

**Sammlung Götschen**

---

**Ausgleichsrechnung  
nach der Methode  
der kleinsten Quadrate**

Von

**Prof. Wilhelm Weitbrecht**

**Mit 15 Figuren und 2 Tafeln**

# Sammlung Götschen Feinelegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

## Verzeichnis der erschienenen Bände.

- Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre** von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.
- Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik.** Von Dr. Gust Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
- **Musikalische,** v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.
- Algebra. Arithmetik u. Algebra** v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- Alpen, Die,** von Dr. Rob. Sieger, Professor an der Universität und an der Exportakademie des k. k. Handelsmuseums in Wien. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.
- Altertümer. Die deutschen,** v. Dr. Franz Suhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.
- Altertumskunde, Griechische,** von Prof. Dr. Rich. Maiß, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pöhlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.
- **Römische,** von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.
- Analyse, Techn.-Chem.,** von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.
- Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung.** Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karls-gymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- — — **Repetitorium und Aufgabensammlung 3. Differentialrechnung** v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karls-gymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- — — **II: Integralrechnung.** Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karls-gymnasium in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.
- — — **Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karls-gymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.
- Analysis, Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.
- Arbeiterfrage, Die gewerbliche,** von Werner Sombart, Professor an der Universität Breslau. Nr. 209.
- Arbeiterversicherung, Die,** von Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.
- Arithmetik und Algebra** von Dr. Herm. Schubert, Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.
- — **Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra** v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.
- Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper** von A. S. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. S. Wislicenus, Prof. a. d. Univerf. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.
- Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper** von Dr. Walter S. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.
- Aufgabensammlg. 1. Analyt. Geometrie d. Ebene** v. G. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw. Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 236.
- **Physikalische,** v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 243.
- Aufsabentwürfe** von Oberstudientrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.
- Baukunst, Die, des Abendlandes** von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.
- Betriebskraft, Die zweckmäßigste,** von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 1. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbildungen. Nr. 224.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlags-handlung, Leipzig.

- Betriebskraft, Die zweckmäßigste,** von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbildungen. Nr. 225.
- Bewegungsspiele** von Dr. E. Kohlrausch, Professor am Kgl. Kaiser-Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.
- Biologie der Pflanzen** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
- Biologie der Tiere I: Entstehung u. Weiterbild. d. Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur** v. Dr. Heinr. Simroth, Professor a. d. Universität Leipzig. Mit 33 Abbild. Nr. 131.
- II: Beziehungen der Tiere zur organ. Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
- Gleicherz.** Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Buchführung.** Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Off. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule 3. Leipzig. Mit vielen Formulare. Nr. 115.
- Buddha** von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.
- Burgenkunde, Abriss der,** von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.
- Chemie, Allgemeine und physikalische,** von Dr. Max Rudolphi, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
- **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.
- II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.
- **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.
- — siehe auch: Metalle. — Metalloide.
- Chemie, Geschichte der,** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.
- **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.
- — III: Karbonnische Verbindungen. Nr. 193.
- — IV: Heterocyclische Verbindungen. Nr. 194.
- **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.
- **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
- II: Dissimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 241.
- Chemisch-Technische Analyse** von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.
- Dampfkessel, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.
- Dampfmaschine, Die.** Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.
- Dampfturbinen, Die,** ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbildungen. Nr. 274.
- Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit.** In Auswahl m. Einlgt. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Janken, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.
- Diatrichen.** Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

- Differentialrechnung** von Dr. Frdr. Junfer, Prof. a. Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.
- **Repetitorium u. Aufgabensammlung** 3. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junfer, Professor am Karls-Gymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.
- Eddalieder** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.
- Eisenhüttenkunde** von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.
- II. Teil: Das Schmiedeeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.
- Elektrizität.** Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univerf. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.
- Elektrochemie** von Dr. Hehr. Danneel, Privatdozent in Breslau. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. Nr. 252.
- Elektrotechnik.** Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.
- II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.
- III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.
- Epigramen, Die, des hñfischen Epös.** Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junf, Aktuar der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.
- Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht** von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Tafeln. Nr. 175.
- Ethik** von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.
- Exkursionsflora von Deutschland** zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. 1. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 268.
- 2. Teil. Mit 50 Abbildungen. Nr. 269.
- Färberei.** Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei u. ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Krefeld. M. 28 Fig. Nr. 186.
- Fernsprechwesen, Das,** von Dr. Ludwig Kellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.
- Festigkeitslehre** von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit zahlreichen Figuren. Nr. 288.
- Filzfabrikation.** Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Finanzwissenschaft** v. Präsident Dr. R. van der Borcht in Berlin. Nr. 148.
- Fischerei und Fischzucht** v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
- Formelsammlung, Mathemat., u.** Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrfäße d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analgt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürtlen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.
- **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Sammlung Göschen

---

**Ausgleichsrechnung**  
**nach der**  
**Methode der kleinsten Quadrate**

von

**Wilh. Weitbrecht**

Professor der Geodäsie in Stuttgart

Mit 15 Figuren und 2 Tafeln

---

**Leipzig**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1906

---

**Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,  
von der Verlagshandlung vorbehalten.**

---

PHIL. SNOPEK  
C. K. P. 30. 1911

# Inhaltsverzeichnis.

|   | Seite |
|---|-------|
| <b>Einleitung</b> . . . . .   | 6     |
| § 1. Einteilung der Beobachtungsfehler . . . . .  | 7     |
| § 2. Wahrscheinlichster Wert einer Größe aus einer Reihe gleich genauer, mit zufälligen Fehlern behafteter Beobachtungsergebnisse . . . . . | 10    |
| § 3. Grundbedingung für die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Einteilung der Ausgleichungsaufgaben . . . . .            | 15    |

## I. Abschnitt.

### Ausgleichung direkter Beobachtungen.

#### 1. Kapitel.

#### Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

|  |    |
|--|----|
| § 4. Untersuchung der einer Einzelbeobachtung innewohnenden Genauigkeit . . . . .  | 23 |
| § 5. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes $L$ und der Summe der Fehlerquadrate $[v v]$ aus den Beobachtungswerten $l$ . . . . . | 28 |
| § 6. Mittlerer Fehler $M$ des Mittelwertes $L$ aus $n$ gleich genauen Beobachtungen $l$ . . . . .                                  | 30 |
| § 7. Größter Betrag des unvermeidlichen Beobachtungsfehlers . . . . .  | 37 |

#### 2. Kapitel.

#### Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

|  |    |
|--|----|
| § 8. Wahrscheinlichster Wert einer Beobachtungsgröße aus einer Reihe verschieden genauer Beobachtungen. Gewicht der Beobachtung. Gewichtseinheit . . . . . | 40 |
| § 9. Eigenschaften des allgemeinen arithmetischen Mittels . . . . .  | 46 |



|   | Seite |
|---|-------|
| § 10. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes $L$ und des Trägheitsmomentes $[p \ v \ v]$ . . . . . | 48    |
| § 11. Erreichte Beobachtungsgenauigkeit. Gewicht und Genauigkeit des Endwertes . . . . .            | 49    |
| Beispiel . . . . .  | 56    |

## II. Abschnitt.

### Vermittelnde Beobachtungen.

#### 1. Kapitel.

##### Fortpflanzung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrößen.

|  |    |
|--|----|
| § 12. Mittlerer Fehler $M$ und Gewicht $P$ einer Funktion $F$ der beobachteten Größen $L_1 \dots L_n$ , welche mit den mittleren Fehlern $m_1 \dots m_n$ behaftet sind . . . . . | 59 |
| Beispiele . . . . .  | 61 |

#### 2. Kapitel.

##### Ausgleichung vermittelnder gleich genauer Beobachtungen.

|   |    |
|---|----|
| § 13. Graphische Ausgleichung zusammengehöriger, beobachteter Argument- und Funktionswerte bei bekannter oder unbekannter Beziehung. Beobachtungsfehler . . . . .   | 66 |
| Beispiel . . . . .  | 68 |
| § 14. Rechnerische Ausgleichung in überschüssiger Zahl vorhandener Beobachtungswerte $L$ bei bekannter Beziehung zwischen ihnen und den von ihnen abhängigen, gesuchten Größen $X, Y \dots$ bis zur Aufstellung der Normalgleichungen . . . . . | 74 |
| § 15. Allgemeine Auflösung der Normalgleichungen . . . . .  | 77 |
| a) für eine Unbekannte . . . . .  | 77 |
| b) für zwei Unbekannte . . . . .  | 79 |
| c) für drei und mehr Unbekannte . . . . .   | 82 |
| § 16. Bestimmung der mittleren Fehler $m$ der Beobachtungswerte $L$ aus den ihnen zuzuschlagenden Verbesserungen $v$ . . . . .  | 86 |
| § 17. Ableitung des Wertes der Fehlerquadratsumme $[v \ v]$ als Nebenprodukt der Reduktion der Normalgleichungen . . . . .  | 91 |
| § 18. Mittlerer Fehler $M$ und Gewicht $P$ der berechneten Unbekannten aus den Verbesserungen $v$ der Beobachtungswerte . . . . .   | 93 |
| § 19. Praktische Ausrechnung der Koeffizienten für die Normalgleichungen. Bedürfnis veränderter Größe der Unbekannten oder der Maßeinheit. Vereinfachte Schreibweise. Rechnungsproben . . . . .   | 97 |



## 3. Kapitel.

Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen  
von verschiedener Genauigkeit.

|   | Seite |
|---|-------|
| § 20. Erweiterung der für gleichwertige Beobachtungen aufgestellten Ausgleichungsgrundsätze auf ungleichwertige Beobachtungen . . . . . | 111   |

## 4. Kapitel.

Anwendung der Ausgleichung  
vermittelnder Beobachtungen auf trigonometrische  
Punkteinschaltung.

|   |     |
|---|-----|
| § 21. Graphisches Ausgleichungsverfahren für Vorwärts- und vereinigt Vor- und Rückwärtseinschneiden . . . . .         | 119 |
| § 22. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für trigonometrische Punkteinschaltung durch Vorwärtseinschnitt . . . . .  | 128 |
| § 23. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für trigonometrische Punkteinschaltung durch Rückwärtseinschnitt . . . . . | 135 |
| § 24. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für vereinigt Vor- und Rückwärtseinschneiden . . . . .                     | 144 |

## III. Abschnitt.

## Bedingte Beobachtungen.

|   |     |
|---|-----|
| § 25. Aufstellung der Bedingungsgleichungen . . . . .   | 155 |
| § 26. Zurückführung der Ausgleichung bedingter, direkter auf vermittelnde Beobachtungen . . . . . | 163 |
| § 27. Ausgleichung bedingter, direkter, gleich genauer Beobachtungen mittels Korrelaten . . . . . | 166 |
| § 28. Ausgleichung bedingter, ungleich genauer Beobachtungen mittels Korrelaten . . . . .         | 174 |

---

## Einleitung.

Bei der Feststellung von Tatsachen und Größen mittels sinnlicher Wahrnehmung sind wir Irrtümern und Fehlern unterworfen, welche teils der menschlichen Unvollkommenheit, teils der Mangelhaftigkeit der angewandten Hilfsmittel und Methoden entspringen. Dies zeigt sich, sobald irgend ein von mehreren Menschen beobachteter Vorgang genau festgestellt werden will, oder wenn auch nur ein einziger Beobachter die Ausdehnung oder die physikalischen Eigenschaften eines und desselben Gegenstandes mehrmals unabhängig bestimmt. Es zeigt sich auch, wenn man mehrere Größen, welche vermöge eines Naturgesetzes in bestimmter Beziehung zueinander stehen, einzeln und unabhängig mißt (z. B. die beiden Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, die drei Winkel eines Dreiecks usw.).

Will man daher Widersprüche in der Feststellung von Größen oder Tatsachen vermeiden, so muß man entweder die Augen vor etwa vorhandenen überschüssigen und daher unter allen Umständen widersprechenden Beobachtungsergebnissen verschließen, oder — auf überschüssige Beobachtungen überhaupt verzichten. Beide Auskunftsmittel wären identisch mit dem Verfahren eines Richters, der über jeden einzelnen Vorgang nur einen einzigen Zeugen hören wollte, auch wenn er von mehreren mehr oder weniger abweichend beobachtet wurde. Das Ergebnis einer solchen Untersuchung hätte wenig Aussicht, die

Wahrheit zu treffen. Dagegen wird man der gesuchten Wahrheit um so näher kommen, je mehr Beobachtungen bei der Feststellung eines Vorganges oder einer Größe berücksichtigt werden und je zuverlässiger sie sind.

Wollen wir alle, teilweise widersprechenden Beobachtungen zu einem einheitlichen Ergebnis — dem richterlichen Urteil gleich — verarbeiten, so müssen wir jede von dem ihr anhaftenden Fehler zu befreien, „auszugleichen“ suchen. Auf sachlichem Gebiet kann die Fehlerursache außer in der Unzulänglichkeit unserer Sinne bloß noch in der Mangelhaftigkeit der verwendeten Methoden und Instrumente liegen. Die Untersuchung von Größe und Ursache der Fehler liefert daher neben ihrem eigentlichen Zwecke (der Schaffung eines einheitlichen Resultates) noch wertvolle Fingerzeige für künftige Einschränkung der Beobachtungsfehler.

### § 1. Einteilung der Beobachtungsfehler.

Die Ursache, welcher ein Fehler seine Entstehung verdankt, ist häufig auch bestimmend für dessen Eigenschaft und Größe, so daß man umgekehrt aus letzteren häufig auf die Ursache schließen kann.

