ingenieurpraxis.

Physikalische Tabellen. Von Dr. A. Leick. Zweite Auflage. Neubearbeitet von Prof. Dr. W. Leick in Berlin-Lichterfelde. 96 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 650) . . . . . Geb. RM. 1.50

Ein wertvolles Orientierungsmittel für ein rationelles Studium.

Physikalische Messungsmethoden. Von Professor Dr. Wilhelm Bahrdt in Berlin-Lichterfelde. Mit 54 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 147 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 301) Geb. RM. 1.50

Eine Anleitung zu Versuchen, die besonders bei Übungen wertvolle Dienste leisten wird.

Kristallographie. Von Dr. W. Bruhns, Professor an der Bergakademie Clausthal. Zweite Auflage, neubearbeitet von Dr. P. Ramdohr, o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 184 Abbildungen. 1926. (Sammlung Göschen Bd. 210) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das vor allem für Studierende der Naturwissenschaften bestimmte Buch hat in der Neuauflage eine grundlegende Umarbeitung erfahren und ist auf den gegenwärtigen Stand der kristallographischen Wissenschaft gebracht.

Einführung in die Kristalloptik. Von Dr. Eberhard Buchwald, Privatdozent der Physik an der Universität Breslau. Mit 124 Abbildungen. Neudruck. 124 Seiten. 1920. (Sammlung Göschen Bd. 619) Geb. RM. 1.50

Der Band behandelt ein- und zweiachsige Kristalle ohne Drehvermögen und Kristalle mit Drehvermögen, Absorption, Einfluß von Temperatur usw. und eignet sich zur allgemeinen Orientierung für Studierende und Praktiker.

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. Hinrichs, wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Optischen Anstalt C. P. Goerz A.-G., Berlin-Friedenau. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 56 Figuren. 1924. (Sammlung Göschen Bd. 532) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das Buch gibt die Grundlagen des Gebiets bis zur Brechung durch ein zentriertes System von Kugelflächen und zu den einfachsten Linsenfällen. Jedem Abschnitt sind Übungsbeispiele beigegeben.

Radioaktivität. Von Dr. P. Ludewig, Professor an der Bergakademie in Freiberg in Sachsen. Mit 37 Abbildungen. 133 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 317) . . . . . Geb. RM. 1.50

Kurze Einführung in das periodische System der Elemente, Atomzerfall und Radioaktivität, Radioelemente und physikalische Eigenschaften und Wirkungen der radioaktiven Strahlen, in die Grundlagen der radioaktiven Messungen und Anwendung der radioaktiven Strahlen in der Medizin.

Röntgenstrahlen. (Physik, Technik und Anwendung.) Von Dr. phil. nat. Richard Herz in Frankfurt a. M. Mit 48 Figuren im Text und 36 Abbildungen auf 16 Tafeln. 1926. (Samml. Göschen Bd. 950) Geb. RM. 1.50

Das Buch wendet sich an Ärzte, Röntgenassistenten, Ingenieure, Techniker und vor allem an Studierende der Medizin und Naturwissenschaften.

Luftelektrizität. Von Dr. Karl Kähler, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter am Preußischen Meteorologisch-Magnetischen Observatorium in Potsdam. Zweite Auflage. Mit 19 Abbildungen. 134 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 649) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das natürliche Feld der Erde. Das elektrische Teilvermögen der Atmosphäre. Die elektrischen Ströme in der Luft. Die radioaktiven Vorgänge in der Atmosphäre. Elektrische Wirkungen des Sonnenlichts. Ursprung der Luftelektrizität.

Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse. Von Dr. Arthur Schleede und Dr. Erich Schneider. Zwei Bände. Groß-Oktav. 1929.

