

Sammlung Göschen

Physikalische
Formelsammlung

von

Prof. G. Mahler

Mit 65 Figuren

Sammlung Götschen Zu elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Verzeichnis der erschienenen Bände.

- Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre** von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbed in Bochum. Nr. 232.
- Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik.** Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
- **Musikalische**, v. Dr. Karl E. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.
- Algebra. Arithmetik u. Algebra** v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrten Schule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- Alpen, Die**, von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität und an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.
- Altertümer. Die deutschen**, v. Dr. Franz Suhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.
- Altertumskunde, Griechische**, von Prof. Dr. Rich. Malsch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Dollbildern. Nr. 16.
- **Römische**, von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Dollb. Nr. 45.
- Analyse, Techn.-Chem.**, von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.
- Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung.** Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- — — **Repetitorium und Aufgabensammlung 3. Differentialrechnung** v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- — — **II: Integralrechnung.** Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.
- — — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.
- Analysis, Niedere**, von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.
- Arbeiterfrage, Die gewerbliche**, von Werner Sombart, Professor an der Universität Breslau. Nr. 209.
- Arbeiterversicherung, Die**, von Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
- Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrten Schule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- — **Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra** v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrten Schule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.
- Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper** von A. S. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. S. Wislicenus, Prof. a. d. Univ.-Strasbourg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.
- Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper** von Dr. Walter S. Wislicenus, Prof. an der Universität Strasbourg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.
- Aufgabensammlg. 2. Analyt. Geometrie d. Ebene u. D. Th.** Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.
- **Physikalische**, v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.
- Aufsabentwürfe** von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.
- Baukunst, Die, des Abendlandes** von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.
- Betriebskraft, Die zweckmäßigste**, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

Sammlung Götschen Je in elegantem 80 Pf.

Leinwandband

G. J. Götschen'sche Verlagsbuchhandlung, Leipzig.

- Betriebskraft, Die zweckmäßigste,** von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.
- Bewegungsspiele** von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.
- Biologie der Pflanzen** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
- Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur** v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.
- II: Beziehungen der Tiere zur organ. Natur v. Dr. Heinr. Simroth. Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
- Gleidererei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe** von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Buchführung.** Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Off. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.
- Buddha** von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.
- Chirurgik, Abriss der,** von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.
- Chemie, Allgemeine und physikalische,** von Dr. Max Rudolph, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
- II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
- **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- siehe auch: Metalle. — Metalloide.
- Chemie, Geschichte der,** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
- **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Allphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.
- III: KARBONKLISSCHE Verbindungen. Nr. 193.
- IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
- II: Dissimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 241.
- Chemisch-Technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.
- Dampfkessel, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.
- Dampfmaschine, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.
- Dampfturbinen, Die,** ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbildungen. Nr. 274.
- Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl m. Ebnltg. u. Wörterb. herausgegeben v. Dr. Herm. Janzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.
- Diatrichen.** Kudrun u. Dietrichen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

Sammlung Götschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junfer, Prof. a. Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- **Repetitorium u. Aufgabensammlung** 3. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junfer, Professor am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- Eddalieder** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
- Eisenhüttenkunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.
- II. Teil: Das Schmiedeeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.
- Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus.** Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.
- Elektrochemie** von Dr. Heinr. Danneel, Privatdozent in Breslau. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.
- Elektrotechnik.** Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.
- II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.
- III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.
- Epigonen, Die, des höfischen Epos.** Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuar der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
- Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht** von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preussischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Tafeln. Nr. 175.
- Ethik** von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.
- Exkursionsflora von Deutschland** zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. 1. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 268.
- 2. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 269.
- Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei u. ihre Hilfsstoffe** v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuz. höh. Fachschule f. Textilindustrie. Krefeld. III. 28 Fig. Nr. 186.
- Eisensprochweisen, Das,** von Dr. Ludwig Reiffstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.
- Festigkeitslehre** von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit zahlreichen Figuren. Nr. 288.
- Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Finanzwissenschaft** v. Präsident Dr. R. van der Borcht in Berlin. Nr. 148.
- Fischerei und Fischzucht** v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
- Formelsammlung. Mathemat., u. Repetitorium** d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.
- **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Fortsetzung auf der 4. Vorseite.

Sammlung Göschen

Physikalische Formelsammlung

von

G. Mahler

Professor der Mathematik und der Physik
am Gymnasium in Ulm

Mit 65 Figuren

Dritte, verbesserte Auflage

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1906

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.



141 168

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig · R.

0320/14

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt. Mechanik.

	Seite
§ 1. Allgemeine Sätze; Grundgesetze	6
§ 2. Die gleichförmige, geradlinige Bewegung	7
§ 3. Das Parallelogramm der Bewegungen	8
§ 4. Die beschleunigte Bewegung	10
§ 5. Der Fall	12
§ 6. Der Wurf	14
§ 7. Die Zentralbewegung	18
§ 8. Die harmonische Bewegung	20
§ 9. Das mathematische Pendel	22
§ 10. Masse; Kraft	23
§ 11. Das Maßsystem	26
§ 12. Die Dimension	28
§ 13. Die Grundgesetze des Gleichgewichtes starrer Körper .	29
§ 14. Das Parallelogramm der Kräfte	29
§ 15. Die Zusammensetzung zweier Kräfte in der Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten	32
§ 16. Drehkräfte; das Moment	34
§ 17. Schwerpunkt	38
§ 18. Bestimmung des Schwerpunktes	39
§ 19. Die einfachen Maschinen	41
§ 20. Das Trägheitsmoment	47
§ 21. Gesetze der drehenden Bewegung	51
§ 22. Anwendungen	52
§ 23. Hindernisse der Bewegung	55
§ 24. Die allgemeine Gravitation	57

§ 25.	Elastizität und Festigkeit	58
§ 26.	Der Stoß	60
§ 27.	Zusammendrückbarkeit	63
§ 28.	Die Fortpflanzung des Drucks. Hydraulische Presse	64
§ 29.	Der Boden- und Seitendruck	65
§ 30.	Das Archimedische Prinzip	65
§ 31.	Das spezifische Gewicht. Die Dichte	67
§ 32.	Bestimmung der relativen Dichte	68
§ 33.	Ausströmen einer Flüssigkeit unter dem Einfluß der Schwere	71
§ 34.	Gesetz von Boyle	73
§ 35.	Relative Dichte	74
§ 36.	Prinzip des Archimedes. Wägung	75
§ 37.	Luftdruck	76
§ 38.	Verdünnungs- und Verdichtungspumpen	77
§ 39.	Ausfluß	79
§ 40.	Daltons Gesetz	81

II. Abschnitt. Akustik.

§ 41.	Schwingungszahl, Tonleiter, Stimmung	82
§ 42.	Tonquellen	87
§ 43.	Ausbreitung und Stärke des Schalles; Zurückwerfung	88
§ 44.	Geschwindigkeit des Schalles	89
§ 45.	Das Prinzip von Doppler	92

III. Abschnitt. Optik.

§ 46.	Stärke der Beleuchtung	94
§ 47.	Die Geschwindigkeit des Lichtes	95
§ 48.	Reflexion des Lichtes an ebenen Flächen	97
§ 49.	Kugel- oder sphärische Spiegel	100
§ 50.	Brechung des Lichtes	106
§ 51.	Das Prisma	110
§ 52.	Brechung an sphärischen Begrenzungsflächen	112
§ 53.	Brechung durch Linsen	114
§ 54.	Die Lupe	123
§ 55.	Das zusammengesetzte Mikroskop	124
§ 56.	Das Fernrohr	125
§ 57.	Der Regenbogen	128
§ 57a.	Achromasie	128

IV. Abschnitt. Kalorik.

	Seite
§ 58. Das Thermometer	130
§ 59. Ausdehnung der Körper	130
§ 60. Änderung des Aggregatzustandes	135
§ 61. Kalorimetrie; spezifische Wärme	137
§ 62. Mechanische Wärmetheorie	140

V. Abschnitt. Magnetik.

§ 63. Das Gesetz von Coulomb; die magnetische Menge	142
§ 64. Potential; Kraftlinien	144
§ 65. Feldstärke eines Magnetstabes	147
§ 66. Lamellarmagnete (magnetische Blätter)	148
§ 67. Erdmagnetismus	149

VI. Abschnitt. Elektrik.

§ 68. Gesetz von Coulomb	151
§ 69. Potential; Kraftlinien	152
§ 70. Leiter. Kapazität. Elektrische Energie	154
§ 71. Kondensator	156
§ 72. Der galvanische Strom; das Gesetz von Ohm	157
§ 73. Stromstärke; Bussole	161
§ 74. Stromstärke einer Batterie	165
§ 75. Stromverzweigung; Sätze von Kirchhoff	167
§ 76. Widerstand	170
§ 77. Elektromotorische Kraft	172
§ 78. Stromenergie; Gesetz von Joule	174
§ 79. Elektrolytische Gesetze von Faraday	176
§ 80. Das magnetische Feld eines Stromes	176
§ 81. Elektromagnetisches Maßsystem	179
Praktische Einheiten	181

I. Abschnitt.

Mechanik.

Einleitung.

§ 1. Allgemeine Sätze; Grundgesetze.

1. Alle Ursachen sind Bewegungsursachen. Keine Ursache (Kraft) bringt eine andere Wirkung als eine Bewegung hervor. Die Ursache selbst beruht in einer Bewegung.

2. Jede Bewegungsursache liegt außerhalb des Bewegten. Eine Fernwirkung durch den leeren Raum gibt es nicht. Die Fernwirkung wird entweder durch unmittelbare Berührung der Körper oder durch einen Zwischenstoff, ein Medium (Äther), vermittelt.

3. Jede Wirkung ist äquivalent ihrer Ursache. Alle Kräfte wirken in der Geraden, welche den Ausgangspunkt mit dem Angriffspunkt verbindet. (Newtons zweites Bewegungsgesetz.)

4. Das Gesetz des Beharrungsvermögens oder der Trägheit: Jeder Körper verharret in dem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äußere Ursachen angeregt wird, seinen Zustand zu ändern. (Newtons erstes Bewegungsgesetz.)

5. Das Gesetz der Reaktion: Die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets einander gleich und von entgegengesetzter Richtung. (Newtons drittes Bewegungsgesetz.)

1. Kapitel.

Mechanik des materiellen Punktes und der starren Körper.

§ 2. Die gleichförmige, geradlinige Bewegung.

Die Größe einer Bewegung wird durch die Geschwindigkeit gemessen, mit der sich der Körper bewegt, d. h. durch den in der Zeiteinheit, in der Sekunde zurückgelegten Weg. Da bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit sich nicht ändert, so findet man den Weg, welchen der Körper innerhalb einer gewissen Zeit zurücklegt, wenn man seine Geschwindigkeit mit der Zeit multipliziert. Bedeutet c (celeritas) die Maßzahl der Geschwindigkeit, t (tempus) die Maßzahl der verflossenen Zeit und s (spatium) die des zurückgelegten Weges, so ist

$$s = c \cdot t .$$

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, den Weg durch den Inhalt eines Rechteckes zu versinnlichen, dessen Grundlinie und Höhe durch die Maßzahlen der Zeit bzw. der Geschwindigkeit gegeben sind. Die mittlere Geschwindigkeit v_0 aus mehreren (n) Geschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ ist das arithmetische Mittel derselben:

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{n} .$$

§ 3. Das Parallelogramm der Bewegungen.

Unterliegt ein Körper der Einwirkung mehrerer Kräfte, so ist das Endergebnis dasselbe, wie wenn die Kräfte nacheinander während derselben Zeit auf den

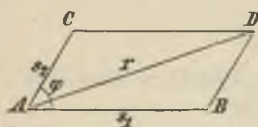


Fig. 1.

Körper eingewirkt hätten. Wird also ein materieller Punkt A (Fig. 1) zu zwei Bewegungen angeregt, die einen Winkel φ miteinander bilden, so gelangt er in die vierte Ecke D desjenigen Parallelogramms, das man aus den beiden Einzelwegen s_1 und s_2 und dem von diesen eingeschlossenen Winkel φ konstruiert. Sind die beiden Bewegungen geradlinig und gleichförmig, so ist auch die resultierende Bewegung geradlinig und gleichförmig, und der Punkt A durchläuft die Diagonale AD. Bezeichnet man den Weg AD mit r , so ist nach dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz

$$r^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos \varphi .$$

Wird $\varphi = 0$ bzw. 180° , so ergeben sich die besonderen Werte

$$r = s_1 \pm s_2 .$$

Ist $\varphi = 90^\circ$, so kommt $r^2 = s_1^2 + s_2^2$.

Die Einzelwege heißen die Seitenwege, die Komponenten; der resultierende Weg der Mittelweg, die Resultante.

Bemerkung. Um den Mittelweg zu erhalten, ist es in der Regel nicht notwendig, das Bewegungsparallelogramm vollständig zu zeichnen; es genügt, wenn man (Fig. 1) durch den Endpunkt B der einen Komponente die Strecke BD gleich und parallel der anderen Komponente AC zieht.

Soll der Mittelweg AD (Fig. 2) in zwei Seitenwege längs L_1 und L_2 zerlegt werden, so ziehe man $DB \parallel L_2$ und $DC \parallel L_1$; nun sind AB und AC die gesuchten Komponenten. — Hat man über die beiden Einzelwege keine weiteren Bestimmungen getroffen, so ist die vorliegende Aufgabe vieldeutig.

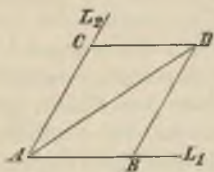


Fig. 2

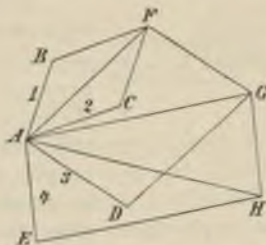


Fig. 3.

Unterliegt ein materieller Punkt gleichzeitig mehreren Bewegungen, so bestimmt man die Resultate folgendermaßen.

Zunächst werden zwei Wege zusammengesetzt, hierauf der Mittelweg mit dem dritten, der sich nun ergebende Weg mit dem vierten usw. Man konstruiert daher (Fig. 3) aus den Einzelwegen einen polygonalen Zug ABFGH; alsdann ist die Schlußlinie AH die gesuchte Resultante. Schließt sich der Zug, so bleibt der Punkt in Ruhe.

Zerlegt man die Bewegung OB eines materiellen Punktes O (Fig. 4) in die Komponenten OE und OD von beliebigen Richtun-

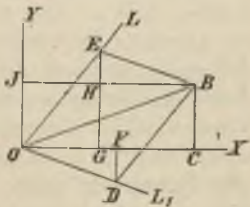


Fig. 4.

gen L und L_1 , die durch O gehen, und projiziert die so erhaltenen Seitenbewegungen auf zwei zueinander senkrechte Achsen OX und OY , so ist die algebraische Summe der Projektionen auf jede Achse gleich den Komponenten OC und OJ , die unmittelbar aus der Zerlegung der OB längs OX und OY hervorgehen.

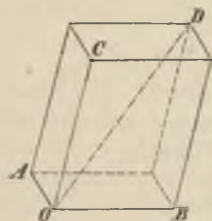


Fig. 5.

Im Raum ist das Parallelogramm der Bewegungen durch ein Parallelepiped zu ersetzen. Wird nämlich der Punkt O (Fig. 5) zu den Bewegungen OA , OB und OC angeregt, deren Richtungen nicht in eine Ebene fallen, so gelangt er an die der Ecke O gegenüberliegende Ecke D des aus OA , OB und OC als Kanten konstruierten Parallelepipeds.

§ 4. Die beschleunigte Bewegung.

Legt ein Körper in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurück, so ist seine Bewegung eine ungleichförmige. Unter Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte versteht man in diesem Falle den Weg, den der Körper von jenem Zeitpunkte ab in einer Sekunde zurücklegen würde, falls er sich nun gleichförmig weiter bewegte. Je nachdem die Geschwindigkeiten in den aufeinander folgenden gleichen Zeiteilen wachsen oder abnehmen, heißt die Bewegung beschleunigt oder verzögert. Die Geschwindigkeitszunahme in der Sekunde heißt Beschleunigung. Ändert sich diese während der Dauer der Bewegung nicht, so führt der materielle Punkt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus.

Bezeichnet v_0 (velocitas) die Anfangsgeschwindigkeit, a die Beschleunigung (acceleratio), v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t , s den Weg, welchen der Körper während jener Zeit zurücklegt, so gelten folgende Beziehungen:

$$(1) \quad v = v_0 + at,$$

$$(2) \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen t , so erhält man

$$(3) \quad v^2 = v_0^2 + 2as.$$

Beweis zu 2. Weil die Geschwindigkeit gleichmäßig zunimmt, muß der Weg, den der materielle Punkt in t Sekunden beschreibt, ebenso groß sein wie derjenige Weg, den er in der gleichen Zeit mit seiner mittleren Geschwindigkeit $\frac{v_0 + v}{2}$ zurücklegte. Letzterer ist

$$t \cdot \frac{v_0 + v}{2}$$

und daher auch

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + at}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{a}{2} t^2.$$

Zusatz 1. Ist $v_0 = 0$, so vereinfachen sich obige Gleichungen, und man erhält

$$v = at; \quad s = \frac{1}{2} \cdot at^2; \quad 2as = v^2.$$

Zusatz 2. Ist die Bewegung gleichmäßig verzögert und bedeutet a die Verzögerung, so ergibt eine der obigen entsprechende Schlußreihe

$$v = v_0 - at; \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2; \quad v^2 = v_0^2 - 2as.$$

Zusatz 3. Beschleunigungen werden wie Bewegungen zusammengesetzt und zerlegt.

§ 5. Der Fall.

I. Der freie Fall. Die Fallbewegung ist innerhalb unseres Beobachtungsgebietes eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung g (gravitas) beträgt in der Sekunde 9,806 m unter 45° Breite. In der Breite von φ° ist g gleich $9,781 \cdot (1 + 0,00512 \sin^2 \varphi)$ m. Nach den in § 4 aufgestellten Gesetzen erhält man, da $v_0 = 0$ und $a = g$ zu setzen ist:

$$1. v = g \cdot t; \quad 2. s = \frac{1}{2} g \cdot t^2; \quad 3. v^2 = 2g \cdot s.$$

Die Geschwindigkeit beim Beginn der Bewegung ist 0; am Ende der ersten, zweiten, dritten, ... ($t - 1$)^{ten}, t ^{ten} Sekunde beträgt sie $g, 2g, 3g, \dots (t - 1)g, tg$; daraus ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit in der ersten, zweiten, dritten, ... t ^{ten} Sekunde zu

$$\frac{0 + g}{2} = \frac{1}{2}g, \quad \frac{g + 2g}{2} = \frac{3}{2}g,$$

$$\frac{2g + 3g}{2} = \frac{5}{2}g, \dots \frac{(t - 1)g + tg}{2} = \frac{2t - 1}{2} \cdot g.$$

Folglich sind die in der ersten, zweiten, dritten, ... t ^{ten} Sekunde zurückgelegten Einzelwege gleich

$$\frac{1}{2}g \cdot 1; \quad \frac{1}{2}g \cdot 3; \quad \frac{1}{2}g \cdot 5; \dots \frac{1}{2}g(2t - 1).$$

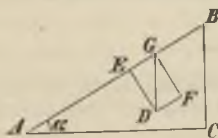


Fig. 6.

II. Der Fall auf der schiefen Ebene. Ein materieller Punkt, der frei mit der Beschleunigung g fällt, bewegt sich auf einer glatten, schiefen Ebene mit einer kleineren Beschleunigung abwärts. Bildet die schiefe Ebene AB

(Fig. 6) mit der horizontalen AC den Winkel α und zerlegt man die lotrecht abwärts gerichtete Beschleunigung GD in die beiden Komponenten

$$GE = g \cdot \sin \alpha$$

parallel und

$$GF = g \cdot \cos \alpha$$

senkrecht zur schiefen Ebene, so ist letztere auf die Bewegung ohne Einfluß, weil von der Reibung hier abgesehen wird.

Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung längs der schiefen Ebene kommt nur die Komponente

$$GE = g \cdot \sin \alpha$$

in Betracht, und wenn der Massenpunkt aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeht, so gelten folgende Gleichungen:

$$1. \quad v = g \cdot \sin \alpha \cdot t;$$

$$2. \quad s = \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2;$$

$$3. \quad v^2 = 2 g \cdot \sin \alpha \cdot s.$$

Hat aber der materielle Punkt die Anfangsgeschwindigkeit v_0 , welche längs der schiefen Ebene abwärts oder aufwärts gerichtet sein kann, so ergeben sich nach § 4 folgende Beziehungen:

$$1. \quad v = v_0 \pm g \cdot \sin \alpha \cdot t;$$

$$2. \quad s = v_0 t \pm \frac{1}{2} g \cdot \sin \alpha \cdot t^2;$$

$$3. \quad v^2 = v_0^2 \pm 2 g \cdot \sin \alpha \cdot s.$$

§ 6. Der Wurf.

I. *Der senkrechte Wurf.* Ein mit der Geschwindigkeit v_0 lotrecht abwärts geworfener Massenpunkt führt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung g aus, weshalb die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + gt; \\ s &= v_0 t + \frac{1}{2}gt^2; \\ v^2 &= v_0^2 + 2gs. \end{aligned}$$

Wird dagegen der materielle Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 vertikal aufwärts geworfen, so ist die Bewegung eine gleichmäßig verzögerte mit der Verzögerung g ; daher

$$\begin{aligned} (1) \quad v &= v_0 - gt; \\ (2) \quad s &= v_0 t - \frac{1}{2}gt^2; \\ (3) \quad v^2 &= v_0^2 - 2gs. \end{aligned}$$

Im höchsten Punkt seiner Bahn ist die Geschwindigkeit $v = 0$.

Bezeichnet man die Steigdauer mit t_1 , so folgt aus (1)

$$(4) \quad 0 = v_0 - gt_1; \quad t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Aus (3) ergibt sich die Steighöhe s_1 .

$$(5) \quad 0 = v_0^2 - 2gs_1; \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Läßt man den Raum s_1 von einem materiellen Punkt frei durchfallen, wobei er eine Endgeschwindigkeit c erreichen möge, so gilt

$$(6) \quad c^2 = 2gs_1.$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) ergibt sich

$$c = v_0;$$

d. h.: Der Massenpunkt erreicht den Ausgangspunkt seiner Bahn mit der gleichen Geschwindigkeit, mit der er ihn verließ.

Um den Raum s_1 frei zu durchfallen, brauche ferner der materielle Punkt T Sekunden. Nach den Fallgesetzen besteht sodann die Beziehung

$$(7) \quad s_1 = \frac{1}{2} g \cdot T^2.$$

Setzt man in diese Gleichung (7) den Wert von s_1 aus (5) ein, so findet man

$$T = \frac{v_0}{g} = t_1$$

nach der Gleichung (4).

In Worten: Ein lotrecht in die Höhe geworfener Körper steigt ebensolange, als er fällt.

Da man ferner jeden Punkt der Wurfbahn als Ausgangspunkt der Bewegung betrachten kann, so durchläuft der Massenpunkt irgend eine seine Bahn durchschneidende horizontale Ebene beim Hinauf- und Hinabsteigen mit der gleichen Geschwindigkeit, und die beiden Momente des Durchgangs liegen zeitlich vom Augenblick der höchsten Erhebung gleichweit ab.

II. *Der schiefe Wurf aufwärts.* Ein Massenpunkt A wird mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Erhebungswinkel α gegen die Wagrechte schräg aufwärts geworfen (Fig. 7). Um ihn auf seiner Bewegung

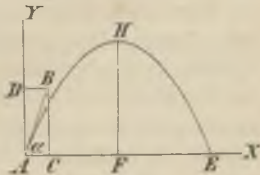


Fig. 7.

verfolgen zu können und seine Bahn kennen zu lernen, wählt man in der Bahnebene die durch A gehende Horizontale AX zur X-Achse und die durch A führende Vertikale zur Y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Hierauf zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit $AB = v_0$ längs der beiden Achsenrichtungen in die wagrechte

$$AC = v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$$

und die senkrechte

$$AD = v_y = v_0 \cdot \sin \alpha .$$

Erstere ändert sich nach dem Gesetz der Trägheit während der Bewegung nicht, letztere hingegen erfährt eine sekundliche Abnahme um die Beschleunigung der Erdschwere. Nach t Sekunden beträgt sie:

$$(1) \quad v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t .$$

Die Projektionen x und y auf die Achsen des in der Zeit t zurückgelegten Wegs sind somit:

$$(2) \quad x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t ;$$

$$(3) \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 .$$

Eliminiert man t, so folgt

$$(4) \quad y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} .$$

Der bewegliche Punkt beschreibt somit eine Parabel, deren Achse vertikal ist und welche die Richtung AB der Anfangsgeschwindigkeit in A berührt. Schneidet die Parabel die Horizontale AX in dem Punkte E zum zweitenmal, so wird AE = X die Wurfweite genannt. Um sie zu bestimmen, darf man nur $y = 0$ und $x = X$ setzen. Man erhält aus (4)

$$(5) \quad X = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha .$$

Dieser Ausdruck erreicht seinen größten Wert für $2\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 45^\circ$.

Aus trigonometrischen Gründen ist ferner

$$\sin 2\alpha = \sin (180^\circ - 2\alpha) ,$$

mithin ist die Wurfweite für komplementäre Elevationswinkel die gleiche.

Im höchsten Punkt H der Bahn, im Scheitel der Parabel ist die Geschwindigkeit wagrecht gerichtet, folglich die vertikale Komponente v_y derselben gleich Null. Verfließt von A bis H die Zeit T, so ergibt die Gleichung (1)

$$0 = v_0 \sin \alpha - g \cdot T ,$$

daher

$$(6) \quad T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} .$$

Substituiert man diesen Wert für t in (3), dann erhält man die Wurfhöhe FH, welche mit Y bezeichnet werden mag:

$$(7) \quad Y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} .$$

Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ergibt sich aus den Komponenten v_x und v_y :

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2 \\ &= v_0^2 + g^2 t^2 - 2gtv_0 \sin \alpha = v_0^2 - 2gy . \end{aligned}$$

Die Richtung dieser Geschwindigkeit v macht mit der Wagerechten AX einen Winkel φ , der sich aus der Gleichung ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gt}{v_0 \cos \alpha}.$$

Besondere Fälle. Wird der Massenpunkt horizontal geworfen, so ist $\alpha = 0$ und damit wird

$$\begin{aligned} v_x &= v_0; & x &= v_0 t; \\ v_y &= -gt; & y &= -\frac{1}{2} gt^2. \end{aligned}$$

Ändert man die Zählrichtung auf der Y-Achse, so werden die Ordinaten positiv; demnach ist

$$v_y = gt \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2} gt^2.$$

§ 7. Die Zentralbewegung.

Die einfachste aller Zentralbewegungen ist diejenige, bei welcher eine Kreisbahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird. Der Radius des Kreises C sei r (Fig. 8), die Geschwindigkeit des materiellen Punktes A sei v und die Beschleunigung der Zentripetalkraft a . Während eines kleinen Zeiteils t , nur der Tangentialgeschwindigkeit folgend, gelangt A nach F, nur der Zentripetalkraft folgend, nach E, durch das Zusammenwirken beider Ursachen nach D. Es ist nun

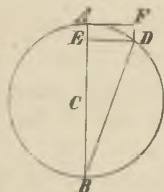


Fig. 8.

$$AD = v \cdot t \quad \text{und} \quad AE = \frac{1}{2} at^2,$$

und weil der kurze Bogen AD durch seine Sehne ersetzt werden darf, so ergibt sich mit Hilfe des $\triangle ADB$ die Gleichung

$$AD^2 = AE \cdot AB$$

oder

$$v^2 t^2 = \frac{1}{2} at^2 \cdot 2r;$$

hieraus

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Unter Winkelgeschwindigkeit ω versteht man den vom Leitstrahl in der Zeiteinheit überstrichenen Winkel, oder wenn man den Winkel im Bogenmaß ausdrückt, die Geschwindigkeit desjenigen Punktes auf dem Leitstrahl, der vom Zentrum die Entfernung 1 hat. Es ist also auch

$$v = r \cdot \omega$$

und damit

$$a = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{r} = r \cdot \omega^2.$$

Ist T die Umlaufszeit des Massenpunktes A , so ist zunächst

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

folglich

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot r} = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}.$$

Die für die Zentripetalbeschleunigung gefundenen Ausdrücke sind daher

$$(1) \quad a = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}.$$

Da die Beschleunigungen, welche zwei Kräfte einzeln wirkend einer und derselben Masse erteilen, in geradem Verhältniß zur Stärke der Kräfte stehen, so läßt sich unter Beziehung des freien Falles die Größe der Zentripetalkraft bestimmen. Es sei Q das

Gewicht des bewegten Punktes und P die Stärke der Zentripetalkraft, so gilt die Proportion

$$P : Q = a : g, \quad \text{hieraus}$$

$$(2) \quad P = \frac{Q}{g} \cdot a.$$

Die Gegenwirkung, die ein materieller Punkt bei der Kreisbewegung erfährt, wird als Schwingkraft, Zentrifugalkraft bezeichnet; sie ist gleich der Zentripetalkraft.

§ 8. Die harmonische Bewegung.

Bewegt sich ein Punkt auf einer Kreisbahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so führt seine Projektion auf einen Durchmesser eine schwingende Bewegung

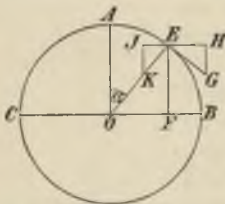


Fig. 9.

aus, die harmonische Bewegung heißt. In Fig. 9 sei A der sich bewegende Punkt, O der Mittelpunkt des Kreises vom Radius r , ferner $CB \perp AO$ und derjenige Durchmesser, auf welchen der Punkt A projiziert wird, E der Ort des Punktes A , an welchen er nach der Drehung

um den $\sphericalangle \alpha$ gelangt, F dessen Projektion auf CB , EG die Tangentialgeschwindigkeit v und EK die Zentripetalbeschleunigung a des Punktes E . Projiziert man ferner EG und EK auf CB oder auch auf eine durch $E \parallel CB$ gelegte Gerade mit Hilfe der Lote GH und KJ , so ist EH die Geschwindigkeit und EJ die Beschleunigung des schwingenden Punktes F . Nun ist

$$EH = v \cdot \cos \alpha \quad \text{und} \quad EJ = a \cdot \sin \alpha,$$

und weil nach § 7 Gleichung (1) $a = \frac{v^2}{r}$ ist, so findet man auch

$$EJ = \frac{v^2}{r} \cdot \sin \alpha = \frac{v^2}{r^2} \cdot OF.$$

Wird mit a_1 die Beschleunigung des Punktes F in dem Augenblick bezeichnet, wo er sich in der Entfernung 1 von O befindet, so ist

$$a_1 = \frac{v^2}{r^2}.$$

Ein Hingang bzw. Hergang des Punktes F heißt eine Schwingung und die darauf verwandte Zeit die Schwingungsdauer, der bei einer Schwingung zurückgelegte Weg die Schwingungsweite, Amplitude. Während der Punkt A die ganze Peripherie des Kreises mit der Geschwindigkeit v durchläuft, macht seine Projektion einen Hin- und Hergang, mithin ist die Schwingungsdauer

$$(1) \quad T = \frac{\pi r}{v};$$

aber es ist

$$a_1 = \frac{v^2}{r^2},$$

hieraus

$$(2) \quad T = \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1}}.$$

Dieses Resultat zeigt sich von der Schwingungsweite unabhängig, mithin sind bei gleicher Beschleunigung in der Entfernung 1 die Schwingungen isochron.

§ 9. Das mathematische Pendel.

Die Bewegung des Pendels ist eine oszillatorische, jeder Hin- bzw. Hergang wird eine Schwingung genannt, die darauf verwandte Zeit heißt Schwingungsdauer und der Winkel, um welchen sich das Pendel aus seiner lotrechten Gleichgewichtslage entfernt, Schwingungsweite, Amplitude. OA (Fig. 10) sei ein mathematisches Pendel von der Länge l . In dieser Lage wirkt auf den Massenpunkt A die Erdschwere und erteilt ihm die Beschleunigung

$$AF = g.$$

Diese kann in die unwirksame Komponente

$$AH = g \cdot \cos \alpha$$

nach der Fadenrichtung und in eine dazu senkrechte zweite Komponente

$$AJ = g \cdot \sin \alpha$$

zerlegt werden. Letztere gibt die Beschleunigung des Punktes A in seiner Bahn an. Fällt man auf OC das Lot AK , so ist

$$\sin \alpha = \frac{AK}{AO} = \frac{AK}{l}.$$

Läßt man nun nur kleine Amplituden zu, so darf man die Strecke AK durch den Bogen AC ersetzen und es ist

$$\sin \alpha = \frac{AC}{l},$$

mithin

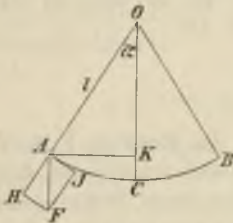


Fig. 10.

$$AJ = g \cdot \sin \alpha = \frac{g}{l} \cdot AC;$$

d. h. die Beschleunigung des Massenpunktes ist seinem Abstand vom Mittelpunkt C der Bahn proportional; die Bewegung desselben ist eine harmonische. In der Entfernung l vom Zentrum C hat der Punkt die Beschleunigung $\frac{g}{l}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (2) des § 8 ein, so ergibt sich für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

a) Die Schwingungsdauer ist von der Größe der bewegten Masse unabhängig.

b) Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Amplitude.

c) Die Schwingungsdauer ist der Quadratwurzel aus der Pendellänge direkt proportional.

d) Die Schwingungsdauer ist der Quadratwurzel aus der Fallbeschleunigung umgekehrt proportional.

Zusatz. Mißt man die Länge l eines Pendels und bestimmt die Schwingungsdauer T dazu, so läßt sich aus obiger Gleichung die Fallbeschleunigung g ermitteln, denn es ist

$$g = \frac{\pi^2 \cdot l}{T^2}.$$

§ 10. Masse; Kraft.

Stoff ist alles, was Raum einnehmen kann. Die Menge des Stoffes, den ein Körper enthält, heißt seine Masse. Jede Ursache, welche eine Änderung in dem

Ruhe- oder Bewegungszustand eines Körpers hervorruft, wird Kraft genannt. Um die doppelte Masse in die gleiche Bewegung zu versetzen, wie die einfache, ist die doppelte Kraft notwendig. Es besteht somit zwischen Kraft und Masse ein bestimmtes Verhältnis der Abhängigkeit, welches bei der Wahl der Einheiten für Kraft und Masse in der Weise zum Ausdruck gebracht wird, daß man festsetzt:

Die Krafteinheit erteilt der Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Beschleunigung.

Die Kraft p , die Masse m und die erzielte Beschleunigung a sind somit durch die Grundgleichung

$$(1) \quad p = m \cdot a$$

verbunden. Die Größe des Druckes oder Zuges, den ein Körper infolge der Schwere in lotrechter Richtung ausübt, heißt sein absolutes Gewicht, und da für alle Körper die Beschleunigung g an einem und demselben Orte der Erde die gleiche ist, so gilt der Satz:

Das Gewicht eines Körpers ist seiner Masse proportional.