Entspringt der Fehler z. B. äußeren Einflüssen (Witterungsunbilden und anderen Naturereignissen, Böswilligkeit dritter usw.), oder ungewöhnlicher Nachlässigkeit des Beobachters, so läßt er die Beobachtungsgröße meist um erhebliche Beträge und zwar ebenso wahrscheinlich in der einen, wie in der anderen Richtung unrichtig erscheinen, er ist ein „grober Fehler“.

Die groben Fehler lassen sich in den meisten Fällen vermeiden, jedenfalls aber durch überschüssige Beobachtungen und geeignete Beobachtungsverfahren ihrer Größe und Richtung nach erkennen und ausmerzen. Sie gehören

nicht zu denjenigen, welche der Ausgleichung unterliegen, und wir werden uns mit ihnen im folgenden nicht beschäftigen.

Außer diesen, sowohl nach Richtung und Größe, als auch nach ihrer Ursache meist leicht erkennbaren groben Fehlern gibt es aber noch kleinere Fehler (Abweichungen des Beobachtungsergebnisses vom wahren Wert), die sich zwar durch geeignete Hilfsmittel und Beobachtungsverfahren und namentlich durch erhöhte Aufmerksamkeit und Erfahrung des Beobachters wesentlich einschränken, niemals aber ganz vermeiden lassen. — Die Feststellung dieser unvermeidlichen Fehler an den Beobachtungsergebnissen nach wahrscheinlicher Ursache und Größe und ihre Ausmerzung bildet die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung.

Auch sie zeigen übrigens bei näherem Zusehen prinzipielle Verschiedenheiten, die der Verschiedenartigkeit der Fehlerquellen entstammen, und die uns zwingen, sie in zwei Gruppen getrennt zu betrachten. Wenn es nämlich im einzelnen Beobachtungsfall auch kaum möglich ist, jede einzelne Fehlerquelle und ihren Anteil am schließlichen Gesamtfehler der Beobachtungsgröße festzustellen, so zeigt doch die einfachste Überlegung, daß die eine Fehlerursache eine nach ihrem Vorzeichen sich gleich bleibende, in gesetzmäßiger Abhängigkeit von der Beobachtungsgröße wachsende Fehlerwirkung ausüben kann, während die andere einen Fehleranteil erzeugt, der nach Größe und Vorzeichen von Beobachtung zu Beobachtung wechselt. Wird z. B. eine Strecke durch mehrfaches Anlegen eines Maßstabes gemessen, der um ein gewisses, wenn auch kaum erkennbares Maß zu kurz ist, so liefert dieser Maßstab, falls sein Längenabmangel die einzige Fehlerquelle

darstellt; unter allen Umständen ein zu großes Maß für die Strecke, und zwar wächst der hieraus entspringende Streckenfehler proportional zur festgestellten Anzahl von Maßstablagen, also proportional zur Streckenlänge. Einen solchen Fehler nennt man „regelmäßigen Fehler“.

Hat umgekehrt der Maßstab zwar die richtige Länge, schleicht sich aber bei jeder neuen Lage ein zufälliger kleiner Anlegefehler ein, so wird dieser ebenfalls das Gesamtergebnis der Strecke schädlich beeinflussen. Da aber der Fehler in der Maßstablage gleich wahrscheinlich in der Vorwärts- wie in der Rückwärtsrichtung wirken kann, so werden einige der entsprechenden, positiv wirkenden Fehlerelemente einige der negativen aufheben. Als Gesamtwirkung dieser Fehlerquelle auf die Strecke wird daher nur der Überschuß der einen Fehlerrichtung über die andere auftreten. Dieser kann ebensogut positiv wie negativ, und wird seiner absoluten Größe nach im günstigsten (aber unwahrscheinlichen) Fall  $= 0$  sein, wenn nämlich die Gesamtwirkung der positiven gleich derjenigen der negativen Fehlerteile ist. Im ungünstigsten, ebenso unwahrscheinlichen Fall (wenn alle Fehlerelemente in gleicher Richtung wirken) wäre die Gesamtwirkung, wie im Fall des regelmäßigen Fehlers, proportional zur Streckenlänge. Weder der eine noch der andere dieser äußersten Fälle wird regelmäßig auftreten. Sicher ist daher, daß die wahrscheinliche Gesamtwirkung dieses „zufälligen“ (unregelmäßigen) Fehlers langsamer wächst, als die des regelmäßigen Fehlers.

Wenn nach Vorstehendem das Wachstum des regelmäßigen und des unregelmäßigen Fehlers verschiedenen Gesetzen folgt, und wenn weiter die Möglichkeit vorliegt, daß beide Fehlergruppen in den auszugleichenden Beob-

achtungsresultaten gleichzeitig auftreten, so wird nur die Trennung beider die richtige Erkenntnis der Fehlerursachen und die Fehlerverbesserung an der richtigen Stelle ermöglichen.

Eine solche Trennung läßt sich in einzelnen Fällen durch einfache Überlegung ermöglichen.

Wird z. B. ein und dieselbe Größe (etwa eine Strecke) mit denselben Geräten unter denselben äußeren Umständen und nach derselben Methode mehrmals gemessen und weisen die Messungsergebnisse Unterschiede auf, die zu klein sind, um als Folgen grober Fehler angesehen werden zu können, so können diese Unterschiede nur zufälligen, unregelmäßigen Fehlerquellen entspringen. Sind aber die verschiedenen Wiederholungen der Messung je mit anderen Geräten nach anderen Methoden oder unter veränderten Umständen ausgeführt worden, so können die kleinen Unterschiede zwischen den verschiedenen Resultaten ebensowohl zufälligen, als regelmäßigen Fehlern und ihrem Zusammenwirken entspringen. Durch Vergleichung beider Fehlerbeträge können wir den Anteil beider Gruppen von Fehlern am Gesamtunterschied ermitteln.

## **§ 2. Wahrscheinlichster Wert einer Größe aus einer Reihe gleich genauer, mit zufälligen Fehlern behafteter Beobachtungsergebnisse.**

Ist die Beobachtung einer Größe mit denselben Hilfsmitteln und Methoden und unter denselben äußeren Verhältnissen mehrfach ausgeführt worden, kann also jedes der erhaltenen, um geringe Beträge voneinander abweichenden Resultate als gleich zuverlässig angesehen werden, so würde die Annahme irgend eines dieser Beobachtungsergebnisse als endgültigen Wertes der Beobachtungsgröße eine Vergewal-



tigung der übrigen und eine nutzlose unwirtschaftliche Arbeitsvergeudung darstellen. Denn letztere hätten, falls es sich bei ihrer Beobachtung etwa nur um Schutz gegen grobe Fehler handelte (Kontrollbeobachtungen), zum mindesten mit geringerem Aufwand an Sorgfalt und Zeit ermittelt werden können. Wählen wir dagegen den endgültigen Wert der Beobachtungsgröße unter gleichmäßiger Berücksichtigung aller beobachteten Einzelwerte aus, so erzielen wir damit zweifellos eine Genauigkeitssteigerung, weil zum mindesten ein Teil der zufälligen, ebenso wahrscheinlich positiven wie negativen Einzelfehler sich dabei aufhebt.

Die Voraussetzung, daß sämtliche Beobachtungen mit gleicher Sorgfalt, also vermutlich auch gleicher Genauigkeit ausgeführt sind, führt zum Zweck der Auswahl eines endgültigen ausgeglichenen Mittelwertes  $L$  für die Beobachtungsgröße zu der Forderung, an sämtlichen Beobachtungswerten  $l$  gleich große, im Vorzeichen wechselnde Verbesserungszuschläge  $v$  anzubringen, welche dem bei der Beobachtung eingeschlichenen gleich wahrscheinlich positiven wie negativen und gleich großen zufälligen Fehler entsprechen. Diese Forderung läßt sich aber nur im Fall zweifacher Beobachtung erfüllen.

Trägt man nämlich die Beobachtungswerte  $l_1 l_2 \dots$  als Ordinaten zu einer beliebigen Abszisse auf (Fig. 1 a), so läßt sich nur dann ein Punkt finden, der von den Endpunkten der Ordinaten gleichen Abstand  $v$  hat, wenn die Zahl der letzteren  $= 2$  ist.

In diesem Fall sind die Verbesserungszuschläge  $v_1 = -v_2$ . Legt man der vom Endpunkt der  $l$  aus in der Ordinatenrichtung verlaufenden Verbesserung  $v$  das Vorzeichen  $+$ , der andern das Vorzeichen  $-$  bei, so wird

$$(1) \quad v_1 + v_2 = 0$$



und

$$L = l_1 + v_1$$

$$L = l_2 + v_2$$

$$L = \frac{l_1 + l_2 + v_1 + v_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

Ist die Zahl der Beobachtungswiederholungen  $2^n$  und trägt man die Beobachtungswerte  $l_1 \dots$  als Ordinaten

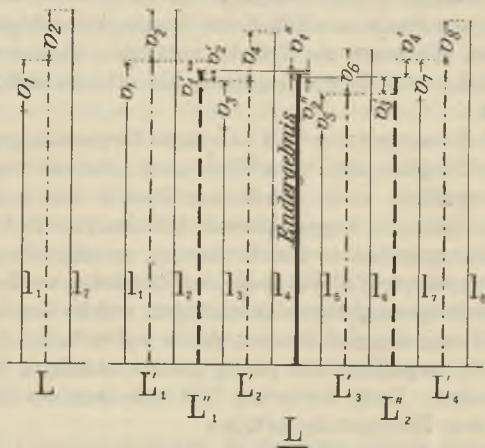


Fig. 1 a.

Fig. 1 b.

zu beliebigen Abszissen auf, so ist es unmöglich, eine Parallele zur Abszisse zu ziehen, deren Abstände  $v$  von allen Ordinatenendpunkten gleich groß sind. Wir müssen also auf die Forderung verzichten:

$$\text{absolut } v_1 = \text{absolut } v_2 = \dots = \text{absolut } v_r = \dots$$

(Fig. 1 b). Immerhin kann man zwei der Beobachtungswerte, z. B.  $l_1$  und  $l_2$ , zu einem Resultat  $L'_1 = \frac{l_1 + l_2}{2}$

zusammenfassen, ebenso  $\frac{l_3 + l_4}{2} = L'_2$  usw. und erhält

damit ebenso viele Werte  $L'$ , als Beobachtungspaare vorhanden sind. Gleichzeitig ist dann wie vorhin

$$\left. \begin{array}{l} v_1 + v_2 = 0 \\ v_3 + v_4 = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right\} [v]^* = 0.$$

Faßt man jetzt je zwei der so gefundenen Werte  $L'$  wieder zu einem Wert  $L''$  zusammen und heißt die an den Werten  $L'$  anzubringenden Verbesserungen  $v'$ , so ist wieder

$$\left. \begin{array}{l} v'_1 + v'_2 = 0 \\ v'_3 + v'_4 = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right\} [v'] = 0$$

und man hat nur noch den vierten Teil der ursprünglichen Beobachtungswerte.

Fährt man mit der paarweisen Zusammenfassung der gewonnenen Werte zu Mittelwerten  $L'''$ ,  $L''''$  . . . fort, wobei wieder

$$\begin{aligned} [v''] &= 0 \\ [v'''] &= 0 \quad \text{usw.,} \end{aligned}$$

so bleibt schließlich ein Wert  $L$  als endgültiger Mittelwert übrig. Heißen die an den ursprünglichen Beobachtungswerten  $l$  anzubringenden Zuschläge, welche nötig sind, um sie auf diesen Mittelwert  $L$  zu bringen,  $V$ , so wird:

$$(1) \quad \underline{(L - l_1) + (L - l_2) + \dots = [v] + [v'] + [v''] + \dots = [V] = 0}$$

\*) Das von K. F. Gauß (geb. 30. April 1777, gest. 23. Febr. 1855), dem Begründer der Methode der kleinsten Quadrate, eingeführte Zeichen  $[\ ]$ , für die Summe einer endlichen Zahl gleichartiger Größen, entsprang dem griechischen  $\Sigma$  = Summe aller. Der einfacheren Schreibweise halber entstand daraus  $[$  und, zur genaueren Begrenzung des zusammenzufassenden Ausdrucks,  $]$ . Es wird aus sachlichen und aus Gründen der Pietät im folgenden beibehalten werden.

als Eigenschaft des endgültigen Mittelwertes  $L$  aus einer Anzahl  $2^n$  gleich genauer Beobachtungen.

Die in (1) gefundene Eigenschaft des endgültigen Mittelwertes  $L$  aus einer Anzahl  $2^n$  nur mit zufälligen Fehlern behafteter, gleich genauer Beobachtungen  $l$  wohnt dem wahrscheinlichen Mittelwerte inne, auch wenn die Beobachtungszahl nicht gerade  $= 2^n$  ist. Denn die ungefähr gleich großen zufälligen Beobachtungsfehler  $V$  werden gleich wahrscheinlich positiv wie negativ auftreten, sich also bis auf einen im Vergleich zu  $[l]$  sehr kleinen Rest um so eher aufheben, je größer die Zahl der Beobachtungen  $l$  ist. Mit großer Wahrscheinlichkeit dürfen wir daher Gleichung (1) als allgemein gültige Bedingung für die Auswahl des wahrscheinlichsten Mittelwertes  $L$  einer beliebigen Anzahl gleich genauer Beobachtungen  $l$  festsetzen. Wir gewinnen damit allerdings nur eine Hypothese für ein Naturgesetz, die aber um so gesicherter ist, je mehr daraus zu ziehende Schlüsse mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Wie man nun aber auch den wahrscheinlichsten Wert  $L$  der Beobachtungsgröße wählen möge, immer wird die Beziehung bestehen:

Verbesserung  $V = L - l$ , oder (wenn man  $V$  durch  $v$  ersetzt):

$$L = l_1 + v_1$$

$$L = l_2 + v_2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$L = l_n + v_n$$

$$\hline n L = [l] + [v]. \quad \text{Für (1): } [v] = 0 \text{ wird daraus}$$

(2) Endwert  $L = \frac{[l]}{n} =$  dem arithmetischen Mittel der

Beobachtungswerte, übereinstimmend mit unserem natürlichen Empfinden.