I. Band: Mit 249 Figuren und 57 Tabellen im Text. VIII, 336 Seiten. RM. 18.50, geb. RM. 20.—

II. Band: Mit 553 Figuren und 40 Tabellen im Text. IV, 344 Seiten. RM. 22.50, geb, RM. 24.—

Das vorliegende Werk behandelt — auf einem Minimum an Voraussetzungen aufbauend — Theorie und Praxis der Röntgenspektroskopie und Kristallstrukturanalyse. Zur Beherrschung dieser Methoden ist jedoch eine so große Zahl verschiedenartigster Kenntnisse und Fertigkeiten (Röntgenstrahlen, Hochspannung, Vakuum, Atomtheorie usw.) erforderlich, daß es denen, die sie auf irgendein Spezialproblem anwenden wollen, zur gründlichen Einarbeitung zumeist an Zeit gebricht. Hier greift das vorliegende Werk von Schleede und Schneider ein, das den Gegenstand nach der praktischen und theoretischen Seite erschöpfend behandelt.

Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht. Von Prof. Dr. A. Nippoldt, Mitglied des Preuß. Meteorolog. Instituts (Magnetisches Observatorium zu Potsdam). Mit 7 Tafeln und 18 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 131 Seiten. 1921. (Sammlung Göschen Bd. 175) . . . . Geb. RM. 1.50

Eine kurze, übersichtliche und eindringliche Einführung in das Studium des Erdmagnetismus.

Einführung in die Theorie der Wärme. Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 96 Textfiguren. Groß-Oktav. VIII, 319 Seiten. 1921 . . . . . RM. 8.—, geb. RM. 9.—

Aus dem Material von Vorlesungen entstanden und auf einem Minimum von mathematischen und physikalischen Kenntnissen aufbauend, ist das Werk eine Einführung zur streng wissenschaftlichen Behandlung dieses Themas.

Die Physik der Verbrennungserscheinungen. Von Dr. Heinrich Mache, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 43 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. Groß-Oktav. V, 133 Seiten. 1918. RM. 3.—, geb. RM. 3.80

Empfindliche Galvanometer für Gleich- und Wechselstrom. Von Dr. Otto Werner. Mit 23 Abbildungen und 17 Tabellen. Groß-Oktav. VIII, 208 Seiten. 1928 . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.—

Der Verfasser erörtert Aufbau, Arbeitsweise und Empfindlichkeitsarten der Galvanometerkonstruktionen sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrom und gibt Gesichtspunkte für die Galvanometerauswahl und kritische Vergleiche der Galvanometertypen.

Vorlesungen über Thermodynamik. Von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Achte Auflage. 1927. Groß-Oktav. X, 287 Seiten . . . Geb. RM. 11.50

Das vorliegende Buch geht von einigen allgemeinen Erfahrungstatsachen aus, namentlich von den beiden Hauptsätzen der Wärmelehre, und entwickelt hieraus die wichtigsten physikalischen und chemischen Sätze. Zunächst werden die Grundtatsachen und Begriffserklärungen für Temperatur, Molgewicht und Wärmemenge erläutert, dann die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie aufgestellt und bewiesen, endlich die Anwendungen auf die besonderen Gleichgewichtszustände ausführlich besprochen.

Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. Vorlesungen zur Einführung in die theoretische Physik, gehalten im Sommersemester 1914 an der Universität Leipzig. Von Dr. phil. Arthur Haas, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 45 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 216 Seiten. 1914 . . RM. 7.50

Zum Gebrauch bei Vorlesungen und zum Selbststudium für Anfänger.

Die Prinzipe der Dynamik. Von Dr. Clemens Schaefer, o. Professor an der Universität Marburg. Mit 6 Figuren im Text. Groß-Oktav. IV, 76 Seiten. 1919 . . . . . RM. 2.50

Das ausgezeichnete Werk behandelt in eingehender, elementarer Weise die Fragen der Ableitung und Äquivalenz der verschiedenen mechanischen Prinzipien. *Monatshefte für Mathematik und Physik.*

Geschichte der Physik. Von A. Kistner, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe i. B.

I. Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 126 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 293) . . . . Geb. RM. 1.50

II. Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Zweite, erweiterte Auflage. 149 Seiten. 1919. (Sammlung Göschen Bd. 294.) Geb. RM. 1.50

Wilhelm von Siemens. Ein Lebensbild. Gedenkblätter zum 75jährigen Bestehen des Hauses Siemens & Halske. Von August Rotth. Mit 5 Tafeln in Lichtdruck. Oktav. V, 224 Seiten. 1922 . . RM. 2.60, geb. RM. 4.—

Die Biographie gibt zugleich ein Bild der Entwicklung der Siemenswerke und ein Stück Geschichte der deutschen Technik.

Einführung in die Elektrotechnik. Hochschulvorlesungen von Dr. C. Heinke, o. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule München, Geh. Reg.-Rat. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 560 Abbildungen. Oktav. 490 Seiten. 1924 . . . . . Geb. RM. 18.—

Aus dem Inhalt: Die elektrotechnisch wichtigen Grunderscheinungen und elektromagnetischen Begriffe, Energiewandlungen mit Erzeugung elektrischer Spannungen. Die technische Erzeugung elektrischer Arbeit. Die technische Verwertung elektrischer Arbeit. Elektrische Meßgeräte.

Lehrbuch der Elektrotechnik. Von Professor E. Stöckhardt, Diplomingenieur und Studienrat. Dritte, umgearbeitete Auflage. Mit mehreren hundert Abbildungen. Oktav. VIII, 327 Seiten. 1925. . Geb. RM. 13.—

Einer Erläuterung der allgemeinen theoretischen Grundlagen folgt eine zusammenfassende Übersicht über Leitungen und Zubehör, Beleuchtung, Magnetismus, Gleichstromerzeuger, Sammler, Wechselstrom, Atomlehre, Quecksilberdampfgleichrichter, drahtlose Telegraphie und Telephonie.

Elektrische Stromerzeugungsmaschinen und Motoren. Kurzer Abriß ihres Aufbaues und ihrer Wirkungsweise. Leichtfaßlich dargestellt von Richard Vater, Geh. Bergrat, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Herausgegeben von Dr. Fritz Schmidt, Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 116 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VIII, 128 Seiten. 1920 . . . . . RM. 3.—, geb. RM. 3.60

Eine gute Einführung in die technischen Grundlagen und die Wirkungsweise der Generatoren, Motoren und Transformatoren, unter Vermeidung mathematischer Ableitungen.

Die Kommutatormaschinen für einphasigen und mehrphasigen Wechselstrom. Von Dr.-Ing. e. h. M. Schenkel, Oberingenieur der Siemens-Schuckertwerke. Mit 124 Abbildungen. Oktav. VII, 259 Seiten. 1924. RM. 10.50, geb. RM. 12.—

Der Verfasser, der seit Jahrzehnten an der Entwicklung der Kommutatormaschinen praktisch mitarbeitet, hat unter Berücksichtigung der modernsten Maschinentypen alles verstreute Material in diesem Lehrbuch zusammengefaßt.

Die Schwingung als Vortriebsfaktor in Natur und Technik. Gedanken eines Ingenieurs über das Problem der schwingenden Propulsion in Technik und Biologie. Von Hans Schramm. Mit 54 Abbildungen. Oktav. VI, 91 Seiten. 1927 . . . . . RM. 4.—

Aus dem Inhalt: Die Schwingung in der Natur. Biochemische Kritik. Die Schwingung als Vortriebsfaktor im Wasser. Schwingungsleistungen der Fische. Die Schwingung im Luftmeer. Der Insektenflug. Der Vogelflug. Die Theorie der Vortriebsschwingung. Die phasenmäßige Entwicklung der Schwingung.