Unterliegt die Masse m der steten Einwirkung der unveränderlichen Kraft p , so bewegt sie sich gleichmäßig beschleunigt, und es ist nach Früherem, sofern die Masse beim Beginn der Bewegung in Ruhe war,

$$v = a \cdot t; \quad s = \frac{1}{2} a \cdot t^2; \quad v^2 = 2as.$$

Setzt man in diese Gleichungen aus (1) den Wert für a , nämlich $a = \frac{P}{m}$ ein, so treten folgende Beziehungen auf:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & m v = p t ; \\
 & m s = \frac{1}{2} p t^2 ; \\
 & p s = \frac{1}{2} m v^2 .
 \end{aligned}$$

Besaß jedoch die Masse, als die Kraft p einsetzte, die Geschwindigkeit v_0 , so findet man in analoger Weise die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & m (v - v_0) = \pm p t ; \\
 & m (s - v_0 t) = \pm \frac{1}{2} p t^2 ; \\
 & p s = \pm \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) .
 \end{aligned}$$

Das Produkt $m v$ heißt die Bewegungsgröße, das Produkt $p t$ der Zeiteffekt der Kraft. Die erste Beziehung der Gleichungen (2) enthält sonach den Satz:

Die Bewegungsgröße ist gleich dem Zeiteffekt der Kraft.

Darin liegt auch der Satz: Wirkt auf die Massen m und m_1 ein und dieselbe Kraft (z. B. die Expansion der Pulvergase zwischen Geschoß und Geschütz) gleich lange ein und erlangen sie dadurch die Geschwindigkeiten v und v_1 , so sind die erzielten Bewegungsgrößen $m v$ und $m_1 v_1$ einander gleich.

Das Produkt $p s$ wird die Arbeit der Kraft unter der Voraussetzung genannt, daß der Weg in die Krafrichtung fällt. Schließen jedoch beide den Winkel α ein, so kann man entweder die Kraftstrecke auf die Wegrichtung oder den Weg auf die Krafrichtung projizieren, und die geleistete Arbeit wird durch das Produkt $p s \cdot \cos \alpha$ angegeben. Die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit heißt Effekt und das Produkt $\frac{1}{2} m v^2$ nennt man die lebendige Kraft. Aus der dritten Beziehung der Gleichungen (3) leiten

sich sonach die Sätze ab: Die geleistete Arbeit ist gleich der Zunahme an lebendiger Kraft, die verbrauchte Arbeit ist gleich der Abnahme an lebendiger Kraft. Die einem bewegten Körper innewohnende Fähigkeit, Arbeit zu leisten, nennt man Energie der Bewegung (kinetische Energie, lebendige Kraft); unter Energie der Lage (potentieller Energie, Spannkraft) hingegen versteht man die Fähigkeit eines Körpers, verbrauchte Arbeit in lebendige Kraft umzusetzen. Die Umwandlung von potentieller und kinetischer Energie ineinander in einem abgeschlossenen System erfolgt ohne Gewinn oder Verlust; die Energie ist somit unzerstörbar, ihre Quantität konstant.

§ 11. Das Maßsystem.

I. Das irdische, konventionelle Maßsystem. Die Grundgrößen dieses Systems sind Kraft, Länge und Zeit.

Als Krafteinheit bezeichnet man diejenige Kraft, die in ihrer Richtung den Druck oder Zug von 1 kg (in Paris) auszuüben vermag. Die Einheit der Länge ist das Meter, die Einheit der Zeit die Sekunde. Die Einheit der Masse wird aus der Gleichung (1) des § 10 abgeleitet. Hat ein Körper das Gewicht P kg, ist seine Masse gleich m , die Beschleunigung der Erdschwere gleich g , so besteht die Beziehung

$$P = m g ; \quad \text{mithin} \quad m = \frac{P}{g} .$$

Soll nun $m = 1$ werden, so muß $P = g$ sein; daher: Unter der Einheit der Masse versteht

man diejenige Masse, deren Gewicht g kg beträgt.

Die Einheit der Arbeit wird verrichtet, wenn ein Widerstand von 1 kg auf einem Weg von 1 m überwunden wird. Man nennt sie Meterkilogramm (mkg).

Die technische Einheit des Effekts ist die Pferdestärke (HP), d. i. die Leistung von 75 mkg in 1 Sekunde.

II. Das absolute Maßsystem. Die Grundgrößen sind Masse, Länge und Zeit. Die Einheit der Masse ist die eines Gramms (unabhängig von Raum und Zeit); die Einheit der Länge ist das Zentimeter und die Einheit der Zeit ist die Sekunde. Aus der Gleichung $p = ma$ ergibt sich, wenn $m = 1$, $a = 1$ ist, für p der Wert 1, also: Die Einheit der Kraft ist diejenige Kraft, welche der Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Beschleunigung erteilt; sie heißt Dyne. Da die Beschleunigung des freien Falls etwa 981 cm beträgt, so ist

$$1 \text{ Dyne} = \frac{1}{981} \text{ Grammgewicht.}$$

Die Einheit der Arbeit heißt Erg, sie wird von 1 Dyne auf dem Weg von 1 cm geleistet. 1 Joule = 10^7 Erg.

Die Einheit des Effekts, das Sekundenerg, ist vorhanden, wenn die Leistung in jeder Sekunde gleich der Arbeitseinheit ist. 1 Watt ist die Arbeitsleistung von 1 Joule in der Sekunde.

$$\begin{aligned} 1 \text{ mkg ist gleich } & 981 \cdot 100 \cdot 1000 \text{ Erg} \\ & = 98100000 \text{ Erg} = 9,81 \text{ Joule;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ HP ist gleich } & 75 \cdot 9,81 \text{ Watt} \\ & = 736 \text{ Watt in runder Zahl.} \end{aligned}$$

§ 12. Die Dimension.

Jeder Ausdruck, der die Abhängigkeit eines abgeleiteten Begriffs aus den Grundbegriffen der Masse M , der Länge L und der Zeit T deutlich erkennen läßt, heißt die Dimension des abgeleiteten Begriffs. Sie hat in der Regel die Form eines Produkts aus den Potenzen von M , L und T .

Die Dimension eines *Weges* ist L , die einer *Fläche* L^2 , die eines allseitig begrenzten *Raumes* L^3 .

Die Dimension einer *Geschwindigkeit* ist LT^{-1} , weil sie erhalten wird, wenn man den Weg mit der Zahl der Sekunden dividiert.

Nach der Bezeichnung des § 4 ist $v = at$, mithin die *Beschleunigung* $a = v:t$ und daher ihre Dimension gleich LT^{-2} .

Die Dimension einer *Kraft* ist MLT^{-2} , denn sie ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung.

Die Dimension der *Bewegungsgröße* ist gleich dem Produkt aus der Dimension einer Masse und einer Geschwindigkeit, also MLT^{-1} .

Die Dimension des *Zeiteffekts* pt ist

$$MLT^{-2} \cdot T = MLT^{-1}.$$

Bemerkung. Sind zwei physikalische Größen einander gleich, so haben sie auch gleiche Dimensionen.

Die Dimension einer *Arbeit* ps ist

$$MLT^{-2} \cdot L = ML^2T^{-2}.$$

Die Dimension der *lebendigen Kraft* $\frac{1}{2} m v^2$ ist

$$M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}.$$

Die Dimension eines *Effekts* ist gleich derjenigen der Arbeit, dividiert durch die Zeit, somit gleich

$$ML^2T^{-2} : T = ML^2T^{-3}.$$

Bemerkung. Die Lehre von den Dimensionen wurde von Fourier 1822 in seiner Wärmetheorie begründet.

§ 13. Die Grundgesetze des Gleichgewichtes starrer Körper.

1. Zwei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, sind gleich groß und entgegengesetzt.

2. Halten zwei Kraftsysteme einem dritten einzeln das Gleichgewicht, so sind sie gleichwertig und können einander ersetzen.

3. Die Wirkung eines Systems von Kräften, die an einem Körper angreifen, ändert sich nicht, wenn man noch weitere Kräfte hinzufügt oder wegnimmt, die einander das Gleichgewicht halten.

§ 14. Das Parallelogramm der Kräfte.

Eine Kraft ist durch ihren Angriffspunkt, ihre Richtung und ihre Stärke bestimmt. Strecken, welche in einer graphischen Darstellung Richtung und Größe einer Kraft versinnlichen, eventuell auch deren Angriffspunkt angeben, werden Kraftstrecken genannt. Verlegt man den Angriffspunkt einer Kraft nach einem anderen Punkt ihrer eigenen Richtung, so wird an ihrer Wirkung nichts geändert (§ 1; 3). Eine Kraft, welche die gleiche Wirkung erzeugt wie zwei oder mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte, heißt Resultierende, Mittelkraft, Resultante, und die Einzelkräfte führen den Namen Seitenkräfte, Komponenten.

Wenn zwei Kräfte unter einem Winkel gleichzeitig auf einen materiellen Punkt einwirken, so wird die Richtung und die Größe

der Mittelkraft durch die Diagonale desjenigen Parallelogramms bestimmt, das sich aus den Seitenkräften konstruieren läßt.

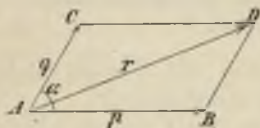


Fig. 11.

Sind in der Figur 11 $AB = p$, $AC = q$ die Komponenten und der von ihnen gebildete Winkel $BAC = \alpha$, so ist aus trigonometrischen Gründen die Resultante $AD = r$:

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos \alpha}.$$

Ist $\alpha = 90^\circ$, so ist

$$r = \sqrt{p^2 + q^2};$$

ist $\alpha = 0^\circ$, so erhält man

$$r = p + q;$$

ist $\alpha = 180^\circ$, so findet man

$$r = \pm (p - q).$$

Ist die Resultante gleich 0, so verharrt der Massenpunkt in Ruhe.

Greifen die beiden Kräfte nicht unmittelbar an dem Massenpunkt an, sondern gehen nur ihre Richtungen durch denselben, so verlege man ihre Angriffspunkte dorthin und verfare bei der Zusammensetzung wie oben.

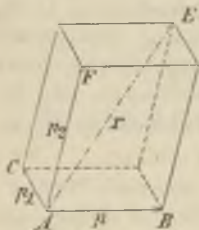


Fig. 12.

Wirken auf einen materiellen Punkt drei Kräfte im Raum, so stellt nach Größe und Richtung die Diagonale des aus den Seitenkräften konstruierten Parallelepipedes die Resultante dar. In der Fig. 12 ist $AE = r$ die Resultante zu

$AB = p$, $AC = p_1$, $AF = p_2$. Stehen die drei Krafrichtungen senkrecht aufeinander, so ist

$$r = \sqrt{p^2 + p_1^2 + p_2^2}.$$

Für mehrere Seitenkräfte, die an einem materiellen Punkt angreifen, findet man die Resultante, wenn man zunächst zwei Kräfte (Fig. 13) $AB = p_1$ und $AC = p_2$ zusammensetzt, hierauf die erhaltene resultierende Kraft $AD = r_1$ mit der dritten Kraft $AF = p_3$ zu $AE = r_2$ vereinigt, usw.

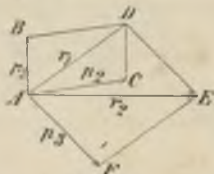


Fig. 13.

Um die Zeichnung möglichst einfach zu gestalten, zieht man $BD \parallel AC$, $DE \parallel AF$ usw.; die Schlußlinie des aus den einzelnen Kraftstrecken konstruierten polygonalen Zuges ist somit die Resultante derselben.

Ist die Resultante gleich 0, oder schaltet man in das System als letzte Seitenkraft eine solche ein, die der Resultante gleich und entgegengesetzt ist, so halten sich die sämtlichen Einzelkräfte das Gleichgewicht.

Die Zerlegung einer als Resultante betrachteten Mittelkraft in zwei Seitenkräfte geschieht ebenfalls durch das Parallelogramm der Kräfte. Sind dabei über die Komponenten keine weiteren Bestimmungen getroffen, so ist die Aufgabe vieldeutig (vgl. den § 3).

Durch die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte wird der Einblick in viele mechanische Vorgänge wesentlich erleichtert.

Bemerkung. Der Satz vom Kräfteparallelogramm wurde zuerst von Newton und Varignon klar ausgesprochen.

§ 15. Die Zusammensetzung zweier Kräfte in der Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten.

I. Die Krafrichtungen schneiden sich. (Fig. 14.)

Gesetzt, die Kräfte $AE = p$ und $BF = q$ greifen in A und B an dem starren Körper AB an und es sei ihre Resultante r zu bestimmen. An der Wirkung der Kräfte wird nichts geändert, wenn man die Angriffspunkte in den Schnittpunkt C der Kraftstrecken verlegt, wobei p durch CG und q durch CH zu ersetzen ist. Das Parallelogramm $CGJH$ liefert die Mittelkraft $CJ = r$. Gibt man ihr den Angriffspunkt K und macht $KL = CJ$, so ist KL die gesuchte Resultante. Fällt man des weiteren von J und K die Lote auf CA und CB, so ist

$$KS \cdot q = KN \cdot p .$$

II. Beide Kräfte sind gleichgerichtet. (Fig. 15.)

Die beiden Kräfte $AC = p$ und $BD = q$ sind gleichgerichtet und greifen in A und B an. In der Wirkung der Kräfte tritt keine Änderung ein, wenn man die gleichen und entgegengesetzten Kräfte AG und BE hinzufügt. Nun liefern die Kräfte AC und AG die Resultante AH und auf der anderen Seite die Komponenten BD und BE die Mittelkraft BF . Die Angriffspunkte beider Resultanten verlegt

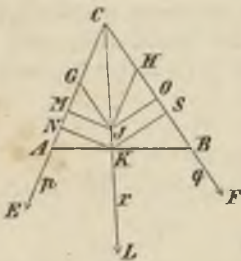


Fig. 14.

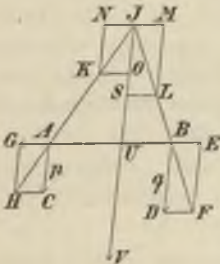


Fig. 15.

man jetzt nach J, indem man gleichzeitig $JK = AH$ und $JL = BF$ macht. Nach dieser Anordnung zerlegt man JK und JL wieder in je zwei Komponenten nach den Richtungen AB und AC; also JK in JO und JN und ebenso JL in JS und JM. Aus der Kongruenz der Dreiecke JNK und AGH folgt weiter $JN = AG$; ebenso ist $JM = BE$, und da $AG = BE$ ist, so halten sich JN und JM das Gleichgewicht, während sich JO und JS addieren. Macht man demnach

$$UV = JO + JS = p + q,$$

so hat man damit die gesuchte Resultante. Ferner ist

$$p : q = UB : UA.$$

In Worten: Die Resultante zweier gleichgerichteten Kräfte ist gleich der Summe derselben, und sie teilt die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnis beider Kräfte.

Um die Mittelkraft für mehrere parallele und gleichgerichtete Kräfte zu bestimmen, setzt man zunächst zwei derselben zusammen, die erhaltene Resultante mit der dritten usw. Das Verfahren läßt sich auch anwenden, wenn die Kräfte an beliebigen im Raume gelegenen Massenpunkten angreifen.

Die Resultante ist gleich der Summe der Einzelkräfte und ihr Angriffspunkt ist unabhängig von der Richtung der Kräfte, wenn sich die Angriffspunkte der letzteren nicht ändern. Der Angriffspunkt der Resultante heißt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

III. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet und einander nicht gleich. (Fig. 16.) Ist $AC = p$ die

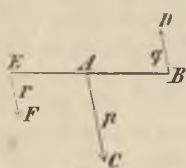


Fig. 16.

größere, $BD = q$ die kleinere gegebene Kraft, $EF = r$ die Resultante, so ergibt eine der vorigen analoge Betrachtung die Tatsachen

$$r = p - q$$

und

$$p : q = EB : EA,$$

d. h.: Die Resultante zweier ungleichen, entgegengesetzt gerichteten Kräfte ist gleich dem Unterschied beider und sie teilt die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnis der Kräfte.

Bemerkung. Zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte liefern keine Resultante. Man nennt sie ein Kräftepaar.

§ 16. Drehkräfte; das Moment.

1. *Drehung um einen Punkt.* (Fig. 17.) Fällt man von dem Punkte O der einen Diagonale des Kräfteparallelogramms ABCD die Lote $OE = a$ und $OF = a_1$ auf die Komponenten $AB = p$ und $AC = p_1$, so hat man sofort

$$ap = a_1 p_1.$$

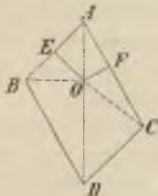


Fig. 17.

Diese Strecken a und a_1 heißen die Arme der Kräfte p und p_1 , die Produkte ap und $a_1 p_1$ die Momente (Drehungs-, statische Momente) derselben. Mit Benutzung dieser Bezeichnung lautet der soeben gefundene Satz:

Die Momente der beiden Komponente für irgend einen Punkt der Resultante sind absolut genommen, einander gleich.

Die Kräfte p und p_1 suchen den Massenpunkt A in ungleichem Sinne um den Punkt O zu drehen. Weil aber O auf der Resultante liegt, so kann keine Bewegung eintreten, mithin:

Zwei Drehkräfte halten einander das Gleichgewicht, wenn ihre Momente den gleichen Wert, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Fügt man in diesem Falle noch die Kraft p_2 hinzu, die der p gleich und entgegengesetzt ist, so hält p sowohl der p_2 als auch der p_1 das Gleichgewicht, weshalb p_1 und p_2 als gleichwertig anzusehen sind; d. h.:

Zwei Kräfte sind für eine Drehung um einen Punkt gleichwertig, erzeugen die gleiche Winkelbeschleunigung, wenn ihre Momente absolut und den Vorzeichen nach gleich sind.

Jede Drehkraft läßt sich somit durch eine andere von der Größe ihres Moments in der Entfernung l vom Drehpunkt ersetzen.

Liegt der Punkt O beliebig in der Ebene, so verfährt man folgendermaßen: Auf die Strecken $AB = p_1$, $AC = p_2$ und $AD = p$ des Kräfteparallelogramms $ABCD$ werden von dem Punkte O die Lote $OF = a_1$, $OG = a_2$ und $OH = a$ gefällt (Fig. 18). Nun ist

$$\triangle ABO + \triangle ACO = \triangle ADO;$$

denn zieht man $OE \parallel AB$, so ergibt sich

$$\triangle ABO = \triangle ABE = \triangle ACE$$

und damit auch

$$\begin{aligned} \triangle ABO + \triangle AOC &= \triangle AECO \\ &= \triangle AEO + \triangle EOD = \triangle ADO; \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = a \cdot p.$$

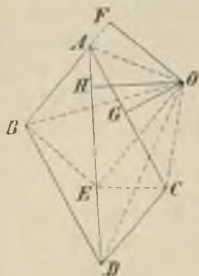


Fig. 18.

Unterliegt der materielle Punkt A mehreren Kräften P_1, P_2, P_3, \dots in der gleichen Ebene und bezieht man ihre Momente auf einen beliebigen Punkt O derselben Ebene, welcher von den Krafrichtungen die Entfernungen a_1, a_2, a_3, \dots hat, so findet man durch mehrmalige Anwendung des obigen Satzes für die Mittelkraft p und ihren Arm a die Gleichung

$$ap = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \dots,$$

wobei auf die Vorzeichen der einzelnen Produkte zu achten ist. In Worten lautet dieses Ergebnis:

Das Moment der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller Seitenkräfte.

2. *Drehung um eine Achse.* Legt man durch O eine Gerade L senkrecht zur Ebene der vorhandenen Kräfte, so kann die Drehung um O als eine Drehung um die Achse L aufgefaßt werden. Deshalb versteht man unter dem Moment einer Kraft für die Achse L ihr Moment für den Punkt O, und die oben ausgesprochenen Sätze behalten auch in diesem Falle ihre Gültigkeit. Insbesondere merke man: „Schneidet die Resultante die Drehungsachse oder ist die algebraische Summe der Momente aller Seitenkräfte gleich Null, so befindet sich das System im Gleichgewicht.“

3. *Das Moment eines Kräftepaares.* (Fig. 19.) $AB = +p$ und $CD = -p$ seien die Kräfte eines Paares, O der Drehpunkt in der Ebene der Kräfte, ferner OE und OF die Arme der Einzelkräfte. Als Momente der letzteren ergeben sich die Produkte $+p \cdot OE$ und $-p \cdot OF$; mithin ist das Moment des Paares

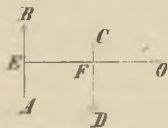


Fig. 19.

$$= p \cdot OE - p \cdot OF,$$

$$\begin{aligned} &= p(a + OF) - p \cdot OF, \\ &= p \cdot a, \text{ wenn } EF = a \text{ gesetzt wird.} \end{aligned}$$

Das Produkt ap wird negativ, wenn der Arm der negativen Kraft größer als der der positiven ist. Die Strecke a heißt der Arm des Paares, $\pm ap$ das Moment desselben. Da in dem Ausdruck für das Moment die Entfernung des Drehpunktes von dem Kräftepaar fehlt, so besteht die Tatsache:

Die Wirkung eines Kräftepaares ist unabhängig von der Lage des Drehpunktes. Nur bei gegebener Lage desselben läßt sich das Paar durch eine Drehkraft von der Größe des Moments in der Entfernung l vom Drehpunkt ersetzen. Zwei Kräftepaare von gleichem Moment sind gleichwertig.

Mehrere Kräftepaare einer Ebene lassen sich zu einem Paar zusammensetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Paare ist.

Bemerkung. Die beiden auf die Pole einer Magnetnadel wirkenden erdmagnetischen Kräfte bilden ein Kräftepaar, das sich durch eine Drehkraft nicht ersetzen läßt.

4. *Moment eines Systems paralleler Kräfte in bezug auf eine Ebene.* (Fig. 20.) $A_1 B_1 = p_1$ und $A_2 B_2 = p_2$ seien zwei parallele Kräfte mit den Angriffspunkten A_1 und A_2 ; α sei eine beliebige Ebene, auf welche man die Lote (Arme genannt) $A_1 C_1 = a_1$, $A_2 C_2 = a_2$ gefällt hat. Die Produkte $a_1 p_1$, $a_2 p_2$ heißen die Momente der beiden Kräfte in

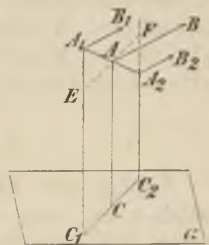


Fig. 20.

bezug auf die Ebene α . Konstruiert man zu p_1 und p_2 die Resultante $AB = p$, so ist nach Früherem $p = p_1 + p_2$ und $A_1A : A_2A = p_2 : p_1$. Ferner werde das Lot AC auf α mit a bezeichnet und $EF \parallel C_1C_2$ gezogen. Nun ist

$$A_1A : A_2A = A_1E : A_2F ;$$

aber

$$A_1A : A_2A = p_2 : p_1 ,$$

ferner

$$A_1E = a_1 - a , \quad A_2F = a - a_2 ,$$

mithin

$$p_2 : p_1 = (a_1 - a) : (a - a_2) ;$$

hieraus

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 = p_1 a + p_2 a = pa .$$

Durch sukzessive Zusammensetzung beliebig vieler Parallelkräfte zu einer Mittelkraft und durch Wiederholung des obigen Verfahrens erhält man die Gleichung

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \dots + p_n a_n = pa ,$$

wo sich das Zeichen irgend eines Moments nach dem Vorzeichen der Kraft und des Armes bestimmt. Der allgemeingültige Momentsatz lautet daher:

Das Moment der Resultante beliebig vieler paralleler Kräfte in bezug auf eine Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Momente aller Einzelkräfte.

§ 17. Schwerpunkt.

Infolge der Erdschwere wirken auf die Massenteilchen $m_1, m_2, m_3 \dots$ eines starren Körpers die unter sich parallelen Kräfte $m_1 g, m_2 g, m_3 g \dots$. Solche Kräfte haben immer eine Resultante, die stets

durch den Mittelpunkt der Einzelkräfte geht, welche Lage der Körper auch einnehmen mag. Man nennt diesen Mittelpunkt den Massenmittelpunkt, den Schwerpunkt des Körpers; die in ihm angreifende Resultante ist gleich $m_1 g + m_2 g + m_3 g + \dots = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) g = mg$, wo m die ganze Masse des Körpers bezeichnet. Demnach wirkt die Schwerkraft der Erde auf jeden starren Körper so, als ob seine ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre.

Ein starrer Körper befindet sich nur dann im Gleichgewicht, wenn die Resultante der einzelnen Schwerkraft durch den Unterstützungspunkt geht.

Ist der Körper an einer Achse drehbar unterstützt, so besteht Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt in der durch die Achse gelegten Vertikalebene sich befindet.

§ 18. Bestimmung des Schwerpunktes.

Die Koordinaten des Schwerpunktes. Bezeichnet man mit $m_1, m_2, m_3 \dots$ die Massenpunkte eines starren Körpers, mit $a_1, a_2, a_3 \dots$ ihre Abstände von einer festen Ebene α , mit a die Entfernung des Schwerpunktes von dieser Ebene, mit m die Masse des ganzen Körpers, so besteht nach Nr. 4 des § 16 die Gleichung

$$mga = m_1 g a_1 + m_2 g a_2 + m_3 g a_3 + \dots,$$

oder

$$ma = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \dots;$$

hieraus

$$a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \dots}{m}.$$

Ermittelt man auf diesem Wege die Abstände, die Koordinaten, des Schwerpunktes von drei Ebenen, den Koordinatenebenen, so ist seine Lage vollkommen bestimmt.

Bei einem homogenen, symmetrischen Körper liegt der Schwerpunkt in den Symmetrieebenen.

Beispiele. 1. Der Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des Inkreises in dem Dreieck, dessen Ecken die Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks sind.

2. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens von der Länge b , dem Radius r und der Sehne s liegt auf dem Mittellot der Sehne im Abstand $r \cdot s : b$ vom Zentrum.

3. Der Schwerpunkt der Fläche eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der drei seitenhalbierenden Transversalen.

4. Der Schwerpunkt der Fläche eines Kreis-sektors vom Radius r , der Sehne s und dem Bogen b liegt auf dem Mittellot der Sehne in der Entfernung $\frac{2}{3} r \cdot s : b$ vom Zentrum.

5. Der Schwerpunkt der Fläche eines Kreis-segments von der Sehne s und dem Inhalt A liegt auf dem Mittellot der Sehne im Abstand $s^3 : 12 A$ vom Zentrum.

6. Der Schwerpunkt des Mantels eines geraden Kreiskegels liegt auf der Achse im Abstand zwei Drittel der Höhe von der Spitze.

7. Der Schwerpunkt der krummen Fläche einer Kugelzone bzw. Kugelhaube ist die Mitte der Höhe.

8. Der Schwerpunkt einer Pyramide bzw. eines Kegels liegt auf der Geraden, welche die Spitze mit

dem Flächenschwerpunkt der Grundfläche verbindet, und zwar um $\frac{3}{4}$ dieser Strecke von der Spitze entfernt.

9. Der Schwerpunkt eines Kugelausschnitts vom Kugelradius r und der Höhe h liegt auf dem zur Kleinkreisebene senkrechten Radius in der Entfernung $\frac{3}{8} (2r - h)$ vom Zentrum der Kugel.

10. Der Schwerpunkt eines Kugelabschnitts vom Kugelradius r und der Höhe h liegt auf dem zur Kleinkreisebene senkrechten Radius in der Ent-

fernung $\frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$ vom Zentrum der Kugel.

§ 19. Die einfachen Maschinen.

I. *Der Hebel.* Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Drehungsmomente sämtlicher am Hebel wirkender Kräfte gleich Null ist. Der Druck auf den Drehpunkt ist gleich der Resultante der Kräfte.

II. *Die gleicharmige Wage.* Eine gute Wage muß stabil, richtig und empfindlich sein. — An der je mit P belasteten, um C drehbaren Wage AB (Fig. 21) bringe das Übergewicht p den Ausschlag α hervor. Ferner sei S der Schwerpunkt des unbelasteten Balkens, e dessen Entfernung von der Drehachse, Q das Gewicht und $2a$ die Länge des Balkens. Kommt der Wagbalken durch das Übergewicht p in der Lage $A_1S_1B_1$ zur Ruhe, so besteht nach den Hebelgesetzen die Gleichung

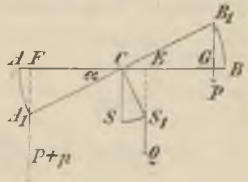


Fig. 21.

$$(P + p) \cdot CF = P \cdot CG + Q \cdot CE$$

oder

$$(P + p) \cdot a \cdot \cos \alpha = P \cdot a \cdot \cos \alpha + Q \cdot e \cdot \sin \alpha ,$$

hieraus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \cdot p}{Q \cdot e} .$$

Also: a) Der Winkel α ist für das gleiche Übergewicht um so größer, je größer die Armlänge a , je kleiner das Gewicht Q des Balkens und je geringer die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse ist. b) Die Größe des Ausschlags ist (theoretisch) unabhängig von der Belastung und seine Tangente ist dem Übergewicht proportional.

Die Empfindlichkeit einer Wage wird durch einen Bruch ausgedrückt, der das kleinste noch einen merklichen Ausschlag gebende Gewicht zum Zähler und das Gewicht der größten zulässigen Belastung zum Nenner hat.

III. Die *Brückenwage* ist eine zusammengesetzte Hebelwage. (Fig. 22.) Die Last Q ruht auf der Brücke EG , einem einarmigen Hebel, der von einem zweiten einarmigen Hebel FH gestützt wird. Beide Hebel sind durch die Zugstangen EC und FD mit dem um O drehbaren Wagebalken, der die Wagschale AB trägt, verbunden. Außerdem wird die Wage so konstruiert, daß $OC:OD$ sich verhält wie $GH:FH$. — Es ist gleichgültig, wo die Last Q auf die Brücke gelegt wird.

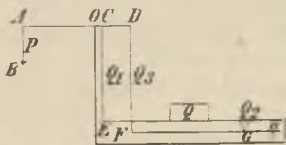


Fig. 22.

Macht man

$$OA = 10 \cdot OC$$

oder gleich

$$100 \cdot OC,$$

so beträgt das auf die Wagschale AB zu legendes Gewicht

$$P = \frac{1}{10} Q \quad \text{oder} \quad \frac{1}{100} Q$$

(Dezimal-, Zentesimalwage). — Die Brücke hebt sich parallel.

IV. Rollen. Die Wirkung der festen Rolle kann man auf die eines gleicharmigen Hebels zurückführen, dessen Drehpunkt mit dem Mittelpunkt der Rolle zusammenfällt. Im Falle des Gleichgewichtes ist daher die Kraft gleich der Last, und bei einer Drehung der Rolle legen beide, Kraft und Last,

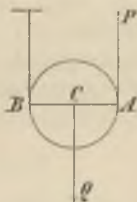


Fig. 23.

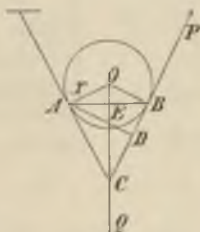


Fig. 24.

gleiche Wegstrecken zurück. — Sind bei der losen Rolle C die Seile parallel der Lastrichtung (Fig. 23), so wirkt sie wie der einarmige Hebel AB, bei welchem der Drehpunkt in B, der Angriffspunkt der Last Q in C und der der Kraft P in A liegt. Weil nun $AB = 2 \cdot CB$ ist, so besteht folgende Beziehung des Gleichgewichts:

$$P = \frac{1}{2} \cdot Q.$$

Dreht sich die Rolle, so legt die Kraft einen doppelt so großen Weg als die Last zurück. — Wenn beide Seilteile AC und BC (Fig. 24) mit der Lastrichtung OC den gleichen Winkel α bilden, so herrscht Gleichgewicht, wenn die um A genommenen Momente einander gleich sind. Demnach ist

$$P \cdot AD = Q \cdot AE,$$

mithin

$$P = \frac{Q}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

V. *Das Wellrad.* (Fig. 25.) Der Radius der Welle ist $AC = r$, derjenige des Rades $CB = R$. Am Umfang des Rades wirkt die Kraft P , an dem der Welle die Last Q . Sind die Richtungen beider Kräfte parallel, so kann man die Wirkung des Wellrades auf die des zweiarmigen um C drehbaren Hebels ACB zurückführen, und es besteht im Fall des Gleichgewichts die Beziehung



Fig. 25.

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q.$$

VI. *Die schiefe Ebene.* (Fig. 26.) Die Kraft $DE = P$ wirkt in D auf die Last vom Gewicht $DG = Q$ unter dem $\angle \beta$ gegen die schiefe Ebene, welche selbst den $\angle \alpha$ mit der horizontalen bildet. Um die Relation für das Gleichgewicht abzuleiten, zerlegt man DG in zwei Komponenten, wovon die eine DF in die Richtung ED, die andere DH in die zu AC

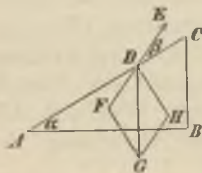


Fig. 26.

senkrechte Richtung fällt. Aus planimetrischen Gründen ist

$$\sphericalangle DGF = \alpha$$

und

$$\sphericalangle DFG = 90^\circ + \beta;$$

mithin besteht nach dem Sinussatz die Gleichung:

$$DF : DG = \sin \alpha : \cos \beta.$$

Weil nun $DG = Q$ ist und $DF = DE = P$, ohne Rücksicht auf das Zeichen, sein muß (die Komponente DH wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben), so erhält man die Proportion:

$$P : Q = \sin \alpha : \cos \beta;$$

also

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}.$$

Besondere Fälle. a) Die Kraft wirke parallel der schiefen Ebene. Es ist

$$\sphericalangle \beta = 0$$

und damit

$$P = Q \cdot \sin \alpha.$$

b) Die Kraft P wirke parallel der Basis der schiefen Ebene. Es ist

$$\beta = -\alpha \quad \text{und daher} \quad P = Q \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

VII. Der Keil. (Fig. 27.) Sein Querschnitt ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck von der Basis, dem Rücken, $AB = r$, und dem Schenkel, der Seite, $AC = s$. Wirkt die Kraft P senkrecht auf den Rücken und beiderseits die Pressung Q senkrecht gegen die Seiten, so besteht Gleichgewicht, wenn die aus den



Fig. 27.

Lasten Q konstruierte Resultante EH an Größe, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, gleich P ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und GEH folgt nun

$$r : s = P : Q ;$$

daraus

$$P = \frac{r}{s} \cdot Q .$$

Bezeichnet man den Keilwinkel ACB mit α , so ist

$$P = 2 Q \cdot \sin \frac{\alpha}{2} .$$

VIII. Die Schraube. Die Last Q wird mit der Schraubenspindel durch eine Kraft P gehoben, die tangential am Umfang der Spindel senkrecht zu deren Achse wirkt. Somit läßt sich die Wirkung der Schraube aus der einer schiefen Ebene erklären, von welcher die Höhe gleich der Höhe eines Schraubenganges und die Basis gleich dem Umfang der Spindel ist, und an welcher die Kraft P parallel zur Basis wirkt. Im Falle des Gleichgewichts ergibt sich aus der für die schiefe Ebene aufgestellten Beziehung folgende Gleichung:

$$P = Q \cdot \frac{h}{2\pi r} ,$$

wo h die Höhe eines Schraubenganges und r den Radius der Spindel bedeutet. — Wirkt die Kraft P nicht am Umfang der Spindel, sondern greift sie an einem durch den Schraubenkopf gesteckten Hebel an, wodurch sie einen Kreisweg vom Radius R beschreibt, so gilt

$$P = Q \cdot \frac{h}{2R\pi}.$$

§ 20. Das Trägheitsmoment.