Wir erkennen, daß jeder neue Beobachtungswert  $l$  einen neuen Widerspruch  $v$  gegen den Mittelwert  $L$  und damit eine kleine Veränderung des letzteren bedingt. Je größer aber die Zahl  $n$  der zur Mittelbildung bereits verwendeten Beobachtungswerte  $l$  und je größer ihre Genauigkeit ist, um so geringer wird der Einfluß einiger neu hinzukommender Beobachtungswerte auf das Endergebnis sein. Die Veränderung des Endergebnisses durch neu hinzutretende Beobachtungswerte würde aber erst dann gleich 0, wenn die Zahl der bereits verwendeten  $\infty$  groß wäre. Dann hätte man den auf dem Weg der Beobachtung tatsächlich unerreichten wahren Wert der Beobachtungsgröße gefunden.

### § 3. Grundbedingung für die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

Die Bedingung (1) führt auf einem sehr einfachen Weg zur eindeutigen Erlangung des wahrscheinlichsten Wertes  $L$  aus einer Anzahl gleich genauer Beobachtungen  $l$ , wenn, graphisch betrachtet, die gesuchte Ausgleichungslinie (s. Fig. 1 b) ihrer Richtung nach (hier als Parallele zur  $x$ -Achse) zum voraus bekannt ist. Trifft dies nicht zu, so genügt die Bedingung  $[v] = 0$  nicht zur eindeutigen Auswahl dieser Ausgleichungslinie. Ist z. B. die beobachtete Größe  $L$  (statt wie bisher konstant) abhängig von einer zweiten veränderlichen Größe, so kann man zwar die Beobachtungswerte  $l$ , wie in Fig. 1 a und 1 b, als Ordinaten und zwar diesmal zu den korrespondierenden Werten der zweiten Veränderlichen als Abszissen aufzeichnen.

Mögen z. B. bei gleich bleibender Temperatur, aber veränderlichem Luftdruck an einem Quecksilber- und gleichzeitig an einem Federbarometer korrespondierende Ablesungen gemacht worden sein, um die Beziehung zu finden zwischen der Anzahl von Teilen, um welche sich der Zeiger des Aneroid-

barometers fortbewegt, und der Anzahl von mm, um welche sich aus denselben Ursachen die Höhe der Quecksilbersäule verändert. Es sei ferner festgestellt worden, daß die gesuchte Beziehung zwischen den Quecksilberhöhen  $b$  und den Aneroidablesungen  $a$  von linearer Form ist:

$$+ X = A \text{ Achse}$$

$$b = ax + c.$$

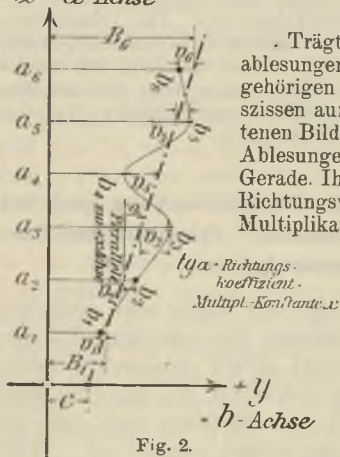


Fig. 2.

Trägt man nun die Quecksilberablesungen  $b$  als Ordinaten zu den zugehörigen Aneroidablesungen  $a$  als Abszissen auf und verbindet die so erhaltenen Bildpunkte, so ist bei fehlerfreien Ablesungen deren Verbindungslinie eine Gerade. Ihr Richtungskoeffizient ( $\text{tg}$  des Richtungswinkels) stellt die gesuchte Multiplikationskonstante  $x$  vor, ihr

Abchnitt auf der  $y$ -Achse die (uns zunächst nicht interessierende) Additionskonstante  $c$ . Nun sind aber die Ablesungen an beiden Barometern mit kleinen Fehlern behaftet, welche zur Folge haben, daß die Verbindungslinie der Bildpunkte keine Gerade wird, wenn die Zahl

der letzteren  $> 2$ , d. h. wenn Überbestimmung vorhanden ist. Die Abweichungen einer den Bildpunkten möglichst angepaßten Geraden von diesen sind auch hier nichts anderes, als die Verbesserungen  $v$  (s. Fig. 2), welche an den Quecksilberablesungen  $b$  anzubringen sind, damit die der Aneroidablesung  $a$  entsprechende gemittelte Quecksilberablesung  $B$  erscheint, deren algebraische Summe wir laut Bedingung (1)  $= 0$  machen sollen.

Nun kann man aber jede Richtung parallel mit sich selbst so verschieben, daß schließlich  $[\text{algebr. } v] = 0$  wird, jede liefert ein anderes  $c$  und  $x$ , d. h. es gibt unendlich viele Gerade, welche der gestellten Bedingung  $[v] = 0$  entsprechen. Zur Auswahl der best-

möglichen Ausgleichungslinie brauchen wir eine weitere Bedingung, welche die unter (1) aufgestellte ersetzt oder ergänzt. Als solche weitere Bedingung könnte man etwa wählen:

$$[\text{absolut } v] = \text{Minimum.}$$

Diese Form wurde in der Tat von Laplace im Jahre 1802 aufgestellt und begründet.

Sie leidet aber an verschiedenen Mängeln. In erster Linie tut sie den Verbesserungen  $v$ , welche ohne Vorzeichen undenkbar sind, Zwang an, indem sie ihnen das Vorzeichen raubt.

Sodann verursacht die Aufstellung eines allgemein gültigen Ausdruckes für den absoluten Wert jedes einzelnen  $v$  oder für deren Summe  $[\text{abs. } v]$ , welche zum Minimum werden soll, erhebliche Schwierigkeiten. Denn je nach der Größe des Beobachtungswertes  $l$ , bzw. desjenigen von  $L$  ist abwechselnd  $\text{abs. } v = L - l$  oder  $\text{abs. } v = l - L$ .

Endlich nimmt die Bedingung  $[\text{abs. } v] = \text{Min.}$  keine Rücksicht auf die Wertung der einzelnen Beobachtungsfehler  $v$  nach ihrer Größe. Handelt es sich nämlich darum, die Güte einer Beobachtungsreihe im ganzen zu beurteilen, so wird man dazu am besten den Wert derjenigen Funktion der Beobachtungsfehler  $v$  verwenden, die man zum Zweck und anlässlich der Auswahl des bestmöglichen Mittelwertes  $L$  zum Minimum gemacht hat, im vorliegenden Fall also  $[\text{abs. } v]$  oder

$$(3) \quad d = \frac{[\text{abs. } v]}{n}.$$

Der Wert  $d$  stellt dabei den absoluten Durchschnittswert aus  $n$  Beobachtungsfehlern  $v$ , den „durchschnittlichen Fehler einer Beobachtung“ vor.

Möge nun z. B. ein bestimmter Beobachter mit einem gewissen Instrument und unter Einhaltung einer gewissen Messungsmethode beim Nivellement gleich langer geschlossener Schleifen etwa folgende Abschlußdifferenzen gegen den (in diesem Fall bekannten) Sollwert 0 erzielt haben:

| Schleife | Abschlußdifferenz $v$ |      |
|----------|-----------------------|------|
|          | + mm                  | - mm |
| 1        | 4                     |      |
| 2        | 5                     |      |
| 3        |                       | 6    |
| 4        | 5                     |      |
| 5        |                       | 5    |
| 6        | 5                     |      |
| 7        |                       | 5    |
| 8        |                       | 6    |
| 9        | 5                     |      |
| 10       |                       | 4    |
|          | 24                    | 26   |

$$[\text{abs. } v] = 50$$

$$d = \frac{[\text{abs. } v]}{n} = 5.$$

Ein zweiter Beobachter habe dagegen beim Nivellement derselben Schleifen mit anderem Instrument und nach anderer Methode folgende Abschlußdifferenzen erzielt:

| Schleife | Abschlußdifferenz $v$ |      |
|----------|-----------------------|------|
|          | + mm                  | - mm |
| 1        | 1                     |      |
| 2        |                       | 1    |
| 3        | 1                     |      |
| 4        |                       | 10   |
| 5        |                       | 12   |
| 6        | 0                     |      |
| 7        |                       | 1    |
| 8        |                       | 0    |
| 9        |                       | 15   |
| 10       |                       | 9    |
|          | 2                     | 48   |

$$[\text{abs. } v] = 50$$

$$d = \frac{[\text{abs. } v]}{n} = 5.$$

Beide Beobachtungsreihen zeigen denselben Betrag für  $[\text{abs. } v]$  und daher denselben durchschnittlichen Fehler  $d$ . Trotzdem sind die dadurch ausgeführten Höhenbestimmungen durchaus nicht gleich zuverlässig. Schon der Umstand, daß die Zahl der positiven Abweichungen  $v$  in der zweiten Reihe gegenüber derjenigen der negativen erheblich verschieden ist, widerspricht ihrer Eigenschaft als zufällige Fehler und weist auf



die Einwirkung grober oder regelmäßiger Fehler hin, die sich möglicherweise bis auf den schließlich festgestellten Betrag gegenseitig aufgehoben haben können.

Noch mehr aber spricht die absolute Größe der Abschlußdifferenzen gegen die Gleichwertigkeit der beiden Gruppen von Messungen. Jede dieser Differenzen setzt sich nämlich zusammen aus einer Reihe von in ihrer Ursache und Wirkung teilweise unbekanntem Fehlerelementen, die sich teils addieren, teils gegenseitig aufheben. Die Abschlußdifferenz ist nur ihr in die Erscheinung tretender Rest. Ist dieser Rest in den einzelnen Beobachtungsfällen sehr verschieden, so beweist dies, daß die Fehlerelemente selbst verhältnismäßig groß sind, so daß einige von ihnen, welche ausnahmsweise der Regel widersprechen, gleich wahrscheinlich positiv wie negativ zu sein, hinreichen, das Beobachtungsergebnis und die Abschlußdifferenz merklich zu beeinflussen. Das zufällige, eben hieraus erklärliche Vorkommen einiger auffallend kleiner Abschlußdifferenzen ändert an der Tatsache der geringen Zuverlässigkeit ebensowenig, als etwa einige zufällige Kernschüsse denjenigen zum hervorragenden Schützen stempeln, der mit anderen seiner Schüsse nicht einmal die Scheibe trifft. Wird ja auch nicht derjenige Mensch als der brauchbarere von zweien angesehen, der zwar im Falle zufällig glücklicher Disposition einmal eine ganz hervorragende Leistung hervorbringt, aber zwischenherein, vielleicht gerade wenn man ihn nötig braucht, versagt!

Sollen aber nach dem Ausgeführten die Beobachtungsfehler  $v$  in dem Sinne gewertet werden, daß größere Fehler progressiv wachsend in die Wagschale fallen, so bleibt nichts übrig, als irgend eine Potenz von ihnen in Vergleich zu ziehen. Dabei hat eine Potenz mit geradem Exponenten noch den Vorzug, das lästige Vorzeichen des Fehlerbetrages  $v$  auf natürliche Weise zum Verschwinden zu bringen. Die Frage, welche gerade Potenz der  $v$  gewählt werden soll, beantwortet sich aus der Eigenschaft der Fehler als Naturerscheinungen, die gewissen (uns zunächst unbekanntem) Gesetzen unterworfen sind: Im Zweifelsfalle ist die einfachste Form die richtige, sofern sie anderen, bereits festgestellten Gesetzen

(im vorliegenden Falle (1):  $[algeb. v] = 0$  und (2):  $L = \frac{[v]}{n}$ )

nicht widerspricht.

Unter letzterer Voraussetzung und an Stelle der als unrichtig erkannten Annahme  $[abs. v] = \text{Min.}$  setzen wir jetzt für die Wertung der erreichten Beobachtungsgenauigkeit sowohl, als für die Auswahl des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße  $L$  die Bedingung

$$(4) \quad [v v] = \text{Min.}$$

Ob diese Bedingung den für gleich genaue Beobachtungen einleitend bewiesenen, oben angegebenen Gesetzen (1) und (2) nicht widerspricht, untersuchen wir wie folgt:

Behaftet man die an den Beobachtungswerten  $l$  anzubringenden Verbesserungsbeiträge  $v$  mit algebraischen Vorzeichen, so ist allgemein gültig, welcher Wert auch für  $L$  gewählt werden möge:

$$\begin{cases} v_1 = L - l_1 & \text{also } v_1^2 = L^2 - 2 L l_1 + l_1^2 \\ v_2 = L - l_2 & \text{,, } v_2^2 = L^2 - 2 L l_2 + l_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ v_n = L - l_n & \text{,, } v_n^2 = L^2 - 2 L l_n + l_n^2 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{l} v \\ \hline \end{array} \right] = n L - [l] \quad \left[ \begin{array}{l} v v \\ \hline \end{array} \right] = n L^2 - 2 L [l] + [ll].$$

Soll nun der wahrscheinlichste Wert  $L$  so ausgewählt werden, daß  $[v v] = \text{Min.}$ , wobei also  $L$  die einzige Veränderliche der rechten Seite ist, so muß sein

$$\frac{d[v v]}{dL} = 2 n L - 2 [l] = 0$$

oder

$$L = \frac{2 [l]}{2 n} = \frac{[l]}{n},$$

woraus

$$[v] = n \cdot \frac{[l]}{n} - [l] = 0$$

in Übereinstimmung mit Gleichungen (2) und (1).