MATHEMATISCHE LITERATUR FÜR DEN PHYSIKER.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1925 . . . . . RM. 30.—, geb. RM. 33.—

Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909 . . . . . Geb. RM. 20.—

Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben . . . . . Geb. je RM. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. Seeliger. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 378 Seiten. Folio. 1923 . . . . . Geb. RM. 20.—
Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in französischer wie englischer Ausgabe vor . . . . . Geb. je RM. 20.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. Adler. Zweite Aufl. 116 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 423.) Geb. RM. 1.50

Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Peters, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lexikon-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912 . . . . . Geb. RM. 7.—

In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benutzung des wertvollen Materials, das ihm als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der 8stelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. August, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Achtundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. August, weiland Professor an der Artillerie- und Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 Seiten. 1927 . . . . . Geb. RM. 2.—

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein."

Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Dr. Robert Haussner, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neudruck 1926. (Samml. Göschen Bd. 81) . . . . . Kart. RM. 1.50

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schulen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten."

Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. Max Zacharias, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. Paul Meth, Studienrat an der Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927 . . . . . Geb. RM. 1.50

„Diese Logarithmentafel zeichnet sich durch übersichtliche Anordnung und Reichtum des Gebotenen aus." *Deutsche Schulzeitung in Polen.*

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. Küster †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet sowie mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. Thiel, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg.

Dreißigste bis vierunddreißigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 148 Seiten und eine Tafel. 1925 . . . . . Geb. RM. 6.—

„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehrten Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die Neuauflage erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“

Zeitschrift für angewandte Chemie.

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1928 . . . . . RM. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschieden großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“ *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.*

Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument. (Kreis- und Hyperbelfunktionen.) Von Dr. Carl Burrau. Vorwort in deutscher, französischer und englischer Sprache. Oktav. XX, 63 Seiten. 1907 . Geb. RM. 4.—

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. Th. Bürklen †. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb. 241 Seiten. Mit 36 Figuren. 1927. (Sammlung Göschen Bd. 51.) . . Geb. RM. 1.50

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgeeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben.“ *Fortschritte der Mathematik.*

Höhere Algebra. Von Dr. Helmut Hasse, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Halle.

I: Lineare Gleichungen. 160 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 931.) Geb. RM. 1.50

II: Gleichungen höheren Grades. 160 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 932.) . . . . . Geb. RM. 1.50

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der ‚allgemeinen‘ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“ *Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr*

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 4 Figuren. VIII, 307 Seiten. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8) . . . . . RM. 10.—, geb. RM. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Oskar Perron, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. VIII, 243 S. 1927. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9.) RM. 8.—, geb. RM. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. Runge, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. V, 172 Seiten. 1921. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2) . . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nichtlinearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Dient das Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von Dr. Gerhard Kowalewski, o. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. Zweite, verb. Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 Seiten. 1925 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ *Schulwart.*

Lehrbuch der Analysis. Von Professor Edouard Goursat. I. Band. Nach der zweiten Auflage des französischen Originals übersetzt von Felix James Schwarz. Mit Begleitwort von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 53 Figuren. Groß-Oktav. XII, 592 Seiten. 1914 . . . . . RM. 12.—, geb. RM. 13.50

Höhere Analysis. Von Dr. Fr. Junker, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen (Württemberg). Erster Teil: Differentialrechnung. Mit 167 Übungsbeispielen und 67 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 204 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 87) . . . . . Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Vierte, verbesserte Auflage. 132 S. 1923. (Samml. Göschen Bd. 88.) Geb. RM. 1.50

„Die Bändchen sind eine wahre Hochschule des abstrakten Denkens, und das Werk genießt in Fachkreisen mit Recht das höchste Ansehen.“
Magazin für Pädagogik.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Fr. Junker. Vierte, verbesserte Auflage von Oberstudienrat Professor Dr. A. Witting. Mit 47 Figuren im Text. 130 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 146) . . . . . Geb. RM. 1.50

Der Band, der sich als vorzügliches Mittel zur Einübung der elementaren Sätze und Formeln der Differentialrechnung bewährt hat, erfuhr bei seiner Neuauflage eine bedeutende Verbesserung und Erweiterung.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Rektor Dr. Fr. Junker. Mit 52 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 135 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 147.) Geb. RM. 1.50

„Die reichhaltige Aufgabensammlung ist für den Selbstunterricht sehr geeignet. Das nützliche Büchlein wird weiterhin die verdiente große Verwendung finden.“
Schweizer Pädagogische Zeitschrift.