I. Auf dem zur Drehachse AB senkrechten Leitstrahl CG (Fig. 28) befinde sich in F in der Entfernung $FC = r_1$ das Massenteilchen m_1 . Eine Kraft p , die in F angreift und stets senkrecht zu CF wirkt, erteilt der Masse m_1 eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, deren Beschleunigung ω sein möge. Diese Beschleunigung ändert sich nicht, wenn man nach § 16 die Kraft p durch eine andere im Betrag pr_1 ersetzt, welche in einem Punkt E auf CF in der Entfernung 1 von C angreift. Verlegt man nun die Masse m_1 von F nach G in die Entfernung r_2 von C , so ist klar, daß sich dadurch auch die Beschleunigung ω der Bewegung ändert. Soll jedoch diese Änderung nicht eintreten, so muß nach G eine von m_1 verschiedene Masse, etwa m_2 , gebracht werden. Letztere Masse nennen wir der ersten gleichwertig. Durch dieselbe Kraft pr_1 erlangen also die beiden Massen m_1 und m_2 die gleiche Winkelbeschleunigung; mithin haben sie auch nach gleich langer Einwirkung jener Kraft auf sie die gleiche lebendige Kraft. Nach der Zeit t sind die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 gleich $\omega r_1 t$ und $\omega r_2 t$ und deren lebendige Kräfte gleich $\frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 t^2$ und $\frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 t^2$. Die Gleichsetzung der letzteren Werte führt zur Beziehung

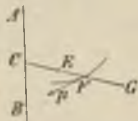


Fig. 28.

$$m_1 r_1^2 = m_2 r_2^2.$$

Nennt man das Produkt mr^2 das Trägheitsmoment der Masse m , so sagt obige Gleichung aus:

Zwei Massenteile sind gleichwertig in bezug auf eine drehende Bewegung, wenn ihre Trägheitsmomente gleich groß sind.

Ist $r_2 = 1$, so ist

$$m_2 = m_1 r_1^2 .$$

Besteht ein Körper aus den Massenteilen m_1 , m_2 , \dots , die von der Drehachse die Entfernungen r_1 , r_2 , \dots haben, so heißt der Ausdruck

$$\sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

das Trägheitsmoment des Körpers. Dasselbe ändert sich nicht, wenn man irgend ein Massenteilchen so verschiebt, daß seine Entfernung von der Drehachse die gleiche bleibt. Bestimmt man zur ganzen Masse M eines Körpers eine Strecke ρ so, daß

$$M\rho^2 = \sum mr^2$$

wird, so nennt man ρ den Trägheitsradius des Körpers in bezug auf die Drehachse. Denkt man sich nämlich einen materiellen Punkt von der Masse M in der Entfernung ρ von der Drehachse, so hat dieser das gleiche Trägheitsmoment wie der Körper selbst. Die Trägheitsmomente homogener ähnlicher Gebilde, bei welchen entsprechende Strecken das Verhältnis $1:n$ haben, verhalten sich bezüglich ähnlich liegender Achsen wie $1:n^3$, $1:n^4$, $1:n^5$, je nachdem die Gebilde aus Linien, Flächen oder Körpern bestehen.

II. Nimmt man das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf zwei parallele Achsen, wovon die eine durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so stehen

beide Momente in einfacher Beziehung zueinander, die nun aufgefunden werden soll (Fig. 29).

Von den beiden parallelen Achsen g und g_1 enthalte die erstere den Schwerpunkt S und A sei ein materieller Punkt von der Masse m . Man lege durch A eine Ebene senkrecht zu g , welche die Achsen in B und C schneidet, und fälle von A das Lot AE auf BC . Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ist nun

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \pm 2BC \cdot CE,$$

daher auch

$$(1) \quad mAB^2 = mBC^2 + mAC^2 \pm 2mBC \cdot CE.$$

Das gleiche Verfahren liefert für jeden Massenpunkt des Körpers eine der ersten analoge Gleichung. Die Addition sämtlicher Gleichungen führt zu dem Ergebnis

$$(2) \quad \sum mAB^2 = \sum mBC^2 + \sum mAC^2 \pm 2 \sum mBC \cdot CE.$$

Bezeichnen wir nun mit \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M} die Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf g_1 und g , mit M die Masse des Körpers und mit e die Entfernung beider Achsen, so geht die Relation (2) in folgende über:

$$(3) \quad \mathfrak{M}_1 = Me^2 + \mathfrak{M} \pm 2e \sum m \cdot CE.$$

Nun ist $\sum m \cdot CE$ das statische Moment des Körpers hinsichtlich einer durch g senkrecht zu BC gelegten Ebene, und weil diese den Schwerpunkt enthält, so ist jenes Moment gleich Null. Als die gesuchte Beziehung zwischen den beiden Trägheitsmomenten findet man daher

$$(4) \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} + Me^2. \quad (\text{Satz von Huygens.})$$

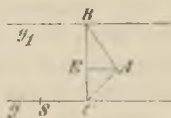


Fig. 29.

III. *Beispiele.* 1. Das Trägheitsmoment (T. M.) einer Strecke von der Länge a und der Masse M in bezug auf eine Drehachse, die auf ihr senkrecht steht und durch einen Endpunkt geht, ist $\frac{1}{3} Ma^2$.

Geht die Drehachse durch die Mitte der Strecke, so ist das T. M. gleich $\frac{1}{12} Ma^2$.

2. Das T. M. eines rechtwinkligen Dreiecks ABC von der Masse M und den Katheten $AB = c$ und $AC = b$ in bezug auf eine durch C gehende und auf der Ebene ABC senkrecht stehende Drehachse ist $\frac{1}{6} M(3b^2 + c^2)$.

3. Das T. M. eines Rechtecks von der Masse M , den Seiten a und b in bezug auf eine durch eine Ecke gehende und auf der Ebene des Rechtecks senkrecht stehende Drehachse ist $\frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$.

4. Das T. M. eines regelmäßigen Vielecks von der Masse M , dem großen Radius r , dem kleinen Radius ρ in bezug auf eine Drehachse, die durch den Mittelpunkt geht und auf der Vielecksebene senkrecht steht, ist $\frac{1}{8} M(r^2 + 2\rho^2)$.

5. Das T. M. eines Kreises von der Masse M und dem Radius r in bezug auf eine durch das Zentrum gehende und senkrecht zur Kreisebene stehende Drehachse ist $\frac{1}{2} Mr^2$.

6. Das T. M. eines Quaders von der Masse M und den Kanten a , b , c , der sich um die Kante c dreht, ist $\frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$.

Geht die Drehachse durch den Schwerpunkt parallel zur Kante c , so ist das T. M. $\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$.

7. Das T. M. eines geraden Kreiszyinders von der Masse M und dem Radius r in bezug auf seine geometrische Achse als Drehachse ist $\frac{1}{2} Mr^2$.

8. Das T.M. eines geraden Kreiszylinders von der Masse M , dem Radius r und der Höhe h in bezug auf eine Drehachse, die durch den Schwerpunkt geht und auf der Zylinderachse senkrecht steht, ist $\frac{1}{2} M(3r^2 + h^2)$.

9. Das T.M. eines geraden hohlen Kreiszylinders von der Masse M , den Radien r und ρ , der sich um seine geometrische Achse dreht, ist $\frac{1}{2} M(r^2 + \rho^2)$.

10. Das T.M. einer Kugel von der Masse M , dem Radius r in bezug auf einen Durchmesser ist $\frac{2}{5} Mr^2$.

§ 21. Gesetze der drehenden Bewegung.

Es bedeutet t die Zahl der Sekunden, φ die Winkelgeschwindigkeit, φ_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit, σ den Winkelweg d. h. den Weg, den ein Punkt in der Entfernung 1 von der Drehachse in t Sekunden zurücklegt, a das Moment eines der Drehkraft gleichwertigen Kräftepaares, \mathfrak{M} das betreffende Trägheitsmoment, ω die Winkelbeschleunigung, L die lebendige Kraft und A die Arbeit, so gelten folgende Beziehungen:

für die gleichförmige Bewegung

$$\sigma = \varphi t;$$

für die gleichmäßig beschleunigte bzw. verzögerte Bewegung

$$\omega = \frac{a p}{\mathfrak{M}},$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega t,$$

$$\sigma = \varphi_0 t \pm \frac{1}{2} \omega t^2,$$

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 \pm 2 \omega \sigma,$$

$$L = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \omega^2,$$

$$\begin{aligned}
 A &= a p \sigma, \\
 a p \sigma &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} \varphi^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{M} \varphi_0^2. \\
 \text{Bewegungsgröße} &= \mathfrak{M} \varphi, \\
 \text{lebendige Kraft} &= \frac{1}{2} \mathfrak{M} \varphi^2.
 \end{aligned}$$

§ 22. Anwendungen.

I. Die Atwoodsche Fallmaschine. Das Übergewicht bewegt die Gewichte ($2P + p$) und die Masse der Rolle. Letztere läßt sich in bezug auf die Drehung durch eine ihr gleichwertige Masse x in einem Punkt des Umfangs ersetzen. Nennt man r den Radius der Rolle, \mathfrak{M} das Trägheitsmoment derselben, so ist

$$x \cdot r^2 = \mathfrak{M};$$

hieraus

$$x = \frac{\mathfrak{M}}{r^2}.$$

Nun ist die Beschleunigung a , die das Übergewicht der ganzen zu bewegenden Masse $2P + p + \frac{\mathfrak{M}}{r^2}$ erteilt, gleich

$$a = \frac{P}{2P + p + \frac{\mathfrak{M}}{r^2}} \cdot g.$$

II. Das physische Pendel. Ein beliebig gestalteter Körper, der über seinem Schwerpunkt drehbar befestigt ist, kann als physisches Pendel gelten.

Aufgabe. Es soll die Länge desjenigen mathematischen Pendels bestimmt werden, das die gleiche Schwingungsdauer wie das physische Pendel hat.

Lösung. Wir bezeichnen die Masse des Pendels mit M , seinen Schwerpunkt mit S , die Entfernung des letzteren

von der Drehachse O mit k (Fig. 30) und den Ausschlagswinkel mit α . An jedem Massenteil m des Pendels wirkt in lotrechter Richtung mg ; die Resultante aller dieser Kräfte ist die im Schwerpunkt S_1 angreifende Kraft Mg . Die tangentielle Komponente derselben, welche das Pendel in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, beträgt



Fig. 30.

$$AS_1 = Mg \sin \alpha ,$$

und ihr Drehungsmoment in bezug auf O hat den Wert

$$k \cdot Mg \sin \alpha .$$

Von ebendiesem Betrag muß eine Kraft sein, die an einem Punkt B der Geraden OS_1 in der Entfernung l von O angreift und jener Komponenten gleichwertig sein soll. Die Masse x aber, welche nach B zu verlegen ist und welche hinsichtlich der Drehung der ganzen Pendelmasse gleichwertig ist, berechnet sich aus der Beziehung

$$x \cdot l^2 = \sum mr^2 ,$$

ist also das Trägheitsmoment \mathfrak{R} des Pendels. Es ist demnach die Beschleunigung ω der Drehung

$$\omega = \frac{k \cdot Mg \cdot \sin \alpha}{\mathfrak{R}} .$$

Für ein mathematisches Pendel von der Länge l , dessen materieller Punkt die Masse μ hat, findet man in gleicher Weise die Winkelbeschleunigung ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{l \cdot \mu \cdot g \cdot \sin \alpha}{\mu \cdot l^2} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{l} .$$

Sollen nun beide Pendel die gleiche Schwingungsdauer haben, so muß $\omega = \omega_1$ sein, also gilt die Beziehung

$$\frac{k M g \sin \alpha}{\mathfrak{M}} = \frac{g \sin \alpha}{l},$$

folglich

$$l = \frac{\mathfrak{M}}{k M},$$

und damit die Dauer T der einfachen Schwingung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{g k M}}.$$

Die Strecke l nennt man die reduzierte Pendellänge und den Punkt auf OS , welcher von O den Abstand l hat, den Schwingungsmittelpunkt.

Folgerungen. a) Legt man durch den Schwerpunkt die Achse parallel der durch O , und ist in bezug auf diese das Trägheitsmoment \mathfrak{M}_0 , so hat man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + k^2 M,$$

mithin

$$l = k + \frac{\mathfrak{M}_0}{k M}.$$

Die Größen \mathfrak{M}_0 und M sind für einen gegebenen Körper unveränderlich; setzt man daher $\mathfrak{M}_0 = c \cdot M$, so ist

$$l = k + \frac{c}{k}.$$

Der Schwingungsmittelpunkt liegt um $\frac{c}{k}$ tiefer als der Schwerpunkt.

b) Solange k den gleichen Wert hat, ist auch l und T unveränderlich.

c) Legt man durch den Schwingungsmittelpunkt eine Achse parallel der ursprünglichen, so ändern sich die Werte von $k + \frac{c}{k}$, l und T auch nicht.

d) Der geometrische Ort aller parallelen Achsen von gleicher Schwingungsdauer des Pendels besteht somit aus 2 konaxialen Zylinderflächen, deren Mantellinien vom Schwerpunkt die Abstände k und $\frac{c}{k}$ haben.

e) Ist ferner $\mathcal{M}_0 = \varrho^2 \cdot M$, so ergibt sich

$$l = k + \frac{\varrho^2}{k}.$$

Aus dieser Gleichung findet man k für ein gegebenes l :

$$k = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \varrho^2}.$$

Wenn $\frac{l^2}{4} > \varrho^2$, so gibt es zu l zwei Werte k_1 und k_2 von k , die der Beziehung gehorchen:

$$k_1 \cdot k_2 = \varrho^2.$$

§ 23. Hindernisse der Bewegung.

Je nachdem sich ein bewegter Körper auf der Oberfläche oder im Inneren eines anderen Körpers bewegt, wird das zu überwindende Hindernis der Bewegung Reibung oder Widerstand des Mittels genannt. Man behandelt diese Hindernisse wie Kräfte, weil sie die bewegenden Wirkungen von solchen aufzuheben vermögen. Ihre Dimension ist somit MLT^{-2} .

I. *Gleitende Reibung.* Aus Versuchen ergibt sich:

a) Die gleitende Reibung ist proportional dem Druck auf die Unterlage. Der Widerstand, den die Reibung beim Druck 1 leistet, heißt Reibungskoeffizient; er wird mit ϱ bezeichnet. Sonach besteht zwischen dem Gewicht P und der Reibung R die Beziehung $R = \varrho \cdot P$.

b) Die Reibung ist bei gleichem Druck unabhängig von der Größe der Berührungsfläche.

c) Die Reibung hängt ab von der materiellen Beschaffenheit der reibenden Körper.

d) Die Reibung ist beim Übergang aus der Ruhe in die Bewegung erheblich größer als während derselben.

e) Innerhalb gewisser Grenzen ist die Reibung von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig.



Fig. 31.

Fig. 31. Liegt der Körper $Q = Mg$ in E auf der schiefen Ebene ABC vom Neigungswinkel α , so ist sein Druck auf die Ebene gleich $Q \cdot \cos \alpha$, mithin die Reibung $\varrho \cdot Q \cdot \cos \alpha$. Die Kraft, welche den Körper die schiefe Ebene abwärts bewegt

ohne Rücksichtnahme auf die Reibung, ist $Q \sin \alpha$, mit Berücksichtigung derselben

$$P = Q \sin \alpha - \varrho Q \cos \alpha .$$

Setzt man nun $\varrho = \operatorname{tg} \varepsilon$ und nennt ε den Reibungswinkel, so ergibt sich

$$\begin{aligned} P &= Q \sin \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon \cdot Q \cos \alpha \\ &= Q \cdot \frac{\sin (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} = Mg \cdot \frac{\sin (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} . \end{aligned}$$

II. *Rollende Reibung.* Sie ist proportional dem Druck und umgekehrt proportional dem Radius des rollenden Zylinders. Bezeichnet wie vorhin R die Reibung, P den Druck, ρ den Reibungskoeffizienten, r den Radius der Walze, so gilt

$$R = \frac{\rho \cdot P}{r}.$$

Die rollende Reibung ist erfahrungsgemäß geringer als die gleitende.

§ 24. Die allgemeine Gravitation.

Die Keplerschen Gesetze.

a) Alle Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

b) Der Leitstrahl eines Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

c) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernung von der Sonne.

(Die beiden ersten Gesetze finden sich in *Astronomia nova*, Prag 1609; das dritte in *Harmonices mundi*, Linz 1619; die *Tabulae Rudolphinae* erschienen 1627 in Ulm.)

Das Newtonsche Gravitationsgesetz. Zwei Massenteilchen m_1 und m_2 im Weltall ziehen einander mit einer Kraft k an, deren Richtung in die Verbindungslinie beider Massen fällt und deren Betrag direkt proportional dem Produkt der Massen und indirekt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung r ist.

$$k = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

(Aufgefunden 1666; genauere Rechnung 1682; Principia mathematica philosophiae naturalis 1687.)

Bemerkung. Die Gravitationskonstante f ist gleich $6,68 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$.

1. *Satz.* Eine gleichmäßig mit Masse belegte Kugelfläche übt auf einen materiellen Punkt P , der innerhalb der Kugel liegt, keine Wirkung aus.

2. *Satz.* Eine gleichmäßig mit Masse belegte Kugelfläche wirkt auf einen außerhalb der Kugel gelegenen Massenpunkt so, als ob ihre ganze Masse im Zentrum vereinigt wäre.

Zusatz. Eine homogene Kugel oder eine aus homogenen konzentrischen Schichten zusammengesetzte Vollkugel wirkt nach außen so, als sei ihre Gesamtmasse im Mittelpunkt konzentriert.

§ 25. Elastizität und Festigkeit.

I. *Elastizität.* Hat ein Stab die Länge l , den Querschnitt q , und erleidet er eine Verlängerung bzw. Verkürzung λ durch ein angehängtes bzw. drückendes Gewicht P , so ist, sofern ε eine von der materiellen Beschaffenheit des Stabes abhängige Konstante bedeutet,

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{l \cdot P}{q}$$

Setzt man in dieser Relation $\lambda = 1$, $q = 1$, so findet man $P = \varepsilon$. Es ist also ε die Belastung, welche notwendig ist, einen Stab vom Querschnitt 1 auf das Doppelte seiner Länge zu strecken, vorausgesetzt, daß er eine solche Dehnung innerhalb der Elastizitätsgrenze ertragen könnte. Die Zahl ε führt den Namen Elastizitätsmodul oder Elastizitätskoeffizient.

Der Elastizitätsmodul vermindert sich durch Erwärmung der Körper.

Als Elastizitätsgrenze bezeichnet man dasjenige Gewicht, das eine bleibende Verlängerung von 0,00005 der Stablänge hervorruft.

Torsions- (Drehungs-) Elastizität. Das Moment der Torsionskraft ist dem Drehungswinkel und der vierten Potenz des Radius des torquierten Stabes direkt proportional, der Länge des Drahtes umgekehrt proportional und von der Spannung des Drahtes unabhängig.

II. Festigkeit. Die Zug- oder absolute Festigkeit ist dem Querschnitt direkt proportional und von der Länge unabhängig. Als Modul der Zugfestigkeit bezeichnet man die kleinste Kraft, durch welche ein Stab vom Querschnitt 1 zerrissen wird. Unter Sicherheitsmodul versteht man die größte Kraft, die an einem Stab vom Querschnitt 1 noch wirken kann, ohne dessen Gestalt merklich zu verändern. Die technischen Einheiten sind kg und qmm.

Die Druck- oder rückwirkende Festigkeit ist dem Querschnitt des Körpers gerade proportioniert, nimmt jedoch mit der Höhe ab. Der Modul der Druckfestigkeit gibt das größte Gewicht an, welchem ein Prisma vom Querschnitt 1 eben noch widerstehen kann. Der Sicherheitsmodul beträgt $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{20}$ des Moduls der Druckfestigkeit. Die technischen Einheiten sind kg und qcm.

Die relative oder Bruch- oder Biegefestigkeit. Bezeichnet man mit b die Breite, mit h die Höhe, mit l die Länge eines horizontalen einseitig befestigten prismatischen Balkens, so beträgt das kleinste am anderen Ende anzubringende Gewicht P , das den Balken eben abbricht:

$$(1) \quad P = k \cdot \frac{b \cdot h^2}{l}.$$

Die von dem Material des Balkens abhängige Zahl k heißt der Modul der relativen Festigkeit. Ist $b = h = l = 1$, so hat der Balken die Form eines Würfels von der Kante 1, und P ist gleich k . Als Sicherheitsmodul nimmt man Werte von $\frac{k}{4}$ bis $\frac{k}{10}$.

Die technischen Einheiten sind kg und cm . — Ist die Last P gleichmäßig über den Balken verteilt, so kann man sich dieselbe im Schwerpunkt des Balkens vereinigt denken, und ihre Wirkung beträgt nur die Hälfte von der am Ende, woraus dann für den Balken die doppelte Tragkraft folgt.

Befestigt man den Balken an beiden Enden und hängt die Last in seiner Mitte auf, so hat man in der Formel (1) die Zahl P durch $\frac{P}{2}$ und l durch $\frac{l}{2}$ zu ersetzen, so daß sich für den Balken eine viermal so große Tragkraft ergibt.

§ 26. Der Stoß.

Die beiden Körper wirken während des Stoßes gleich lange und in jedem Augenblick mit gleichen Kräften aufeinander ein, mithin sind die Änderungen der Bewegungsgrößen gleich und entgegengesetzt; daher der Satz: Die Bewegungsgröße des ganzen Systems erfährt durch den Stoß keine Änderung.

I. Gerader, zentraler Stoß unelastischer Körper.
Wenn zwei unelastische Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in geradem, zentralem

Stoß zusammentreffen, so tritt eine Formänderung beider ein, welche so lange andauert, bis die Geschwindigkeit beider Körper den gleichen Betrag v erreicht hat, dann aber setzen sie die Bewegung als eine einzige Masse fort. Es ist nun die Aufgabe, diese gemeinschaftliche Endgeschwindigkeit v zu bestimmen. Nimmt man an, daß sich die beiden Massen in derselben Richtung bewegen und daß $c_1 > c_2$ sei, so ist der Verlust an Bewegungsgröße, den m_1 beim Stoß erleidet, gleich $m_1(c_1 - v)$, während für m_2 der Zuwachs an Bewegungsgröße $m_2(v - c_2)$ beträgt. Nach dem oben angeführten Satze besteht demnach die Gleichung

$$m_1(c_1 - v) = m_2(v - c_2),$$

hieraus folgt

$$\begin{aligned} v &= \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}, \\ &= c_1 - \frac{m_2(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}, \\ &= c_2 + \frac{m_1(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Bewegen sich die Körper vor dem Stoße in entgegengesetzter Richtung, so wird man c_1 oder c_2 negativ setzen; v erhält das Zeichen der überwiegenden Bewegungsgröße.

II. Gerader, zentraler Stoß vollkommen elastischer Körper. Wenn zwei vollkommen elastische Körper m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in geradem, zentralem Stoß aufeinandertreffen, so tritt, wie bei unelastischen Körpern, eine gegenseitige Zusammenpressung ein, die so lange andauert, bis die

Geschwindigkeit im Augenblick der größten Annäherung die gleiche, etwa v , geworden ist. Wird dabei die Elastizitätsgrenze nicht überschritten, so suchen nun die Körper ihre frühere Form wieder anzunehmen, wodurch sie gleichsam einen zweiten Stoß erfahren. Da bei beiden Vorgängen die gleichen Kräfte tätig sind, so wird auch für jeden Körper die Geschwindigkeitsveränderung in der zweiten Phase die gleiche sein wie in der ersten. Beim Stoß vollkommen elastischer Massen ist daher die Änderung der Geschwindigkeit doppelt so groß, als beim Stoß unelastischer Massen. — Bei der Aufstellung der Formeln machen wir die Annahme, daß sich die Massen in der gleichen Richtung bewegen und daß $c_1 > c_2$ sei. In der ersten Phase beträgt für den ersten Körper die Abnahme der Geschwindigkeit $c_1 - v$, für den zweiten die Zunahme der Geschwindigkeit $(v - c_2)$. Während des zweiten Vorganges verliert der eine Körper abermals $(c_1 - v)$ an Geschwindigkeit, während der andere $(v - c_2)$ daran gewinnt. Bezeichnen wir nun mit v_1 und v_2 die Endgeschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 , so gelten die Beziehungen

$$v_1 = c_1 - 2(c_1 - v),$$

$$v_2 = c_2 + 2(v - c_2).$$

Setzt man hier den oben gefundenen Wert für v ein, so ist

$$v_1 = c_1 - 2 \cdot \frac{m_2(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2},$$

$$v_2 = c_2 + 2 \cdot \frac{m_1(c_1 - c_2)}{m_1 + m_2}.$$

Die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 erhalten verschiedene Zeichen, wenn sich die Massen gegeneinander bewegen.

Zusatz. a) Ist $m_1 = m_2$, so ergeben sich die Folgerungen

$$v_1 = c_2, \quad v_2 = c_1;$$

d. h. die Körper tauschen ihre Geschwindigkeiten aus.

b) Ist $m_1 = m_2$ und gleichzeitig $c_2 = 0$, so kommt

$$v_1 = 0, \quad v_2 = c_1;$$

d. h. der stoßende Körper bleibt in Ruhe und der gestoßene bewegt sich mit der Geschwindigkeit des stoßenden weiter.

c) Ferner sei m_2 im Vergleich zu m_1 sehr groß und $c_2 = 0$, so folgt

$$v_2 = 0,$$

und aus

$$v_1 = c_1 - 2(c_1 - v)$$

finden wir

$$v_1 = -c_1;$$

d. h. wird ein elastischer Körper senkrecht gegen eine feste elastische Wand gestoßen, so prallt er senkrecht mit der gleichen Geschwindigkeit zurück.

Beim geraden, zentralen Stoß zweier vollkommen elastischer Körper bleibt die lebendige Kraft erhalten.

Bemerkung. Die erste ausführliche Behandlung der Stoßgesetze wurde im Jahr 1668 durch die Kgl. Gesellschaft in London angeregt. Wallis, Wren und Huygens legten Arbeiten vor.

2. Kapitel.

Mechanik der flüssigen Körper.

§ 27. Zusammendrückbarkeit.

Ist v_1 das Volumen einer Flüssigkeit bei dem Druck p_1 , v_2 das unter dem Druck p_2 bei der gleichen Temperatur, ist ferner $p_2 > p_1$, so entspricht der Druckvermehrung ($p_2 - p_1$) eine Verringerung des Volumens um $(v_1 - v_2)$. Die Einheit des Volumens wird daher

um $\frac{(v_1 - v_2)}{v_1}$ verringert. Unter dem Koeffizienten der Zusammendrückbarkeit versteht man das Verhältniß aus der Verminderung des Volumens zum Volumen bei der Vermehrung des Drucks um eine Atmosphäre.

Für Wasser von 0° und dem Druck von 1 Atmosphäre ist der Koeffizient $\alpha = 0,000050$, für Alkohol bei 7° gleich $0,000085$, für Quecksilber bei 0° gleich $0,000003$. — Der reziproke Wert von α hat dieselbe Bedeutung wie der Elastizitätsmodul bei den festen Körpern.

Den Flüssigkeiten kommt keine Formelelastizität zu, dagegen eine vollkommene Volumenelastizität.

§ 28. Die Fortpflanzung des Drucks. Hydraulische Presse.

Infolge der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen und der vollkommenen Volumenelastizität pflanzen Flüssigkeiten einen äußeren Druck nach allen Richtungen gleichmäßig fort, d. h. eine Fläche, die n mal so groß ist als die gedrückte, erleidet den n fachen Druck.

Hydraulische Presse. Wir bezeichnen den Radius des großen Kolbens mit R , den des kleinen mit r , mit Q den Druck auf den großen, mit q den Druck auf den kleinen Kolben; ferner sei l der Hebelarm, an dem der kleine Kolben befestigt ist, L der Hebelarm, an welchem der Arbeiter mit der Kraft P wirkt; so gelten die beiden Beziehungen

$$(1) \quad q \cdot l = P \cdot L,$$

$$(2) \quad Q : q = R^2 : r^2.$$

Hieraus folgt

$$Q = q \cdot \frac{R^2}{r^2} = P \cdot \frac{L}{l} \cdot \frac{R^2}{r^2}.$$

§ 29. Der Boden- und Seitendruck.

Über diese Druckverhältnisse im Inneren einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit gelten folgende Sätze:

1. In irgend einer horizontalen Schichte ist der Druck überall der gleiche.

2. Irgend eine horizontale Schichte erfährt von beiden Seiten, d. h. von oben und unten den gleichen Druck.

3. Der Druck P auf eine wagerechte Schichte oder auf den Boden des Gefäßes ist gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, welche die gedrückte Fläche F zur Grundfläche und ihren Abstand h vom Flüssigkeitsspiegel zur Höhe hat. Ist demnach s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so gilt die Gleichung

$$P = F \cdot h \cdot s.$$

4. Der Druck P auf einen Teil F der Seitenwand eines Gefäßes ist gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, welche zur Grundfläche die gedrückte Fläche und zur Höhe den Abstand h des Schwerpunkts dieses Flächenstücks vom Flüssigkeitsspiegel hat. Demnach ist, wenn s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet,

$$P = F \cdot h \cdot s.$$

§ 30. Das Archimedische Prinzip.

Jeder in eine Flüssigkeit vollständig eingetauchte Körper verliert scheinbar so viel

von seinem Gewicht, als die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt. Bezeichnet P das Gewicht des Körpers, Q den Gewichtsverlust, so können folgende drei Fälle eintreten:

- a) $P > Q$, der Körper sinkt unter;
- b) $P = Q$, der Körper schwebt in der Flüssigkeit;
- c) $P < Q$, der Körper schwimmt.

Infolge des Auftriebs ist beim schwimmenden Körper das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich seinem eigenen Gewicht. Bedeutet v das Volumen des Körpers, s sein spezifisches Gewicht, v_1 das Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge und s_1 deren spezifisches Gewicht, so gilt die Gleichung

$$v \cdot s = v_1 \cdot s_1 .$$

Der Auftrieb auf einen schwimmenden Körper hat zum Angriffspunkt den Schwerpunkt S_1 der verdrängten Wassermasse, der im allgemeinen mit dem Schwerpunkt S des Körpers nicht zusammenfällt. Befindet der Körper sich im Gleichgewicht, so heißt die Verbindungslinie SS_1 die Schwimmachse des Körpers. Erfährt dasselbe eine Störung, so neigt sich die Schwimmachse und der Punkt S_1 tritt nun im allgemeinen aus der Schwimmachse heraus. Es wird nun die durch S_1 gehende Vertikale die Schwimmachse schneiden und diesen Schnittpunkt nennt man das Metazentrum; dorthin kann man den Angriffspunkt des Auftriebs verlegen. Nun bilden das Gewicht des Körpers und der Auftrieb ein Kräftepaar, das die Schwimmachse aufrichtet, wenn S unter M (Metazentrum) liegt: stabiles Gleichgewicht; hingegen um-

zuwerfen sucht, wenn S über M sich befindet: unsicheres Gleichgewicht.

§ 31. Das spezifische Gewicht. Die Dichte.

Das Gewicht einer Volumeneinheit ist das spezifische Gewicht des Körpers. Wählt man, wie im terrestrischen System, 1 ccm als Raumeinheit und das Gewicht von 1 ccm Wasser bei 4° C als Gewichtseinheit, so ist das spezifische Gewicht das in Grammen ausgedrückte Gewicht des Kubikzentimeters eines Körpers. Im absoluten Maßsystem hingegen beträgt das Gewicht von 1 Gramm Masse $g = 981$ Dyne, mithin hat man die Zahlen der spezifischen Gewichte im terrestrischen System mit 981 zu multiplizieren, um die spezifischen Gewichte im absoluten Maßsystem zu erhalten.

Unter der absoluten Dichte eines Körpers versteht man die Menge des Stoffs einer Volumeneinheit.

Die relative Dichte gibt an, wievielmals so viel Masse ein Körper enthält als das gleiche Volumen eines anderen, in der Regel Wasser von 4° C. An einem und demselben Orte der Erde ist das Verhältnis der Massen zweier Körper gleich dem ihrer Gewichte; denn $p = m \cdot g$, $p_1 = m_1 \cdot g$, mithin $p : p_1 = m : m_1$; folglich zeigt die relative Dichte auch an, wievielmals so groß das absolute Gewicht eines Körpers ist als das Gewicht einer gleich großen Wassermenge.

Bemerkung. Im terrestrischen System mit den Einheiten g und cm fallen die Zahlen für das spezifische Gewicht mit den Zahlen der relativen Dichten zusammen.

Dimensionen:

$$\text{Spez. Gewicht gleich } \frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^3} = ML^{-2}T^{-2}.$$

Absol. Dichte gleich $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{M}{L^3} = M \cdot L^{-3}$.

Relative Dichte gleich $\frac{\text{Masse}}{\text{Masse}} = \frac{M}{M} = 1$.

§ 32. Bestimmung der relativen Dichte.

I. Starre Körper.

a) Mittels der hydrostatischen Wage. Man ermittelt das absolute Gewicht P des Körpers, hierauf sein Gewicht P_1 im Wasser. Der Gewichtsverlust ist nun $P - P_1$, somit die relative Dichte

$$s = \frac{P}{P - P_1}.$$

Ist der Körper P leichter als Wasser, so verbindet man ihn, um ihn vollständig unterzutauchen, mit einem anderen hinreichend schweren Körper vom Gewicht Q , dessen Gewicht im Wasser Q_1 beträgt. Wiegt jetzt die Verbindung beider Körper im Wasser $P_1 + Q_1$, so ergibt sich als gemeinsamer Gewichtsverlust $P + Q - P_1 - Q_1$, und weil $Q - Q_1$ der Gewichtsverlust des schweren Körpers ist, so findet man durch Subtraktion beider Zahlen als Gewicht für die vom leichten Körper verdrängte Wassermenge den Betrag $P - P_1$. Nach dem Obigen ist alsdann die relative Dichte

$$s = \frac{P}{P - P_1}.$$

Für einen Körper, der sich im Wasser auflöst, wählt man eine andere Flüssigkeit, z. B. Terpentinöl, und bestimmt seine relative Dichte s_1 in bezug auf diese. Hat letztere selbst die relative Dichte s_2 be-

zogen auf Wasser, so beträgt die relative Dichte des vorliegenden Körpers $s = s_1 \cdot s_2$.

b) Vermittelst des Pyknometers. Das Gewicht des leeren Fläschchens sei a Gramm; das Gewicht des Fläschchens mit Wasser von 4°C gefüllt b Gramm; das Gewicht desselben, wenn es nur den Körper eingelegt enthält, dessen relative Dichte gefunden werden soll, c Gramm; wenn es außerdem noch mit Wasser angefüllt wird, d Gramm. Aus diesen Messungen berechnet sich das Gewicht des Wassers zu $(b - a)$ Gramm, das Gewicht des Körpers zu $(c - a)$ Gramm, das Gewicht des Körpers nebst dem mit ihm vorhandenen Wasser $(d - a)$ Gramm. Mithin wiegt das vom Körper verdrängte Wasser $b - a + c - a - (d - a)$ Gramm oder $b + c - (a + d)$ Gramm. Und die relative Dichte ist

$$s = \frac{c - a}{b + c - (a + d)}.$$

c) Vermittelst des Nicholsonschen Gewichtsaräometers. Man legt den Körper, dessen relative Dichte bestimmt werden soll, auf den oberen Teller und fügt so viele Tariergewichte hinzu, daß das Aräometer bis zu einer gewissen Marke einsinkt. Darauf entfernt man den Körper und legt statt seiner so viele Gewichte P auf, bis die Marke den Wasserspiegel wieder berührt. P ist das absolute Gewicht des Körpers. Nun werden die P Gramm wieder abgenommen, der Körper in das untere Sieb gelegt und auf den oberen Teller P_1 Gramm gebracht, so daß das Instrument abermals bis zur Marke eintaucht. P_1 ist das Gewicht des verdrängten Wassers und die relative

Dichte ist $s = \frac{P}{P_1}$.