Die Gleichung (4) bildet die grundlegende Bedingung für die gesamte Ausgleichungsrech-

nung. Nach ihr erhielt letztere die Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrate“ (besser: Methode der kleinsten Quadratsumme). Sie läßt, wie Gleichung (1), eine bemerkenswerte mechanische Deutung zu. Denkt man sich nämlich die Beobachtungswerte  $l$  (wie in Fig. 1) als Ordinaten aufgetragen, so stellen deren Abweichungen  $v$  vom Mittelwert  $L$  die Ordinaten ihrer Endpunkte vor in bezug auf die durch den Endpunkt dieses Mittelwertes parallel zur Abszisse gezogene Achse. Betrachtet man diese Ordinatenendpunkte als Massenpunkte, denen vermöge der gleichen Beobachtungsgenauigkeit je dasselbe Gewicht 1 zukommt, und denkt sich die Gewichte in ihnen angreifend und parallel zur Achse wirkend, so bedeutet  $[v]$  die Summe der statischen Momente für Drehung um den Endpunkt des Mittelwertes  $L$ , und (1)  $[v] = 0$  das vorhandene Gleichgewicht.  $[vv]$  stellt das axiale Trägheitsmoment für die durch den genannten Endpunkt gehende Achse vor, und (4)  $[vv] = \text{Min.}$  bedeutet wie (1)  $[v] = 0$ , daß dieser Endpunkt des Mittelwertes  $L$  den Schwerpunkt des Systems gleich gewichtiger Massenpunkte vorstellt; ganz in Übereinstimmung mit unserem praktischen Gefühl.

Zum Schluß möge noch untersucht werden, welche Werte die Summen der Quadrate der Abschlußdifferenzen in beiden Beobachtungsreihen (s. S. 18) annehmen.

Die erste Reihe liefert:

$$16 + 25 + 36 + 25 + 25 + 25 + 25 + 36 + 25 + 16 = 254 .$$

Die zweite Reihe liefert:

$$1 + 1 + 1 + 100 + 144 + 0 + 1 + 0 + 225 + 81 = 554 .$$

Es ist also, wie vorausszusehen war, die Summe der Fehlerquadrate in der zweiten Reihe größer, die Beobachtungsgenauigkeit geringer als in der ersten.

## Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

In den §§ 2 und 3 sind zwei Aufgabenfälle angedeutet worden, deren erster durch die Bedingung, daß die Summe der an den einzelnen Messungsergebnissen anzubringenden Verbesserungen gleich 0 sein soll, ( $[v] = 0$ ), eindeutig gelöst werden konnte, während dieser Bedingung im zweiten Falle eine unendlich große Zahl von Lösungen entsprach. Dies zeigt, daß beide Fälle prinzipielle Verschiedenheiten aufweisen müssen. In der Tat hat es sich im ersten um die Auswahl eines bestmöglichen Wertes für die direkt und mehrfach beobachtete Größe  $L$  gehandelt, während im zweiten Falle andere, zu ihr in Beziehung stehende Größen beobachtet wurden, durch deren Vermittlung die gesuchte Multiplikationskonstante  $x$  erschlossen werden mußte.

Im ersten Falle handelte es sich um die Ausgleichung direkter Beobachtungen, im zweiten um die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Es ist auch möglich, daß zwar die mehrfach beobachteten Größen selbst gesucht, daß sie aber unter sich nicht unabhängig sind, sondern streng zu erfüllenden Bedingungen unterliegen (Winkel im Dreieck usw.). In diesem Falle spricht man von der Ausgleichung bedingter direkter Beobachtungen. Endlich können die direkt beobachteten Größen zur Bestimmung anderer Größen dienen, die aber ihrerseits gewisse Bedingungen erfüllen müssen (z. B. Einschaltung eines durch Winkelbeobachtung bestimmten Dreiecknetzes in ein als fehlerfrei anzunehmendes Netz höherer Ordnung): man hat den Fall der Ausgleichung bedingter, vermittelnder Beobachtungen. Für jeden dieser Aufgabenfälle wird ein besonderer Gang der Lösung aufzustellen sein, der ge-

rade für ihn zweckmäßig ist. Doch ist diese Unterscheidung keineswegs so scharf, daß sich nicht auf spezielle Aufgaben sowohl die eine als die andere Lösung anwenden ließe.

Die Ausgleichung selbst kann auf rein rechnerischem Wege durchgeführt, oder durch graphische Darstellung unterstützt werden. Das erstere Verfahren hat den Vorzug größerer Genauigkeit, das letztere denjenigen größerer Übersichtlichkeit und des Erkennenlassens etwaiger bei der Beobachtung unterlaufener grober Fehler vor Abschluß der Ausgleichung.

---

## I. Abschnitt.

### Ausgleichung direkter Beobachtungen.

---

#### 1. Kapitel.

### Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

#### § 4. Untersuchung der einer Einzelbeobachtung innewohnenden Genauigkeit.

Die wichtigste Aufgabe der Ausgleichungsrechnung: Feststellung des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße, haben wir für den Fall gleich genauer, direkter Beobachtungen gelöst. Von Interesse, namentlich im Hinblick auf die Auswahl möglichst zweckmäßiger Beobachtungsmethoden ist nun noch ein Einblick in die bei der Einzelbeobachtung erreichte Genauigkeit. Wir haben zu diesem Zwecke schon auf S. 17 die durchschnittliche Abweichung  $d$  der Beobachtungen vom wahren Sollwert der beobachteten Größe berechnet. Wir haben aber dabei erkannt, daß dieser Durchschnittsbetrag  $d$  einen

Maßstab für die erreichte Genauigkeit der Einzelmessung nicht abzugeben vermag, weil Beobachtungsreihen von ganz verschiedener Zuverlässigkeit identische Werte für  $d$  ergaben.

Um die größeren Abweichungsbeträge  $v$  stärker in die Wagschale zu werfen, haben wir statt ihrer selbst eine Potenz von ihnen verglichen und hierfür die zweite Potenz gewählt. Wir haben schließlich für die richtige Auswahl des wahrscheinlichsten Wertes der Beobachtungsgröße die Bedingung festgesetzt:  $[v v] = \text{Min.}$  Diese zum Minimum zu machende Quadratsumme der Abweichungen  $v$  kann nämlich aus dreierlei Ursachen heraus einen großen Betrag erreichen: 1. durch unzuweckmäßige Auswahl des Endwertes  $L$  aus den Beobachtungswerten  $l$ , 2. durch fehlerhafte Beobachtungen  $l$  und 3. durch große Anzahl  $n$  der Beobachtungen  $l$ , also der Abweichungen  $v$ . Wurde  $L$  nach Gleichung (2) gewählt, so ist  $[v v] = \text{Min.}$ , also ein kleinerer Wert  $[v v]$  durch andere Auswahl von  $L$  nicht zu erreichen. Dann ist der Wert von  $[v v]$  lediglich noch abhängig von der Beobachtungsgenauigkeit und von der Zahl  $n$  der Beobachtungen. Da die Genauigkeit jeder Einzelbeobachtung von deren Zahl unabhängig ist, so ist zu ihrer Erkenntnis die Quadratsumme  $[v v]$  durch Division mit der Wiederholungszahl  $n$  auf das Quadrat des Fehlers einer Beobachtung zurückzuführen, und man erhält unter der Voraussetzung, daß die Abweichungen  $v_w$  wahre Beobachtungsfehler vorstellen, als Maßstab für die im Mittel bei einer Beobachtung erreichte Genauigkeit:

$$(5a) \quad \begin{cases} m^2 = \frac{[v_w v_w]}{n} \\ m = \pm \sqrt{\frac{[v_w v_w]}{n}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{mittlerer Fehler einer} \\ \text{Beobachtung.} \end{array} \right. \end{cases}$$



Die Voraussetzung, daß wir es mit wahren Beobachtungsfehlern zu tun haben, trifft in denjenigen Fällen zu, in denen der Sollwert der Beobachtungsgröße zum voraus bekannt ist (Winkelsumme im Dreieck oder im Vieleck; Summe der Projektionen der Seiten eines geschlossenen Polygons auf eine beliebige Achse; Summe der Höhenunterschiede einer Nivellementsschleife, bei welcher an identischem Punkt an- und abgeschlossen wurde usw.).

So liefert das hierhergehörige Beispiel S. 18 und 21 als mittleren Fehler einer Beobachtung der ersten Reihe

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{254}{10}} = \pm 5,04 \text{ mm},$$

als mittleren Fehler einer Beobachtung der zweiten Reihe

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{554}{10}} = \pm 7,45 \text{ mm}.$$

Der Vergleich mit dem durchschnittlichen Fehler  $d = 5 \text{ mm}$  (s. S. 18) zeigt nebenbei, daß der mittlere Fehler nicht bloß ein gerechterer, sondern auch ein strengerer Richter ist, als der durchschnittliche Fehler.

Ist der Wert der Beobachtungsgröße nicht zum voraus bekannt, muß er vielmehr erst aus einer endlichen Zahl von Beobachtungen nach Gleichung (2) erschlossen werden, so ist er selbst nicht fehlerfrei, also sind es auch nicht die aus ihm abgeleiteten Verbesserungsbeträge  $v$  der Beobachtungswerte  $l$ .

Möge der nach Gleichung (2) berechnete Mittelwert  $L$  um den nach Vorzeichen und Größe unbekanntem Betrag  $\pm M$  unrichtig sein, so daß sein wahrer (aber unzugänglicher) Wert  $= L + M$  ist, möge ferner die unzugängliche, wahre Abweichung jedes einzelnen Beobachtungswertes  $l$  von ihm mit  $v_w$ , die uns zugängliche Abweichung vom Mittelwert  $L$  mit  $v$  bezeichnet werden, so ist



$$v_{w_1} = (L + M) - l_1 = L - l_1 + M = v_1 + M$$

$$v_{w_2} = (L + M) - l_2 = L - l_2 + M = v_2 + M$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$v_{w_n} = (L + M) - l_n = L - l_n + M = v_n + M$$

$$[v_w v_w] = [v v] + n M^2 + 2 M [v]$$

und, da nach Gleichung (1)  $[v] = 0$ ,

$$(6) \qquad [v_w \cdot v_w] = [v v] + n M^2.$$

Jedes der drei Glieder ist als Summe quadratischer Einzelsummanden positiv, folglich  $[v_w v_w] > [v v]$ .

Hieraus geht hervor: Treten an Stelle der wahren Abweichungen  $v_w$  in Gleichung (5a) die wahrscheinlichen Abweichungen  $v$ , so wird dadurch der Zähler  $[v v]$  kleiner, also muß dies beim Nenner  $n$  im gleichen Verhältnis der Fall sein. Die Bestimmung des Reduktionsverhältnisses ist aber einwandfrei jetzt noch nicht möglich, weil wir den Fehler  $M$  des Mittelwertes  $L$  der Beobachtungsgröße [s. Gleichung (6)] noch nicht berechnen können. Immerhin können wir jetzt schon erkennen, daß der an Stelle von  $n$  in (5a) tretende Nenner so beschaffen sein muß, daß er: 1. im Falle mangelnder Überbestimmung, d. h. wenn nur eine Beobachtung  $l$  vorhanden ist, für die dabei erreichte Genauigkeit einen unbestimmten Wert liefert, weil diese hieraus überhaupt nicht erschlossen werden kann; 2. im Falle vorhandener Überbestimmung gegen die Wiederholungszahl  $n$  konvergiert, wie der Ausdruck  $[v v]$  gegen  $[v_w v_w]$ . Beides trifft zu für den Nenner  $n - 1$ .

Denn im Falle einer einzigen Beobachtung wird die Abweichung  $v$  ihres Resultates vom Mittelwert  $L$ , gleich 0, ebenso der Nenner  $n - 1 = 0$ , folglich

$$m^2 = \frac{[v v]}{n - 1} = \frac{0}{0} = \text{unbestimmt.}$$

Im Falle einer sehr großen Zahl  $n$  von Beobachtungen nähert sich  $L$  dem wahren Wert,  $v$  der wahren Abweichung  $v_w$ ,  $n - 1$  der Wiederholungszahl  $n$ , folglich

$$m^2 = \frac{[v v]}{n - 1} \approx \frac{[v_w v_w]}{n}.$$

Wir setzen daher vorbehaltlich später zu erbringenden Beweises (s. S. 35) unter Ersetzung der wahren, unzugänglichen Abweichung  $v_w$  durch die zugängliche Abweichung  $v$  einer Beobachtung  $l$  vom wahrscheinlichen Wert  $L$

$$(5b) \quad \left\{ \begin{array}{l} m^2 = \frac{[v v]}{n - 1} \\ m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{mittlerer Fehler einer} \\ \text{Beobachtung.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Satz. Das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Abweichungen je vom Mittelwert, dividiert durch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen.

Aus den Fehlergleichungen S. 14 und 20

$$v = L - l \quad \text{oder} \quad L = l + v$$

erkennen wir, daß die Abweichungen  $v$  Größen gleicher Art und Gattung vorstellen, wie die Beobachtungsgrößen  $l$ , sie bedeuten Verbesserungszuschläge zu den Beobachtungswerten  $l$ , welche nötig sind, um diese in den Mittelwert  $L$  überzuführen. Als benannte Größen lassen sie sich aber weder quadrieren noch differenzieren, wie dies S. 20, 25 und 26 geschah!