Elementare Reihenlehre. Von Dr. Hans Falckenberg, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gaußsche an.

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. Pleßner. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926 . . . . RM. 14.—, geb. RM. 16.—

„Das System ist so durchgeführt, daß fast keine Vorkenntnisse gefordert und trotzdem das volle Beherrschen des Materials erzielt werden kann."

Allgemeine Österr. Chemiker- u. Techniker-Zeitung.

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. Ludw. Schlesinger, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten. 1922 . . . . RM. 10.—, geb. RM. 11.—

Es war das Bestreben des Verfassers, durch die hier gegebene Darstellung die Theorie der Differentialgleichungen auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 920) . . . . . Geb. RM. 1.50

Der Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. Bei der Auswahl des Stoffes wurden Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. Horn, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10.) RM. 9.—, geb. RM. 10.50

Inhalt: Elementare Integrationsmethoden, Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung, numerische und graphische Näherungsmethoden, lineare Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden und weitere Untersuchungen im reellen Gebiet, Existenzbeweise im komplexen Gebiet, Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten, Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.

Partielle Differentialgleichungen. Von Prof. Dr. G. Hoheisel. 159 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Nr. 1003) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das Buch enthält alle wichtigen Lehrsätze und Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Trotz der Kürze sind alle wesentlichen Ideen und Wege aufgezeigt.

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von Heinrich Burkhardt. Neu herausgegeben von Dr. Georg Faber, o. Professor an der Technischen Hochschule in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920 . . . . . RM. 6.—, geb. RM. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921 . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920 . . . . . RM. 14.—, geb. RM. 15.50

Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen.

Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 140 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 668.) Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführungen der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 703.) Geb. RM. 1.50

„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen."
Monatsschrift für Mathematik und Physik.

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. Konrad Knopp, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 135 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 877) . . . . . Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 878) . . . . . Geb. RM. 1.50

Die Mehrzahl der in den beiden Bänden enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf Knopps „Funktionentheorie" (Samml. Göschen Bd. 668 und 703). Sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen beigegeben.

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. König, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. Krafft, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11) . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50

Das Buch will den Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.

Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg, Privatdozent in Heidelberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 901) . . . . . Geb. RM. 1.50

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 944) . . . . . Geb. RM. 1.50

„Die Bände geben einen klaren Einblick in die Gedankengänge und Beweismethoden der Potentialtheorie. Da es dem Verfasser gelungen ist, trotz der räumlichen Enge alle erforderlichen Beweise exakt durchzuführen, ist das Werk als Hilfsbuch neben einer Vorlesung durchaus zu empfehlen."
Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterricht.

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. Wangerin in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Figuren. VIII, 255 Seiten. Unveränderter Neudruck. 1922. (Samml. Schubert Bd. 58) . . . . . Geb. RM. 4.—

II. Teil: Mit 17 Figuren. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59.) Geb. RM. 4.—

„Wer in die Potentialtheorie eindringen will, findet in dem leichtverständlichen Buch einen zuverlässigen und angenehmen Führer."
Zeitschrift f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht.

Numerische Integration. Von Professor Dr. F. A. Willers. Mit 2 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 864) . . . . . Geb. RM. 1.50

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.

Graphische Integration. Von Professor Dr. F. A. Willers. Mit 53 Figuren. 142 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 801) . . . . . Geb. RM. 1.50

Der Verfasser versucht einem weiteren Kreise die immer noch zu wenig benutzten zeichnerischen Methoden bekanntzumachen. Er setzt dabei so wenig Vorkenntnisse wie möglich voraus.