II. Flüssigkeiten.

a) Mittels der hydrostatischen Wage. Man bestimmt die Gewichtsverluste q und q_1 eines Senkkörpers, den man nacheinander in Wasser und in die zu untersuchende Flüssigkeit untertaucht. Die relative Dichte der letzteren ist dann

$$s = \frac{q_1}{q}.$$

b) Vermittelst des Pyknometers. Wir bestimmen das Gewicht a des leeren, das Gewicht b des mit Wasser und das Gewicht c des mit der fraglichen Flüssigkeit gefüllten Fläschchens. Nun wiegen gleiche Raumteile Wasser und Flüssigkeit ($b - a$) bzw. ($c - a$) Gramm, woraus als relative Dichte der Flüssigkeit folgt:

$$s = \frac{c - a}{b - a}.$$

c) Vermittelst des Nicholsonschen Aräometers. Es seien a das Gewicht des Instrumentes, b und c die Zulagegewichte, die das Instrument erst im Wasser, dann in der Flüssigkeit bis zur Marke einsinken machen. Hieraus berechnet sich das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit zu $(a + c)$ und das Gewicht des gleich großen Volumens Wasser zu $(a + b)$; demnach ist

$$s = \frac{a + c}{a + b}.$$

d) Mittels des Volumeters. Die Skala gibt die Größe des eingetauchten Volumens an. Die Marke, bis zu welcher das Instrument im Wasser einsinkt,

wird mit 100 bezeichnet. Taucht dasselbe in eine Flüssigkeit bis zum Teilstrich n ein, so ist die relative Dichte s der letzteren

$$s = \frac{100}{n} .$$

§ 33. Ausströmen einer Flüssigkeit unter dem Einfluß der Schwere.

In diesem Paragraphen soll die Geschwindigkeit ermittelt werden, mit der eine Flüssigkeit durch eine kleine Bodenöffnung AB (Fig. 32) eines Gefäßes, die um $AC = h$ unter dem Spiegel liegt, ausfließt. Die über der Öffnung AB liegende Schicht von der unbeschränkt kleinen Höhe δ und der Masse m unterliegt dem Druck der Flüssigkeitssäule $ABCD$. Die Arbeit, welche diese Druckkraft längs des kurzen

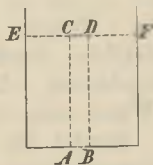


Fig. 32.

Weges δ leistet (also bis die Masse m frei fallen kann), muß gleich der von der Schicht erlangten lebendigen Kraft sein. Nun ist die Masse der Säule $ABDC$

$$= \frac{m \cdot h}{\delta} , \text{ der von ihr ausgeübte Druck } \frac{m \cdot h \cdot g}{\delta} ,$$

wog g die Beschleunigung der Erdschwere bedeutet, und die auf dem Weg δ geleistete Arbeit beträgt

$$\frac{m \cdot h \cdot g}{\delta} \cdot \delta = mgh .$$

Andererseits ist die lebendige Kraft der Bodenschicht m , sofern diese mit der Geschwindigkeit v ausströmt, gleich $\frac{1}{2} m v^2$. Die Gleichsetzung beider Werte ergibt

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 ;$$

hieraus

$$v^2 = 2gh; \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist unabhängig von der Natur der Flüssigkeit und ebensogroß wie die beim freien Fall vom Spiegel bis zur Bodenöffnung erlangte Endgeschwindigkeit.

Wird die Druckhöhe konstant erhalten und beträgt der Querschnitt der Öffnung q , so strömt in der Zeiteinheit die Menge

$$qv = q\sqrt{2gh}$$

aus. Wegen der Kontraktion des Strahles ist die wirkliche Ausflußmenge geringer als die theoretisch abgeleitete. Der Erfahrungskoeffizient beträgt für Wasser etwa 0,6.

Strömt die Flüssigkeit unter der Einwirkung der Schwere durch eine seitliche Wandöffnung aus, so führt eine der obigen analoge Überlegung zu folgendem Satz:

Die Ausflußgeschwindigkeit ist unabhängig von der Natur der Flüssigkeit und ebensogroß wie die beim freien Fall vom Spiegel bis zur Seitenöffnung erlangte Endgeschwindigkeit. Die ausströmende Flüssigkeit beschreibt eine Parabel.

Leert sich ein aufrechtes, zylindrisches Gefäß, so ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{2g \cdot h}.$$

Ist ein aufrechtes, zylindrisches Gefäß bis zu der Höhe h bzw. h' gefüllt, so gilt für die Ausflußzeiten die Beziehung

$$t^2 : t_1^2 = h : h'.$$

3. Kapitel.

Mechanik der gasigen Körper.

§ 34. Gesetz von Boyle.

Das Volumen einer gegebenen Gasmenge verhält sich bei unveränderter Temperatur umgekehrt wie der Druck, der auf sie ausgeübt wird.

Bezeichnen wir mit v und v_1 die Volumina derselben Gasmenge unter den Drucken p und p_1 , so gilt die Beziehung

$$v : v_1 = p_1 : p ;$$

hieraus folgt

$$(1) \quad pv = p_1 \cdot v_1 ,$$

d. h. das Produkt aus Druck und Volumen derselben Gasmenge ist konstant. Nach dem Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ist die Spannkraft eines Gases gleich dem äußeren Druck; mithin kann der obige Satz auch so ausgesprochen werden:

Bei unveränderter Temperatur ist das Produkt aus dem Volumen und der Spannkraft derselben Gasmenge konstant.

Hat eine Gasmasse m beim Druck p das Volumen v , beim Druck p_1 das Volumen v_1 , so sind die bezüglichen Dichten

$$d = \frac{m}{v} \quad \text{und} \quad d_1 = \frac{m}{v_1}$$

und damit auch

$$d : d_1 = p : p_1 ,$$

d. h.: Die Dichte eines Gases ist dem darauf wirkenden äußeren Druck oder seiner Spannkraft direkt proportional.

Zusatz 1. Für ein und dieselbe Gasmasse nimmt der Wert des Produktes $p v$ mit wachsender Temperatur zu. Ist nämlich $p_0 v_0$ der Wert dieses Produktes bei 0°C , $p v$ der bei $t^\circ \text{C}$ und $\alpha = \frac{1}{273}$ der Ausdehnungskoeffizient des Gases, so besteht, wie später nachgewiesen wird, die Gleichung

$$p v = p_0 v_0 (1 + \alpha t) .$$

Zusatz 2. Die Gleichung $p v = \text{konst.}$ ist die einer gleichseitigen Hyperbel, welche man in der Zeichnung erhält, wenn man unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems das Volumen v als Abszisse und den Druck p als Ordinate aufträgt.

§ 35. Relative Dichte.

Durch Versuche fand Regnault, daß 1 l Luft bei 0°C und 760 mm Druck 1,293 g wiegt; die relative Dichte der Luft in bezug auf Wasser ist demnach

$$d = 0,001293 .$$

Bei einer Temperatur von $t^\circ \text{C}$ und einem Barometerstand von b mm wächst das Volumen auf das $\frac{760 \cdot (1 + \alpha t)}{b}$ -fache an, wo der Ausdehnungskoeffizient

der Gase für 1°C mit $\alpha = \frac{1}{273}$ bezeichnet worden ist; folglich ist die Dichte d_1 der Luft unter den soeben genannten Bedingungen:

$$d_1 = d \cdot \frac{b}{760 (1 + \alpha t)} .$$

Weil die Gase dem Gesetz von Boyle (mit ganz geringen Abweichungen) gehorchen und weil sie den

gleichen Koeffizienten der Ausdehnung durch die Wärme besitzen, so ist das Verhältnis der Dichten zweier Gase, d. h. ihre relative Dichte bei gleicher Temperatur und bei gleichem Druck, immer dasselbe, welches auch Temperatur und Druck sein mögen. In der Regel bezieht man die relative Dichte eines Gases auf Luft oder Wasserstoff. Die Dichte des Wasserstoffs bezogen auf Luft ist 0,069255, somit auf Wasser bezogen

$$0,069255 \cdot 0,001293 = 0,00008955 .$$

Daraus ergibt sich das Gewicht von 1 l Wasserstoff zu 0,08955 g (1 Krith).

Da 1 ccm Luft bei 0° und 760 mm Druck 0,001293 g schwer ist, so wiegt Luft vom Volumen V bei der Temperatur t und dem Druck b mm

$$p = \frac{0,001293 \cdot V \cdot b}{760 \cdot (1 + \alpha t)} .$$

Ist nun P das Gewicht eines Gases mit den gleichen V, b, t, so ergibt sich als dessen relative Dichte

$$d = \frac{P}{p} = \frac{P}{V} \cdot \frac{1 + \alpha t}{0,001293} \cdot \frac{760}{b} .$$

§ 36. Prinzip des Archimedes. Wägung.

Ein Körper verliert in der Luft, wenn sie ihn von allen Seiten umgibt, von seinem Eigengewicht scheinbar so viel, als die von ihm verdrängte Luftmasse wiegt. Dieser Gewichtsverlust ist gleich dem Auftrieb, und er beträgt, wenn wir mit v das Volumen des Körpers in ccm, mit b den Barometerstand in mm, mit t die Temperatur

in C-Graden und mit α den Ausdehnungskoeffizienten $\frac{1}{273}$ für Gase bezeichnen,

$$0,001293 \cdot \frac{v \cdot b}{760 \cdot (1 + \alpha t)} \text{ Gramm.}$$

Bei wissenschaftlichen Untersuchungen müssen die Wägungen auf den leeren Raum reduziert werden. Nennen wir das Gewicht des Körpers und das der Gewichtsstücke im luftleeren Raum x bzw. p , die Volumina derselben v bzw. v_1 und die relative Dichte der Luft d , so ist das Gewicht des Körpers in der Luft $x - vd$, das der Gewichtsstücke in der Luft $p - v_1 \cdot d$, und weil hier Gleichgewicht besteht, so ergibt sich

$$x - vd = p - v_1 d ;$$

hieraus

$$x = p + d (v - v_1) .$$

§ 37. Luftdruck.

Der *Luftdruck* ist an den verschiedenen Orten der Erde verschieden und unterliegt sowohl periodischen als auch unregelmäßigen Schwankungen. Am Meeresspiegel in unseren Breiten hält der mittlere Luftdruck einer Quecksilbersäule von 760 mm das Gleichgewicht. Da nun 1 ccm Quecksilber bei 0° C 13,598 g wiegt, so beträgt der Druck der Luft auf ein Quadratcentimeter 1,0334 kg, rund 1 kg.

Alle Barometerstände sind auf 0° C zu reduzieren. Die den Luftdruck anzeigenden Barometerstände nehmen in geometrischer Reihe ab, während die Höhen in arithmetischer Reihe wachsen.

Barometrische Höhenmessung. An den Orten B_0 und B_1 von der geographischen Breite φ seien b_0 und b_1 die Barometerstände, e_0 und e_1 die Spannkkräfte des Wasserdampfes, t die mittlere Temperatur und h der Höhenunterschied; ferner sei H die mittlere Seehöhe. Dann ist

$$h = 18420 (\log b_0 - \log b_1) m;$$

genauer:

$$h = 18405 [\log b_0 - \log b_1] \cdot [1 + 0,00367 \cdot t] \\ \cdot [1 + 0,0026 \cdot \cos 2\varphi + 0,00000002 \cdot H \\ + \frac{3}{16} \left(\frac{e_0}{b_0} + \frac{e_1}{b_1} \right)] m.$$

§ 38. Verdünnungs- und Verdichtungspumpen.

Grad der Verdünnung. Wir führen folgende Bezeichnung ein: v bedeute den Inhalt des Rezipienten, v_1 den Raum des Stiefels, der bei jedem Kolbenhub frei wird, d die Dichte und m die Masse der Luft vor Beginn des Versuches; $d_1, m_1; d_2, m_2; d_3, m_3; \dots d_n, m_n$ die Dichte und die Masse der verdünnten Luft im Rezipienten nach dem ersten, zweiten, dritten, $\dots n^{\text{ten}}$ Hub. Die ursprünglich im Rezipienten vorhandene Luftmasse $m = dv$ dehnt sich nach dem ersten Kolbenaufgang auf das Volumen $(v + v_1)$ aus, sie besitzt demnach in dem ganzen Raum eine Dichte

$$d_1 = \frac{dv}{v + v_1}.$$

Weil ferner der Rezipient den Inhalt v hat, so beträgt die Masse m_1 der Luft nach dem ersten Kolbenzug

$$m_1 = \frac{d \cdot v^2}{v + v_1}.$$

Sperrt man nun den Stiefel vom Rezipienten ab, führt den Kolben zurück, wodurch die Luft zum Entweichen gezwungen wird, stellt alsdann die Verbindung zwischen Stiefel und Rezipienten wieder her und hebt den Kolben zum zweitenmal, so kann sich die Luftmasse m_1 wieder auf den Raum $(v + v_1)$ ausdehnen; sie hat sonach eine Dichte

$$d_2 = \frac{d v^2}{(v + v_1)^2},$$

und die im Rezipienten übrige Masse macht aus:

$$m_2 = \frac{d \cdot v^3}{(v + v_1)^2}.$$

Nach dem dritten Hub erfährt diese letztere Masse wiederholt eine Ausdehnung auf den Raum $(v + v_1)$, so daß jetzt die Dichte der Luftmenge im Rezipienten beträgt:

$$d_3 = \frac{d \cdot v^3}{(v + v_1)^3}.$$

Diese Überlegungen leiten schließlich auf das Ergebnis, daß die Dichte d_n in dem Rezipienten nach dem n^{ten} Kolbenzug durch den Quotienten angegeben wird:

$$d_n = \frac{d \cdot v^n}{(v + v_1)^n} = d \cdot \left(\frac{v}{v + v_1} \right)^n.$$

Grad der Verdichtung. Es sei v der Inhalt des Gefäßes, in dem das Gas zusammengedrückt werden soll, und v_1 das Volumen des Stiefels. Mit jedem Kolbenstoß wird dem Rezipienten ein und dieselbe Menge Gas von konstanter Dichte d zugeführt; mithin

enthält er nach n Kolbenhüben eine Gasmenge, die vorher den Raum $(v + n \cdot v_1)$ einnahm, daher beträgt die Dichtigkeit des Gases nach Beendigung des Versuches

$$d_n = \frac{v + n \cdot v_1}{v} d.$$

§ 39. Ausfluß.

1. Für die Geschwindigkeit des Ausflusses von Gasen gelten die gleichen Gesetze wie bei den Flüssigkeiten. Es ist demnach auch hier

$$(1) \quad v = \sqrt{2gH},$$

wo H die Druckhöhe bezeichnet. Bei den Gasen ist diese Druckhöhe durch die Beobachtung nicht unmittelbar gegeben, denn der auf einer gewissen Gasschicht lastende Druck kann nur durch eine Wasser- oder Quecksilbersäule von der Höhe h gemessen werden. Ist nun d die relative Dichte des Gases bezogen auf Wasser, so ist die Höhe H jenes Gases, welche der Wassersäule h entspricht:

$$H = \frac{h}{d}.$$

Sonach beträgt die Geschwindigkeit eines Gases, mit welchem es in den leeren Raum ausströmt,

$$(2) \quad v = \sqrt{2g \cdot \frac{h}{d}}.$$

Aus dieser Gleichung gehen die beiden folgenden Sätze hervor:

Die Ausflußgeschwindigkeit eines und desselben Gases ist von seiner Dichte unabhängig, denn die Dichte ist dem Druck gerade proportional.

Für verschiedene Gase verhalten sich bei gleichem Druck die Ausflußgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichten dieser Gase.

Zusatz. Die Ausflußgeschwindigkeit der Luft, deren Dichte bei 0,76 m Druck 0,001293 beträgt, in den leeren Raum ist

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,76 \cdot 13,6}{0,001293}} = 396 \text{ m.}$$

2. Wenn das in ein Gefäß eingeschlossene Gas bei einem Barometerstand von b cm außer dem Druck der Atmosphäre auch noch einen Überdruck erleidet, welcher durch eine Quecksilbersäule von der Höhe h cm gemessen wird, so ergibt sich für die Ausflußgeschwindigkeit desselben in die Luft ein Wert, den man durch folgende Rechnung findet. Wir bezeichnen die relative Dichte des Gases bei 0° und 76 cm Druck, bezogen auf Wasser, mit d_0 , bei einem Druck von $(b + h)$ cm mit d ; nun ist

$$(3) \quad d = d_0 \cdot \frac{b + h}{76}.$$

Die Höhe H einer Gassäule von der Dichtigkeit d , die einer Quecksilbersäule von der Höhe h das Gleichgewicht hält, ist, sofern s die relative Dichte des Quecksilbers bezogen auf Wasser bedeutet:

$$(4) \quad H = \frac{h \cdot s}{d} = \frac{h \cdot s \cdot 76}{d_0(b + h)}.$$

Die Gleichung (1) liefert so für v den Wert

$$(5) \quad v = \sqrt{\frac{2g \cdot h \cdot s \cdot 76}{d_0(b + h)}} \text{ cm; } (g = 981 \text{ cm}).$$

Wäre z. B. das ausströmende Gas die atmosphärische Luft, so ist $d_0 = 0,001293$, außerdem $s = 13,6$; folglich ist

$$(6) \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 981 \cdot 13,6 \cdot 76}{0,001293} \cdot \frac{h}{b+h}} \text{ cm} \\ = 396 \cdot \sqrt{\frac{h}{b+h}} \text{ m.}$$

3. Die *Ausflußmenge* in der Sekunde wird erhalten, wenn man den Querschnitt a der Öffnung mit dem Wert von v multipliziert. In t Sekunden beträgt daher die Ausflußmenge

$$(7) \quad M = a \cdot v \cdot t.$$

In Wirklichkeit ist, wie die Erfahrung lehrt, die Ausflußmenge geringer als die theoretisch berechnete, und um jene zu erhalten, hat man M mit einem Erfahrungskoeffizienten zu multiplizieren, der jedoch ziemlich veränderlich ist.

§ 40. Daltons Gesetz.

Befinden sich mehrere Gase oder Dämpfe in ein und demselben Raum und findet dabei keine chemische Wechselwirkung statt, so verhält sich jeder Gemengteil so, als ob der andere nicht vorhanden wäre; demnach ist der Gesamtdruck des Gemenges gleich der Summe der Einzeldrucke der Gemengteile.

II. Abschnitt.

Akustik.

§ 41. Schwingungszahl, Tonleiter, Stimmung.

Die verschiedenen Schalle, Töne, unterscheiden sich voneinander durch ihre Höhe, Stärke und Klangfarbe. Die Höhe des Tones wächst mit der Zahl der Schwingungen. Zur Bestimmung der Schwingungszahl dient die Sirene von Cagniard de Latour, wie sie insbesondere von Helmholtz verbessert worden ist. Das Verhältniß der Schwingungszahlen zweier Töne heißt ihr Intervall. Bezeichnet man die Schwingungszahl des Grundtones mit n und ordnet man die Töne nach den Schwingungszahlen, so erhält man die diatonische Dur-Tonleiter:

Prime Sekunde Terz Quarte Quinte Sexte Septime Okta ve

	c	d	e	f	g	a	h	c̄
	n	$\frac{9}{8}n$	$\frac{5}{4}n$	$\frac{4}{3}n$	$\frac{3}{2}n$	$\frac{5}{3}n$	$\frac{15}{8}n$	$2n$
Inter-	9	10	16	9	10	9	16	
valle	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{15}{15}$	

Der aus Grundton, großer Terz und Quinte zusammengesetzte Klang heißt Dreiklang (Durakkord). Aus den einfachen Schwingungszahlen der

Oktave, der Terz, der Quarte und der Quinte lassen sich die der Sekunde, der Sexte und der Septime folgendermaßen ermitteln. Die Quinte des Grundtones g hat die Schwingungszahl

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} n = \frac{9}{4} n ;$$

die nächstniedere Oktave desselben wird die Sekunde von c genannt; sie hat die Schwingungszahl $\frac{9}{8} n$. Ferner

ist die große Terz von g ein Ton von der Schwingungszahl

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} n = \frac{15}{8} n .$$

er heißt h , die Septime von c . Bildet man weiter zu der Quarte als Grundton die große Terz, so ergibt sich a , die Sexte von c , mit der Schwingungszahl

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} n = \frac{5}{3} n .$$

In allen Oktaven haben die Töne die gleichen Namen; zur Unterscheidung der Oktaven dienen Zusätze und Striche. Die mit c beginnende Oktave heißt die kleine (klein geschriebene) Oktave, die nächsthöheren Oktaven werden die eingestrichene, c' oder \bar{c} , die zweigestrichene, c'' oder $\bar{\bar{c}}$, usw. genannt. Unter der kleinen Oktave folgen der Tiefe zu die große (groß geschriebene) Oktave C , die Kontra-Oktave \underline{C} , groß geschrieben und einmal unterstrichen, die Subkontra-Oktave $\underline{\underline{C}}$, groß geschrieben und zweimal unterstrichen usw.

In der diatonischen Dur-Tonleiter treten dreierlei Intervalle auf: die größeren $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$, welche ganze

Töne heißen, und das kleine $\frac{16}{15}$, halber Ton genannt.

Das große Intervall von c bis e, die große Terz, umfaßt zwei ganze Töne; das Intervall von e bis g,

$$\frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{6}{5},$$

die kleine Terz, besteht aus einem ganzen und halben Ton. Die kleine Terz von c liegt nahe bei e, denn das Intervall zwischen ihr und e ist

$$\frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$$

und heißt ein kleiner halber Ton. Töne, welche um einen kleinen halben Ton höher bzw. tiefer als ein bestimmter Ton liegen, werden mit Worten benannt, welche man durch Anhängen der Silbe is bzw. es an den Buchstaben des Haupttones bildet (es = ees, as = aes, b = hes). Die Quarte von es besitzt die Schwingungszahl

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3}^n = \frac{8}{5}^n,$$

und sie bildet mit a das Intervall

$$\frac{5}{3} : \frac{8}{5} = \frac{25}{24},$$

also einen kleinen halben Ton und ist deswegen as. Ersetzt man in der Dur-Tonleiter die Töne e und a durch es und as, so erhält man die Moll-Tonleiter. Die Schwingungszahlen der Zwischentöne sind nun

$$\text{cis} = \frac{25}{24}n; \quad \text{dis} = \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24}n = \frac{75}{64}n;$$

$$\text{fis} = \frac{25}{18}n; \quad \text{gis} = \frac{25}{16}n;$$

$$\text{ais} = \frac{125}{72}n; \quad \text{des} = \frac{9}{8}n : \frac{25}{24} = \frac{27}{25}n;$$

$$\text{es} = \frac{6}{5}n; \quad \text{ges} = \frac{36}{25}n;$$

$$\text{as} = \frac{8}{5}n; \quad \text{b} = \frac{9}{5}n.$$

Chromatische Tonleiter:

c	cis	d	dis	e	f	fis
n,	$\frac{25}{24}n,$	$\frac{9}{8}n,$	$\frac{75}{64}n,$	$\frac{5}{4}n,$	$\frac{4}{3}n,$	$\frac{25}{18}n,$

1)

g	gis	a	ais	h	\bar{c}
$\frac{3}{2}n,$	$\frac{25}{16}n,$	$\frac{5}{3}n,$	$\frac{125}{72}n,$	$\frac{15}{8}n,$	$2n.$

c	des	d	es	e	f	ges
n,	$\frac{27}{25}n,$	$\frac{9}{8}n,$	$\frac{6}{5}n,$	$\frac{5}{4}n,$	$\frac{4}{3}n,$	$\frac{36}{25}n,$

2)

g	as	a	b	h	\bar{c}
$\frac{3}{2}n,$	$\frac{8}{5}n,$	$\frac{5}{3}n,$	$\frac{9}{5}n,$	$\frac{15}{8}n,$	$2n.$

Aber auch nach Einführung der Halbtöne sind die Intervalle je zweier aufeinanderfolgender Töne

ungleich, und es ist daher nicht möglich, von einem beliebigen Ton der obigen Reihe als Grundton in den angegebenen Intervallen fortzuschreiten oder ein Intervall beliebig oft nacheinander zu nehmen. Um diesem Übelstand abzuhelpen, hat man die reine Stimmung durch die gleichmäßig temperierte Stimmung ersetzt, bei welcher die Oktaven rein und alle Intervalle gleich sind. Nennen wir eines der Intervalle x , so ist

$$x^{12} = 2; \quad x = \sqrt[12]{2} = 1,05946.$$

Schwingungszahlen der gleichschwebenden Temperatur:

$c = n$	$g = 1,498 n$
$cis = 1,059 n$	$gis = 1,587 n$
$d = 1,122 n$	$a = 1,682 n$
$dis = 1,189 n$	$ais = b = 1,782 n$
$e = 1,260 n$	$h = 1,888 n$
$f = 1,335 n$	$\bar{c} = 2 n$
$fis = 1,414 n$	

Für das eingestrichene a , den Kammerton, den Stimmgabelton, beträgt die Schwingungszahl nach der Pariser Stimmung, welche seit 1886 international ist, 435. Es ist somit bei reiner Stimmung

$$\frac{5}{3} n = 435,$$

somit

$$n = 261.$$

Bei gleichmäßig temperierter Stimmung ist

$$1,682 n = 435, \quad \text{also,} \quad n = 258,65.$$

Zusatz. Aus der Schwingungszahl eines Tones und der Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles, $c = 340$ m, läßt sich mit Hilfe der Gleichung $c = n \cdot \lambda$ die Wellenlänge des Tones bestimmen; z. B. ist die Wellenlänge für den Kammerton

$$\lambda = \frac{340}{435} = 0,7816 \text{ m.}$$

§ 42. Tonquellen.

1. *Transversalschwingungen von Saiten.* Bezeichnen wir mit h die Länge einer Saite, mit q ihren Querschnitt, mit s das spezifische Gewicht des Stoffes bezogen auf Wasser, mit p die sie spannende Kraft, mit g die Beschleunigung der Erdschwere und mit n die Schwingungszahl des erzeugten Tones, so läßt sich folgende Beziehung ableiten:

$$n = \frac{1}{2h} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}},$$

worin die Längen in Zentimetern und die Gewichte in Grammen auszudrücken sind.

Dieses Gesetz gilt nur für durchaus homogene Saiten, nicht aber für Darmsaiten, die mit Metalldrähten übersponnen sind. Eine solche Behandlungsweise vermindert die Zahl der Schwingungen wesentlich.

2. *Längsschwingungen von Luftsäulen (Pfeifen).* Der tiefste Ton, den eine Pfeife gibt, ist ihr Grundton. Bei der offenen Pfeife findet an beiden Enden die größte Hin- und Herbewegung der Luft statt, hier sind Schwingungsbäuche. In der Mitte liegt der Schwingungsknoten, wo die stärkste Verdünnung

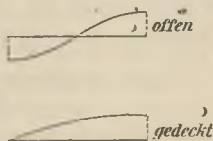


Fig. 33.

und Verdichtung auftritt. Am geschlossenen Ende der gedeckten Pfeife liegt ein Schwingungsknoten. (Fig. 33.) Bedeutet nun l die Länge der Pfeife und λ die Wellenlänge des Grundtones, so ist für die

$$\text{offene } l = \frac{1}{2}\lambda, \quad \text{gedeckte } l = \frac{1}{4}\lambda.$$

Hieraus ergibt sich, daß die offene Pfeife die Oktave der gleichlangen gedeckten gibt. — Durch stärkeres Anblasen erhält man die Obertöne. Die offene Pfeife kann $1, 2, 3, \dots, n$ halbe Wellenlängen enthalten, die gedeckte hingegen $1, 3, 5, \dots, (2n - 1)$ viertel Wellenlängen; also ist die Wellenlänge λ des Tones einer Pfeife von der Länge l , wenn sie

$$\text{offen ist: } \lambda = \frac{2}{1}l, \quad \frac{2}{2}l, \quad \frac{2}{3}l, \dots, \frac{2}{n}l,$$

$$\text{gedeckt ist: } \lambda = \frac{4}{1}l, \quad \frac{4}{3}l, \quad \frac{4}{5}l, \dots, \frac{4}{2n-1}l.$$

Bezeichnen wir ferner wie früher mit c die Geschwindigkeit des Schalles, mit n die Schwingungszahl eines Tones, so kann n folgende Werte haben bei der

$$\text{offenen Pfeife: } n = \frac{c}{2l}, \quad \frac{2c}{2l}, \quad \frac{3c}{2l}, \dots, \frac{nc}{2l},$$

$$\text{gedeckten Pfeife: } n = \frac{c}{4l}, \quad \frac{3c}{4l}, \quad \frac{5c}{4l}, \dots, \frac{(2n-1)c}{4l};$$

es gibt sonach die offene Pfeife die ganze harmonische Tonreihe, die gedeckte nur die ungeraden Obertöne.

§ 43. Ausbreitung und Stärke des Schalles: Zurückwerfung.

In einem homogenen Medium pflanzt sich der Schall nach allen Seiten hin gleichmäßig fort; dabei

liegen die Teilchen, welche gleichzeitig in die Bewegung eintreten, auf einer Kugelfläche. Die Radien derselben nennt man Schallstrahlen. Die Stärke des Schalles in einem gewissen Punkt des Raumes ist der Schwingungsweite direkt und dem Quadrat der Entfernung vom Erregungsmittelpunkt umgekehrt proportional. Gehen die Schallwellen von einem Mittel in ein anderes über, so erfahren sie eine teilweise Reflexion; treffen sie aber auf ein starres Hindernis, so werden sie fast vollständig zurückgeworfen. Die Senkrechte im Treffpunkt auf der Grenzfläche der beiden Medien heißt Einfallslot, der Winkel des einfallenden Schallstrahles mit dem Einfallslot Einfallswinkel und der Winkel zwischen Einfallslot und dem zurückgeworfenen Strahl Reflexionswinkel.

Reflexionsgesetz: Das Einfallslot, der einfallende und ausfallende Strahl liegen in einer Ebene; der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel.

§ 44. Geschwindigkeit des Schalles.

1. Nach La Place läßt sich die Geschwindigkeit des Schalles in *Gasen* durch folgende Gleichung ermitteln:

$$c = \sqrt{k \cdot \frac{b \cdot g}{d}},$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Metern, g die Beschleunigung der Erdschwere, b die auf 0^0 reduzierte Höhe derjenigen Quecksilbersäule, welche die Spannung des Gases mißt, d die relative Dichte des Gases bezogen auf Quecksilber bei 0^0 und k

den Quotienten der beiden spezifischen Wärmen des Gases bezeichnet. Will man diese Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit des Schalles in der Luft benutzen, so beobachte man, daß bei 0°C unter einem Druck von 0,76 m die Luft etwa 10470 mal so leicht als Quecksilber ist, und daß demnach ihre relative Dichte d bei dem Druck b und der Temperatur t beträgt:

$$d = \frac{b}{0,76 \cdot 10470 \cdot (1 + \alpha t)} ; \left(\alpha = \frac{1}{273} \right).$$

Da nun k für Luft den Wert 1,41 hat, so ist

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{9,81 \cdot 0,76 \cdot 10470 (1 + \alpha t) \cdot 1,41} \\ &= 331,7 \sqrt{(1 + \alpha t)}. \end{aligned}$$

Genauere Versuche haben als Mittelwert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in trockener Luft bei 0° die Zahl 332,3 m ergeben.

2. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in *flüssigen Körpern* läßt sich nach La Place durch die Formel bestimmen:

$$c = \sqrt{\frac{g}{e}},$$

worin e die Verkürzung bezeichnet, welche eine Flüssigkeitssäule von derjenigen Längeneinheit, in der g angegeben ist, durch einen dem Gewicht dieser Säule gleichen Druck erleidet. — Wasser wird durch den Druck von einer Atmosphäre um das 0,00004785 fache seines Volumens zusammengedrückt. Der Druck einer Atmosphäre ist gleich dem Druck einer Wassersäule von $0,76 \cdot 13,6 = 10,336$ m, folglich wird eine Wassersäule von 1 m Länge durch das Gewicht einer ihr gleichen Wassersäule um

$$\frac{0,000\,047\,85}{10,336} \text{ m}$$

verkürzt. Die Geschwindigkeit c des Schalles im Wasser ist daher

$$c = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 10,336}{0,000\,047\,85}} \text{ m} = 1456 \text{ m.}$$

Die Versuche, die Colladon und Sturm 1827 im Genfer See anstellten, haben für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles im Wasser von 8° den Wert 1435 m ergeben.

3. Die von La Place aufgestellte Formel

$$c = \sqrt{\frac{g}{e}}$$

läßt sich auch zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Stäben aus *starrten Körpern* verwenden, wenn man unter e die Verlängerung versteht, welche die Längeneinheit eines Stabes durch einen ihr gleichen Druck oder Zug erfährt. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Zahl e veränderlich ist, je nachdem man den Druck auf die ganze Oberfläche des Stabes verteilt oder den Zug nur an dem einen Ende wirken läßt.

Versetzt man den Stab in Längsschwingungen derart, daß sich in seiner Mitte ein Knoten bildet, so kann man experimentell und mit Hilfe der Gesetze über offene Pfeifen die Geschwindigkeit des Schalles ausfindig machen. Nach jenen ist nämlich, sofern l die Länge des Stabes, n die Schwingungszahl seines Grundtones bezeichnet,

$$c = 2 n l .$$

In festen Körpern ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei weitem größer als in der Luft. In Eisen ist sie etwa 15mal, in Silber 8mal, in Gläsern 17mal so groß, als in der Luft.

§ 45. Das Prinzip von Doppler.

Doppler hat zuerst (1842) darauf hingewiesen, daß sich bei der Annäherung einer Schallquelle ihr Ton erhöht, bei der Entfernung erniedrigt. In der

D A C B S

Fig. 34.