Den hierin liegenden Widerspruch überwinden wir, indem wir jedes  $v$  mittels Division durch seine eigene Maßeinheit auf eine unbenannte Zahl zurückführen, ohne

dabei an der absoluten Zahlengröße etwas zu ändern. Zum Schlusse führen wir dann für den mittleren Fehler  $m$  die der Verbesserung  $v$  geraubte Benennung wieder ein.

### § 5. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes $L$ und der Summe der Fehlerquadrate $[v v]$ aus den Beobachtungswerten $l$ .

Sind die Beobachtungswerte  $l$  durch große Zahlen, oder gar durch Benennungen ausgedrückt, deren Beziehung nicht dezimal ist (z. B. Winkel in alter, sexagesimaler Teilung), so wird die Ausrechnung des Mittelwertes  $L$  nach Formel (2)  $L = \frac{[l]}{n}$  sehr schwerfällig.

Führen wir dagegen einen dem Mittelwert  $L$  sich möglichst anschmiegenden Näherungswert  $N$  ein und bezeichnen die an diesem anzubringenden kleinen Zuschläge mit  $v$ , so daß

$$\begin{array}{l} \text{Beobachtungswert } l_1 = N + v_1 \\ l_2 = N + v_2 \\ \vdots \\ l_n = N + v_n \\ \hline [l] = n \cdot N + [v], \end{array}$$

so wird

$$(7) \quad L = \frac{[l]}{n} = N + \frac{[v]}{n}.$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers  $m$  einer Beobachtung brauchen wir nach Gleichung (5b) die Summe  $[v v]$  der Fehlerquadrate, welche wir durch Quadrierung der Verbesserungszuschläge  $v = L - l$  [s. Gleichung (1)] erhalten. Um die Fehlerquadratsumme direkt zu finden, setzen wir

$$\begin{array}{rcl}
 v_1 = L - l_1 & ; & v_1^2 = L^2 - 2Ll_1 + l_1^2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 v_n = L - l_n & ; & v_n^2 = L^2 - 2Ll_n + l_n^2
 \end{array}$$


---


$$[v v] = n L^2 - 2 L [l] + [l l]$$

und durch Einsetzung von

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{[l]}{n} \\ L^2 = \frac{[l]^2}{n^2} \end{array} \right\} [v v] = -\frac{[l]^2}{n} + [l l].$$

Diese Gleichung ist praktisch nicht verwertbar. Dagegen können wir sie verbinden mit der zur Ableitung von (7) verwendeten Gleichung  $v = l - N$ . Aus dieser kommt

$$\begin{array}{rcl}
 v_1^2 = l_1^2 - 2l_1 N + N^2 \\
 \vdots \\
 v_n^2 = l_n^2 - 2l_n N + N^2
 \end{array}$$


---


$$[v v] = [l l] - 2 N [l] + n \cdot N^2.$$

Durch Einsetzung von  $[l l] = [v v] + \frac{[l]^2}{n}$

und  $L = \frac{[l]}{n}$

kommt

$$[v v] = [v v] + n L^2 - 2 N \cdot n L + n N^2 = [v v] + n(L - N)^2$$

oder

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} [v v] = [v v] - n(L - N)^2 \text{ und unter Beachtung von (7)} \\ \quad \quad = [v v] - \frac{[v]^2}{n} \end{array} \right.$$

Damit läßt sich der mittlere Fehler einer Beobachtung ohne vorgängige Ausrechnung der einzelnen Beobachtungsfehler  $v$ , ja sogar ohne Berechnung des Mittel-

wertes  $L$  der Beobachtungsgröße gewinnen. Gleichung (8) zeigt in Übereinstimmung mit (4), daß für  $L \geq N$  unter allen Umständen  $[v v] > [v v]$ .

### § 6. Mittlerer Fehler $M$ des Mittelwertes $L$ aus $n$ gleich genauen Beobachtungen $l$ .

Wir haben schon S. 26 das Bedürfnis empfunden, einen Einblick in die Genauigkeit des Mittelwertes

(2)  $L = \frac{[l]}{n}$  zu erlangen. Auch praktisch ist es oft wichtiger,

die Genauigkeit des schließlichen Endwertes  $L$ , als diejenige der einzelnen Beobachtungswerte  $l$  zu kennen. Um hierüber Klarheit zu erhalten, ziehen wir in (2) den Summenzähler  $[l]$  auseinander und schreiben

$$L = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \dots + \frac{l_n}{n}.$$

Wir erkennen dann, daß von jedem Beobachtungswert  $l$  der  $n$ -te Teil in den schließlichen Mittelwert  $L$  übergeht, der sich derart aus  $n$  Teilen zusammensetzt. Unsere Aufgabe besteht daher jetzt darin, zu ergründen:

1. Welcher Teil des mittleren Fehlers  $m$  einer Beobachtung  $l$  der Größe  $L$  geht auf den Anteil  $\frac{l}{n}$  über?
2. Wie pflanzen sich die Fehler der Einzelgrößen  $\frac{l}{n}$  auf deren Summe fort?

Die Frage 1. fassen wir allgemeiner wie folgt: Wie groß ist der mittlere Fehler einer Bestimmung eines Vielfachen  $a \cdot l$  der Beobachtungsgröße  $L$ , wenn der mittlere Fehler  $m$  einer Beobachtung  $l$  bekannt und  $a$  ein fehlerfreier Faktor ist? Wir werden in § 12 die Fortpflanzung von Beobachtungsfehlern auf beliebige Funktionen der Beobachtungsgrößen allgemein behandeln. Hier wollen

wir vorläufig durch Überlegung an einem speziellen Beispiele uns Klarheit verschaffen:

Das Gewicht  $a \cdot L$  eines Wagens Kohle ist zu bestimmen aus der Anzahl  $a$  darauf geschütteter gefüllter Körbe und aus dem durch  $n$ -fache Wägung  $l_1, l_2 \dots$  gefundenen mittleren Nettogewicht  $L$  **einer** solchen Korbfüllung, wo

$$L = l_1 + v_1 = l_2 + v_2 + \dots = \frac{[l]}{n} \quad \text{und} \quad [v] = 0.$$

Würde man den ersten Beobachtungswert  $l_1$  des Nettogewichtes jener Korbfüllung der Bestimmung des Gesamtgewichtes  $aL$  zugrunde legen, so erhielte man gleichsam als dessen ersten Beobachtungswert:  $a \cdot l_1$ ,

würde man den zweiten Beobachtungswert  $l_2$  seines Nettogewichtes der Bildung von  $aL$  zugrunde legen, so erhielte man als dessen zweiten Beobachtungswert:  $a \cdot l_2$ ,

würde man den  $n$ -ten Beobachtungswert  $l_n$  jenes Nettogewichtes der Bildung von  $aL$  zugrunde legen, so erhielte man als dessen  $n$ -ten Beobachtungswert:  $a \cdot l_n$ .

Aus allen diesen  $n$  Bestimmungen des Gesamtgewichtes ergäbe sich als dessen endgültiger, bestmöglicher Mittelwert:

$$aL = \frac{a l_1 + a l_2 + \dots + a l_n}{n} = a \cdot \frac{[l]}{n}.$$

Bezeichnet man die Abweichung einer derartigen Bestimmung  $a \cdot l$  vom Mittelwert  $aL$  mit  $V$ , so wird:

$$V_1 = aL - a l_1 = a(L - l_1) = a \cdot v_1$$

$$V_2 = aL - a l_2 = a(L - l_2) = a \cdot v_2$$

⋮

$$V_n = aL - a l_n = a(L - l_n) = a \cdot v_n$$

$$[V] = [a \cdot v] = a [v] = 0 \quad \text{und} \quad [VV] = a^2 [vv].$$

Nach Gleichung (5 b) wird demnach der mittlere Fehler einer Bestimmung der Größe  $aL$ :

$$(9) \quad m_{a \cdot L} = \pm \sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{a^2 [vv]}{n-1}} = a \cdot m_l.$$

Die Frage 2. fassen wir ebenfalls allgemeiner wie folgt: Wie groß ist der mittlere Fehler der Größe

$$L = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n,$$

wenn die mittleren Fehler  $m_{L_1}, m_{L_2} \dots$  der Summanden  $L_1, L_2 \dots$  bekannt sind?

Die Art der Größenbestimmung selbst unterscheidet sich von der vorigen dadurch, daß dort der wahrscheinlichste Wert  $L$  eines, aber nur dieses einzigen Teiles der Beobachtungsgröße (durch beliebig oft wiederholte Beobachtung) ein für allemal gemessen wurde. Die gesuchte Größe wurde dann durch Multiplikation dieses Wertes mit einem (fehlerfreien) Faktor  $a$  gewonnen, während hier für jeden einzelnen der  $n$  Teile je in  $w$ -facher Wiederholung sowohl dessen Mittelwert  $L$ , als der mittlere Fehler  $m$  einer Beobachtung ermittelt wird. Angewandt auf das vorige Beispiel wird jetzt jeder einzelne Korb Kohlen, der auf den Wagen auf- oder von ihm abgeladen wurde,  $w$ -mal gewogen und hieraus gleichzeitig der mittlere Fehler einer Wägung jedes Korbes bestimmt.

Für das auf dem Wagen schließlich vorhandene Quantum Kohlen hat man daher ebenso viele (nämlich  $w$ ) Wägungen, als für jeden der  $n$  auf- oder abgeladenen Körbe ausgeführt wurden. Bezeichnet man die Ordnungszahlen der  $\left\{ \begin{array}{l} n \text{ Körbe mit Indices} \\ w \text{ Wägungen mit Akzenten} \end{array} \right\}$ , so liefert für dieses Quantum die



1-te Wägung jedes Korbes das Gewicht  $L' = l'_1 \pm \dots \pm l'_n$   
 2-te " " " " "  $L'' = l''_1 \pm \dots \pm l''_n$   
 $\vdots$   
 $w$ -te " " " " "  $L^w = l^w_1 \pm \dots \pm l^w_n$ .

Daraus ergibt sich nach Gleichung (2) das wahrscheinlichste Gesamtgewicht zu

$$L = \frac{L' + L'' + \dots + L^w}{w} = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n,$$

wenn  $L_1, L_2 \dots$  je das Mittel aus den  $w$  verschiedenen Wägungsergebnissen des 1-ten, 2-ten  $\dots$  Korbes vorstellen.

Bezeichnet man die an den einzelnen Wägungen jedes Korbes anzubringenden Verbesserungen, welche nötig sind, um die  $w$  Wägungsergebnisse des gesamten Quantum einander gleich, d. h.  $L' = L'' = \dots = L^w = L$  zu machen, unter Beibehaltung der Akzente und Indices mit  $v$ , so liefert als Gesamtgewicht des Wagens die

1-te Wägung jedes d. Körbe  $L = (l'_1 + v'_1) \pm \dots \pm (l'_n + v'_n)$   
 2-te " " " "  $L = (l''_1 + v''_1) \pm \dots \pm (l''_n + v''_n)$   
 $\vdots$   
 $w$ -te " " " "  $L = (l^w_1 + v^w_1) \pm \dots \pm (l^w_n + v^w_n)$ .  
←—————  $n$  Körbe —————→

Hieraus ergibt sich als Verbesserungszuschlag für die 1-te, 2-te  $\dots$   $w$ -te Wägung des Gesamtquantums aus der

1-ten Wägung jedes Korbes  $L - L' = V' = v'_1 \pm \dots \pm v'_n$   
 2-ten " " "  $L - L'' = V'' = v''_1 \pm \dots \pm v''_n$   
 $\vdots$   
 $w$ -ten " " "  $L - L^w = V^w = v^w_1 \pm \dots \pm v^w_n$ .

Gleichzeitig haben wir aber nach Gleichung (1) für die Abweichungen  $v$  der  $w$  verschiedenen Wägungsergebnisse eines und desselben Korbes je vom Mittelwerte:

$$\begin{aligned} [\text{Wäg.-Verbesserungen d. 1. Korbes}] &= v'_1 + \dots + v_1^w = [v_1] = 0 \\ \text{'' '' '' 2. ''} &= v'_2 + \dots + v_2^w = [v_2] = 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

woraus

$$[V] = [v_1] + [v_2] + \dots + [v_n] = 0,$$

analog Gleichung (1).

Nach Gleichung (5b) haben wir endlich als Quadrat des mittleren Fehlers einer Wägung

$$\begin{aligned} \text{des 1-ten Korbes } m_{L_1}^2 &= \frac{v_1'^2 + v_1''^2 + \dots + v_1^{w^2}}{w-1} = \frac{[v_1^2]}{w-1} \\ \text{'' 2-ten '' } m_{L_2}^2 &= \frac{v_2'^2 + v_2''^2 + \dots + v_2^{w^2}}{w-1} = \frac{[v_2^2]}{w-1} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

und analog als mittleren Fehler einer Wägung des ganzen Wagens

$$\begin{aligned} m_{L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n} &= \pm \sqrt{\frac{[VV]}{w-1}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{[v_1^2] + [v_2^2] + \dots + [v_n^2] \pm 2v'_1 v'_2 \pm \dots \pm 2v_{n-1}^w v_n^w}{w-1}} \end{aligned}$$

Entsprechend der Eigenschaft der  $v$  als zufälliger Fehler und der Gleichung  $[V] = [v_1] + \dots = 0$  sind die einzelnen Summanden von der Form  $2v_r v_{r+1}$  im Zähler des Radikanten im Gegensatz zu den quadratischen Summanden gleich wahrscheinlich positiv, wie negativ. Ihre algebraische Summe tritt also gegenüber derjenigen der quadratischen Summanden um so mehr zurück, als

sie überdies als Produkte ungleicher Faktoren durchschnittlich kleiner sind, als letztere.