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. Werkmeister in Dresden. Mit 60 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 135 Seiten. 1929. (Samml. Göschen Bd. 405) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. Fr. A. Willers. Mit vielen Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 922.) Geb. RM. 1.50

Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.

Taschenbuch für praktische Geometrie. Von Dr. H. Löschner, o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Mit 10 Figuren im Text. Klein-Oktav. X, 147 Seiten. 1922. Geb. RM. 2.—

Der vorliegende Band enthält die wichtigen Formeln der praktischen Geometrie, die Konstanten und Genauigkeitsangaben, Leitsätze für die Beobachtungen und Merkregeln für die Behandlung, Beförderung und Aufbewahrung geodätischer Instrumente und Geräte.

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. Richard Baldus. Mit 71 Figuren. 152 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 970.) Geb. RM. 1.50

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. Liebmann in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923. RM. 6.—, geb. RM. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Kreis und Kugel. Von Dr. Wilhelm Blaschke, o. Prof. an der Universität Hamburg. Mit 27 Figuren im Text. Groß-Oktav. X, 169 Seiten. 1916. RM. 4.40, geb. RM. 5.50

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. Karl Doehlemann, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule München. Fünfte, verbesserte Auflage.

Erster Teil. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 72.) Geb. RM. 1.50

Zweiter Teil. Mit 55 Figuren. 138 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 876.) Geb. RM. 1.50

„Die Darstellung ist musterhaft klar und leichtverständlich und wird durch übersichtliche Zeichnungen und zahlreiche Aufgaben aufs trefflichste illustriert.“

Bayerische Blätter für das Gymnasialschulwesen.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Von Dr. Georg Scheffers, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923 . . . . . RM. 13.—, geb. RM. 14.50
II. Mit 110 Figuren. Dritte, verb. Auflage. XI, 582 Seiten. 1922. RM. 15.—, geb. RM. 16.50

Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigefügten Formeltafeln und Register erhöhen den Wert des Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Von Oberstudiendirektor Dr. Viktor Kommerell in Tübingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Tübingen. I. Teil. Dritte Auflage. Mit 28 Figuren. VIII, 184 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 29) . . . . . Geb. RM. 3.—

II. Teil. Dritte Auflage. Mit 13 Figuren. IV, 196 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 44) . . . . . Geb. RM. 3.—

In der neuen Auflage werden u. a. die Untersuchungen Salkowskis über die Raumkurven und die Bertrandschen Kurven berücksichtigt.

Darstellende Geometrie. Von Dr. Robert Haußner, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena. Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. Neudruck. 207 S. 1922. (Samml. Göschen Bd. 142.) Geb. RM. 1.50
Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. Neudruck. 168 Seiten. 1924. (Samml. Göschen Bd. 143) . . . . . Geb. RM. 1.50

In vier Abschnitten werden die Parallelprojektion ebener und räumlicher Gebilde, die Darstellung von Punkt, Gerader und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen sowie ebenflächige Gebilde behandelt.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Karl Rohn, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. Erwin Papperitz, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielflache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1913. Anastatischer Nachdruck. 1921 . . . . . RM. 16.50, geb. RM. 18.—

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916 . . . RM. 6.20, geb. RM. 7.20
III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923 . . . . RM. 10.80, geb. RM. 12.—

Darstellende Geometrie. Von Theodor Schmid, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 S. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65.) Geb. RM. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Fig. 340 S. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66.) Geb. RM. 7.50

„Unter den zahlreichen guten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie steht das vorliegende mit in erster Reihe. Ausgezeichnete Figuren, klare Darstellung, reicher Inhalt sind seine besonderen Kennzeichen.“

Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. Otto Knopf, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 508 und 871) . . . . . Geb. je RM. 1.50

Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. Marcello Pirani, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 58 Figuren. Neudruck. 126 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 728) . . . . . Geb. RM. 1.50

Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fluchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Studienrat an der Baugewerkschule in Erfurt. 2 Teile. (Samml. Göschen Bd. 603 u. 695.) Geb. je RM. 1.50

Vorlesungen über graphische Statik. Von Dr. Fr. Schur, o. Professor an der Technischen Hochschule in Breslau. Herausgegeben unter Mitwirkung von Wolfgang Vogt. Mit zahlreichen Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 219 Seiten. 1915 . . . . . RM. 7.—, geb. RM. 8.20

Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart.
I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Sechster Neudruck. 148 S. 1921. (Samml. Göschen Bd. 178.) Geb. RM. 1.50
II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Sechster Neudruck. 149 S. 1922. (Samml. Göschen Bd. 179) . . . . . Geb. RM. 1.50

Kinematik. Von Dr.-Ing. Hans Polster, Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik Merseburg-Leuna. Mit 76 Abbildungen. Zweite Auflage. 151 Seiten. 1920. (Samml. Göschen Bd. 584.) Geb. RM. 1.50

Der Band bietet dem Studierenden eine Einführung, will aber darüber hinaus den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die sich in die schwierigen Bewegungsverhältnisse von Nocken-, Schwingdaumen- und Wälzhebelsteuerungen oder von anderen Gebieten tieferen Einblick verschaffen wollen, ein bequemer Führer sein.

Ballistik. Von Dr. Theodor Vahlen, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Greifswald. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922 . . . . . RM. 9.—, geb. RM. 10.—

Im Gegensatz zu anderen Werken über Ballistik bringt dieses neue Buch gerade den mathematischen Gehalt der Ballistik zur Darstellung. Es gewinnt dadurch noch erhöhte Bedeutung, daß es seine Entstehung den praktischen Erfahrungen verdankt, die der Verfasser im Kriege machte. U. a. weist es als neu die zwischen innerer und äußerer Ballistik einzuschaltende Übergangsballistik und als Ballistik in großen Höhen die kosmische Ballistik auf.

Festigkeitslehre. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 288) . . . . . Geb. RM. 1.50

In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen. Von R. Haren. Dritte, vollständig neu bearbeitete Auflage von Josef Furtmayr, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 43 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 491) . . . . . Geb. RM. 1.50

Hydraulik. Von Professor Dipl.-Ing. W. Hauber in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 151 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 397) . . . . . Geb. RM. 1.50

Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.

Elastizitätslehre für Ingenieure. Von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen. 2 Bde. (Samml. Göschen Bd. 519 und 957) . . . . . Geb. je RM. 1.50

Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger. Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.

Etymologisches Wörterbuch der Naturwissenschaften und Medizin. Sprachliche Erklärung der wichtigeren Ausdrücke und Namen der Anatomie, Astronomie, Biologie, Botanik, Chemie, Geographie, Geologie, Medizin, Mineralogie, Naturphilosophie, Paläontologie, Physik, Psychologie und Zoologie. Von Dr. C. W. Schmidt. Oktav. VII, 138 Seiten. 1923. Geb. RM. 2.—

Das Büchlein wendet sich in erster Linie an Nichthumanisten, wird aber auch von Studierenden mit griechischer und lateinischer Vorbildung mit Vorteil gebraucht.

Auf Wunsch kostenlose Zusendung unserer

FACHKATALOGE UND SONDERVERZEICHNISSE

Mathematik und verwandte Wissenschaften / Naturwissenschaften und Medizin / Zoologie und Botanik Geologie und Mineralogie / Erdkunde / Rechts- und Staatswissenschaften u. a.

VERLAG VON WALTER DE GRUYTER & CO. IN BERLIN W 10 UND LEIPZIG

Röderdruck Leipzig.

1041
g 25,—

€ 9,-

37,44

BG Politechniki Śląskiej
nr inw.: 102 - 141165
Dyr.1 141165