Fig. 34 stelle A den Ort des Beobachters, S den der Schallquelle vor, und in dem Augenblick, wo sich der Hörer in A befindet, treffe eine Verdichtung sein Ohr. Die Zeit t_1 , welche bis zur Wahrnehmung der nächsten Verdichtung verfließt, ist nun abhängig von der Bewegung der Tonquelle sowohl, als auch von der des Beobachters. Nehmen wir zunächst an, der Beobachter bewege sich gegen die Richtung des Schalles mit der Geschwindigkeit c_1 , während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles c und die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Verdichtungen AB sein soll. Nach der Zeit t_1 trifft der Hörer mit der zweiten Verdichtung in C zusammen, und es ist

$$AB = \lambda = t_1(c + c_1);$$

aber
$$t_1 = \frac{1}{n_1} \quad \text{und} \quad c = n\lambda;$$

mithin
$$n_1 = n \left(1 + \frac{c_1}{c} \right).$$

Bewegt sich der Beobachter mit dem Schalle, so ist

$$AB = \lambda = (c - c_1) \cdot t_1,$$

$$n_1 = n \left(1 - \frac{c_1}{c} \right).$$

Für den Fall, daß sich die Tonquelle bewegt, führt folgende Schlußreihe zur Gleichung. Es sei t die Schwingungszeit des Tones und AB der Abstand der einen Verdichtung von der nächsten. Entfernt sich die Quelle von dem Beobachter mit der Geschwindigkeit c_2 , so legt sie in der Zeit t den Weg $c_2 t$ zurück; um diese Strecke wächst die Wellenlänge, es ist daher

$$AB = \lambda_1 = (c + c_2) t;$$

aber
$$t = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad c = n_1 \cdot \lambda_1;$$

mithin
$$n_1 = n \cdot \frac{1}{1 + \frac{c_2}{c}}.$$

Bewegt sich die Schallquelle in der Richtung des Schalles auf den Beobachter zu, so findet man

$$AB = \lambda_1 = (c - c_2) t,$$

$$n_1 = n \cdot \frac{1}{1 - \frac{c_2}{c}}.$$

III. Abschnitt.

Optik.

§ 46. Stärke der Beleuchtung.

Die Intensität der Beleuchtung ist von der Lichtmenge abhängig, welche in der Zeiteinheit auf die Einheit der Fläche fällt. Sieht man von der Absorption des Lichtes in dem durchstrahlten Mittel ab, so lassen sich folgende Sätze aufstellen:

1. Unter sonst gleichen Umständen ist die Stärke der Beleuchtung der Intensität der Lichtquelle direkt proportional. Die Menge des ausgesandten Lichtes ist dem $\cos \beta$ proportional, wenn β der Winkel zwischen dem ausgehenden Strahl und der Normale des leuchtenden Flächenstücks ist.

2. Unter sonst gleichen Umständen ist die Stärke der Beleuchtung dem Quadrat der Entfernung r umgekehrt proportional.

3. Unter sonst gleichen Umständen steht die Stärke der Beleuchtung zu dem Kosinus des Einfallswinkels α in geradem Verhältnis.

Ist L die Lichtstärke der leuchtenden Flächeneinheit und B die Intensität der Beleuchtung, so ist

$$B = \frac{L \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

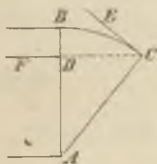


Fig. 35.

Lichtstärke. Werden zwei Lichtquellen, die bei senkrecht auffallendem Lichte in der Einheit der Entfernung die Beleuchtungsstärke i_1 bzw. i_2 hervorrufen, in solche Entfernungen r_1 und r_2 von der beleuchteten Fläche gebracht, daß sie die gleiche Stärke i der Beleuchtung bewirken, so ist nach Obigem

$$i = \frac{i_1}{r_1^2} = \frac{i_2}{r_2^2};$$

daher auch

$$i_1 : i_2 = r_1^2 : r_2^2,$$

d. h.: Die Stärken zweier Lichtquellen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen, in denen sie dieselbe Fläche gleich stark beleuchten (Versuche mit dem Photometer von Bunsen). In Deutschland dient als Einheit der Lichtstärke die Normkerze aus Paraffin, welche bei 20mm Durchmesser eine Flammenhöhe von 50mm hat.

§ 47. Die Geschwindigkeit des Lichtes.

Die Geschwindigkeit des Lichtes wurde durch astronomische und terrestrische Beobachtungen zu etwa 300 000 km in der Sekunde bestimmt.

1. *Methode des Olaf Römer 1675/76.* Sie beruht auf der Beobachtung der Verfinsterung des zweiten dem Planeten Jupiter zunächst liegenden Mondes, der bei jedem Umlauf in den Kern-

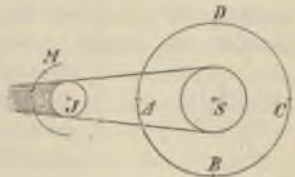


Fig. 36.

schatten des Jupiters tritt. Die Fig. 36 gibt ein ungefähres Bild von der Konstellation der betreffenden Gestirne. Es bedeutet S den Ort der Sonne, A, B, C, D vier Stellungen der Erde auf ihrer Bahn, J den Ort des Jupiters und M denjenigen seines Mondes. Solange sich die Erde in der Nähe von A bewegt, ändert sich ihr Abstand vom Jupitermond nur sehr wenig, und es vergehen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eintritten des Mondes in den Schattenkegel des Jupiters nahezu $42\frac{1}{2}$ Stunden. Wenn sich aber die Erde auf ihrer Bahn von A über B nach C immer weiter von M entfernt, so verlängert sich scheinbar die Umlaufzeit des Mondes immer mehr, und in C beträgt von A aus gerechnet der Unterschied 986 Sekunden. Bei der Annäherung der Erde von C über D nach A wird diese Verspätung wieder ausgeglichen. Zur Erklärung dieser auffälligen Erscheinung machte Römer die Annahme, daß das Licht 986 Sekunden brauche, um den Durchmesser der Erdbahn, das sind 299 Millionen Kilometer, zu durchheilen, woraus sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zu 303000 km berechnet.

2. Aus der *Aberration der Fixsterne* hat Bradley 1727 für die Geschwindigkeit des Lichtes nahezu den gleichen Wert gefunden.

3. Das von *Fizeau 1849 angegebene Verfahren* gestattet, die Geschwindigkeit des Lichtes irdischer Quellen zu messen. Seine Versuchsanordnung war

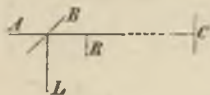


Fig. 37.

folgende. Die von L (Fig. 37) ausgehenden Strahlen wurden von der nur unten belegten Glasplatte B zurückgeworfen, gingen durch die Zahnlücken eines Rades R mit 720

Zähnen, legten dann den 8633 m langen Weg RC zurück, erfuhren an dem Spiegel C eine totale Reflexion und gelangten, sofern sich das Rad nicht drehte, durch die gleiche Lücke und durch die oben unbelegte Hälfte der Glasplatte B hindurch zu dem bei A befindlichen Auge. Wird aber das Rad R rasch umgedreht, so konnte der von C zurückkehrende Strahl je nach der Rotationsgeschwindigkeit des Rades entweder auf eine Lücke oder einen Zahn treffen und das Gesichtsfeld bei A blieb hell oder dunkel. Zum erstenmal trat eine Verdunkelung des Gesichtsfeldes auf, wenn das Rad in der Sekunde 12,6 Umläufe machte. Nun betrug die Breite eines

Zahnes oder einer Lücke $\frac{1}{1440}$ vom Umfang des Rades:

bei 12,6 Umdrehungen dauerte es demnach $\frac{1}{1440 \cdot 12,6}$

Sekunden, bis an Stelle der Lücke der nächstfolgende Zahn trat. In der nämlichen Zeit legte aber das Licht den Weg $2 \cdot 8,633$ km zurück; mithin ist seine Geschwindigkeit

$$1440 \cdot 12,6 \cdot 2 \cdot 8,633 \text{ km} = 313000 \text{ km}.$$

§ 48. Reflexion des Lichtes an ebenen Flächen.

Treffen Lichtstrahlen auf die glatte Grenzfläche zweier Medien, so findet in der Regel eine Teilung des Lichtes statt, indem ein Teil zurückgeworfen, ein anderer gebrochen oder auch absorbiert wird. Eine Fläche, welche das Licht regelmäßig reflektiert, heißt Spiegel. Um den Gesetzen der regulären Zurückwerfung des Lichtes einen kurzen Ausdruck

verleihen zu können, erklären wir: Unter dem Einfallslot versteht man die im Treffpunkt des Lichtstrahles mit der Grenzfläche auf dieser errichtete Senkrechte, unter Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel den vom Einfallslot einerseits und dem einfallenden bzw. ausfallenden Strahle andererseits gebildeten Winkel. Die Richtung des reflektierten Strahles wird alsdann durch folgende zwei Beziehungen festgelegt:

a) Der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel.

b) Das Einfallslot, der einfallende und der ausfallende Strahl liegen in einer Ebene.

Hieraus folgt noch: Wird bei unveränderlicher Richtung des einfallenden Strahles die Spiegelfläche um den $\sphericalangle \alpha$ gedreht, so erfährt der reflektierte Strahl in demselben Sinn eine Drehung um den $\sphericalangle 2\alpha$.

Bilder ebener Spiegel. Es sei in der Fig. 38 SS_1 ein ebener Spiegel, A ein leuchtender Punkt vor demselben, der den Strahl AB auf letzteren sendet. Nach den oben angeführten Gesetzen liegt nun der reflektierte Strahl BC symmetrisch zu dem einfallenden hinsichtlich des Einfallslotes und der Spiegelebene; mithin schneidet seine planimetrische Verlängerung die von A auf den Spiegel SS_1 gefällte Senkrechte in einem Punkt A_1 , der zu A in bezug auf den Spiegel symmetrisch liegt. (Es ist $AA_1 \perp SS_1$, $AF = FA_1$.) Das gleiche gilt von allen Strahlen, die von A herkommen und den Spiegel treffen. Die zurückgeworfenen Strahlen verhalten sich dem-

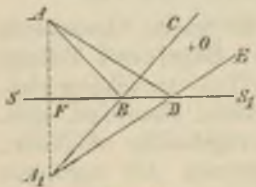


Fig. 38.

nach so, als ob sie von A_1 herkämen. Ihre Wirkung auf ein in O befindliches Auge wird jedoch nur durch die Strahlenstücke bedingt, welche in das Auge gelangen, nicht aber durch ihren früheren Verlauf; deshalb ist die Gesichtsempfindung in O so, als ob A_1 ein leuchtender Punkt wäre. Aus diesem Grund heißt A_1 das Bild von A . Nach diesen Erörterungen läßt sich in einfacher Weise das Bild eines Körpers konstruieren, der sich vor einem Planspiegel befindet und auf diesen Licht ausstrahlt. Man bestimmt nämlich zu jedem Punkt desselben das Bild und verbindet die Bildpunkte durch Linien gerade so miteinander, wie sie am Objekte unter sich vereinigt sind. Gegenstand und Bild sind demnach in bezug auf die Spiegelebene symmetrisch, und die von einem Planspiegel erzeugten Bilder sind außerhalb des Auges nicht vorhanden, sie sind scheinbar, subjektiv.

Winkelspiegel. Stellt man zwei Planspiegel unter einem Winkel zusammen, so entstehen von einem zwischen ihnen liegenden Lichtpunkte mehrere Bilder, die im Kreise um die gemeinsame Kante der Spiegel angeordnet sind und deren Zahl von der Größe des Neigungswinkels abhängt. Ist nämlich dieser Winkel in 360° n mal enthalten, so beträgt die Zahl der Bilder $(n - 1)$.

Der Spiegelsextant. In der Fig. 39 bedeuten S_1 den festen, S den beweglichen Spiegel und $\angle BEA = \varphi$ den zu messenden Winkel, wenn das Bild des Gegenstandes B nach zweimaliger Reflexion auf das des direkt beobachteten Gegenstandes A in



Fig. 39.

dem bei O angebrachten Fernrohr fällt. Ferner bezeichnen wir den Winkel zwischen den Spiegeln, also auch den zwischen ihren Einfallsloten CF und DF mit ε . Nun ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle \varphi &= \alpha + \varepsilon - \delta = \alpha + \varepsilon - \gamma \\ &= \beta + \varepsilon - \gamma = \gamma + \varepsilon + \varepsilon - \gamma = 2\varepsilon; \end{aligned}$$

d. h.: Der scheinbare Abstand der Objekte A und B ist gleich dem doppelten Winkel, welchen die beiden Spiegel miteinander bilden.

§ 49. Kugel- oder sphärische Spiegel.

Hohlspiegel. Alle von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Zentralstrahlen werden so reflektiert, daß sie entweder durch einen Punkt gehen oder von einem Punkt herzukommen scheinen. Die Bilder der Hohlspiegel sind daher sowohl wirkliche als auch scheinbare. Der Vereinigungspunkt der parallel mit der Hauptachse auffallenden Zentralstrahlen wird Brennpunkt oder Fokus genannt und dessen Entfernung vom Spiegel heißt Brennweite. Den Abstand eines Gegenstandes und seines Bildes von dem Spiegel bezeichnet man als Gegenstands- bzw. Bildweite. — Bei der Ableitung der Relationen

zwischen Brenn-, Bild- und Gegenstandsweite setzen wir parallele oder auch divergente Lichtstrahlen voraus. Es sei in der Fig. 40 M der optische Mittelpunkt des Spiegels CD, A ein leuchtender Punkt auf der Hauptachse AC, AD irgend



Fig. 40.

ein von ihm ausgehender Strahl, der längs DB reflektiert wird,

$$AC = a, \quad BC = b, \quad MC = r \quad \text{und} \quad \sphericalangle DMC = \alpha.$$

Zieht man von B und A die Lote BE und AG zu der Geraden DM, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DBE und DAG die Proportion

$$BE : DE = AG : DG ;$$

in kleinen Zeichen

$$\begin{aligned} & (r - b) \sin \alpha : [r - (r - b) \cos \alpha] \\ & = (a - r) \sin \alpha : [r + (a - r) \cos \alpha] ; \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$(1) \quad b = r \left[1 - \frac{1}{\frac{r}{a - r} + 2 \cos \alpha} \right].$$

Ist demnach bei konstantem a auch α konstant, so ändert sich b ebenfalls nicht; wird jedoch α größer, so nimmt b ab; woraus folgt, daß Randstrahlen die Achse näher am Spiegel treffen als Zentralstrahlen. Sind ferner die auf den Spiegel fallenden Strahlen parallel, so hat man in der Beziehung (1) für a den Wert ∞ zu setzen und dieselbe geht über in

$$(2) \quad b = r \left(1 - \frac{1}{2 \cos \alpha} \right).$$

Wählt man nun aus diesen Strahlen nur die Zentralstrahlen aus, so vereinfacht sich die Gleichung (2) noch weiter, weil wir $\alpha = 0$ und damit auch $\cos \alpha = 1$ setzen dürfen. Das Ergebnis ist

$$b = \frac{r}{2},$$

d. h. der Brennpunkt halbiert den auf der Hauptachse liegenden zum Spiegel führenden Radius, oder auch die Brennweite ist gleich dem halben Krümmungsradius des Spiegels.

Die Gleichung (1) läßt sich auch dadurch spezialisieren, daß man von den aus A kommenden Strahlen nur die Zentralstrahlen auf den Spiegel gelangen läßt. In diesem Fall haben wir $\alpha = 0$ zu setzen und erhalten

$$b = \frac{ar}{2a - r}.$$

Hieraus folgt sofort

$$(3) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

weil $r = 2f$ ist. (Reziprokengleichung.)

Diese besondere und sehr wichtige Beziehung für Zentralstrahlen läßt sich direkt wie folgt ableiten (Fig. 41). Weil in dem $\triangle ADB$ die Linie DM den Winkel BDA halbiert, so verhält sich nach einem planimetrischen Satz

$$BM : MA = BD : AD.$$

Nun ist

$$CM = r, \quad CB = b, \quad AC = a,$$

$$BM = r - b, \quad AM = a - r;$$

daher geht obige Proportion in folgende über:

$$(r - b) : (a - r) = b : a,$$

und damit wie oben

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

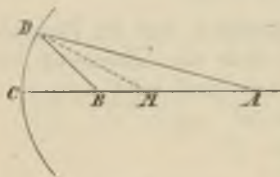


Fig. 41.

Setzt man die Entfernung des Gegenstandes von dem Brennpunkte gleich x , seines Bildes Entfernung von dem gleichen Punkt gleich y , so ist zunächst

$$x = a - f, \quad y = b - f;$$

die Gleichung (3) geht in folgende über:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x + f} + \frac{1}{y + f},$$

daraus folgt

$$(4) \quad xy = f^2.$$

Konstruktion der Bilder. (Fig. 42.) Unter den vielen Strahlen, die von dem Endpunkte A des Gegenstandes AB ausgehen, gibt es zwei, AD und AM, deren Richtungen nach der Reflexion am Spiegel S bekannt sind. Der eine zur Hauptachse parallele Zentralstrahl AD geht nach der Zurückwerfung durch den Brennpunkt F; der andere Strahl AM ist ein Hauptstrahl, er trifft die Spiegelfläche rechtwinklig und wird in sich selbst reflektiert. In dem Schnittpunkt A_1 der beiden zurückgeworfenen Strahlen treffen sich alle übrigen von A ausgehenden und vom Spiegel reflektierten Strahlen; es ist also A_1 das Bild von A. Hat der Spiegel eine kleine Öffnung, so ist das Bild einer zur Achse senkrechten Strecke AB wieder eine Strecke, die man als das von A_1 auf CM gefällte Lot A_1B_1 erhält. Die Art und Größe des Bildes von einem Gegenstand hängt von dessen Entfernung vom Spiegel ab. Die Resultate der Konstruktionen oder der

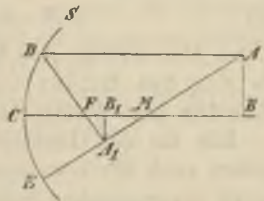


Fig. 42.

Rechnungen nach der Gleichung (3) sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Gegenstandsweite	Bildweite	Art und Stellung des Bildes	Größe des Bildes verglichen mit der des Gegenstandes
∞	f	—	sehr klein
$< \infty$ $> 2f$	$> f$ $< 2f$	wirklich, umgekehrt	kleiner
$2f$	$2f$	wirklich, umgekehrt	gleich groß
$< 2f$ $> f$	$> 2f$ $< \infty$	wirklich, umgekehrt	größer
f	∞	—	sehr groß
$< f$	negativ	scheinbar, aufrecht	größer

Die relative Größe des Bildes leiten wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MAB und MA_1B_1 (Fig. 42) ab. Dieselbe liefert die Proportion

$$AB : A_1B_1 = (a - r) : (r - b).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{und} \quad f = \frac{r}{2}, \quad \text{daher}$$

$$(5) \quad AB : A_1B_1 = a : b,$$

d. h.: Die Größe des Gegenstandes verhält sich zu der des Bildes wie die Weite des Gegenstandes zur Weite des Bildes.

Die für den Hohlspiegel aufgestellten Relationen gelten auch für konvergente Lichtstrahlen, wenn man deren geometrischen Schnittpunkt als Gegenstand mit

negativer Weite einführt. Wir haben demnach $+a$ durch $-a$ zu ersetzen; z. B. ist hier

$$(6) \quad \frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Konvexspiegel. Die parallel zur Hauptachse einfallenden Zentralstrahlen divergieren nach der Reflexion in der Art, daß ihre Verlängerungen einen bestimmten Punkt der Hauptachse — hinter dem Spiegel — treffen. Dieser Vereinigungspunkt heißt geometrischer oder negativer Brennpunkt oder auch Zerstreungspunkt, seine Entfernung vom Spiegel Zerstreungswerte. Durch erhabene Kugelspiegel entstehen nur scheinbare, aufrechte, verkleinerte Bilder zwischen Zerstreungspunkt und Spiegel.

Unter Anwendung von divergentem oder auch parallelem Licht erhalten wir folgende Beziehungen. In Fig. 43 liege der leuchtende Punkt A auf der Hauptachse und ein von ihm kommender Strahl treffe den Spiegel, dessen optischer Mittelpunkt M sei, in D; die Rückverlängerung seines reflektierten Strahles HD treffe die Achse in B. Ergänzt man nun die Figur durch die Lote AG und BE auf MD, so sind die Dreiecke DBE und DAG ähnlich, weshalb die Proportion besteht:

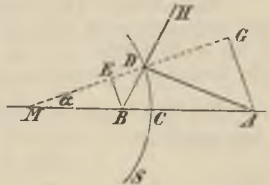


Fig. 43.

$BE : ED = AG : DG$.

Nach den früheren Bezeichnungen ist $MC = r$, $BC = b$, $CA = a$, $\sphericalangle CMD = \alpha$, also

$$\frac{(r - b) \sin \alpha}{r - (r - b) \cos \alpha} = \frac{(r + a) \sin \alpha}{(r + a) \cos \alpha - r}.$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$(7) \quad b = r \left[1 - \frac{1}{2 \cos \alpha - \frac{r}{a+r}} \right].$$

Setzt man $a = \infty$ und $\alpha = 0$, so liefert die Gleichung (7) die Beziehung $b = \frac{r}{2}$; d. h. der negative Brennpunkt halbiert die Strecke zwischen Spiegel und optischem Zentrum.

Für Zentralstrahlen bei endlichem a kann $\alpha = 0$ gesetzt werden, und die Gleichung (7) liefert die Relation

$$(8) \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{r} = -\frac{1}{f}.$$

Bemerkung. Die Gleichungen (7) und (8) lassen sich in die entsprechenden (1) und (3) überführen, wenn man sowohl b als auch f bzw. r , d. h. diejenigen Strecken negativ setzt, die hinter der spiegelnden Fläche liegen.

Bei konvergenten Strahlen vertauschen sich a und b ; demnach ist

$$(9) \quad -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}.$$

Die Konstruktion der Bilder erfolgt wie beim Hohlspiegel.

§ 50. Brechung des Lichtes.

Die Ablenkung, welche Lichtstrahlen beim Übergang aus einem Mittel in ein anderes erfahren, heißt Brechung. Die im Treffpunkt auf der Trennungsfäche errichtete Senkrechte wird Einfallslot genannt, und die spitzen Winkel zwischen diesem Lot und dem

einfallenden bzw. gebrochenen Strahl führen die Namen Einfallswinkel bzw. Brechungswinkel. Genauere Versuche bestätigen das von Snell aufgefundene und von Descartes 1637 veröffentlichte Gesetz:

a) Der einfallende und der gebrochene Strahl liegen mit dem Einfallslot in einer Ebene;

b) der Sinus des Einfallswinkels steht zu dem Sinus des Brechungswinkels für jedes Paar von Medien in einem konstanten Verhältnis, das nur von der Natur der Medien abhängt und Brechungsexponent heißt.

Bezeichnet man den Einfallswinkel mit α , den Brechungswinkel mit β , den Brechungsexponenten mit n und die Geschwindigkeit des Lichtes in den beiden Medien mit v und v_1 , so ist

$$(1) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \frac{v}{v_1}.$$

Für den Übergang des Lichtes von Luft in Wasser ist $n = \frac{4}{3}$, von Luft in Glas $\frac{3}{2}$.

Beziehen sich die Zahlen 1, 2, 3 auf die Medien des leeren Raumes, der Luft und des Wassers, so ist

$$n_{2,3} = \frac{n_{1,3}}{n_{1,2}}.$$

Fallen die Strahlen senkrecht zur Grenzfläche auf, dann ist $\alpha = 0$ und damit auch $\beta = 0$; d. h. die Strahlen erfahren keine Ablenkung. Beim Übertritt vom optisch dünneren in das optisch dichtere Mittel werden die Strahlen zum Einfallslot hin, im anderen Falle davon weg gebrochen.

Im dichteren Mittel ist die Geschwindigkeit des Lichtes kleiner als im optisch dünneren.

Ist n der Brechungsindex von dem Mittel A in B, so ist $\frac{1}{n}$ derjenige für den Übertritt aus dem Mittel B in A; der Lichtstrahl macht sonach den Weg umgekehrt.

Konstruktion des gebrochenen Strahles. Geht der

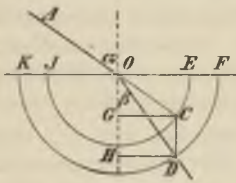


Fig. 44.

Lichtstrahl AO (Fig. 44) aus dem dünneren in das dichtere Mittel über, so beschreibe man um O in dem dichteren Mittel in der Brechungsebene zwei Halbkreise mit den Radien r und rn , nämlich EJ und FK. Verlängere AO bis zum Schnitt C mit dem kleineren Halbkreis und ziehe durch C die Parallele zum Einfallslot, welche den äußeren Halbkreis in D schneidet. Die Verbindungsgerade OD gibt den Weg des gebrochenen Strahles an.

Bemerkung. Die Konstruktion für den Fall des Überganges aus dem dichteren Mittel in das dünnere ist der eben angegebenen analog.

Wird die geradlinige Bahn BF (Fig. 45) eines

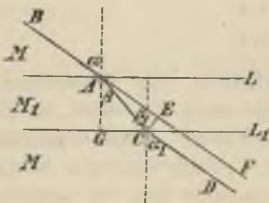


Fig. 45.

Lichtstrahles in dem Mittel M dadurch unterbrochen, daß man ihn durch ein von zwei parallelen Ebenen L und L_1 begrenztes zweites Medium M_1 gehen läßt, so tritt eine zweimalige Brechung ein; der von dem Strahl zurückgelegte Weg ist BACD. Da nun

$$\sphericalangle \beta = \beta_1$$

als Wechselwinkel ist, so ist

$$\sphericalangle \alpha = \alpha_1.$$

Der austretende Strahl CD geht daher dem auffallenden parallel. Demnach gilt der Satz:

Durch planparallele durchsichtige Platten wird ein Lichtstrahl von seiner Richtung nicht abgelenkt, sondern nur verschoben.

Ist $AG = d$ die Dicke des Mediums, n der Brechungsexponent von M in M_1 , so läßt sich die Verschiebung berechnen. Diese wird durch das Lot CE auf BF angegeben und beträgt

$$CE = \frac{d}{\cos \beta} \cdot \sin(\alpha - \beta).$$

Der Brechungsexponent für den Übertritt aus dem leeren Raum in ein Mittel heißt der absolute Brechungsexponent. Er beträgt für Luft 1,000294.

Bei dem Übergang des Lichtes aus einem dünneren in ein dichteres Mittel kann der Einfallswinkel α jeden Wert zwischen 0° und 90° annehmen. Zu

$$\alpha = 0^\circ$$

ergibt sich für den Brechungswinkel

$$\beta = 0^\circ.$$

Ist dagegen

$$\alpha = 90^\circ,$$

so findet man den zugehörigen Winkel β aus der Beziehung

$$\sin \beta = \frac{1}{n}.$$

Dieser Wert für β heißt Grenzwinkel; er ist der erzeugende Winkel einer Kegelfläche, innerhalb welcher die gebrochenen aller derjenigen Strahlen liegen, welche die Grenzfläche in ein und demselben Punkte treffen. Daher werden alle Lichtstrahlen, die von einem dichteren Mittel ausgehen und ein dünneres unter einem größeren Einfallswinkel als dem Grenzwinkel treffen, in das erstere, dichtere Mittel ohne größeren Verlust zurückgeworfen: totale Reflexion.

§ 51. Das Prisma.

Der Gang eines homogenen Lichtstrahles im Hauptschnitt eines Prisma läßt sich mit der Snell-

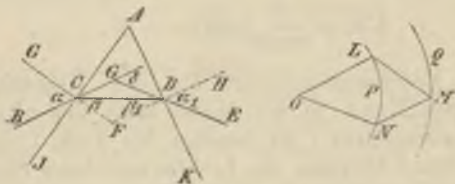


Fig. 46.

schen Konstruktion leicht verfolgen. In der Fig. 46 sei JAK derjenige Hauptschnitt des Prisma, in welchem der Lichtstrahl BCDE sich bewegt. Wir zeichnen nun um den beliebigen Punkt O zwei Kreise P und Q mit den Radien r und $r \cdot n$ (n ist der Brechungsexponent) und legen in den ersten den Radius OL parallel dem auffallenden Strahl BC, dann zeichnen wir durch L die Parallele mit dem ersten Einfallslot GC, welche den Kreis Q in M schneidet. Nun ist OM die Richtung des sich im Prisma bewegenden Strahles CD. Hierauf legen wir

durch M die Parallele zu dem zweiten Einfallslot HD und verbinden ihren Schnittpunkt N auf dem Kreise P mit dem Zentrum O. Die Gerade ON bezeichnet die Richtung des austretenden Strahles DE.

Ablenkung. Der spitze Winkel δ , welchen die verlängerten Strahlen BC und ED bei ihrem Treffpunkte G bilden, heißt die Ablenkung des Prisma. Um letztere zu ermitteln, soll $\sphericalangle BCG$ mit α , $\sphericalangle FCD$ mit β , $\sphericalangle FDC$ mit β_1 , $\sphericalangle EDH$ mit α_1 , $\sphericalangle JAK$ mit γ und der Brechungsexponent mit n bezeichnet sein. In dem $\triangle CGD$ ist

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sphericalangle \delta &= \alpha - \beta + \alpha_1 - \beta_1 \\
 &= \alpha + \alpha_1 - (\beta + \beta_1), \\
 &= \alpha + \alpha_1 - (2R - CFD), \\
 &= \alpha + \alpha_1 - \gamma.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist allgemein gültig, wenn man daran festhält, daß α_1 und β_1 negativ zu nehmen sind, wenn sie mit α und β verglichen nicht auf derselben Seite des Strahles liegen.

Kleinste Ablenkung. Das Minimum der Ablenkung, δ_0 , tritt ein, wie sich aus der Beobachtung der Gestaltsveränderung des Vierecks LMNO ergibt, wenn der Lichtstrahl symmetrisch durch den Hauptschnitt hindurchgeht, wenn

$$\sphericalangle \alpha = \alpha_1, \quad \sphericalangle \beta = \beta_1$$

ist. In diesem Falle haben wir

$$\sphericalangle \beta + \beta_1 = 2\beta = \gamma$$

und

$$\sphericalangle \delta_0 = \alpha + \alpha_1 - \gamma = 2\alpha - \gamma;$$

also

$$(2) \quad \sphericalangle \alpha = \frac{\delta_0 + \gamma}{2},$$

daher

$$(3) \quad \frac{\sin \frac{\delta_0 + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = n.$$

Letztere Gleichung läßt sich zur Bestimmung des Brechungsexponenten n benutzen.

§ 52. Brechung an sphärischen Begrenzungsflächen.

Es soll der Gang eines Strahlenbündels ermittelt werden, das von einem dünneren in ein dichteres Mittel übergeht, wenn die Grenzfläche beider Medien kugelförmig ist und die Entfernungen eines Konvergenzpunktes von allen Punkten der Trennungsfläche als gleich groß angesehen werden dürfen.

I. Die konvexe Seite der Kugelfläche ist dem schwächer brechenden Mittel zugewandt.

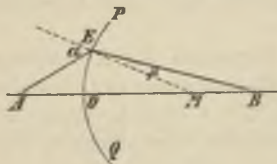


Fig. 47.

Es sei in der Fig. 47. M der Mittelpunkt der Kugelfläche PQ vom Radius r , A ein leuchtender Punkt auf der Achse OM , AE irgend ein von ihm ausgehender Strahl, EB der dazugehörige gebrochene,

α der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel, n der Brechungsexponent, a und b die Entfernungen des Objektes A und seines Bildes B von O . Ferner sei $\sphericalangle EAO = \varphi$, $\sphericalangle EMO = \psi$ und $\sphericalangle EBO = \sigma$, so gilt

$$(1) \quad \alpha = \varphi + \psi; \quad \beta = \psi - \sigma; \quad \alpha = n \cdot \beta;$$

somit

$$(2) \quad \varphi + \psi = n(\psi - \sigma); \quad \text{aber}$$

$$(3) \quad EO = \frac{a\varphi}{\varrho} = \frac{r\psi}{\varrho} = \frac{b\sigma}{\varrho},$$

wo $\varrho = \frac{180^\circ}{\pi}$ ist. Daher

$$(4) \quad \frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1).$$

Rückt der Punkt A ins Unendliche, so ist $a = \infty$ zu setzen und aus (4) erhält man

$$(5) \quad \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1).$$

Sind aber die auf PQ fallenden Strahlen konvergent, dann haben wir a negativ zu nehmen, weil der Punkt A innerhalb des dichteren Mediums liegt; daher

$$(6) \quad -\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1).$$

II. Die konkave Seite der Kugelfläche ist dem dünneren Mittel zugekehrt. Wenn an der gleichen Bezeichnung wie unter I. festgehalten wird, so gestaltet sich die Entwicklung folgendermaßen (Fig. 48).

Es ist

$$(7) \quad \alpha = n \cdot \beta; \quad \varphi = \alpha + \sigma; \quad \psi = \beta + \sigma,$$

daher

$$(8) \quad \varphi - \sigma = n(\psi - \sigma);$$

$$\text{aber } EO = \frac{a\varphi}{\varrho} = \frac{b\psi}{\varrho} = \frac{r\sigma}{\varrho},$$

wo $\varrho = \frac{180^\circ}{\pi}$ ist; folglich

$$(9) \quad \frac{1}{a} - \frac{n}{b} = -\frac{1}{r}(n-1).$$

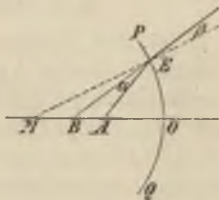


Fig. 48.

Für paralleles Licht ist $a = \infty$, daher

$$(10) \quad -\frac{v}{b} = -\frac{1}{r}(n-1),$$

und für konvergente Strahlen, die nach der Brechung wieder konvergent sind, erhalten wir

$$(11) \quad -\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = -\frac{1}{r}(n-1).$$

III. Die beide Medien trennende Fläche sei eben.
Sind beide Strahlenbündel, das auffallende und das gebrochene, zugleich konvergent oder auch zugleich divergent, so ergibt eine kurze Rechnung, da $r = \infty$ ist, für den Fall

$$(12) \quad \begin{array}{l} \text{der Konvergenz} \quad -\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = 0, \\ \text{der Divergenz} \quad \frac{1}{a} - \frac{n}{b} = 0. \end{array}$$

Bemerkung. Die Beziehung $\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{r}(n-1)$ gilt so-
nach allgemein, wenn man festsetzt, daß bei geometrischen
(scheinbaren) Schnitten die betreffenden Strecken negativ zu
nehmen sind und daß r als eine positive oder negative Zahl
zu behandeln ist, je nachdem die konvexe bzw. konkave Seite
der Kugelfläche dem dünneren Mittel zugekehrt ist.

§ 53. Brechung durch Linsen.

Bei der Ableitung der Gesetze für die Linsen machen wir die Annahme, daß die Dicke derselben vernachlässigt werden darf, daß der leuchtende Punkt auf der Hauptachse liegt und daß die Entfernungen eines Vereinigungspunktes (Gegenstands- oder Bildpunktes) von allen Punkten der betreffenden Linsenfläche als gleich groß genommen werden dürfen. Ferner

bezeichnen wir mit a die Gegenstandsweite, mit b die Bildweite, mit f die Brennweite, mit r_1 und r_2 die Radien der beiden sphärischen Flächen und mit n den Brechungsindex.