Trotzdem die Zahl dieser doppelten Produkte  $= w \binom{n}{2}$ , also  $(n - 1)$ -mal größer ist, als die Zahl  $w \cdot n$  der quadratischen Summanden, läßt sich demnach ihre Summe gegenüber derjenigen der letzteren vernachlässigen, so daß wir erhalten:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} m_{L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n} &\sim \pm \sqrt{\frac{[v_1^2] + [v_2^2] + \dots + [v_n^2]}{w - 1}} \\ &\sim \pm \sqrt{\frac{[v_1^2]}{w - 1} + \frac{[v_2^2]}{w - 1} + \dots + \frac{[v_n^2]}{w - 1}} \\ &\sim \pm \sqrt{m_{L_1}^2 + m_{L_2}^2 + \dots + m_{L_n}^2}. \end{aligned} \right.$$

Nun kehren wir zur eigentlichen Aufgabe des § 6 zurück. Gleichung (9) zeigt, daß, wenn einer Bestimmung der Größe  $L$  der mittlere Fehler  $m$  zukommt, auf die durch Multiplikation erlangte  $a$ -fache Größe auch der  $a$ -fache Fehler, auf die  $\frac{1}{n}$ -fache Größe also der Fehler  $\frac{m}{n}$  übergeht. Demgemäß kommt jedem der Teile  $\frac{l_1}{n}, \frac{l_2}{n}, \dots, \frac{l_n}{n}$ , aus denen sich (s. S. 30) der Mittelwert  $L$  gerade so zusammensetzt, als ob jeder von ihnen nur einmal beobachtet worden wäre, der mittlere Fehler  $\frac{m}{n}$  zu, und der Summe der Teile, d. h. dem Resultat  $L$  aus  $n$  gleich genauen Beobachtungen  $l$  je vom mittleren Fehler  $m$  nach Gleichung (10) der mittlere Fehler:

$$(11) M_L = \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_1 + \underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_2 + \dots + \underbrace{\left(\frac{m}{n}\right)^2}_n} = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Die Gleichung (11) kann man sich durch folgende Überlegung plausibel machen. Die Genauigkeit des Resultates aus einer Reihe gleich genauer Beobachtungen kann nur abhängen von der Genauigkeit der Einzelbeobachtungen und von ihrer zur Mittelbildung verwendeten Anzahl. Kann man — etwa

durch Wahl einer besseren Beobachtungsmethode — den Fehler jeder Einzelbeobachtung  $l$  reduzieren, so wird im gleichen Verhältnis auch der Fehler des Mittelwertes  $L$  abnehmen. Ebenso läßt sich der letztere aber auch verringern durch Steigerung der Wiederholungszahl  $n$ . Nur wird die Wirkung dieser Genauigkeitssteigerung unmöglich proportional zur Wiederholungszahl sein können, weil der wahre Wert der Beobachtungsgröße, d. h. der Fehler 0 für den Mittelwert erst durch  $\infty$  viele Beobachtungswiederholungen erzielt werden könnte (s. S. 15). Denkt man sich die Zahl der Wiederholungen als Abszissen, die zugehörigen, im Mittelwert  $L$  noch zurückbleibenden Fehler als Ordinaten aufgetragen und die so erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie verbunden, so muß demnach diese Linie sich der Abszissenachse asymptotisch nähern. Dies trifft zu für

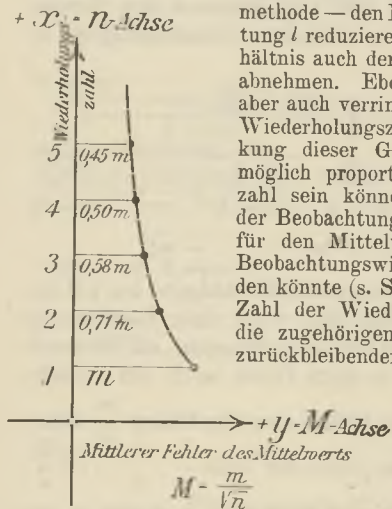


Fig. 3.

(s. Fig. 3). Die langsame Abnahme von  $M$  im Falle auch erheblicher Steigerung der Wiederholungszahl über 2 oder 3 hinaus zeigt, daß es i. A. viel wirtschaftlicher ist, etwa wünschenswerte Genauigkeitssteigerung durch Verbesserung der Beobachtungsmethoden und -Instrumente, als durch Steigerung der Wiederholungszahl herbeizuführen.

Setzen wir den gefundenen Ausdruck für den mittleren Fehler  $M$  des Mittelwertes  $L$  in Gleichung (6) S. 26 ein, so erhalten wir

$$[v_w v_w] = [v v] + m^2$$

die Beziehung  $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$

und durch Benutzung von Gleichung (5a)

$$n \cdot m^2 = [v_v v_v] = [v v] + m^2,$$

woraus

$$m^2 = \frac{[v v]}{n - 1}, \quad m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n - 1}}$$

in Übereinstimmung mit der S. 27 durch direkte Überlegung gewonnenen Gleichung (5b).

### § 7. Größter Betrag des unvermeidlichen Beobachtungsfehlers.

Für viele praktische Aufgaben ist die Kenntnis des mittleren Fehlers von geringerer Bedeutung, als diejenige des äußerstenfalls zu befürchtenden Maximalfehlers.

Soll z. B. eine bauliche Anlage (Brücke usw.) auf Grund vorgängiger Messung konstruiert und zum Versetzen fertig hergerichtet werden, so darf der Fehler der Maßangabe ohne erhebliche Unzuträglichkeiten einen gewissen Maximalbetrag nicht überschreiten. Ebenso werden amtliche Genauigkeitsvorschriften da, wo solche im öffentlichen Verkehr nötig werden, die äußerstenfalls noch zulässige Abweichung des durch Messung oder Wägung usw. ermittelten Maßes eines Gegenstandes vom richtigen Betrag feststellen müssen. —

In Übereinstimmung mit dem Bisherigen nehmen wir an, daß grobe Fehler durch entsprechende Sicherungsmaßregeln erkannt und aus den Beobachtungsergebnissen ausgeschieden sind, ehe die Weiterverarbeitung der letzteren beginnt. Diese enthalten also nur noch die aus mehr oder weniger Fehlerelementen sich zusammensetzenden unvermeidlichen Fehler. Die Fehlerelemente sind uns nun weder nach Ursache, noch nach Größe und Vorzeichen im einzelnen sicher bekannt. Wir wissen von ihnen nur, daß sie gleich wahrscheinlich positiv, wie negativ; bald größer, bald kleiner sind, sich das eine Mal häufen, das andere Mal

ganz oder teilweise aufheben können. Der mittlere Fehler einer Beobachtung ist ihre im Mittel, d. h. unter Ausschluß der besonders günstigen und der besonders ungünstigen Fälle am Schlußresultat in die Erscheinung tretende Summe. Aber auch im ungünstigsten Falle, in welchem die einzelnen Fehlerelemente ihren Maximalbetrag und dazu noch gleiches Vorzeichen erlangen, wird ihre Summe, d. h. die Abweichung irgend eines Beobachtungsvom wahren oder vom Mittelwert ein gewisses Maß nicht überschreiten, das abhängig ist einerseits von der möglichen Größe der Fehlerelemente, d. h. der Beobachtungsgenauigkeit bzw. dem mittleren Beobachtungsfehler\*), und andererseits von der Zahl der Beobachtungswiederholungen. Dieses Maß ist der Maximalfehler einer Beobachtung. Ihn bei irgend einer der Beobachtungen einmal zu erreichen ist um so mehr Wahrscheinlichkeit vorhanden, je öfter die Beobachtung wiederholt wird.

Durch nähere Untersuchung auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man, daß durch Häufung der unvermeidlichen Fehlerelemente der:

| 1fache mittl. Fehler $m$ unter | 3 Beob. wahrscheinl. 1 mal |
|--------------------------------|----------------------------|
| 2 „ „ „ $2m$ „                 | 22 „ „ 1 „                 |
| 3 „ „ „ $3m$ „                 | 368 „ „ 1 „                |
| 4 „ „ „ $4m$ „                 | 15800 „ „ 1 „              |
| 5 „ „ „ $5m$ „                 | 1750000 „ „ 1 „            |

überschritten wird. (Vgl. hierüber Koll, Methode d. kl. Quadr.; Jordan, Ausgleichungsrechnung u. a. a. O.)\*\*)

\*) Die mehrfache Messung z. B. einer Streckenlänge wird erheblich größere unvermeidliche Abweichungen gegenüber dem Mittelwert ergeben, wenn sie mittels optischer Distanzmessung, oder Abschreitens, oder gar Schätzens, als wenn sie normalerweise mit Meßgeräten erfolgte.

\*\*\*) Läßt man von einer und derselben Stelle einer schiefen Ebene aus auf ihr nach Größe und Gewicht gleiche Kugeln,



Benützt man also, wie man zumeist genötigt ist, die Größe der auftretenden Beobachtungsdifferenz zur Entscheidung darüber, ob man es im einzelnen Falle mit einem groben (durch Nachbeobachtung auszumerkenden), oder mit einem unvermeidlichen (einteilbaren) Fehler zu tun hat, so läuft man Gefahr, ohne daß tatsächlich ein grober Fehler vorläge, der zur Nachbeobachtung zwingt: unter je 3 Beob. 1 wiederholen zu müssen, wenn man 1 *m*  
 " " 22 " 1 " " " " " 2 *m*  
 " " 368 " 1 " " " " " 3 *m*  
 als äußerste Abweichung einer Beobachtung vom Mittelwert noch zuläßt.

Die Annahme des dreifachen mittleren, als äußerstenfalls zu tolerierenden Maximalfehlers einer Beobachtung:

$$(12) \quad F_{\text{Max}} = 3 m$$

ist in der Vermessungspraxis allgemein.

Sie zwingt im Laufe eines Jahres zur unverschuldeten Aufwendung einer Tagesarbeit für Nachmessungen, weil grobe Fehler da vermutet wurden, wo der durch unglückliche Häufung der Fehlerelemente entstandene unvermeidliche den dreifachen mittleren Fehler zufälligerweise überschritt, läßt aber andererseits auch tatsächlich grobe Fehler bis zum Betrage 3 *m* durchschlüpfen!

eine nach der anderen, abrollen, und bringt man, beliebig verteilt, Hindernisse (etwa in Form eingeschlagener Stiftchen) an, welche die abrollenden Körper vorübergehend ebenso vom richtigen Wege (der Linie des stärksten Gefälles) ablenken, wie die während der Beobachtung auftretenden Fehlerelemente das Messungsergebnis vom Ziele der Messung, dem wahren Werte der Beobachtungsgröße, so werden die Kugeln den Fuß der Ebene in verschiedenen Punkten erreichen. Größere Abweichungen vom mittleren Ort des Auftreffens werden aber, entsprechend den vorstehenden Zahlen, viel seltener sein als kleine. Eine gewisse, nur bei sehr vielen Kugeln einmal erreichte Maximalabweichung wird keine der Kugeln überschreiten.

## 2. Kapitel.

**Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.****§ 8. Wahrscheinlichster Wert einer Beobachtungsgröße aus einer Reihe verschieden genauer Beobachtungen. Gewicht der Beobachtung. Gewichtseinheit.**

Wir haben in Gleichung (2) das einfache arithmetische Mittel als den wahrscheinlichsten Wert einer Beobachtungsgröße festgestellt:  $L = \frac{\sum l}{n}$ , unter der Voraussetzung,

daß den Beobachtungswerten  $l$  gleiche Genauigkeit inneohnt. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, d. h. ist ein Beobachtungswert einer schärferen Beobachtung entsprungen, als der andere, so wäre es eine unbillige Zurücksetzung des genaueren ersteren, wollte man dem letzteren wahllos denselben Einfluß auf die Gestaltung des endgültigen Resultates einräumen, wie ihm. Niemanden würde es z. B. einfallen, als wahrscheinlichsten Wert  $L$  für eine Streckenlänge das einfache arithmetische Mittel zweier Beobachtungswerte  $l$  einzuführen, deren einer mittels genauer Meßgeräte und -Methoden, der andere durch bloßes Abschreiten erlangt wurde! Dagegen verursacht die Frage, auf welche Weise der verschiedenen Zuverlässigkeit der Einzelbeobachtungen bei der Bildung des gemeinsamen Endresultates Rechnung getragen werden soll, zunächst noch Schwierigkeiten\*).

\*) Diese Schwierigkeiten können dazu zwingen, vorübergehend, d. h. bis zu ihrer Überwindung, entweder auf die differentielle Behandlung verschieden genauer Beobachtungen, oder auf die Mitbenützung weniger zuverlässiger Beobach-

Der Unterschied in der Genauigkeit der beobachteten Einzelwerte kann verschiedenerlei Ursachen entspringen. Hat z. B. die mehrfache Beobachtung einer Größe  $L$

$n_1$ -mal den Wert  $l_1$   
 $n_2$ -mal „ „  $l_2$   
 $n_n$ -mal „ „  $l_n$

ergeben, so ist ohne weiteres klar, daß nicht etwa

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} \text{ (?)}$$

sondern nach Gleichung (2) zu setzen ist:

$$(13a) \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{\overbrace{l_1 + \dots + l_1}^{n_1} + \overbrace{l_2 + \dots + l_2}^{n_2} + \dots + \overbrace{l_n + \dots + l_n}^{n_n}}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} \\ \quad = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2 + \dots + n_n l_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} = \frac{[n l]}{[l]} \end{array} \right.$$

Den fehlerfreien Zahlenwert  $n$ , welcher im vorliegenden Falle angibt, wie oft ein und derselbe Wert  $l$  bei mehrfacher Beobachtung einer gewissen Größe aufgetreten ist, nennt man das ihm zukommende „Gewicht“.