I. Sammellinsen. Die Fig. 49 stelle den Gang ADEB eines Lichtstrahls in einem Hauptschnitt einer

bikonvexen Linse PQ vor, der durch die Achse O_1O_2 gelegt worden ist; O_1 und O_2 seien die Krümmungszentren, $O_1D = r_1$,

$O_2E = r_2$ die Radien der Kugeln und zugleich die

Einfallsweite; a und b die Entfernungen der Punkte A und B (Gegenstands- und Bildpunkt) von der Linse. Trifft nun der verlängerte Strahl DE die Achse in C, der von der Linse den Abstand c haben soll, so läßt sich C nicht nur als reeller Bildpunkt von A für die eine Grenzfläche PDQ, sondern auch als geometrischer (scheinbarer) Bildpunkt in bezug auf die Grenzfläche PEQ ansehen. Demnach erhält man nach der Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{c} = \frac{1}{r_1} (n - 1),$$

$$\frac{1}{b} - \frac{n}{c} = \frac{1}{r_2} (n - 1).$$

Addiert man beide, so ergibt sich

$$(1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Die Beziehung wurde unter der Annahme abgeleitet, daß die auffallenden Strahlen divergent und die aus-

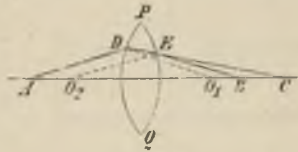


Fig. 49.

tretenden konvergent seien. Andere Fälle enthält nachfolgende Zusammenstellung:

Die auf- fallenden Strahlen sind	Die aus- tretenden Strahlen sind	Gleichung
divergent	parallel	$\frac{1}{a} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$
divergent	divergent	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$
konvergent	konvergent	$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$
parallel	konvergent	$\frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$.

Sind die Linsen plankonvex oder konkavkonvex, so bietet die Ableitung der Relationen zwischen a , b , n , r_1 , r_2 keinerlei Schwierigkeiten und man erhält wie oben folgende Gleichungen.

Plankonvexe Linsen:

Die auf- fallenden Strahlen sind	Die aus- tretenden Strahlen sind	Gleichung
divergent	konvergent	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r_1} (n - 1)$
divergent	divergent	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{r_1} (n - 1)$
divergent	parallel	$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_1} (n - 1)$
konvergent	konvergent	$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r_1} (n - 1)$
parallel	konvergent	$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_1} (n - 1)$

Konkavkonvexe Linsen:

Die auf- fallenden Strahlen sind	Die aus- tretenden Strahlen sind	Gleichung
divergent	konvergent	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
divergent	divergent	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
divergent	parallel	$\frac{1}{a} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
konvergent	konvergent	$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
parallel	konvergent	$\frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

Setzt man in der Gleichung (1) den Ausdruck

$$(n - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f},$$

so gilt die Beziehung

$$(2) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Wird hierin $a = \infty$, so wird $f = b$; d. h.: Die der Hauptachse parallelen Strahlen vereinigen sich hinter der Linse in einem Punkt, der Brennpunkt heißt.

Zusammenfassung. Strahlen, die von einem Punkte auf der Hauptachse ausgehen oder nach einem Punkte dieser Achse hinzielen, werden von den Sammellinsen so gebrochen, daß sie wieder durch einen Punkt der Achse gehen, bzw. von einem Punkte derselben herzu-

kommen scheinen. Alle Beziehungen zwischen Bild- und Gegenstandsweite werden für sämtliche mögliche Fälle von der Gleichung umfaßt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

wenn man bestimmt, daß a , b negativ bzw. ∞ zu nehmen sind, sowie ein scheinbarer bzw. unendlich ferner Schnittpunkt auftritt, und daß dasjenige r negativ oder ∞ zu setzen ist, dessen Fläche hohl bzw. eben wird.

Konstruktion der Bilder. (Fig. 50.) Hat der Punkt A keine axiale Lage, aber doch nur einen so geringen Abstand von der Hauptachse, daß die Nebenachse AC einen kleinen Winkel mit jener bildet, so darf man die oben abgeleiteten Resultate, ohne einen bedeutenden Fehler zu machen, zur

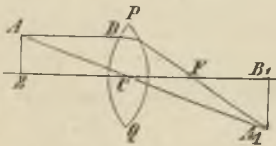


Fig. 50.

Konstruktion von Bildern benutzen, welche eine Sammellinse von einem Gegenstand liefert. Zur Bestimmung der Lage und Größe des Bildes A_1B_1 von dem Objekt AB verfolgen wir den Verlauf von zwei von A ausgehenden Strahlen, wovon der eine AD parallel zur Hauptachse einfällt, der andere AC durch den optischen Mittelpunkt geht. Ersterer nimmt nach der Brechung seinen Weg durch den Brennpunkt, während letzterer in seiner eigenen Richtung weiter geht. Der Schnittpunkt A_1 ist das Bild von A und A_1B_1 dasjenige von AB . Außerdem verhält sich

$$A_1B_1 : AB = B_1C : BC = b : a ;$$

d. h.: Bild und Gegenstand verhalten sich hinsichtlich ihrer Größe wie Bild- und Gegenstandsweite.

Je nach der Lage des Objektes AB zur Linse PQ erzeugt diese verschiedene Bilder. Die vorkommenden Fälle sind in folgender Tabelle (S. 120) zusammengestellt und ihre Resultate können durch Konstruktion oder aus den Formeln abgeleitet werden.

II. *Zerstreuungslinsen.* Entsprechend den Gleichungen für Sammellinsen erhält man bei Zerstreuungslinsen folgende Relationen:

für bikonkave Linsen

$$(3) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -(n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

für plankonkave Linsen

$$(4) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -(n - 1) \cdot \frac{1}{r_1},$$

für konvexkonkave Linsen

$$(5) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -(n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

wo a und b negativ bzw. gleich ∞ zu setzen sind, wenn ein scheinbarer bzw. ein unendlich ferner Schnitt auftritt.

Bei positivem a ist b stets negativ, auch in dem Falle einer konvexkonkaven Linse; denn hier muß $r_2 > r_1$ sein, soll die Linse ihren Charakter als Zerstreuungslinse nicht verlieren. Setzt man in den Gleichungen (3) bis (5) die Ausdrücke rechts gleich $-\frac{1}{f}$,

Die auffallenden Strahlen sind	a	b	Des Bildes		
			Art	Stellung	relative Größe
divergent	$< \infty$ $> 2f$	$> f$ $< 2f$	wirklich	verkehrt	kleiner
	$= 2f$	$= 2f$	wirklich	verkehrt	gleich groß
	$< 2f$ $> f$	$> 2f$ $< \infty$	wirklich	verkehrt	größer
	$= f$	$= \infty$	kein Bild	—	—
	$< f$	negativ	scheinbar	aufrecht	größer
konvergent	negativ	positiv $< f$	wirklich	aufrecht	kleiner
parallel	$= \infty$	$= f$	wirklich	—	punktförmig

so lassen sich alle drei Beziehungen in der einen zusammenfassen:

$$(6) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}.$$

Wird nun $a = \infty$, so ergibt sich

$$b = -f;$$

folglich:

Parallele Strahlen werden von der Zerstreuungslinse so gebrochen, daß sie von einem Punkt in der Entfernung f vor der Linse herzukommen scheinen. Dieser Punkt wird Zerstreuungspunkt und f die Zerstreuungswerte genannt.

Konstruktion der Bilder. (Fig. 51.) Der von A parallel zur Hauptachse einfallende Strahl AD nimmt den Verlauf DEG, so daß die Rückverlängerung der GE durch F, den Zerstreuungspunkt, geht, während der durch den optischen Mittelpunkt C hindurchfallende Strahl seine geradlinige Bahn nicht verläßt. Der Schnittpunkt A_1 der beiden Geraden AC und FG ist das scheinbare Bild von A, und $A_1 B_1$ das scheinbare, aufrechte, kleinere Bild von AB.

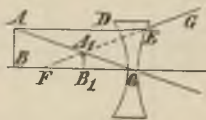


Fig. 51.

Die Größe des Bildes verhält sich zu der des Gegenstandes wie die Bildweite zur Weite des Gegenstandes.

Weitere Fälle sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Die auffallenden Strahlen sind	a	b	Des Bildes		
			Art	Stellung	relative Größe
divergent	positiv	negativ < f	scheinbar	aufrecht	kleiner
parallel	∞	= f	scheinbar	—	punktförmig
konvergent	< ∞ > 2f	> f < 2f	scheinbar	umgekehrt	kleiner
	= 2f	= 2f	scheinbar	umgekehrt	gleich groß
	< 2f > f	> 2f < ∞	scheinbar	umgekehrt	größer
	= f	= ∞	—	—	—
	< f	positiv	wirklich	aufrecht	größer

III. Brennweite f_0 eines Linsensystems. a) f_1 und f_2 sind die Brennweiten zweier Konvexlinsen, deren Abstand e beträgt. Die Strahlen fallen parallel auf die erste Linse und konvergent auf die zweite. Diese vereinigt sie im Brennpunkt des Systems. Dann ist

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1 - e} + \frac{1}{f_2}.$$

b) Für zwei Konkavlinsen gilt

$$\frac{1}{f_0} = - \left(\frac{1}{f_1 - e} + \frac{1}{f_2} \right).$$

c) Für ein System aus einer Konvex- und einer Konkavlinse in unmittelbarer Folge gilt

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}.$$

Ist $f_2 \geq f_1$, so wirkt das Paar wie eine Konvex- bzw. Konkavlinse.

d) Für mehrere Konvexlinsen in unmittelbarer Folge gilt

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots$$

§ 54. Die Lupe.

Die Bikonvexlinse L (Fig. 52) liefert von dem Gegenstand AB ein scheinbares, aufrechtes, vergrößertes Bild A_1B_1 in der deutlichen Sehweite $B_1O = s$. Bezeichnen wir mit φ den $\sphericalangle COB_1$, unter dem der Gegenstand in der deutlichen Sehweite erscheint, mit ψ

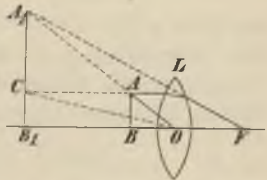


Fig. 52.

den $\sphericalangle A_1 O B_1$, unter welchem das Bild $A_1 B_1$ gesehen wird, so drückt das Verhältnis $\text{tg} \psi : \text{tg} \varphi$ die Vergrößerung v der Lupe aus. Es ist

$$v = \frac{\text{tg} \psi}{\text{tg} \varphi} = \frac{s}{a};$$

aber

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f},$$

mithin

$$v = 1 + \frac{s}{f}.$$

§ 55. Das zusammengesetzte Mikroskop.

Der Gegenstand AB befindet sich nahe bei einer Sammellinse L (Objektiv) von kleiner Brennweite,

etwas jenseits des Brennpunktes. Sein reelles, vergrößertes Bild $A_1 B_1$ wird durch eine Konvexlinse L_1 (Okular) betrachtet, welche als Lupe wirkt. Dadurch entsteht ein virtuelles, umgekehr-

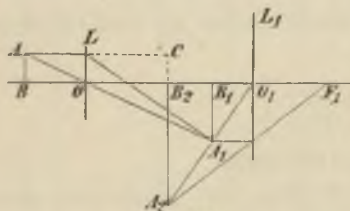


Fig. 53.

tes Bild $A_2 B_2$ in der deutlichen Sehweite s . Unter der Vergrößerung v verstehen wir das Verhältnis der Tangenten der Sehwinkel in der deutlichen Sehweite. Mithin ist unter Zugrundelegung der Fig. 53

$$v = \frac{\text{tg} A_2 O_1 B_2}{\text{tg} B_2 O_1 C} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C} = \frac{A_2 B_2}{A B}.$$

Ferner sei $OB = a$, $OB_1 = b$, $O_1B_1 = a_1$, $O_1B_2 = b_1 = s$, $OO_1 = h$, f die Brennweite der Linse L und f_1 die der L_1 . Alsdann ergibt sich

$$A_1B_1 : A_2B_2 = a_1 : s,$$

$$AB : A_1B_1 = a : b,$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f_1},$$

$$b + a_1 = h.$$

Hieraus berechnet sich

$$v = \frac{bs}{aa_1} = \frac{h(s + f_1) - s(f + f_1)}{f \cdot f_1} - 1.$$

Da nun in der Regel h nahezu gleich s ist, so folgt

$$v = \frac{h(h - f)}{f \cdot f_1} - 1.$$

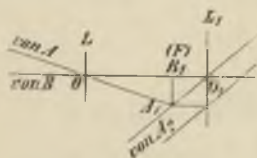
Bei starker Vergrößerung darf 1 fortgelassen werden und man erhält

$$v = \frac{h(h - f)}{f \cdot f_1}.$$

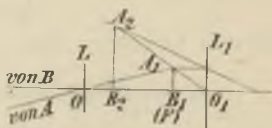
§ 56. Das Fernrohr.

1. *Das astronomische Fernrohr.* Von dem entfernten Gegenstand AB wird durch die Objektivlinse L (Fig. 54; die Linsen sind schematisch gezeichnet) ein verkehrtes, kleines, wirkliches Bild in der Nähe des Brennpunktes F der Sammellinse L entworfen. Dieses erscheint durch die als Lupe wirkende Okularlinse

L_1 betrachtet in A_2B_2 vergrößert. Unter normalen Verhältnissen ist der Brennpunkt F des Objectives auch der des Okulars, womit das Fernrohr die Länge $(f + f_1)$ erhält. Ein kurzsichtiges Auge hingegen schiebt den Brennpunkt des Okulars über den des Objectives hinaus. In beiden Fällen muß jedoch, soll die Vergrößerung hinreichend groß ausfallen, die Objectivlinse eine große und die Okularlinse eine geringe Brennweite besitzen. — Bezeichnen wir nun die Vergrößerung mit v , so ist für ein normales Auge $v = f : f_1$.



Normales Auge.



Kurzsichtiges Auge.

Fig. 54.

Es ist nämlich

$$v = \frac{\text{tg } A_2 O_1 B_2}{\text{tg } A O_1 B} = \frac{\text{tg } A_2 O_1 B_2}{\text{tg } A O B} \quad (\text{weil die Länge des Fernrohrs gegen die Entfernung des Gegenstandes vom Instrumente als verschwindend klein angesehen werden darf})$$

$$= \frac{\text{tg } A_2 O_1 B_2}{\text{tg } A_1 O B_1} = \frac{O B_1}{O_1 B_1} = \frac{f}{f_1}.$$

Dem kurzsichtigen Auge erscheine das Bild A_2B_2 in der Entfernung s von O_1 . Dann ist

$$v = \frac{\text{tg } A_2 O_1 B_2}{\text{tg } A O B} = \frac{\text{tg } A_2 O_1 B_2}{\text{tg } A_1 O B_1} = \frac{O B_1}{O_1 B_1} = \frac{f}{a_1},$$

wenn wir O_1B_1 mit a_1 bezeichnen. Aber nach der Reziprokengleichung ist

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f_1};$$

mithin

$$v = \frac{f(s + f_1)}{s f_1} = \frac{f}{f_1} + \frac{f}{s}.$$

2. Das Galileische Fernrohr. (Fig. 55.) Zwischen das konvexe Objektiv L mit der Brennweite f und die Stelle $A_1 B_1$, wohin das wirkliche Bild des Gegenstandes AB fallen würde, schiebt man als Okular L_1 eine Konkavlinse ein. Letztere wird so angeordnet, daß ihre Entfernung von jenem Bilde etwas größer als die Zerstreungswerte f_1 ist, wodurch alle nach einem Punkte A_1 des Bildes $A_1 B_1$ konvergierenden Strahlen durch das Okular so gebrochen werden, als ob sie von einem Punkte A_2 vor der Linse herkämen (§ 53). Durch Verschiebung des Okulars kann man das virtuelle Bild $A_2 B_2$ in die deutliche Sehweite bringen. Die Länge des Fernrohres ist nahezu gleich $(f - f_1)$ und die Vergrößerung ist

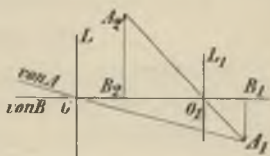


Fig. 55.

$$v = \frac{\text{tg } A_1 O_1 B_1}{\text{tg } A_1 O B_1} = \frac{f}{f_1}.$$

Ist d der Durchmesser der Pupille, so findet man für das Gesichtsfeld

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2 f_1},$$

für kleine Winkel

$$\alpha = \frac{d}{f_1}.$$

§ 57. Der Regenbogen.

Maximum der Ablenkung. Es sei φ die Ablenkung, d. h. der Winkel, welchen der austretende Strahl mit der Richtung des auffallenden Sonnenstrahles bildet, δ sein größter Grenzwert, α bzw. β der zugehörige Einfallswinkel bzw. Brechungswinkel, n der Brechungsexponent, dann ist

$$(1) \quad \delta = 4\beta_1 - 2\alpha,$$

$$(2) \quad \sin\alpha = n \cdot \sin\beta.$$

Wächst nun α auf α_1 an um einen sehr kleinen Betrag, so darf sich δ nicht ändern, es muß $\delta_1 = \delta$ sein. Ferner ist

$$(3) \quad \delta_1 = 4\beta_1 - 2\alpha_1.$$

Hieraus

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}(4 - n^2)}.$$

Für rote Strahlen ist $n_r = 1,3309$, für violette $n_v = 1,344$ und damit $\alpha_r = 59^\circ 32'$, $\alpha_v = 58^\circ 46'$, $\delta_r = 42^\circ 23'$, $\delta_v = 40^\circ 29'$. Die Breite des Bogens beträgt $2^\circ 25'$.

§ 57a. Achromasie.

Es sei γ der brechende Winkel eines Prisma, ferner n_r und n_v der Brechungsexponent für die roten bzw. violetten Strahlen, so gelten folgende Beziehungen.

1. Die totale Dispersion z (der Winkel zwischen den austretenden roten und violetten Strahlen):

$$z = (n_v - n_r) \cdot \gamma.$$

2. Die Ablenkung δ eines farbigen Strahles bei einem Prisma:

$$\delta = (n - 1) \cdot \gamma.$$

3. Die Ablenkung δ eines farbigen Strahles beim Durchgang durch zwei entgegengesetzte Prismen:

$$\delta = (n - 1)\gamma - (n' - 1)\gamma'.$$

4. Sollen der rote und der violette Strahl zusammenfallen, so ist

$$\gamma : \gamma' = (n'_v - n'_r) : (n_v - n_r).$$

5. Für ein und dasselbe Prisma nennt man

$$Z = (n_v - n_r) : (n - 1)$$

die zerstreue Kraft, wo n den mittleren Brechungs-exponenten, etwa für die Linie G , bezeichnet.

6. Bei den Prismen von Amici soll die Ablenkung des mittleren Strahles gleich Null sein; dann gilt

$$\gamma : \gamma' = (n' - 1) : (n - 1).$$

7. Sind r_1 und r_2 die Radien einer Plankonvex- und einer Plankonkavlinse, so fällt der Brennpunkt der roten Strahlen mit dem der violetten zusammen, wenn

$$r_1 : r_2 = (n_v - n_r) : (n'_v - n'_r).$$

IV. Abschnitt.

Kalorik.

§ 58. Das Thermometer.

Die Fundamentalpunkte des Thermometers sind der Eispunkt und der Siedepunkt. Der Abstand beider wird in eine Anzahl gleicher Teile, Grade, zerlegt und zwar von Celsius (C) in 100, von Réaumur (R) in 80 und von Fahrenheit (F) in 180. An den Eispunkt schreiben Celsius und Réaumur 0° , Fahrenheit dagegen 32° , so daß letzterer den Siedepunkt mit 212° bezeichnen muß. Die Teilung wird, soweit es das Instrument gestattet, unterhalb des Eispunktes und oberhalb des Siedepunktes fortgeführt. Die Grade unter Null erhalten das negative, die über Null das positive Zeichen. Aus diesen Angaben leiten sich unmittelbar folgende Beziehungen ab:

$$n^{\circ} \text{C} = \frac{4}{5} n^{\circ} \text{R} = \left(\frac{9}{5} n^{\circ} + 32^{\circ}\right) \text{F},$$

$$n^{\circ} \text{R} = \frac{5}{4} n^{\circ} \text{C} = \left(\frac{9}{4} n^{\circ} + 32^{\circ}\right) \text{F},$$

$$n^{\circ} \text{F} = \frac{5}{9} (n^{\circ} - 32^{\circ}) \text{C} = \frac{4}{9} (n^{\circ} - 32^{\circ}) \text{R}.$$

§ 59. Ausdehnung der Körper.

A. *Starre Körper.* Die Zahl, welche angibt, um den wievielten Teil seiner bei 0° gemessenen Länge ein stabförmiger Körper bei der Erwärmung um 1°C

sich ausdehnt, heißt der Längen-Ausdehnungs-koeffizient. Aus Versuchen schließen wir, daß die Längenausdehnung von Stäben im allgemeinen ihrer Länge bei 0° und der von 0°C an gemessenen Temperatur proportional ist. Bezeichnet man daher mit l_0 die Länge des Stabes bei 0° , mit l diejenige bei t° , mit α den Ausdehnungskoeffizienten, so beträgt die Ausdehnung

$$l_0 \cdot \alpha \cdot t,$$

woraus folgt

$$l = l_0 (1 + \alpha t).$$

Durch Division erhalten wir

$$l_0 = l \cdot \frac{1}{1 + \alpha t} = l(1 - \alpha t)$$

annähernd.

Ist weiterhin l_1 die Länge eines Stabes bei t_1° , l_2 diejenige bei t_2° und ist $t_1 > t_2$, so bestehen folgende Beziehungen:

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha t_1),$$

$$l_2 = l_0 (1 + \alpha t_2).$$

Daraus ergibt sich

$$l_1 = l_2 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2},$$

annähernd

$$= l_2 (1 + \alpha t_1)(1 - \alpha t_2)$$

$$= l_2 [1 + \alpha (t_1 - t_2)],$$

wenn α^2 unberücksichtigt bleibt.

Ebenso erhalten wir

$$l_2 = l_1 [1 - \alpha (t_1 - t_2)].$$

Unter dem kubischen Ausdehnungskoeffizienten versteht man die Zahl, welche angibt, um

den wievielsten Teil seines bei 0° gemessenen Volumens sich ein Körper ausdehnt, wenn man ihn um 1°C erwärmt. Die meisten starren Körper dehnen sich nach allen Richtungen hin gleich stark aus; für diesen Fall sei l_0 die Kantenlänge eines Würfels bei 0° , l bei t° und α der lineare Ausdehnungskoeffizient. Alsdann ist sein Volumen v_0 bei 0° gleich l_0^3 ; bei t° ist es

$$v = l^3;$$

da nun

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} v &= l_0^3(1 + \alpha t)^3 \\ &= l_0^3(1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3). \end{aligned}$$

Solange αt eine sehr kleine Zahl ist, dürfen ihre zweiten und dritten Potenzen vernachlässigt werden, daher

$$v = l_0^3(1 + 3\alpha t).$$

Aus dieser Beziehung läßt sich der Satz ablesen: Der kubische Ausdehnungskoeffizient ist das Dreifache des linearen.

Bemerkung. Bei flüssigen und gasförmigen Körpern kann nur der kubische Ausdehnungskoeffizient in Betracht kommen.

B. Flüssigkeiten. Bei gleicher Temperaturerhöhung dehnen sich im allgemeinen die Flüssigkeiten stärker als die festen Körper aus. Dem Quecksilber kommt von 0° bis 100° eine ziemlich regelmäßige Ausdehnung zu; sein Ausdehnungskoeffizient ist gleich

$$\frac{1}{5509} = 0,00018153.$$

Ein eigentümliches Verhalten zeigt das Wasser. Es zieht sich bei einer Erwärmung von 0° an zusammen, erreicht bei $4,1^{\circ}\text{C}$ seine größte Dichtigkeit und dehnt

sich von da ab bei weiterer Erwärmung wieder aus. Nimmt man ein gewisses Volumen des Wassers bei $4,1^{\circ}\text{C}$ als Einheit an, so hat diese Wassermenge bei 0° bzw. 100° das Volumen 1,000 127 bzw. 1,04315.

Die Ausdehnungen der Flüssigkeiten bedingen eine Korrektur des spezifischen Gewichtes und der Barometerbeobachtungen. Ist in letzterem Falle die Skala bei t_1^0 richtig, ist β ihr Ausdehnungskoeffizient und wird ferner bei t^0 ($t > t_1$) der Barometerstand b abgelesen, so ist die richtige Länge der Quecksilbersäule

$$b_1 = b [1 + \beta (t - t_1)] .$$

Diese Länge ist nun auf 0° zu reduzieren. Bezeichnen wir zu dem Ende mit α den Ausdehnungskoeffizienten des Quecksilbers, mit b_0 den reduzierten Stand, so gilt

$$b_1 = b_0 (1 + \alpha t) ,$$

folglich

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1 (1 - \alpha t) \\ &= b [1 + \beta (t - t_1)] \cdot (1 - \alpha t) . \end{aligned}$$

Läßt man jedoch die Ausdehnung der Skala außer Betracht, so hat man

$$b_1 = b$$

zu setzen und findet für den auf 0° reduzierten Barometerstand

$$b_0 = b (1 - \alpha t) .$$

C. Gase. Bei gleicher Temperaturzunahme dehnen sich die Gase stärker als die Flüssigkeiten aus.

Gesetz von Gay-Lussac. Die Ausdehnung der Gase ist der Temperaturzunahme proportional; der Ausdehnungskoeffizient ist für alle Gase der gleiche, nämlich

$$\alpha = \frac{1}{273} = 0,003665$$

(vorausgesetzt, daß sich der äußere Druck nicht ändert).

Unter dem Druck p_0 bedeute v_0 das Volumen einer Gasmenge bei 0° , v das Volumen bei t° , so gilt die Beziehung

$$(1) \quad v = v_0 (1 + \alpha t).$$

Vermehrt man nun bei gleichbleibender Temperatur den Druck p_0 auf p_1 , so bestimmt sich das neue Volumen v_1 nach dem Gesetz von Boyle aus der Gleichung

$$(2) \quad p_0 v_0 = p_1 v_1.$$

Eliminieren wir aus beiden Gleichungen die Zahl v , so erhalten wir

$$(3) \quad p_0 v_0 (1 + \alpha t) = p_1 v_1.$$

Diese Gleichung heißt die Zustandsgleichung der Gase. Da $\alpha = \frac{1}{273}$ ist, so kann obige Gleichung auch die Form annehmen:

$$p_1 v_1 = \frac{p_0 v_0}{273} (273 + t).$$

Nun ist $\frac{p_0 v_0}{273}$ für jedes Gas eine Konstante; setzen wir diese gleich R und führen wir gleichzeitig die vom absoluten Nullpunkt -273° an gezählte absolute Temperatur $T = 273 + t^\circ$ ein, so lautet die Zustandsgleichung

$$(4) \quad p_1 v_1 = R \cdot T.$$

Gesetz von Boyle-Gay-Lussac. Die Volumina einer Gasmenge verhalten sich bei konstantem Druck wie ihre absoluten Temperaturen und bei gleicher Temperatur umgekehrt wie ihre Drucke.

Zusatz. Wird ein Gas bei der Erwärmung von 0° auf 100° in einem Raum von unveränderlicher Größe eingeschlossen, so wächst seine Spannung und die Zunahme beträgt 0,3665 der Spannung bei 0° . Daraus folgt, daß der Spannungskoeffizient gleich 0,003665, also gleich dem Ausdehnungskoeffizienten ist.

§ 60. Änderung des Aggregatzustandes.

I. Schmelzen und Erstarren. Wasser vergrößert beim Gefrieren sein Volumen wesentlich; aus 10 ccm Wasser entstehen etwa 11 ccm Eis. Der Schmelzpunkt von Legierungen (aus Metallen) liegt tiefer als das Mittel aus den Schmelzpunkten der einzelnen Bestandteile, bei manchen sogar unter dem Schmelzpunkt des am leichtesten schmelzbaren Metalles. Das Gemisch von Wood aus 4 Gewichtsteilen Blei, 2 Teilen Zinn und 1 Teil Kadmium schmilzt zwischen 60° und 70° C. Alle starren Körper verbrauchen beim Schmelzen Wärme, Schmelzwärme, und diese zum Schmelzen notwendig gewesene Wärmemenge wird beim Erstarren wieder frei, Erstarrungswärme. Die Schmelzwärme ist gleich der Erstarrungswärme. Man nennt diejenige Wärmemenge, welche 1 g bzw. 1 kg Wasser verbraucht, soll es sich von 0° auf 1° C erwärmen, eine kleine bzw. große Kalorie. Die Schmelzwärme des Eises beträgt 80 Kalorien. Legt man z. B. a Gramm Eis von 0° in b Gramm Wasser von t° , so stehen dem Eis bt Kalorien über 0° zur Verfügung, wovon es 80 a Kalorien zum Schmelzen notwendig hat. Ist nun $bt > 80a$, so wird alles Eis geschmolzen und es bleiben noch $(bt - 80a)$ Kalorien übrig, welche die vorhandenen $(a + b)$ Gramm Wasser auf t_1° erwärmen können; alsdann ist

$$(a + b) t_1 = bt - 80a ,$$

mithin

$$t_1 = \frac{bt - 80a}{a + b} \text{ Grad.}$$

Löst man einen starren Körper in einer Flüssigkeit auf, so wird ebenfalls Wärme verbraucht, die Lösungswärme heißt.

II. *Verdampfen und Verdichten.* Ist p das Gewicht eines überhitzten Dampfes und p_1 das eines gleichen Volumens Luft bei der gleichen Temperatur und unter dem gleichen Druck, so heißt der Quotient $p : p_1$ die Dichte des Dampfes. Auch wenn sich Druck und Temperatur ändern, behält dieser Quotient seinen Wert bei, weil beide luftförmige Körper dem Gesetz von Boyle-Gay-Lussac folgen. Das spezifische Gewicht der Luft bei 760 mm Druck und 0° C ist bezogen auf Wasser gleich 0,001293, und das Gewicht p_1 eines Volumens v bei t° und b mm Spannung beträgt:

$$p_1 = v \cdot \frac{0,001293 \cdot b}{(1 + 0,003665 t) \cdot 760} .$$

Hat nun das gleiche Volumen v eines überhitzten Dampfes bei der gleichen Temperatur t und dem gleichen Druck b das Gewicht p , so ist die Dichte d des Dampfes:

$$d = \frac{760 \cdot (1 + 0,003665 t) \cdot p}{0,001293 \cdot v \cdot b} .$$

Die Dichte des Wasserdampfes verhält sich zu der der Luft bei 100° C und 760 mm Druck wie 0,622 : 1 oder annäherungsweise wie 5 : 8.

Die Dampfdichte eines Gases, bezogen auf Wasserstoff, ist gleich seinem halben Molekulargewicht.

Satz des Avogadro: Gleiche Raumteile verschiedener Gase enthalten bei gleicher Temperatur und gleichem Druck die gleiche Anzahl von Molekülen.

Alle Flüssigkeiten verbrauchen Wärme, Verdampfungswärme, beim Verdampfen, und alle Dämpfe erzeugen beim Verdichten Wärme, Kondensationswärme. Für einen und denselben Körper ist die Verdampfungswärme gleich der Kondensationswärme. Die Kondensationswärme des Wassers kann durch folgenden Versuch ermittelt werden. Man leitet p Gramm Wasserdampf von 100° in p_1 Gramm Wasser von der Temperatur t° , wobei er sich verdichtet und die Temperatur des Kühlwassers auf t_1° steigt. Bezeichnen wir nun mit x die gesuchte Verdampfungswärme, so werden, indem sich der Dampf zu Wasser von 100° verdichtet, $p \cdot x$ Kalorien Wärme frei. Außerdem entstehen $p (100 - t_1)$ Kalorien Wärme durch Abkühlung des Kondensationswassers von 100° auf t_1° . Andererseits braucht das Kühlwasser zu seiner Erwärmung auf t_1° im ganzen $p_1 (t_1 - t)$ Kalorien. Es ist also

$$px + p(100 - t_1) = p_1(t_1 - t);$$

hieraus folgt für x nach angestellten Versuchen die Zahl 537. — Zur Verdunstung bei gewöhnlicher Temperatur braucht Wasser gegen 600 Kalorien.

§ 61. Kalorimetrie; spezifische Wärme.

Bei gleichen Massen desselben Stoffes sind die Wärmemengen mit großer Annäherung den Tempe-

raturen proportional. Um p kg Wasser von t^0 auf t_1^0 ($t_1 > t$) zu bringen, sind $p(t_1 - t)$ Kalorien erforderlich.

1 kg Kalorie ist gleich 428 mkg.

1 Gramm Kalorie ist annähernd gleich $4,2 \cdot 10^7$ Erg.

Die Dimension der Wärmemenge ist ML^2T^{-2} .

Die Dimension der Temperatur ist L^2T^{-2} .

Unter Wärmekapazität einer Substanz versteht man die Anzahl von Wärmeeinheiten, welche notwendig sind, um die Temperatur von 1 kg der Substanz um 1^0 zu erhöhen.

Die spezifische Wärme einer Substanz ist das Verhältnis der Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur von 1 kg der Substanz um 1^0 zu erhöhen zu derjenigen, welche die Temperatur von 1 kg Wasser um 1^0 erhöht.

Bezeichnen wir die spezifische Wärme eines starren Körpers mit c , ferner mit Q die Wärmemenge, welche die Temperatur von p kg jenes Körpers von t^0 auf t_1^0 bringt, so ist

$$Q = p \cdot c \cdot (t_1 - t).$$

Bestimmung der spezifischen Wärme starrer und flüssiger Körper.

a) Nach der Schmelzmethode. Ein Körper von p kg Gewicht, von der Temperatur t^0 ($t > 0$) und der spezifischen Wärme x wird in die sorgfältig ausgetrocknete Höhlung eines Eisblocks von 0^0 gebracht, wodurch p_1 kg Schmelzwasser entstehen. Die von dem Körper abgegebene Wärme im Betrag von $p \cdot x \cdot t$ Kalorien wird zum Schmelzen von p_1 kg Eis verwendet. Da nun die spezifische Wärme des Eises gleich 80 ist, so besteht die Gleichung

$$p \cdot x \cdot t = 80 \cdot p_1,$$

also

$$x = \frac{80 \cdot p_1}{p \cdot t}.$$

b) Nach der Mischungsmethode. Man erhitzt p kg derjenigen Substanz, deren spezifische Wärme bestimmt werden soll, auf t^0 und bringt sie alsdann in p_1 kg Wasser von t_1^0 ($t_1 < t$). Nach dem Wärmeaustausch haben beide Substanzen die gleiche Endtemperatur t_2 . Machen wir nun die Annahme, daß sämtliche abgegebene Wärme nur von dem Wasser aufgenommen worden ist, so läßt sich die Gleichung aufstellen:

$$p x (t - t_2) = p_1 (t_2 - t_1);$$

hieraus

$$x = \frac{p_1 (t_2 - t_1)}{p (t - t_2)}.$$

Ist die spezifische Wärme des Stoffes bekannt, so kann die soeben aufgestellte Gleichung zur Ermittlung der Anfangstemperatur dienen (kalorimetrische Ermittlung hoher Temperaturen). Sorgfältig angestellte Versuche überzeugen uns, daß die spezifische Wärme starrer oder flüssiger Körper nicht genau konstant ist, sondern mit der Zunahme der Temperatur mehr oder weniger sich erhöht.

Das Produkt aus spezifischer Wärme und dem Atomgewicht ist bei vielen einfachen starren Körpern annähernd gleich 6,4.

Spezifische Wärme der Gase. Durch Versuche läßt sich die spezifische Wärme der Gase bei konstantem Druck ermitteln. Die spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen kann experi-

mentell nicht bestimmt werden. Vergrößert ein Gas sein Volumen, so wird Wärme verbraucht, beim Zusammendrücken des Gases wird Wärme frei; daher ist die spezifische Wärme c der Gase bei konstantem Druck größer als ihre spezifische Wärme c_1 bei konstantem Volumen. Das Verhältnis $\frac{c}{c_1}$ ist bei den verschiedenen Gasen nahezu gleich 1,4. Die beiden Zahlen c und c_1 sind von Druck und Temperatur unabhängig.

§ 62. Mechanische Wärmetheorie.

$$1 \text{ kg Kalorie} = 428 \text{ mkg} \\ = 428 \cdot 981 \cdot 10^5 = 4,2 \cdot 10^{10} \text{ Erg.}$$

$$1 \text{ g Kalorie} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ Erg.}$$

$$1 \text{ mkg} = 0,002337 \text{ kg Kalorien.}$$

$$1 \text{ Erg} = 2,4 \cdot 10^{-8} \text{ g Kalorien.}$$

1. Hauptsatz: Bezeichnet man jede Wirkungsfähigkeit eines Körpers als Energie, so sind chemische Verwandtschaft, mechanische Leistungen, Schall, Wärme, Licht, Magnetismus und Elektrizität verschiedene Formen der Energie. Wie die Erfahrung zeigt, ist die Energie unvergänglich, gleich wie der Stoff; sie kann aber von einem Körper auf einen anderen übertragen und von einer Form in eine andere übergeführt werden.

Die Gesamtenergie Q eines Systems besteht aus der Wärmemenge W und dem mechanischen Arbeitsinhalt L . Drückt man diesen in Wärmeeinheiten aus, indem man mit C das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit einführt, so ist

$$Q = W + C \cdot L .$$

Nimmt bei Wärmezufuhr Q um ΔQ , W um ΔW , L um ΔL zu, so gilt die weitere Gleichung

$$\Delta Q = \Delta W + C \cdot \Delta L,$$

wo ΔL sowohl den Zuwachs an äußerer als auch den an innerer Arbeit umfaßt.

Grundsatz von Clausius: Es kann nie Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper von selbst übergehen, d. h. ohne daß nicht gleichzeitig eine andere damit zusammenhängende Änderung eintritt.

2. Hauptsatz: Die algebraische Summe der Verwandlungswerte ist bei umkehrbaren Prozessen gleich Null, bei nicht umkehrbaren positiv.

V. Abschnitt.

Magnetik.

§ 63. Das Gesetz von Coulomb; die magnetische Menge.

Die Kraft, mit der zwei Magnetpole aufeinander wirken, ist den magnetischen Mengen direkt und dem Quadrat der Entfernung indirekt proportional (Gesetz von Coulomb).

Bezeichnen wir sonach mit K den Betrag jener Kraft, mit m_1 und m_2 die magnetischen Mengen, mit r ihre Entfernung und mit α einen konstanten Faktor, so ist der mathematische Ausdruck für das Gesetz von Coulomb

$$K = \alpha \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Durch eine passende Wahl der Mengeneinheit kann $\alpha = 1$ gemacht werden, alsdann ist

$$K = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Die Mengen m_1 und m_2 bekommen das positive bzw. negative Zeichen, wenn sie nordmagnetische bzw. süd magnetische Mengen sind. Sonach erhalten anziehende Kräfte in der Rechnung ein negatives, abstoßende Kräfte ein positives Zeichen.

Der erste Teil des Coulombschen Gesetzes folgt unmittelbar aus den Prinzipien der Mechanik. Zur

Ableitung des zweiten Teiles bedient man sich zweier verschiedener Mittel: 1) der Schwingungen einer kleinen freihängenden Magnetnadel, die unter den Einfluß eines Magnetstabs gestellt werden kann; 2) der Torsion eines Silber- oder Kupferfadens in der Drehwaage.

ad 1). Die Magnetnadel läßt man zunächst bloß unter dem Einfluß des Erdmagnetismus Schwingungen ausführen, alsdann in den Entfernungen r_1 und r_2 vor dem einen Pole eines ziemlich langen Magnetstabes, der in dem magnetischen Meridian so befestigt ist, daß sein Nordpol nach Norden weist. Sind nun n , n_1 , n_2 die durch die drei Versuche ermittelten Schwingungszahlen in der Minute, ist ferner F die Stärke des erdmagnetischen Feldes, F_1 bzw. F_2 die Stärke des Polfeldes in den Entfernungen r_1 und r_2 , so bestehen nach dem Satze „Die Quadrate der Schwingungszahlen sind den Feldstärken proportional“ (§ 67) folgende Gleichungen:

$$n^2 : n_1^2 = F : (F + F_1),$$

$$n^2 : n_2^2 = F : (F + F_2),$$

daher auch

$$(n_1^2 - n^2) : (n_2^2 - n^2) = F_1 : F_2 .$$

Genau angestellte Versuche zeigen aber

$$(n_1^2 - n^2) : (n_2^2 - n^2) = r_2^2 : r_1^2 ,$$

also

$$F_1 : F_2 = r_2^2 : r_1^2 .$$

Die Dimension einer magnetischen Menge ist $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$.

Im C. G. S.-System versteht man unter der Einheit der magnetischen Menge oder Polstärke diejenige Menge, die auf die gleiche Menge in der Entfernung von 1 cm die Kraft von 1 Dyne ausübt.

§ 64. Potential; Kraftlinien.

Der Raum um einen Magnetpol, innerhalb dessen eine magnetische Wirkung sich erkennen läßt, heißt sein magnetisches Feld. Unter dem Potential einer magnetischen Menge an einer beliebigen Stelle



Fig. 56.

ihres Feldes versteht man die Arbeit, welche verrichtet werden muß, um die positive magnetische Einheit aus dem Unendlichen bis zu jenem Punkt zu bewegen. Das Potential einer nordmagnetischen Menge ist positiv, das einer süd magnetischen negativ. — Die positive Menge m mit ihrem Sitz in O (Fig. 56) wirkt auf die positive Einheit, welche sich in P in der Entfernung r von O befindet, mit der Kraft $\frac{m}{r^2}$.

Entfernt sich nun die positive Einheit in P von O um die unbeschränkt kleine Strecke $PC = (r_1 - r)$, so

wird hierbei die Arbeit $\frac{m}{r^2}(r_1 - r)$ geleistet. Da nun

PC unendlich klein ist, so darf man ohne merklichen Fehler r^2 durch $r \cdot r_1$ ersetzen, und die geleistete Arbeit wird durch den Ausdruck

$$\frac{m}{r \cdot r_1}(r_1 - r) = m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$$

gemessen. Um die Arbeit zu bestimmen, welche für eine endliche Verschiebung längs der Strecke $PG = (r_n - r)$ notwendig ist, denken wir uns dieselbe in die unbeschränkt kleinen Teile PC, CD, DE, \dots, FG zerlegt, deren Endpunkte C, D, E, \dots, F, G von O

die Entfernungen $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}, r_n$ haben. Als-
dann ist die gesamte geleistete Arbeit

$$m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) + m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots \\ + m \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right) = m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n} \right).$$

Wird nun die Strecke PG unendlich groß, rückt
G ins Unendliche, so ist

$$r_n = \infty, \quad \frac{1}{r_n} = 0,$$

mithin ist jene Arbeit gleich $\frac{m}{r}$. Die gleiche Arbeit
muß auch geleistet werden, um die positive Einheit
aus dem Unendlichen wieder bis zu dem Punkte P
zu bringen; daher ist das Potential V von m in der
Entfernung r:

$$V = \frac{m}{r}.$$

Besitzt der Punkt O eine negative Menge Magne-
tismus, so leistet diese eine Arbeit, die sich nur im
Vorzeichen von der vorigen unterscheidet; sonach ist
in diesem Falle

$$V = -\frac{m}{r}.$$

Wenn sich der Punkt P von der Ladung 1 einem
System von magnetischen Punkten O mit den Massen
 m_1, m_2, m_3, \dots in den Entfernungen r_1, r_2, r_3, \dots
gegenüber befindet, so ist das Potential V des Systems
in dem Punkte P:

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots = \sum \frac{m}{r},$$

wo m das positive oder negative Zeichen erhält, je nachdem die Mengen nord- bzw. südmagnetisch sind. Ist der Punkt P nicht mit der magnetischen Einheitsmenge, sondern mit der Menge μ geladen und herrscht an seiner Stelle das Potential V , so beträgt die Arbeit, welche aufgewendet werden muß, um jene Menge aus dem Unendlichen in diesen Punkt zu bringen, $\mu \cdot V$.

Um die Dimension des Potentials zu ermitteln, hat man nur die Dimension der Menge durch die von r zu dividieren. Somit ist die Dimension von V gleich $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Eine Fläche, welche alle Punkte gleichen Potentials verbindet, heißt Niveaufläche und das Verhältnis des Unterschiedes dV zwischen den Potentialen zweier unbeschränkt naher Punkte zu ihrem Abstand ds das Potentialgefälle. Durch dasselbe wird die längs ds vorhandene Kraftkomponente der auf die magnetische Einheit wirkenden Kraft gemessen. Linien, welche an jeder Stelle des Feldes durch ihre Tangenten die Richtungen der Kraft angeben, werden Kraftlinien genannt; sie stehen auf den Niveauflächen senkrecht. Die Kraftlinien eines Magnets sind geschlossene Kurven, die einander weder schneiden noch kreuzen. Das Potentialgefälle ist in der Richtung der Kraftlinien am größten, längs einer Niveaufläche ist es gleich Null. Unter Feldstärke in einem beliebigen Punkt des Feldes versteht man die Kraft, welche auf die dort befindliche magnetische Einheit in der Richtung der bez. Kraftlinie wirkt; sonach ist die Kraft, welche eine magnetische Menge μ in einem Punkt von der Feld-

stärke φ angreift, gleich $\mu \cdot \varphi$. Ein Feld heißt homogen, wenn seine Stärke überall die gleiche ist, wie z. B. das des Erdmagnetismus. Die Kraftlinien eines homogenen Feldes gehen einander parallel. Durch jeden Punkt eines magnetischen Feldes geht eine Kraftlinie; daher wird strenggenommen 1 qcm einer Niveaufläche von unendlich vielen Kraftlinien durchsetzt. Will man jedoch durch diese Kurven auch die Feldstärke veranschaulichen, so trifft man folgende Festsetzung: Herrscht in einem Punkt des magnetischen Feldes die Stärke φ , so sollen das den Punkt umgebende Flächenelement nur so viele Kraftlinien durchsetzen, daß auf 1 qcm der Niveaufläche φ Kraftlinien kommen. Die Gesamtzahl der Kraftlinien eines homogenen Feldes von dem Querschnitt q und der Stärke φ ist $q \cdot \varphi$.

Legt man durch sämtliche Peripheriepunkte einer geschlossenen Kurve in einem magnetischen Felde die Kraftlinien, so umschließen dieselben eine Kraftrohre. Die Zahl der einen Querschnitt der Rohre durchsetzenden Kraftlinien nennt man den Kraftfluß der Rohre. Kraftrohren, welche den Kraftfluß 1 führen, heißen Einheitsrohren. Ist q der Querschnitt der Einheitsrohre an einer Stelle, so ist die daselbst herrschende Feldstärke $1 : q$.

§ 65. Feldstärke eines Magnetstabes.

1. Die Feldstärke φ eines Magnetstabes von der Polstärke M und der Länge $2a$ in einem Punkt, der auf der Achse des Stabes im Abstand r vom Mittelpunkt des Stabes liegt, beträgt, wenn a gegen r verschwindend klein ist:

$$\varphi = 4 \frac{M a}{r^3}.$$

2. Liegt der Punkt in der magnetischen Äquator-ebene in dem Abstand r von der Achse, so beträgt die Feldstärke, sofern a gegen r verschwindend klein ist,

$$\varphi = 2 \frac{Ma}{r^3}.$$

§ 66. **Lamellarmagnete** (magnetische Blätter).

Die Dicke des Blattes sei δ , die magnetische Menge auf der Flächeneinheit (die Dichte) sei μ , dann heißt $\Phi = \delta\mu$ die Stärke des Blattes. Erscheint die Begrenzung des Blattes von einem Punkte P aus unter dem körperlichen Winkel ω , so ist das Potential V des Blattes in dem Punkte P :

$$V = \omega \Phi.$$

Ist das Blatt eine nach allen Seiten sich ins Unendliche erstreckende Ebene, so ist das Potential auf der positiven Seite in allen Punkten $2\pi\Phi$.

Bildet das Blatt eine geschlossene Fläche, so ist das Potential für jeden äußeren Punkt gleich 0, für jeden inneren Punkt $4\pi\Phi$.

Das ebene Blatt erstrecke sich rechts von einer Geraden L bis ins Unendliche und der Punkt P liege der positiven Seite gegenüber. Fällt man von P auf L das Lot PA und bildet dieses mit der Ebene des Blattes den Winkel α , dann ist das Potential des Blattes

$$V = 2\Phi(\pi - \alpha),$$

und seine Feldstärke in einem Punkt, der von L die

Entfernung r hat, beträgt $\frac{1}{r} \cdot 2\Phi$.

§ 67. Erdmagnetismus.

Das vom Erdmagnetismus erzeugte magnetische Feld darf als ein gleichförmiges angesehen werden, dessen Kraftlinien parallel der magnetischen Achse der Inklinationsnadel sind. Um seine Äußerungen auf eine bewegte Deklinationsnadel kennen zu lernen, zerlegen wir es in ein wagrechtes und ein lotrechtes. Ist dabei H die Feldstärke des ersteren, so wirkt auf jede nordmagnetische Menge m des nadelförmigen Magnets die Kraft mH . Da nun alle diese Einzelkräfte unter sich parallel sind, so lassen sie sich zu einer Resultante von der Größe $\sum mH = H \sum m = HM$ zusammensetzen. Ebenso groß ist die auf die süd magnetische Menge ausgeübte Gesamtkraft, jedoch von entgegengesetzter Richtung. Demnach bilden die beiden Resultierenden ein Kräftepaar, dessen Angriffspunkte die Pole der Magnetnadel und deren Verbindungslinie die magnetische Achse der Nadel heißen. Die in einem Pole vereinigt gedachte Menge Nord- bzw. Südmagnetismus, also $\sum m$ oder M , heißt die Polstärke des Magnets. Schneidet die magnetische Achse AB (Fig. 57) einer Deklinationsnadel den magnetischen Meridian NS unter dem Winkel α , ist M die Polstärke und a die Länge der Achse AB , so ist das Drehungsmoment des Kräftepaars gleich $H \cdot M \cdot a \sin \alpha$. Bezeichnen wir das Produkt $aM = \mathfrak{M}$ als magnetisches Moment des Stabmagnets, so wird das Moment des Kräftepaars durch $H \mathfrak{M} \sin \alpha$ ausgedrückt. Dieses erreicht seinen größten Wert $H \mathfrak{M}$, wenn $\alpha = 90^\circ$, d. h. wenn der Magnet senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht.

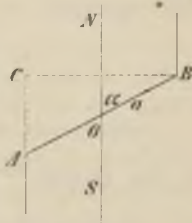


Fig. 57.

Unter Anwendung der Pendelgesetze des § 22 finden wir ferner für die Dauer T in Sekunden einer einfachen Schwingung (eines Hin- oder Herganges) von geringer Ausschlagsweite

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{H \mathfrak{M}}},$$

wo \mathfrak{S} das Trägheitsmoment des Magnetstabes bedeutet. Macht nun die Nadel in einer Minute n einfache Schwingungen, so ist $n = \frac{60}{T}$, mithin

$$n = \frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{H \cdot \mathfrak{M}}{\mathfrak{S}}} = \frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{S}}} \cdot \sqrt{H}.$$

Ändert sich der Magnetismus der Nadel nicht, so ist der Faktor $\frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{S}}}$ konstant und kann etwa gleich $\sqrt{\gamma}$ gesetzt werden; dann ist

$$n^2 = \gamma \cdot H.$$

Zur Bestimmung der Inklination i benutzt man das sogenannte Inklinatorium, wobei man die Neigungen der Nadel gegen die Horizontalebene in zwei beliebigen, zueinander senkrechten Lagen des geteilten Kreises beobachtet. Sind diese Neigungen α_1 und α_2 , so bestimmt sich i aus der Gleichung

$$\text{ctg}^2 i = \text{ctg}^2 \alpha_1 + \text{ctg}^2 \alpha_2.$$

Die Horizontalkomponente H des Erdmagnetismus beträgt für Mitteleuropa $0,198 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}$. Ist nun i die Inklination, so beträgt die Gesamtintensität J des Erdmagnetismus:

$$J = \frac{H}{\cos i}.$$

VI. Abschnitt.

Elektrik.

§ 68. Gesetz von Coulomb.

Das Gesetz von Coulomb (1785). Die Kraft, welche zwei kleine elektrische Körper aufeinander ausüben, ist den elektrischen Mengen direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional. Bezeichnen wir demnach jene Kraft mit K , mit e_1 und e_2 die elektrischen Mengen, mit r den Abstand und mit α einen gewissen Faktor, so ist der mathematische Ausdruck für das Coulombsche Gesetz

$$K = \alpha \cdot \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}.$$

Die Größen e_1 und e_2 sind positiv bzw. negativ in die Rechnung einzuführen, je nachdem sie positive bzw. negative elektrische Mengen bedeuten. Da außerdem die Wahl der Mengeneinheit freisteht, so wählt man diese so, daß $\alpha = 1$ wird. In diesem Fall hat man

$$K = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}.$$

Dimension von e gleich $M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$.

Im C. G. S.-System verstehen wir unter der elektrostatischen Einheit der Elektrizitätsmenge diejenige Ladung, welche auf eine

gleich große Menge in der Entfernung von 1 cm die Kraft von 1 Dyne ausübt. Jedoch ist die in der Praxis benutzte, auf anderer Grundlage gewonnene Einheit, 1 Coulomb, $3 \cdot 10^9$ mal so groß.

§ 69. Potential; Kraftlinien.

Da für magnetische und elektrische Mengen das gleiche Gesetz der Anziehung und Abstoßung gilt, so lassen sich die in § 64 entwickelten Begriffe unmittelbar auf das Gebiet der Elektrizität übertragen.

Der Raum um eine elektrische Menge, innerhalb dessen elektrische Wirkungen wahrnehmbar sind, heißt das elektrische Feld. Es erstreckt sich dem Coulombschen Gesetz gemäß eigentlich bis ins Unendliche, kann aber, weil die elektrischen Wirkungen bei zu großen Abständen nicht mehr bemerkbar sind, allseitig als begrenzt angesehen werden. Unter dem elektrischen Potential in einem bestimmten Punkt eines elektrischen Feldes wird die Arbeit verstanden, die aufgewendet werden muß, um die positive Elektrizitätsmenge 1 aus dem Unendlichen an diesen Punkt zu bringen. (Praktisch: von einem wirkungslosen Punkt außerhalb des Feldes an den betreffenden Punkt innerhalb desselben.) Man erhält das Potential V einer elektrischen Menge in einem gegebenen Punkt, wenn man die mit ihren Vorzeichen versehene Menge m durch den Abstand r dividiert, der zwischen dem Punkt und dem Sitz der Menge besteht. Demnach ist

$$V = \pm \frac{m}{r}.$$

Sind r_1, r_2, \dots, r_n die Entfernungen des gegebenen Punktes von den elektrischen Ladungen $m_1,$

m_2, \dots, m_n , so ist der mathematische Ausdruck für das Potential V in dem fraglichen Punkt:

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} = \sum \frac{m}{r},$$

wo m das positive oder negative Zeichen je nach der Art der elektrischen Menge zu erhalten hat.

Bemerkung. Man denkt sich die elektrischen Felder der einzelnen Ladungen übereinander gelagert.

Die Dimension des Potentials ist $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Im C. G. S.-System herrscht zwischen zwei Punkten die Einheit des Potentialunterschiedes, wenn die Verschiebung der elektrischen Mengeneinheit von dem einen Punkt zum anderen die Arbeit von 1 Erg erfordert oder leistet.

1 Volt ist der $3 \cdot 10^2$ te Teil dieser Einheit.

Das Potential der Erde pflegt man gleich Null zu setzen. — Die Fläche, welche in einem elektrischen Feld die Punkte gleichen Potentials verbindet, heißt eine Niveaulfläche; das Verhältnis des Unterschieds dV zwischen den Potentialen zweier unbeschränkt naher Punkte zu ihrem Abstand ds wird das Potentialgefälle genannt. Linien, welche an jeder Stelle des elektrischen Feldes durch ihre Tangenten dortselbst die Richtung der Kraft angeben, nennt man Kraftlinien; sie stehen auf den Niveaulflächen senkrecht. Wir setzen die Kraftlinien in der Richtung positiv, in der die frei bewegliche positive Elektrizität fließen würde. Unter der Feldstärke (elektromotorischen Kraft) in einem beliebigen Punkt des Feldes versteht man die Kraft, welche auf die dort befindliche elektrische Einheit (in der Richtung der betreffenden Kraft-

linie) wirkt. Herrscht in einem Punkte des elektrischen Feldes die Stärke φ , so denkt man sich das den Punkt umgebende Element von so vielen Kraftlinien durchsetzt, daß auf 1 qcm der durch den Punkt gehenden Niveaufläche φ Kraftlinien kommen.

Satz von Gauß. Der Kraftfluß, den die elektrische Menge e eines gegebenen Punktes durch ein Flächenstück sendet, wird durch das Produkt $e\omega$ gemessen, wo ω den körperlichen Winkel bedeutet, unter dem das Flächenstück von dem Punkt aus erscheint.

Bei geschlossenen Flächen nimmt man den Kraftfluß positiv, wenn er von innen nach außen verläuft.

Liegt die elektrische Menge $\pm e$ innerhalb bzw. außerhalb einer geschlossenen Fläche, so beträgt der die Fläche durchsetzende Kraftfluß $\pm 4\pi e$ bzw. 0.

§ 70. Leiter. Kapazität. Elektrische Energie.

Befindet sich die einem Leiter mitgeteilte Elektrizität im Zustand des Gleichgewichts, so lagert sie nur auf seiner Oberfläche und alle Punkte derselben haben das gleiche Potential, woraus folgt, daß die Oberfläche eine Niveaufläche ist.

Das Potential eines Leiters ist der Ladung proportional.

Diejenige Elektrizitätsmenge C (ausgedrückt in Coulomb), die der Leiter erfordert, um auf das Potential 1 gebracht zu werden (oder um sein Potential um 1 zu erhöhen), nennt man die Kapazität des Leiters; folglich ist die Elektrizitätsmenge Q , die den Leiter auf das Potential V bringt:

$$Q = C \cdot V,$$

daher

$$(1) \quad C = \frac{Q}{V}.$$

Die Dimension der Kapazität ist L.

Ist $Q = 1$ Coulomb, $V = 1$ Volt, so ist $C = 1$ Farad; 1 Mikrofaraad ist gleich $\frac{1}{10^6}$ Farad.

$$1 \text{ Farad} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}}{3^{-1} 10^{-2} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sec}^{-1}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$$

absolute Einheiten der Kapazität.

Die Kapazität eines kugelförmigen Leiters wird durch den Radius der Kugel gemessen. Auf der Oberfläche eines kugelförmigen Leiters ist die elektrische Ladung gleichmäßig verteilt, sie hat überall die gleiche Dichte. Unter der Dichtigkeit der Elektrizität bei gleichmäßiger Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche versteht man die auf der Flächeneinheit vorhandene Ladung, bei ungleichmäßiger Verteilung hingegen diejenige Elektrizitätsmenge, welche der Flächeneinheit zukäme, wenn die Elektrizität auf ihr ebenso wie an der zu untersuchenden Stelle verteilt wäre.

Energie. Wird ein isolierter Leiter nach und nach mit Elektrizität geladen, indem man die elektrischen Einheiten nacheinander auf den Leiter sich gebracht denkt, so ist die zu leistende Einzelarbeit für jede folgende Einheit größer als für die vorhergehende. Das Potential des Leiters wächst somit von dem Anfangswert 0 der zugeführten Ladung Q entsprechend bis auf den Endwert V an. Demnach ist die geleistete Gesamtarbeit A gerade so groß, als ob man die Gesamt-

ladung Q auf einmal dem Leiter von dem Potential $\frac{1}{2}V$ zugeführt hätte; daher

$$(2) \quad A = \frac{1}{2} V \cdot Q.$$

Eliminieren wir aus den Gleichungen (1) und (2) die Größe Q oder V , so erhalten wir

$$A = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}.$$

Die Arbeit A heißt die potentielle elektrische Energie des geladenen Leiters.

§ 71. Kondensator.

Ein Kondensator besteht aus der isolierten Kollektorplatte, der mit der Erde leitend verbundenen Kondensatorplatte und einem zwischen beiden Platten befindlichen isolierenden Mittel. Bei einer solchen Anordnung besitzt die Kollektorplatte eine größere Kapazität C_1 , als wenn sie allein vorhanden wäre, für welchen Fall ihre Kapazität C sein möge. Das Verhältnis $\frac{C_1}{C}$ der beiden Kapazitäten nennt man die Verstärkungszahl k des Apparates. Es ist also

$$k = \frac{C_1}{C}.$$

Die Kapazität eines Kondensators hängt von der Form und Größe der beiden Leiter, ihrer gegenseitigen Entfernung und von der Art des Mediums, dem Dielektrikum, ab. Verwendet man als Dielektrikum das eine Mal Glas, ein anderes Mal Luft, so ist im ersteren Falle die Kapazität des Kondensators größer als im zweiten. Demnach: Unter der Dielek-

trizitätskonstanten i eines Dielektrikums versteht man die Zahl, welche angibt, wievielmals so groß die Kapazität des Apparates ist, wenn das betreffende Dielektrikum als Zwischenschicht benutzt wird, als seine Kapazität, falls Luft als isolierendes Mittel dient.

Ist O die Oberfläche der gebräuchlichen Kondensatoren, d die Wandstärke, i die Dielektrizitätskonstante, C die Kapazität, Q die Ladung, V das Potential und A die Energie der Ladung, so bestehen die Beziehungen

$$C = \frac{i \cdot O}{4\pi d}; \quad Q = C \cdot V; \quad A = \frac{1}{2} Q \cdot V.$$

Dielektrizitätskonstante einiger Stoffe.

Selen 10,2	Schellack 3,2
Glas 3 bis 9,5	Kautschuk 2,2 bis 2,7
Kalkspat 8	Paraffin 2,1
Holz 2,5 bis 6,8	Wasser 79,8
Porzellan 6,7	Alkohol 26,3
Glimmer 6,6	Schwefelkohlenstoff 2,45
Steinsalz 5,8	Petroleum 2,1
Schwefel 3,6 bis 4,1	Gase 1

Die Dielektrizitätskonstante ist gleich dem Quadrat des Brechungskoeffizienten der Substanz. (Maxwell.)

§ 72. Der galvanische Strom; das Gesetz von Ohm.

Die an den Polen eines galvanischen Elementes auftretende Elektrizität besitzt einen gewissen durch chemische Kräfte erzeugten Potentialunterschied, welcher erhalten bleibt, auch wenn man das Potential an einem der beiden Pole willkürlich ändert. Die elektromotorische Kraft des Elementes wird durch diesen Unterschied gemessen; sie erweist sich als abhängig von der materiellen Beschaffenheit des

Elektrizitätserregers und wächst mit der Zahl der hintereinander geschalteten Elemente, hingegen ist sie von der Größe der Erregerflächen unabhängig. Als Einheit der elektromotorischen Kraft nimmt man die Einheit des Potentials. Die technische Einheit derselben ist jedoch das Volt. Die Elektrizitätsmenge, welche in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt einer geschlossenen Leitung geht, heißt Stromstärke; ihre technische Einheit ist das Ampere, d. h. jene Intensität, bei der in einer Sekunde durch jeden Querschnitt 1 Coulomb fließt. In einer geschlossenen Leitung ist die Stromstärke überall die gleiche.

Das Gesetz von Ohm. Der Widerstand, welchen die strömende Elektrizität an einer bestimmten Stelle der Leitung erfährt, ist einmal proportional der Geschwindigkeit der Bewegung, d. h. proportional der Elektrizitätsmenge, welche in einer Sekunde durch die Einheit des Querschnittes an jener Stelle hindurchgeht; dann aber auch abhängig von der materiellen Beschaffenheit des Leiters. Bezeichnen wir mit l die Länge, mit q den Querschnitt, mit k die spezifische Leitungsfähigkeit eines Leiterstückes, ferner mit $(V_1 - V_2)$ den Potentialunterschied an beiden Enden und mit J die Stromstärke, so ist zunächst

$$J = kq \cdot \frac{V_1 - V_2}{l}.$$

Geben wir dieser Gleichung die Gestalt

$$J = \frac{V_1 - V_2}{l : kq},$$

und setzen wir

$$V_1 - V_2 = e$$

(elektromotorische Kraft) und

$$\frac{l}{kq} = r,$$

so ist

$$J = \frac{e}{r}.$$

Die Arbeit $\frac{l}{kq}$ heißt der Widerstand und $\frac{l}{k}$ der spezifische Widerstand des Leiters. Aus der Beziehung $r = \frac{l}{kq}$ folgt der Satz:

Der Widerstand eines Leiterstückes ist seiner Länge l direkt und seinem Querschnitt q indirekt proportional.

In der Regel ändert sich der Widerstand mit der Temperatur nach der Formel $r = r_0 (1 + \alpha t)$, worin r und r_0 die Widerstände bei 0° und t° bezeichnen und α der Temperaturkoeffizient heißt. Dieser kann auch negativ sein (Kohlenfaden einer Glühlampe). Er beträgt für Silber und Kupfer 0,0038, Neusilber 0,0004, Quecksilber 0,0007, Kohle — 0,0003.

Trägt man die Widerstände als Abszissen, die Potentiale als Ordinaten auf, so wird durch die Tangente des Winkels, den die Potentialgerade mit der x -Achse bildet, die Stromstärke angegeben.

Haben die verschiedenen Teile einer geschlossenen Leitung die Widerstände r_1, r_2, \dots, r_n , so besteht die Beziehung

$$J = \frac{V_0 - V_1}{r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_2} = \dots = \frac{V_{n-1} - V_n}{r_n},$$

woraus folgt $J = \frac{V_0 - V_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n}$.

Es ist aber $V_0 - V_n$ die elektromotorische Kraft E und $r_1 + r_2 + \dots + r_n$ der Gesamtwiderstand R des Stromkreises, also

$$J = \frac{E}{R}.$$

In Worten: Die Stromstärke ist der elektromotorischen Kraft direkt und dem Gesamtwiderstand indirekt proportional (Gesetz von Ohm 1826).

Die technische Einheit des Widerstandes ist das Ohm (1Ω); es ist derjenige Widerstand, bei welchem die Potentialdifferenz von 1 Volt einen Strom von 1 Ampere hervorbringt; denn

$$1 \text{ A} = \frac{1 \text{ V}}{1 \Omega}.$$

Eine Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt und 106,3 cm Länge bei 0° C leistet dem Durchgang des Stromes den Widerstand eines (internationalen) Ohms.

Die Dimension der elektromotorischen Kraft ist gleich der der Potentialdifferenz gleich $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Die Dimension der Stromstärke ist gleich der Dimension der Menge durch die Dimension der Zeit gleich

$$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

Die Dimension des Widerstandes ist gleich der Dimension des Potentials durch die Dimension der Stärke gleich $L^{-1} T$.

Im elektrostatischen System ist ferner

$$\begin{aligned} 1 \Omega &= \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} = \frac{\frac{1}{300} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{cm}^{\frac{1}{2}} \text{sec}^{-1}}{3 \cdot 10^9 \cdot \text{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{cm}^{\frac{3}{2}} \cdot \text{sec}^{-2}} \\ &= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec} . \end{aligned}$$

§ 73. Stromstärke; Bussole.

Chemisches Maß. Die Stromstärke steht in geradem Verhältnis zu der Menge des in der Zeiteinheit entwickelten Knallgases. 1 Ampere liefert in jeder Minute 10,44 ccm Knallgas bei 0° C und 760 mm Druck.

Magnetisches Maß. Gesetz von Biot-Savart. Die Einwirkung eines kleinen Stromteiles auf einen Magnetpol erfolgt senkrecht zu der durch den Stromteil und den Magnetpol gelegten Ebene und ist proportional der Pol- und Stromstärke, der Länge des Stromteiles, dem Sinus desjenigen Winkels, welchen die Verbindungslinie des Poles zum Stromteil mit letzterem bildet, und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Stromteiles vom Pol. In der Fig. 58 ist $AB = l$ die Länge des Stromelementes, i die in ihm vorhandene Stromstärke, P der Magnetpol von der Stärke m , $AP = BP = r$, $\sphericalangle ABP = \alpha$ und c ein konstanter Faktor. Die ablenkende Kraft d ist nun nach dem obigen Gesetz:

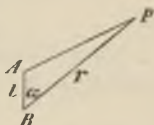


Fig. 58.

$$d = \frac{c \cdot l \cdot i \cdot m \cdot \sin \alpha}{r^2}.$$

Um den Ausdruck umzuformen, führen wir den Inhalt f des $\triangle ABP$ ein; derselbe ist:

$$f = \frac{1}{2} l \cdot r \cdot \sin \alpha,$$

mithin

$$d = \frac{2 c i m f}{r^2}.$$

Liegt P im Zentrum eines Kreisstromes, so übt jedes seiner Elemente auf den Magnetpol einen

Druck gleich d aus; folglich ist die ablenkende Kraft D des ganzen Kreises:

$$D = \sum \frac{2cimf}{r^3} = \frac{2cim}{r^3} \sum f = \frac{2cim}{r^3} \cdot r^2 \pi = \frac{2\pi cim}{r}.$$

Fließt der Strom in n Windungen um den Pol, so ist die Gesamtwirkung n -mal so groß, gleich

$$2\pi \cdot n \cdot c \cdot \frac{i \cdot m}{r}.$$

Tangentenbussole. (Fig. 59.) Die Magnetnadel PP_1 befindet sich im Zentrum des in den magnetischen Meridian NS gestellten Stromkreises. Bei Beginn der Messung weist der Zeiger der Deklinationsnadel auf 0° , nach Schließung des Stromes ergibt sich eine Ablenkung um α° . Ist m die Polstärke des Magnetes, ist ferner der Abstand $PP' = l$ der Pole im Vergleich zum Radius r der Strombahn gering, so wirkt der Strom auf den Pol P mit der Kraft

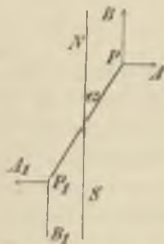


Fig. 59.

$$PA = \frac{2c\pi im}{r}$$

und zwar senkrecht zum magnetischen Meridian. Ebenso groß ist der Druck P_1A_1 des Stromes auf den Pol P_1 . Beide Kräfte bilden ein Paar vom Drehungsmoment

$$\frac{2c\pi im}{r} l \cos \alpha.$$

Der Erdmagnetismus sucht die Nadel wieder in den magnetischen Meridian zurückzuführen. Ist H die

Stärke des horizontalen magnetischen Feldes, so haben die an den Polen P und P₁ parallel zum Meridian wirkenden Kräfte den Wert

$$PB = P_1 B_1 = mH,$$

und das Moment dieses Paares beträgt $mHl \sin \alpha$. Für den Zustand des Gleichgewichts besteht sonach die Beziehung

$$mHl \sin \alpha = \frac{2c\pi im}{r} \cdot l \cos \alpha;$$

hieraus

$$i = \frac{Hr}{2c\pi} \cdot \operatorname{tg} \alpha = C \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

wofern

$$C = \frac{Hr}{2c\pi}$$

gesetzt wird.