Es ist nun aber auch denkbar, daß die Werte  $l_1$  bzw.  $l_2 \dots$  nicht eigentliche Beobachtungswerte darstellen, sondern selbst wieder entstanden sind als Mittel aus  $n_1$  bzw.  $n_2 \dots$ , Beobachtungen von durchweg gleicher Genauigkeit, die man aus irgendwelchen Gründen (z. B. infolge zeitlicher Beobachtungsunterbrechung) gruppenweise zusammengefaßt hat.

tungen bei der Bildung des Endergebnisses überhaupt zu verzichten. Dies geschieht z. B. in bezug auf eine vielumstrittene, häufig mehr nach politischen, als sachlichen Erwägungen beurteilte Frage: die des politischen Wahlrechtes (allgemeines, gleiches Wahlrecht, Ausschluß als inferior gehaltenen Personen vom Wahlrecht).

Bezeichnen wir sie zur Unterscheidung gegen vorhin diesmal mit  $l', l'' \dots$  und die zu ihrer Gewinnung verwendeten Urbeobachtungen mit

$$l'_1 l'_2 \dots l'_{n_1}; \quad l''_1 l''_2 \dots l''_{n_2}; \quad l''_1 l''_2 \dots l''_{n_n},$$

so daß nach Gleichung (2) gewonnen wurde

$$l' = \frac{[l']}{n_1}, \quad l'' = \frac{[l'']}{n_2} \dots l'' = \frac{[l'']}{n_n},$$

so könnten wir zur Bildung des Endwertes  $L$  die ursprünglichen Beobachtungswerte benützen, d. h. die bereits gemittelten Werte  $l'$  wieder auseinanderziehen. Gleichung (2) würde dann liefern:

$$\begin{aligned} L &= \frac{l'_1 + l'_2 + \dots + l'_{n_1} + l''_1 + \dots + l''_{n_2} + \dots + l''_1 + \dots + l''_{n_n}}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} \\ &= \frac{[l'] + [l''] + \dots + [l'']}{n_1 + n_2 + \dots + n_n}. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Gleichung (2) auch  $n_1 \cdot l' = [l']$  usf., so daß der obige Bruch übergeht in

$$(13b) \quad L = \frac{n_1 l' + n_2 l'' + \dots + n_n l''}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} = \frac{[n l']}{[n]},$$

wo  $l'$  die aus den Urbeobachtungen gewonnenen Zwischenmittel und  $n$  die dazu jeweils verwendete Anzahl der ersteren vorstellen.

Die Gleichung (13b) entspricht vollkommen der Gleichung (13a) und zeigt, daß das jedem Einzelwert zukommende Gewicht  $n$  auch gedeutet werden kann als Anzahl der zu seiner Bildung verwendeten gleich genauen Urbeobachtungen.

Der Wert  $L$  des endgültigen Mittels der Beobachtungsgröße bleibt ferner unverändert, wenn man jedes

der Gewichte  $n$  mit einer konstanten Zahl  $q$  multipliziert, denn man hat:

$$L = \frac{n_1 l' + n_2 l'' \dots}{n_1 + n_2 + \dots} = \frac{q n_1 l' + q n_2 l'' + \dots + q n_n l^n}{q n_1 + q n_2 + \dots + q n_n}$$

oder durch Einsetzung von  $q n = p$

$$(13c) \quad L = \frac{p_1 l' + p_2 l'' + \dots + p_n l^n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[p l']}{[p]}$$

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, die Beobachtungen seien ursprünglich von gleicher Genauigkeit und ihre in Gleichung (13a) bis (13c) einzuführenden Beträge  $l$  bzw.  $l'$  nur deshalb verschiedenwertig, weil sie als Extrakt aus einer verschieden großen Zahl von Urbeobachtungen gewonnen seien. Die Gewichte ergaben sich in diesem Falle gleich, oder proportional den Repetitionszahlen.

Entspringt die Verschiedenwertigkeit anderen Ursachen, z. B. der Verwendung verschieden genauer Instrumente oder Beobachtungsmethoden usw., so müssen die den einzelnen Beobachtungswerten  $l$  zukommenden Gewichte  $p$  erst erschlossen werden, etwa aus der ihnen innewohnenden Genauigkeit, d. h. ihrem irgendwie festgestellten mittleren Fehler  $m$ . Möge der mittlere Fehler  $m$  einer solchen Beobachtung  $l$  bekannt, derjenige einer — mit irgend einem Instrument, nach irgend einer Methode, oder vielleicht nur gedachten, überhaupt nicht ausgeführten — Normalbeobachtung =  $\mu$  festgesetzt sein, so kann man jeden der Beobachtungswerte  $l$  sich gewonnen denken als Mittel aus einer Anzahl  $p$  solcher Normalbeobachtungen, durch deren Zusammenfassung statt des Einheitsfehlers  $\mu$ , für das Zwischenresultat  $l_1 \dots$  der mittlere Fehler  $m_1 \dots$  erzielt wurde. Die hierfür nötige Zahl  $p$  von Normalbeobachtungen stellt vor: das

Gewicht einer solchen wirklichen Beobachtung und ergibt sich nach Gleichung (11) aus

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}$$

zu

$$(14a) \quad p = \frac{\mu^2}{m^2}.$$

Die nach dem Vorstehenden eventuell nur gedachte (nicht wirklich ausgeführte) Normalbeobachtung heißt „Gewichtseinheit“, ihr mittlerer Fehler  $\mu$  „mittlerer Fehler der Gewichtseinheit“. Damit geht die Gleichung (13b) bzw. (13c) über in

$$(13d) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{[pl]}{[p]} = \frac{\frac{\mu^2}{m_1^2} l_1 + \frac{\mu^2}{m_2^2} l_2 + \dots + \frac{\mu^2}{m_n^2} l_n}{\frac{\mu^2}{m_1^2} + \frac{\mu^2}{m_2^2} + \dots + \frac{\mu^2}{m_n^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{m_1^2} l_1 + \frac{1}{m_2^2} l_2 + \dots + \frac{1}{m_n^2} l_n}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \dots + \frac{1}{m_n^2}} = \frac{\left[ \frac{l}{m} \right]}{\left[ \frac{1}{m} \right]} \end{aligned} \right.$$

Das Verschwinden von  $\mu$  aus der Gleichung (13d) sagt: Das Resultat  $L$  einer Beobachtungsreihe wird durch veränderte Annahme der Gewichtseinheit nicht geändert.

Sind endlich die Beobachtungen  $l$  nicht bloß mit verschiedenen großen mittleren Fehlern  $m$  behaftet, sondern die in (13d) einzuführenden Werte  $l$  selbst wieder je aus einer veränderlichen Zahl  $n$  solcher Beobachtungen gemittelt, so wächst ihr Gewicht entsprechend Gleichung (13a) proportional dieser Wiederholungszahl und es ist allgemein:



das Gewicht  $p$  des aus  $n$ -facher, je mit dem mittleren Fehler  $m$  behafteter Wiederholung erschlossenen Beobachtungswertes

$$(14) \quad p = \frac{n \cdot \mu^2}{m^2},$$

der wahrscheinlichste Wert, das „allgemeine arithmetische Mittel“ aus einer Reihe verschieden genauer Beobachtungen

$$(13) \quad L = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{\left[ \frac{n \mu^2 l}{m^2} \right]}{\left[ \frac{n \mu^2}{m^2} \right]}.$$

Aus (14a) ergibt sich für das Verhältnis der Gewichte zweier, aus gleich oftmaliger Wiederholung ungleich genauer Beobachtung entsprungener Beobachtungswerte  $l_1$  und  $l_2$ , denen bzw. die mittleren Fehler  $m_1$  und  $m_2$  zukommen:

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\mu^2}{m_1^2} \\ p_2 &= \frac{\mu^2}{m_2^2} \end{aligned} \right\} p_1 : p_2 = m_2^2 : m_1^2$$

$$m_1 : m_2 = \sqrt{p_2} : \sqrt{p_1},$$

d. h. die mittleren Fehler verhalten sich umgekehrt, wie ihre Gewichtswurzeln.

Die Gleichung (13) läßt eine schöne Deutung aus dem Gebiete der Mechanik zu: Denkt man sich die Beobachtungswerte  $l$  als Ordinaten zu einer beliebigen Abszisse aufgetragen und die Endpunkte je mit dem Gewicht  $p$  der zugehörigen Beobachtung behaftet, so bezeichnet das end-

gültige Mittel  $L$  die Ordinate des Schwerpunktes des so gewonnenen Systems von Massenpunkten, weil die Summe der statischen Momente ist  $[p]L - [pl] = 0$ .

### § 9. Eigenschaften des allgemeinen arithmetischen Mittels.

Wir haben in Gleichung (13) für den endgültigen Wert  $L$  aus einer Reihe verschieden genauer Beobachtungen  $l$ , denen die Gewichte  $p$  zukommen, ermittelt:

$$L = \frac{[pl]}{[p]}.$$

Rückwärts können wir jetzt die Verbesserungen (Zuschläge)  $v$  berechnen, welche an den einzelnen Beobachtungswerten  $l$  anzubringen sind, um sie zum Mittelwert zu ergänzen:

$$l_1 + v_1 = L, \quad \text{also} \quad v_1 = L - l_1$$

analog

$$v_2 = L - l_2.$$

$$\vdots$$

Hieraus erhalten wir

$$p_1 v_1 = p_1 L - p_1 l_1$$

$$\vdots$$

$$p_n v_n = p_n L - p_n l_n$$


---


$$(16) \quad p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots + p_n v_n \equiv \underline{[pv]} = L[p] - [pl]$$

wegen Gleichung (13)            = 0,

übereinstimmend mit Gleichung (1), wo  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$  und  $[v] = 0$  war. Gleichung (16) liefert eine wertvolle Rechenprobe für die richtige Bildung des Mittelwertes  $L$ . Sie zeigt aber auch eine schöne Analogie mit der Statik (Kräftepolygon).

Wir haben schon im vorigen Paragraphen aus der Gleichung  $[p] L - [p l] = 0$  erkannt, daß der endgültige Mittelwert  $L$  die Ordinate des Schwerpunktes vorstellt, eines Systems von Massenpunkten (nämlich der Endpunkte der Ordinaten  $l$ ), wenn man jeden von ihnen mit dem der betreffenden Beobachtung  $l$  zugehörigen Gewichte  $p$  behaftet. Die Abstände der einzelnen Massenpunkte von der durch den Schwerpunkt gezogenen Parallelen zur  $x$ -Achse sind dann  $L - l = v$  und es muß sein — als Eigenschaft des Schwerpunktes — das

$$(17) \quad \equiv [p v v] = \text{Min.}$$

Zur Probe bilden wir

$$\begin{aligned} v_1^2 &= L^2 - 2 L l_1 + l_1^2 \\ &\vdots \\ v_n^2 &= L^2 - 2 L l_n + l_n^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} p_1 v_1 v_1 &= p_1 L^2 - 2 p_1 L l_1 + p_1 l_1^2 \\ &\vdots \\ p_n v_n v_n &= p_n L^2 - 2 p_n L l_n + p_n l_n^2 \end{aligned}$$

---


$$[p v v] = L^2 [p] - 2 L [p l] + [p l l].$$

Verlangen wir nun die Auswahl des endgültigen Wertes  $L$  so, daß

$$[p v v] = \text{Min.},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d [p v v]}{d L} &= 2 L [p] - 2 [p l] = 0 \\ L &= \frac{[p l]}{[p]} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (13) und mit Gleichung (4), wenn man beachtet, daß die Gewichte  $p$  der einzelnen Beobachtungswerte dort  $= 1$  waren.

### § 10. Praktische Ausrechnung des Mittelwertes $L$ und des Trägheitsmomentes $[p v v]$ .

Die Berechnung des Mittelwertes  $L$  mittels Gleichung (13) ist schwerfällig. Führen wir dagegen einen Näherungswert  $N$  möglichst nahe bei  $L$  ein und betrachten als neue Unbekannte den an ihm anzubringenden Zuschlag  $x$ , so daß  $L = N + x$ , zerlegen wir ferner die Beobachtungswerte  $l$  in zwei Summanden, so daß

$$\begin{aligned} l_1 &= N + v_1 \\ &\vdots \\ l_n &= N + v_n, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} p_1 l_1 &= p_1 N + p_1 v_1 \\ &\vdots \\ p_n l_n &= p_n N + p_n v_n, \end{aligned}$$

somit  
und

$$[p l] = N [p] + [p v]$$

$$(18) \quad \underline{L = \frac{[p l]}{[p]} = N + \frac{[p v]}{[p]}}$$

analog Gleichung (7), wenn man beachtet, daß jedes Gewicht  $p$  dort  $= 1$  war.