Führt der Stromkreis n Windungen, so ist

$$C = \frac{Hr}{2cn\pi}.$$

Um den Reduktionsfaktor der Tangentenbussole auf technisches Maß zu bestimmen, schaltet man ein Voltmeter zusammen mit der Bussole in denselben Stromkreis ein. Aus der entwickelten Knallgasmenge schließt man (chemisches Maß) auf die Stärke des Stromes in Amperes. Dividiert man nun diese Zahl mit der Tangente des Ablenkungswinkels, so erhält man den Reduktionsfaktor der Tangentenbussole in Amperes.

Die Sinusbussole. Sie unterscheidet sich von der Tangentenbussole dadurch, daß die Ebene des Stromkreises nach Schließen des Stromes nicht in dem

magnetischen Meridian festgestellt bleibt, sondern der abgelenkten Magnetnadel nachgedreht wird, bis die Deklinationsnadel wieder in die Ebene des Stromkreises fällt. Es sei nun (Fig. 60)

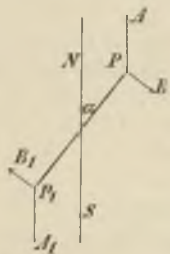


Fig. 60. NS der magnetische Meridian, PP_1 die um α° abgelenkte Magnetnadel, l der Abstand PP_1 der Pole, m die Polstärke, H die Stärke des horizontalen Feldes des Erdmagnetismus, i die Stromstärke und r der Radius des Stromkreises. Weil nach der Ablenkung die Nadel wieder in der Ebene des Stromkreises liegt, so stehen die vom Strom in P und P_1 erzeugten Drucke senkrecht zu PP_1 und sind gleich

$$\frac{2c\pi im}{r}$$

Das Moment des Kräftepaars ist demnach

$$\frac{2c\pi im}{r} \cdot l$$

Das horizontale Feld des Erdmagnetismus wirkt durch das Kräftepaar PA, P_1A_1 auf die Nadel ein, und das Drehungsmoment dieses Paares ist $Hml \sin \alpha$. Für den Zustand des Gleichgewichts besteht sonach die Beziehung

$$\frac{2c\pi iml}{r} = Hml \sin \alpha,$$

folglich

$$i = \frac{Hr}{2c\pi} \cdot \sin \alpha.$$

Liegen auf dem Ring der Sinusbussole n Windungen, so ist

$$i = \frac{Hr}{2cn\pi} \cdot \sin \alpha .$$

§ 74. Stromstärke einer Batterie.

Der Gesamtwiderstand eines galvanischen Elementes von der Stromstärke i und der elektromotorischen Kraft e zerfällt in zwei Teile: in den Widerstand innerhalb des Elementes und in den Widerstand des Schließungsbogens. Letzteren bezeichnen wir mit a , ersteren mit w und nennen diesen den wesentlichen Widerstand. Nach dem Satz von Ohm ist alsdann

$$i = \frac{e}{a + w} .$$

I. Sind n gleiche Elemente hintereinander geschaltet (ungleichnamig verbunden, in Serienschaltung), so hat sich die elektromotorische Kraft wie auch der innere Widerstand ver- n -facht. Die Stromstärke der Batterie ist daher

$$(1) \quad i = \frac{ne}{a + n \cdot w} = \frac{e}{\frac{a}{n} + w} ,$$

d. h. ebenso groß wie die eines einzigen Elementes, bei dem der äußere Widerstand auf den n^{ten} Teil reduziert ist.

α) Wenn a klein gegen w ist, so geht die Gleichung (1) annähernd in die

$$i = \frac{e}{w}$$

über, welche aussagt, daß die Stromstärke der Batterie gleich der eines einzigen Elementes sei.

β) Wenn jedoch $n \cdot w$ gegen a vernachlässigt werden darf, so ergibt sich

$$i = \frac{ne}{a} = n \cdot \frac{e}{a},$$

mit Worten: Bei großem äußeren Widerstand ist die Stromstärke der Anzahl der Elemente proportional.

II. Werden n gleiche Elemente von der elektromotorischen Kraft e und dem inneren Widerstand w nebeneinander geschaltet (gleichnamig verbunden, parallel geschaltet), so ist bei einem äußeren Widerstand a die Stromstärke der Batterie

$$(2) \quad i = \frac{e}{a + \frac{w}{n}}.$$

α) Ist a sehr klein gegen w , so geht die Gleichung (2) über in

$$i = \frac{ne}{w},$$

d. h. die Stromstärke wächst mit der Zahl der Elemente.

β) Wenn w gegen a verschwindet, so ergibt sich aus (2) die Beziehung

$$i = \frac{e}{a},$$

d. h. die Stromstärke ist so groß wie die eines Elementes.

III. Hat man $p \cdot q$ Elemente, verbindet je q Elemente parallel und schaltet die erhaltenen p Gruppen hintereinander, so ist die Stromstärke der Kette

$$i = \frac{e}{\frac{a}{p} + \frac{w}{q}}.$$

§ 75. Stromverzweigung; Sätze von Kirchhoff.

In einer einfachen, geschlossenen Leitung ist die Stromstärke überall die gleiche, wenn aber an irgend einer Stelle die Leitung sich gabelt, dann sind die Stromstärken in den beiden Zweigen unter sich und von der der Hauptleitung verschieden, und ihre Intensitäten lassen sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes ermitteln. Zu dem Ende treffen wir folgende Festsetzungen. Der Strom von der Stärke i teile sich in B in die beiden Zweige BCE und BDE , die sich in E wieder vereinigen. Die Potentiale in B und E seien V und V_1 , die Widerstände bzw. Stromstärken auf den Wegen BCE und BDE seien r_1 und r_2 bzw. i_1 und i_2 . Alsdann ist zunächst

$$(1) \quad i = i_1 + i_2.$$

Ferner bestehen die beiden Beziehungen

$$i_1 = \frac{V - V_1}{r_1} \quad \text{und} \quad i_2 = \frac{V - V_1}{r_2}.$$

Hieraus folgt

$$(2) \quad i_1 : i_2 = r_2 : r_1.$$

In Worten: „Bei einer Zweiteilung des Stromes verhalten sich die Stromstärken in den Zweigen umgekehrt wie die Widerstände in denselben.“ — Denken wir uns weiter die beiden Wege BCE und BDE durch eine Leitung von solchem Widerstand r_0 ersetzt, daß sich die Verhältnisse außerhalb der Verzweigung nicht ändern, so haben wir die Gleichung

$$(3) \quad i = \frac{V - V_1}{r_0}.$$

Aus den Gleichungen (1) bis (3) folgt

$$(4) \quad r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2};$$

$$(5) \quad i_1 = \frac{i \cdot r_0}{r_1}, \quad i_2 = \frac{i \cdot r_0}{r_2}.$$

Ist e die elektromotorische Kraft im ganzen Stromkreis, a der Widerstand mit Ausschluß des Widerstandes r_0 im Zweigsystem, so ist nach der Ohmschen Relation

$$i = \frac{e}{a + r_0} = \frac{e}{a + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{e(r_1 + r_2)}{a(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$

und damit auch

$$i_1 = \frac{e \cdot r_2}{a(r_1 + r_2) + r_1 r_2}; \quad i_2 = \frac{e \cdot r_1}{a(r_1 + r_2) + r_1 \cdot r_2}.$$

Sätze von Kirchhoff. Alle auf Stromverzweigungen bezüglichen Probleme, auch wenn mehrere Stromquellen in den verschiedenen Zweigen vorhanden sind, lassen sich mit Hilfe zweier von Kirchhoff aufgestellter Sätze lösen. Diese lauten:

a) An jedem Knotenpunkt ist die algebraische Summe der Stromstärken gleich Null, wenn man die gegen den Kreuzungspunkt gerichteten Ströme mit dem positiven, die von demselben abgehenden mit dem negativen Zeichen versieht; denn der Beharrungszustand, wie er beim elektrischen Strom vorausgesetzt wird, läßt weder eine Zunahme, noch eine Abnahme der Elektrizitätsmenge am Knotenpunkt zu. Es ist also

$$\Sigma i = 0.$$

b) Der zweite Satz bezieht sich auf die elektrischen Verhältnisse in einem geschlossenen Stromkreis. Er sagt aus: In jedem geschlossenen Stromkreis, der durch Verzweigungen gebildet wird, ist die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der Summe der Produkte aus den Stromstärken und den Widerständen der einzelnen Teile. Dabei erhalten die nach der gleichen Richtung tätigen Kräfte und Ströme das gleiche Zeichen. Es ist

$$\Sigma e = \Sigma(i \cdot w).$$

Beispiel. Verzweigung mit Brücke. Wheatstonesche Brücke. Die Stromquelle F von der elektromotorischen Kraft E (Fig. 61) liefert einen Strom von der Stärke J , der sich bei A verzweigt; der eine Teil fließt über G nach C , der andere ebenfalls nach C über B ; außerdem sind die Punkte G und B durch eine Querleitung, die Brücke GB , verbunden. Es soll untersucht werden, unter welcher Bedingung die Brücke stromlos ist. Zu dem Ende führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es sei im

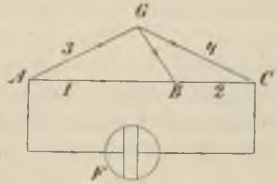


Fig. 61.

Leitungsstück	AFC	AB	BC	AG	GC	GB
die Stromstärke	J	i_1	i_2	i_3	i_4	i_0 ,
der Widerstand	R	r_1	r_2	r_3	r_4	r_0 .

Nach dem ersten Satz von Kirchhoff ergeben sich die Gleichungen für den Kreuzungspunkt in

- (1) A $J - i_1 - i_3 = 0$,
- (2) C $J - i_2 - i_4 = 0$,
- (3) G $i_3 - i_0 - i_4 = 0$,
- (4) B $i_1 - i_0 - i_2 = 0$.

Der zweite Satz von Kirchhoff liefert die Gleichungen für den Kreis

$$(5) \quad \text{AGB} \quad i_0 r_0 + i_3 r_3 - i_1 r_1 = 0,$$

$$(6) \quad \text{GBC} \quad i_0 r_0 + i_2 r_2 - i_4 r_4 = 0,$$

$$(7) \quad \text{FABCF} \quad \text{JR} + i_1 r_1 + i_2 r_2 = \text{E},$$

$$(8) \quad \text{FAGCF} \quad \text{JR} + i_3 r_3 + i_4 r_4 = \text{E}.$$

Diese 8 Gleichungen sind voneinander abhängig; es läßt sich z. B. die erste Gleichung aus den Gleichungen (2), (3) und (4) und die achte aus den Gleichungen (5), (6) und (7) ableiten. Zur Bestimmung der 6 Unbekannten $i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, \text{J}$ verblieben daher noch die Gleichungen (2), (3), (4), (5), (6) und (7). Um die oben gestellte Frage zu beantworten, ist es jedoch nicht notwendig, das vorliegende System linearer Gleichungen aufzulösen; wir können die Antwort schon geben, sowie wir i_0 durch J und die Widerstände ausgedrückt haben. Man findet

$$i_0 = \frac{(r_1 r_4 - r_2 r_3) \text{J}}{r_0 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_2 + r_4)(r_1 + r_3)}.$$

Die Brücke ist stromlos, wenn $i_0 = 0$ ist, also wenn

$$r_1 r_4 = r_2 r_3$$

ist, oder wenn

$$r_1 : r_2 = r_3 : r_4$$

sich verhält.

§ 76. Widerstand.

I. Messung des Widerstandes von Drähten. Zur Bestimmung des Widerstands starrer Körper wendet man die Stromverzweigung mit Brücke an.

Die Fig. 62 gibt die Anordnung in schematischer Darstellung. In F befindet sich die Stromquelle, zwischen A und G der Rheostat R, zwischen G und C der Draht W, dessen Widerstand w bestimmt werden soll, und zwischen G und B ein Galvanometer M.

Längs der geteilten Schiene AC ist ein homogener, überall gleich starker Draht ausgespannt, auf dem sich ein beweglicher und mit M verbundener Kontakt B verschieben läßt. Nachdem nun vermittelt R ein bekannter Widerstand r eingeschaltet

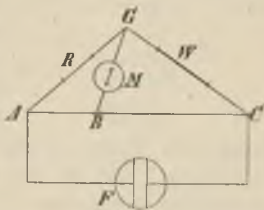


Fig. 62.

worden ist, verschiebt man den Kontaktschlitten B auf AC so weit, bis das Galvanometer keinen Ausschlag mehr anzeigt. Dann geht durch GB kein Strom; auch ist das Verhältnis der Widerstände der Leitungstücke AB und BC gleich dem ihrer Längen, folglich besteht die Proportion

$$r : w = AB : BC,$$

hieraus

$$w = r \cdot \frac{BC}{AB}.$$

II. Messung des inneren Widerstands eines Elements nach dem Verfahren von Mance. Die Anordnung der Teile erfolgt nach Art einer Wheatstoneschen Brücke. (Fig. 63.) In den Leitungsdraht AC wird das Element F, dessen Widerstand x bestimmt werden soll, in die Leitung AB der Rheostat R und in den Bogen BGC das Galvanometer G eingeschaltet. Die Ecke A und der Kontakt E des Meßdrahts BC sind

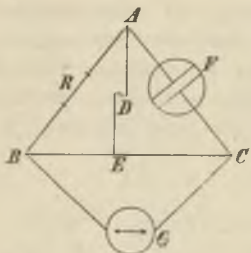


Fig. 63.

mit dem Taster D verbunden, durch welchen die Leitung ADE geöffnet und geschlossen werden kann. Hat man nun in R einen gewissen Widerstand w eingeschaltet, so läßt sich der Kontakt E auf BC so stellen, daß der Ausschlag des Galvanometers unverändert bleibt, gleichgültig ob man

durch den Taster D die Leitung schließt oder öffnet. In diesem Falle ist der Draht ADE stromlos und es besteht die Proportion

$$w : x = BE : EC ;$$

hieraus

$$x = w \cdot \frac{EC}{BE} .$$

Mittlere Widerstände einiger Elemente:

Bunsen (32 cm Höhe) 0,2 Ohm,

Daniell 0,6 Ohm; Grove 0,1 Ohm,

Meidinger 4 bis 10 Ohm,

Element der deutschen Telegraphenverwaltung 7,5 Ohm,

Leclanché-Element 0,3 Ohm,

Trockenelement von Hellesen 0,1 Ohm.

Bemerkung. Die Widerstände ähnlicher Elemente derselben Art verhalten sich annähernd umgekehrt wie ihre Höhen.

§ 77. Elektromotorische Kraft.

Zur Messung der elektromotorischen Kraft eines Elements benutzt man die Kompensationsmethode (Fig. 64). Man verbindet hierbei ein kräftiges Hilfselement A mit den Endpunkten C und E eines Rheochords von bekanntem Widerstand w ; ferner den

einen Pol des Elements B mit C, den anderen mit dem auf CE verschiebbaren Schleifkontakt D und zwar so, daß die gleichnamigen Pole beider Elemente nach E hinweisen. In den Zweig CB fügt man noch ein Galvanometer F ein. Bezeichnen wir nun

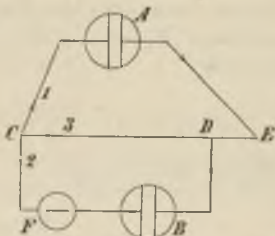


Fig. 64.

in der Leitung	CAE	CFBD	CD
den Widerstand mit	r_1	r_2	r_3 ,
die Stromstärke mit	i_1	i_2	i_3 ,

außerdem die elektromotorischen Kräfte von A und B mit E_1 und E_2 , so gelten nach den Kirchhoffschen Sätzen die Gleichungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & i_1 + i_2 - i_3 = 0, \\ (2) \quad & i_1 r_1 + i_1 (w - r_3) + i_3 r_3 = E_1, \\ (3) \quad & i_3 r_3 + i_2 r_2 = E_2. \end{aligned}$$

Verschiebt man hierauf den Kontakt D so weit, bis die Nadel des Galvanometers auf Null zeigt, dann geht durch den Zweig CBD kein Strom, es ist $i_2 = 0$, wodurch die Gleichungen (1) bis (3) in die folgenden übergehen:

$$\begin{aligned} (4) \quad & i_1 = i_3, \\ (5) \quad & i_1 (r_1 + w) = E_1, \\ (6) \quad & i_3 r_3 = E_2. \end{aligned}$$

Aus diesen folgt

$$(7) \quad E_2 = \frac{r_3}{r_1 + w} \cdot E_1.$$

Ersetzt man jetzt das Element B durch das zu untersuchende B_1 , so liefert das gleiche Verfahren das Ergebnis

$$(8) \quad E'_2 = \frac{r'_3}{r_1 + w} \cdot E_1,$$

folglich aus (7) und (8)

$$E'_2 = \frac{r'_3}{r_3} \cdot E_2.$$

Bemerkung. Das Normalelement von Clark hat bei 15° 1,438 Volt, bei 20° 1,433 Volt. Ist das Zink durch Kadmium ersetzt, so ist die Spannung 1,019 Volt bei 10° bis 20° . — Die elektromotorische Kraft eines Elementes nach Bunsen ist 1,9 Volt, Daniell 1 Volt, Grove 1,9 Volt, Leclanché 1,4 Volt, Meidinger 0,9 Volt, eines Trockenelementes 1,5 Volt.

Zusatz. Stehen in einem Stromkreise mehrere elektrische Quellen, so ist die elektromotorische Kraft des Kreises gleich der algebraischen Summe aus den Einzelkräften.

§ 78. Stromenergie; Gesetz von Joule.

Fließt durch einen Leitungsdraht vom Widerstand R , an dessen Enden die Potentiale V und V_1 herrschen, ein Strom von der Stärke J , so ist die von dem Strom in 1 Sekunde geleistete Arbeit (der Effekt) gleich

$$(V - V_1) \cdot J = EJ = J^2 \cdot R.$$

In Worten: Der Effekt eines Stromes ist gleich dem Produkt aus elektromotorischer Kraft und Stromstärke oder aus Widerstand und Quadrat der Stromstärke.

Drückt man die elektromotorische Kraft in V , die Stromstärke in A aus, so ist die Einheit des Effektes 1 VA . Nun ist

$$1 \text{ V} = \frac{1}{300} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1},$$

$$1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-2},$$

daher

$$1 \text{ VA} = 10^7 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-3} = 10^7 \text{ Sekunden Erg.}$$

Nach § 11 bezeichnen wir 10^7 Erg mit 1 Joule und die Arbeit von 1 Joule in der Sekunde mit 1 Watt, folglich

$$1 \text{ VA} = 1 \text{ Watt} = \frac{1}{736} \text{ PS.}$$

Gesetz von Joule. Ist die Stromstärke gleich J , ferner R der Gesamtwiderstand, t die Zahl der Sekunden, α das mechanische Äquivalent der Wärme, so ist die in der Zeit t von dem Strom entwickelte Wärmemenge W , sofern die ganze elektrische Energie auf die Erwärmung des Stromkreises verwendet wird:

$$W = \frac{1}{\alpha} \cdot J^2 \cdot R \cdot t,$$

d. h.: Die Erwärmung eines Stromkreises ist dem Widerstand und dem Quadrat der Stromstärke direkt proportional.

Nach § 62 ist

$$1 \text{ Grammkalorie} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ Erg},$$

mithin

$$1 \text{ Erg} = 0,24 \cdot 10^{-7} \text{ Grammkalorien},$$

folglich

$$1 \text{ Watt} = 0,24 \text{ Grammkalorien} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Wenn man also die Stromstärke in A, den Widerstand in Ohm, die elektromotorische Kraft in V mißt, so entwickelt der Strom in t Sekunden

$$0,24 \cdot J^2 \cdot R \cdot t \text{ Grammkalorien.}$$

§ 79. Elektrolytische Gesetze von Faraday.

1. Die von einem Strom in der Sekunde zersetzte Menge eines Stoffes ist der Stärke des Stromes proportional.

2. Geht der Strom durch verschiedene Elektrolyte, so verhalten sich die in der Sekunde ausgeschiedenen Gewichtsmengen wie deren chemische Äquivalentzahlen. (Atomgewichte durch Wertigkeit.)

Beispiele. Die Atomgewichte für H, Zn, Cu sind 1 bzw. 65,2 bzw. 63,2, mithin scheidet derselbe Strom in der gleichen Zeit 2 Gewichtsteile H, 65,2 Zn und 63,2 Cu aus. So oft ein Strom 2 g H im Voltmeter entwickelt, löst er im Element 65,2 g Zink auf. 1 A liefert in einer Minute 10,44 ccm Knallgas oder $\frac{2}{3} \cdot 10,44 \text{ ccm} = 6,96 \cdot 0,0000895 \text{ g H} = 0,000623 \text{ g H}$. Da nun Ag das Atomgewicht 107,7 hat und einwertig ist, so liefert 1 A in einer Minute

$$0,000623 \cdot 107,7 \text{ g} = 0,0671 \text{ g Silber,}$$

(in einer Sekunde 0,0011183 g.)

1 Grammäquivalent Silber ist mit 48150 Coulomb geladen; ebenso stark ist ein Grammäquivalent eines anderen Stoffes geladen. Die Zahl $F = 96300$ Coul.

§ 80. Das magnetische Feld eines Stromes.

Das Feld eines geraden Stromes. Die Tatsache, daß ein Strom magnetische Wirkungen hervorruft, zwingt notwendig zu der Annahme, daß auch ein elektrischer Strom sich mit einem magnetischen Feld umgibt. Die Kraftlinien eines geraden Stromes sind Kreise, deren Ebenen senkrecht zu dem Leiter stehen, und deren Zentren auf dem Leiter liegen. Das Feld

eines gerade geführten Stromes ist somit ebenso beschaffen, wie das eines einseitig geradlinig begrenzten, unendlichen, magnetischen Blattes. Da nach § 66 die Feldstärke des letzteren gleich $\frac{1}{r} \cdot 2 \Phi$ ist (Φ Stärke des Blattes), andererseits aber die Feldstärke des Stromes von der Stärke i in einem Punkte, der von ihm die Entfernung r hat, $\frac{ci}{r}$ beträgt, wo c eine Konstante ist, so übt das magnetische Blatt die gleiche Wirkung aus wie der Strom, wenn $\Phi = \frac{c}{2} \cdot i$ ist. Die Ermittlung der mit N Magnetismus belegten Seite des Blattes erfolgt nach der Regel: Hält man die rechte Hand an den stromführenden Draht, so daß die innere Handfläche der Richtung zugekehrt ist, in welcher sich das ebene Blatt ins Unendliche erstreckt, und der Strom den Fingerspitzen zuströmt, so zeigt der ausgestreckte Daumen auf die mit N Magnetismus belegte Seite des Blattes.

Das Feld eines Kreisstromes. Es soll die Intensität des von einem Kreisstrom hervorgerufenen magnetischen Feldes in einem Punkte bestimmt werden, der auf dem Lote liegt, das man im Mittelpunkt des Kreises auf dessen Ebene errichtet. Zu dem Ende bezeichnen wir die Entfernung des Punktes P von dem Zentrum C mit a (Fig. 65), den Radius mit r und die Stromstärke mit i . Jedes Element δ des Stromes, wie z. B. A , übt auf die magnetische Einheit in P eine

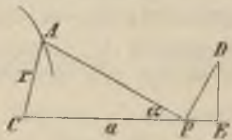


Fig. 65.

Wirkung aus, die durch den Ausdruck $\frac{\delta \cdot i}{a^2 + r^2}$ gemessen wird. Die Kraft steht nach dem Gesetz von Biot-Savart senkrecht zu der durch P und das Element gelegten Ebene, also senkrecht auf AP. Sie werde durch die Strecke PD angegeben. Zerlegen wir nun diese in zwei Komponenten, wovon die eine DE senkrecht zur Achse CP, die andere PE längs der Achse fällt, und verfahren wir in gleicher Weise für alle Stromelemente des Kreises, so heben sich die senkrechten Komponenten auf, während sich die auf der Achse liegenden addieren. Ist nun $\sphericalangle APC = \alpha$, so beträgt die Summe der letzteren Seitenkräfte

$$\begin{aligned} \sum \frac{\delta \cdot i \cdot \sin \alpha}{r^2 + a^2} &= \frac{i \cdot \sin \alpha}{r^2 + a^2} \cdot \sum \delta = \frac{i \cdot \sin \alpha \cdot 2 r \pi}{r^2 + a^2} \\ &= \frac{2 i \cdot r^2 \cdot \pi}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Ist nun r gegen a klein genug, so geht $(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$ über in a^3 und die Feldstärke des Stromes ist

$$\frac{2 i \cdot \pi \cdot r^2}{a^3}$$

Setzen wir nun an die Stelle des Kreisstromes einen Magnet in C, dessen Achse mit CP zusammenfällt, so ist die von dem Magnet in P erzeugte Feldstärke

$$\frac{4 M \cdot l}{a^3},$$

wo unter M die Polstärke und $2l$ die Länge des Magnets verstanden ist. Das magnetische Moment eines solchen Magnets ist

$$\mathfrak{M} = 2 M l,$$

mithin wird seine Feldstärke durch den Ausdruck

$$\frac{2 M}{a^3}$$

gemessen. Aus der Vergleichung beider Resultate folgt: Ein Strom von der Stärke i , der die Kreisfläche πr^2 umfließt, erzeugt die gleiche Feldstärke wie ein senkrecht zur Stromebene durch das Zentrum des Kreises hindurchgesteckter Magnet von dem Moment $i \cdot \pi r^2$.

§ 81. Elektromagnetisches Maßsystem.

Stromstärke. Die Einheit der Stromstärke i hat derjenige Strom, der die Flächeneinheit umfließend ebenso in die Ferne wirkt, wie ein durch die Mitte des Kreises senkrecht zur Stromebene angebrachter Elementarmagnet vom Moment 1.

$$\text{Dimension } (i) = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{L^2} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Aus dem Gesetz von Biot-Savart ergibt sich auch: Befindet sich die magnetische Menge m im Mittelpunkt des Kreisstromes, so hat die von einem

Stromelement ausgeübte Kraft den Wert $\frac{2 imf}{r^3}$, wo

unter f die Fläche desjenigen Sektors zu verstehen ist, dessen Bogen b gleich dem Stromelement ist.

Dieser Sektor hat den Inhalt $\frac{br}{2}$. Durchfließt also

der Strom einen Bogen gleich dem Radius r , so ist die von ihm ausgeübte Kraft k :

$$k = \frac{2im}{r^3} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{i \cdot m}{r};$$

hieraus

$$i = \frac{k \cdot r}{m}$$

und

$$\text{Dimension (i)} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1},$$

wie oben.

Im C. G. S.-System hat ein Strom die Intensität 1, wenn er durch einen Bogen von 1 cm Länge vom Radius 1 cm fließend auf die im Zentrum des Kreises befindliche C. G. S. magnetische Einheit mit der Kraft von 1 Dyne wirkt.

Elektrizitätsmenge. Die Einheit der Elektrizitätsmenge ist diejenige Menge, welche von dem Strom 1 in der Sekunde durch den Querschnitt der Leitung befördert wird.

Dimension der Menge = Dimension der Stromstärke mal Dimension der Zeit = $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \cdot T = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$.

Elektromotorische Kraft. Als Einheit der elektromotorischen Kraft nimmt man diejenige, welche vorhanden sein muß, wenn der Strom 1 den Effekt 1 hervorbringen soll; daher

Dimension der elektromotorischen Kraft

$$= \frac{M L^2 T^{-3}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}.$$

Widerstand. Die Einheit des Widerstandes ist derjenige Widerstand, bei welchem die Einheit der elektromotorischen Kraft die Einheit der Stromstärke hervorbringt.

Dimension des Widerstandes

$$\begin{aligned}
 & \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}} \\
 & = L T^{-1} \quad (= \text{Dimension der Geschwindigkeit}).
 \end{aligned}$$

Kapazität. Da die Kapazität gleich dem Quotienten aus Menge und Potential ist, so erhält man

Dimension der Kapazität

$$= \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}} = L^{-1} T^2.$$

Ein Leiter hat die Kapazität 1, wenn die Menge 1 sein Potential um 1 erhöht.

Zusatz. Die elektromagnetische Mengeneinheit ist gleich $3 \cdot 10^{10}$ elektrostatischen Mengeneinheiten.

$$\frac{1 \text{ elektromagnetische Einheit}}{1 \text{ elektrostatische Einheit}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}.$$

Praktische Einheiten.

Der Kongreß der Elektriker zu Paris hat 1881 beschlossen, daß das elektromagnetische Maßsystem allgemein eingeführt werden soll. Damit jedoch die praktischen Einheiten nicht zu klein oder zu groß ausfallen und den bis dato gebrauchten möglichst nahe kommen, soll die Masseneinheit 10^{-11} Gramm und die Längeneinheit gleich dem Erdquadranten gleich 10^9 cm betragen. Die Einheit der Stromstärke heißt Ampere, die der elektromotorischen Kraft Volt, die des Widerstandes Ohm, die der elektrischen Menge Coulomb, die der Kapazität Farad, die der Arbeit Joule und die des Stromeffektes Watt. Wir haben nun:

1 Ampere	$= 10^{-1\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{9}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}$ $= 10^{-1} \cdot g^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}.$
1 Volt	$= 10^{-1\frac{1}{2}} \cdot 10^{2\frac{7}{2}} \cdot g^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \cdot \text{sec}^{-2}$ $= 10^8 g^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ sec}^{-2}.$
1 Ohm	$= 10^9 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$
1 Coulomb	$= 10^{-1\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{9}{2}} g^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}}$ $= 10^{-1} \cdot g^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}}.$
1 Farad	$= 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2.$
1 Joule	$= 10^{-11} 10^{18} g \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ $= 10^7 g \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2} = 10^7 \text{ Erg}.$
1 Watt	$= 1 \text{ Volt-Ampere} = 10^7 g \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-3}$ $= 10^7 \text{ Sekundenerg}.$
1 mkg	$= 9,81 \cdot 10^7 g \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ $= 9,81 \text{ Joule}.$
1 PS	$= 75 \text{ mkg} = 736 \cdot 10^7 \text{ Sekundenerg}$ $= 736 \text{ Watt}.$

Zusatz. Die Vorsilben Meg, Mikro, Milli bedeuten das Millionfache, den millionsten Teil, den tausendsten Teil der Einheit, z. B.

1 Megohm	$= 1 \text{ Million Ohm}$
1 Mikrofarad	$= 1 \text{ milliontel Farad}$
1 Milliampere	$= 1 \text{ tausendstel Ampere}.$



Kleine physikalische und chemische Bibliothek

aus der **Sammlung Göschen.**

==== Jedes Bändchen gebunden 80 Pfg. ====

Theoretische Physik, I. Teil: Mechanik und Akustik.
Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität
Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger,
Prof. an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen.
Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr.
Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit
33 Abbildungen. Nr. 78.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof.
am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof.
am Gymnasium in Ulm. Nr. 243.

Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Ru-
dolphi, Dozent an der Technischen Hochschule in
Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Professor an der
Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim.
Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I) v. Dr. Oskar Schmidt,
dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerk-
schule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II) von Dr. Oskar Schmidt,
dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerk-
schule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Königl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.

— — III: Karboeyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heteroeyklische Verbindungen. Nr. 194.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.

Chemisch-technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgenössischen Polytechnischen Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Allgemeine chemische Technologie von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Anorganische chemische Industrie von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— — III: Anorganische chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Die Teerfarbstoffe mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Privatdozent an der Königl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gust. Rauter. I: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.

— — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.

Sammlung Götschen In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Forstwissenschaft** von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.
- Fremdwort, Das, im Deutschen** von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.
- Fremdwörterbuch, Deutsches**, von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
- Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- Geodäsie** von Dr. C. Reinherz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.
- Geographie, Astronomische**, von Dr. Siegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- **Physische**, von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
- s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.
- Geologie** v. Professor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.
- Geometrie, Analytische, der Ebene** v. Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.
- **Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bärklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.
- **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.
- Geometrie, Darstellende**, v. Dr. Rob. Haugner, Prof. an der Universität Jena I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.
- **Ebens**, von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.
- **Projektive**, in sonthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.
- Geschichte, Sächsische**, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
- **Bayerische**, von Dr. Hans Odel in Augsburg. Nr. 160.
- **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.
- **Deutsche, im Mittelalter (bis 1500)** von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.
- **im Zeitalter der Reformation u. der Religionskriege** von Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.
- — siehe auch: Quellkunde.
- **Französische**, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univerf. Berlin. Nr. 85.
- **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.
- **des 19. Jahrhunderts** v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univerf. Bonn. 1. Bbchn.: 1800—1852. Nr. 216.
- — 2. Bbchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.
- **Israels bis auf die griech. Zeit** von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
- **Lothringens**, von Dr. Herm. Derksmüller, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.
- **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univerf. München. M. 6 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.

Sammlung Böschens Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

6. 7. Böschens'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Geschichte, Österreichische, I:** Von der Urzeit bis 1439 von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 104.
- II: Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.
- **Römische**, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
- **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
- **Sächsische**, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
- **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.
- **Spanische**, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
- **der Chemie** siehe: Chemie.
- **der Malerei** siehe: Malerei.
- **der Mathematik** s.: Mathematik.
- **der Musik** siehe: Musik.
- **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.
- **der Physik** siehe: Physik.
- **des deutschen Romans** s.: Roman.
- **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.
- **des deutschen Unterrichtswesens** siehe: Unterrichtswesen.
- Geschichtswissenschaft, Einleitung in die**, von Dr. Ernst Bernheim, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 270.
- Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten**, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.
- Gewerbewesen** von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.
- Gewichtswesen. Maß, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Gleichstrommaschine, Die**, von C. Kitzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Figuren. Nr. 257.
- Gletscherkunde** von Dr. Frh. Machäfel in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
- Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch** von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
- Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache** von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
- **Griechische, I: Formenlehre** von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.
- II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.
- **Lateinische. Grundriß der lateinischen Sprachlehre** von Professor Dr. W. Dotsch in Magdeburg. Nr. 82.
- **Mittelhochdeutsche. Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch** von Dr. W. Goltzer, Prof. a. d. Universität Rostock. Nr. 1.
- **Russische**, von Dr. Erich Berner, Professor an der Universität Prag. Nr. 66.
- siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.
- Handelskorrespondenz, Deutsche**, von Prof. Th. de Beaug, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
- **Englische**, von E. C. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

37,44

Allgemeine und spezielle Wirtschaftsgeographie

von

Dr. Ernst Friedrich

Privatdozent an der Universität Leipzig

Mit 3 Karten

Preis: Broschiert M. 6.80, geb. in Halbfranz M. 8.20

Dieses Buch sucht in ein **hologäisches Verständnis** der Wirtschaft (Produktion und Verkehr) einzuführen, indem es zeigt, wie jede örtliche Wirtschaft als Teil in dem zusammenhängenden und durch tellurische Faktoren bestimmten Wirtschaftsleben der Erde dasteht. Dabei wird, wie es richtig ist, die Produktion der Länder in den Vordergrund gestellt, der Verkehr an zweiter Stelle behandelt.

Zeichenkunst

Methodische Darstellung des gesamten Zeichenwesens
unter Mitwirkung erster Kräfte herausgegeben von

Karl Kimmich

582 Seiten, mit 1091 Text-Illustrationen,
sowie 57 Farb- und Lichtdrucktafeln

— 2 Bände —

Preis: gebunden M. 25.—

BG Politechniki Śląskiej

nr inw.: 102 - 141168



Dyr.1 141168