Den Wert des Trägheitsmomentes  $[p v v]$  entwickeln wir wie folgt:

$$v_1 = l_1 - N,$$

also

$$v_1^2 = l_1^2 - 2 l_1 N + N^2$$

und

$$\begin{aligned} p_1 v_1 v_1 &= p_1 l_1^2 - 2 p_1 l_1 N + p_1 N^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\underline{[p v v] = [p l l] - 2 N [p l] + N^2 [p].}$$

Um  $[p l l]$  zu eliminieren und gleichzeitig  $[p v v]$  in die Gleichung einzuführen, substituieren wir aus der S. 47 angeschriebenen Minimumsbedingung

$$[p v v] = L^2 [p] - 2 L [p l] + [p l l],$$

oder weil  $L = \frac{[p l]}{[p]}$

$$[p v v] = \frac{[p l]^2}{[p]} - 2 \frac{[p l]^2}{[p]} + [p l l],$$

wodurch

$$\begin{aligned} [p v v] &= [p v v] + \frac{[p l]^2}{[p]} - 2 N [p l] + N^2 [p] \\ &= [p v v] + [p] \left( \frac{[p l]}{[p]} - N \right)^2, \end{aligned}$$

also (in Übereinstimmung mit Gleichung (8), wo  $p_1 = p_2 = \dots = 1$ )

$$(19) \quad \underline{[p v v] = [p v v] - [p] (L - N)^2.}$$

Der Subtrahend ist unter allen Umständen positiv, also  $[p v v] < [p v v]$ , solange  $L - N$  nicht gleich 0, in Übereinstimmung mit Gleichung (17).

### § 11. Erreichte Beobachtungsgenauigkeit. Gewicht und Genauigkeit des Endwertes.

Im § 8 haben wir festgestellt, daß das Gewicht  $p$  einer Beobachtung  $l$  nichts anderes ist, als diejenige Anzahl von (wirklich ausgeführten oder nur gedachten) Beobachtungswiederholungen je vom mittleren Fehler  $\mu$ , welche nötig ist, um den mittleren Fehler  $m$  der  $l$  zu erreichen. Dasselbe trifft natürlich auch zu für das Gewicht  $P$  des endgültigen Wertes  $L$ : es ist gleich der Anzahl der zur Erzielung seines mittleren Fehlers  $M$  benötigten Beobachtungen je vom mittleren Fehler  $\mu$ . Sind die zur

Ermittlung des Endwertes  $L$  benützten Beobachtungswerte  $l$  ungleich genau und kommt dem Beobachtungswerte:

$$\begin{array}{cccccccccccc} l_1 & \text{d.} & \text{Gewicht} & p_1 & \text{zu, so sind zu seiner Bildg.} & p_1 & \text{Beob. v. Gew.} & 1 \\ l_2 & \text{"} & \text{"} & p_2 & \text{"} & \text{"} & \text{"} & 1 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \end{array}$$

verwendet worden. Die Zahl der zur Bildung des Endwertes  $L$  verwendeten — gleichgültig, ob tatsächlich ausgeführten oder (vgl. § 8) nur substituierten — Beobachtungen vom Gewicht 1 ist daher

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad \text{d. h.}$$

der aus einer Anzahl von Beobachtungswerten  $l_1, l_2, \dots$ , denen bzw. die Gewichte  $p_1, p_2, \dots$  zukommen, gebildete Endwert  $L$  hat das Gewicht

$$(20) \quad P_L = [p].$$

Diese Eigenschaft des Endwertes  $L$  entspricht der in §§ 8 und 9 gegebenen statischen Deutung: Die im Schwerpunkt angreifende Gegenresultante muß beim Vorhandensein nur parallel wirkender Einzelkräfte  $p$  gleich der Summe der letzteren sein, wenn Gleichgewicht bestehen soll.

Ist — etwa aus der Beobachtungsreihe heraus oder durch Schätzung — der mittlere Fehler  $\mu$  einer Normalbeobachtung (Gewichtseinheit) bekannt, so sind wir jetzt imstande, sowohl den mittleren Fehler  $m_r$  irgend eines Beobachtungswertes  $l_r$  als auch den mittleren Fehler  $M$  des Endwertes  $L$  abzuleiten. Die Gleichung (15) liefert hierfür:

$$\mu^2 : m_r^2 = p_r : 1, \text{ also } m_r^2 = \frac{\mu^2}{p_r} \quad (21)$$

$$\mu^2 : M^2 = P : 1, \text{ also } \left\{ \begin{array}{l} M^2 = \frac{\mu^2}{P} = \frac{\mu^2}{[p]} \\ \frac{1}{M^2} = \frac{p_1}{\mu^2} + \frac{p_2}{\mu^2} + \dots \\ \quad = \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \dots = \left[ \frac{1}{m m} \right] \end{array} \right\} \quad (22)$$

Bei der Ableitung der Gleichungen (20) bis (22) haben wir vorausgesetzt, es sei nicht bloß das Gewicht  $p$  jedes einzelnen Beobachtungswertes  $l$ , sondern auch der mittlere Fehler  $\mu$  der Gewichtseinheit von vornherein bekannt, (etwa bei Bildung der in die Rechnung einzuführenden Werte  $l$  als Teilmittel aus gleich genauen, wirklich ausgeführten Reihen von Normalbeobachtungen erschlossen). Sie benützend, ist es gelungen, vor der Ausgleichung der Beobachtungen und der Ausrechnung des Endwertes  $L$  die ihm innewohnende Genauigkeit, seinen mittleren Fehler  $M$ , zu ermitteln: auf die Kenntnis von  $p$  und  $\mu$  gründete sich die Ableitung von  $P$ ,  $m$  und  $M$ .

In vielen praktischen Fällen der Vereinigung ungleichwertiger Beobachtungsergebnisse ist aber neben deren Werten  $l$  nur ihr Gewicht  $p$  oder ihr mittlerer Fehler  $m$  bekannt. Auch in diesem Falle muß uns ein Einblick in die erreichte Beobachtungsgenauigkeit möglich sein, denn wir können nach Gleichung (13) den Endwert der Beobachtungsgröße  $L = \frac{[p l]}{[p]}$  und nach Gleichung (16) die an den Beobachtungswerten anzubringenden Zuschläge  $v$  berechnen:



$$\begin{aligned} v_1 &= L - l_1 \\ v_2 &= L - l_2 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Je kleiner die nötigen Zuschläge („Verbesserungen“)  $v$  sind, um jeden Beobachtungswert  $l$  zum wahrscheinlichen, dem Endwert  $L$ , zu ergänzen, um so genauer sind offenbar die Beobachtungen  $l$  ausgeführt, um so sicherer ist also auch der Endwert  $L$  bestimmt.

Die Genauigkeitsermittlung stützt sich in diesem Falle auf das Ergebnis  $L$  der Ausgleichung, ein etwa daraus errechneter mittlerer Fehler  $m$  der Beobachtungswerte  $l$ , und  $M$  des Endwertes  $L$ , muß im Gegensatz zum Vorhergehenden als mittlerer Fehler nach der Ausgleichung bezeichnet werden. Selbstverständlich müßten, strenggenommen, der mittlere Fehler vor und der mittlere Fehler nach der Ausgleichung, da, wo beide sich überhaupt berechnen lassen, einander gleich sein. Entgegengesetzten Falles wäre zu ergründen, wodurch eine Verschiedenheit beider Werte für dieselbe Größe verursacht werden kann (s. S. 58).

Wären statt der  $n$  Beobachtungswerte  $l_1 \dots l_n$ , denen je bzw. die Gewichte  $p_1 \dots p_n$  zukommen, die Werte  $\tilde{l}$  der — gleichgültig, ob tatsächlich ausgeführten oder nur gedachten — Urbeobachtungen je vom Gewicht 1 bekannt, von denen

$$\begin{aligned} p_1 \text{ zur Ermittlung des Wertes } l_1 &= \frac{\lambda'_1 + \lambda''_1 + \dots + \lambda_1^{p_1}}{p_1} \\ &\vdots \\ p_n \text{ „ „ „ „ } l_n &= \frac{\lambda'_n + \lambda''_n + \dots + \lambda_n^{p_n}}{p_n} \\ [p] \text{ „ „ „ „ } L &= \frac{[\lambda]}{[p]} \end{aligned}$$

dienten, so hätte man den Fall gleich genauer Beobachtungen. Man erhielte nach Gleichung (5a) und

(5 b) den mittleren Fehler einer solchen Urbeobachtung

$$(23) \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[\varphi_w \varphi_w]}{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[\varphi \varphi]}{[p] - 1}},$$

wenn die Werte  $\varphi$  die Verbesserungszuschläge darstellen, welche jeden eingewichtigen Beobachtungswert  $\lambda$  zum Endwerte  $L$  ergänzen und welche sich aus den Fehlergleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \varphi_1^1 &= L - \lambda_1^1 \\ &\vdots \\ \varphi_1^{p_1} &= L - \lambda_1^{p_1} \\ &\vdots \\ \varphi_n^{p_n} &= L - \lambda_n^{p_n}. \end{aligned}$$

Je größer die Zahl der eingewichtigen Urbeobachtungen  $\lambda$  und ihre Genauigkeit ist, um so näher kommt der Endwert  $L$  dem wahren Wert, um so näher kommen also die Verbesserungszuschläge  $\varphi$  den wahren Verbesserungen  $\varphi_w$  der Urbeobachtungen  $\lambda$ , und wir können nach Gleichung (5 a) sehr genähert setzen: Mittlerer Fehler einer Urbeobachtung  $\lambda$ , berechnet aus der:

$$\begin{array}{ll} \text{1-ten Beobachtungsgruppe} & l_1 \div \cdot \mu = \pm \sqrt{\frac{[\varphi_1 \varphi_1]}{p_1}} \\ \text{2-ten} & \text{''} \quad l_2 \div \cdot \mu = \pm \sqrt{\frac{[\varphi_2 \varphi_2]}{p_2}} \\ \vdots & \vdots \\ \text{n-ten} & \text{''} \quad l_n \div \cdot \mu = \pm \sqrt{\frac{[\varphi_n \varphi_n]}{p_n}}. \end{array}$$

Damit liefert Gleichung (11):

Mittlere Fehler  $m$  der Teilresultate  $l$  aus denen der eingewichtigen Beobachtungen  $\lambda$

$$m_{l_1} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = \pm \frac{1}{p_1} \sqrt{[\varphi_1 \varphi_1]},$$

$$m_{l_2} = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} = \pm \frac{1}{p_2} \sqrt{[\varphi_2 \varphi_2]}.$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

Wir haben damit die Möglichkeit erlangt, die mittleren Fehler  $m$  der (verschieden-gewichtigen) Beobachtungen  $l$  aus den Verbesserungen  $\varphi$  der Urbeobachtungen zu errechnen. Zwar sind diese selbst nicht bekannt, wohl aber die an den Beobachtungswerten  $l$  (deren jeder als Resultat aus  $p$  Urbeobachtungen erscheint) anzubringenden Verbesserungen  $v$ .

Die zwischen  $v$  und  $\varphi$  bestehende Beziehung können wir aber aus Gleichungen (5b) und (11) ermitteln:

nach (5b) ist das Quadrat des mittleren Fehlers einer von  $n$  gleich genauen Beobachtungen

$$m^2 = \frac{[v v]}{n-1} = \frac{1}{n-1} (v_1^2 + v_2^2 + \dots),$$

nach (11) ist das Quadrat des mittleren Fehlers des Resultates von  $n$  gleich genauen Beobachtungen

$$M^2 = \frac{m^2}{n} = \frac{[v v]}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n-1} \left( \frac{v_1^2}{n} + \frac{v_2^2}{n} + \dots \right),$$

d. h. das Quadrat des mittleren Fehlers vom Resultat und das Quadrat der an den Beobachtungen

anzubringenden Verbesserungen  $v$  wachsen im gleichen Verhältnis, oder

$$m^2 : \mu^2 = v^2 : \varphi^2 ; \quad \varphi^2 = v^2 \cdot \frac{\mu^2}{m^2} = v^2 \cdot p .$$

Man könnte jetzt zur Bestimmung des mittleren Fehlers  $\mu$  der Gewichtseinheit die aus  $v$  errechnete Verbesserung  $\varphi$  einer Beobachtung vom Gewicht 1 in Gleichung (23) einsetzen. Allein diese Gleichung setzt das Vorhandensein von  $[p]$  solcher Verbesserungen  $\varphi$  voraus, während wir deren, entsprechend der Anzahl von Verbesserungen  $v$ , nur  $n$  besitzen. Wir müssen daher entweder  $[\varphi \varphi]$  auf den Betrag erweitern, den diese Summe annimmt, wenn die Zahl der Verbesserungen  $\varphi$  von  $n$  auf  $[p]$  erhöht wird, d. h.  $[\varphi \varphi] = [p v v]$  mit  $\frac{[p]}{n}$  erweitern, wodurch wir erhalten

$$(23a) \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[\varphi_w \varphi_w]}{[p]} \cdot \frac{[p]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[p v_w v_w]}{n}} ,$$

oder besser der Zahl  $n$  von Summanden entsprechend den Nenner reduzieren, wodurch der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird

$$(23a)' \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[p v_w v_w]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n-1}} .$$

Wir erhalten schließlich durch Einsetzung von  $\mu$  in (21) und (22) als mittlere Fehler nach der Ausgleichung:

$$(23b) \quad \left. \begin{array}{l} \text{mittl. Fehl. d.} \\ \text{Beob.-Wertes } l_r \end{array} \right\} \div \cdot m_r = \frac{\mu}{\sqrt{p_r}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{(n-1)p_r}} ,$$

$$(23c) \quad \left. \begin{array}{l} \text{mittl. Fehler d.} \\ \text{Endwertes } L \end{array} \right\} \div \cdot M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{(n-1)[p]}} .$$

Beispiel. Eine Strecke  $L$  wurde je mit gleicher Genauigkeit gemessen:

a) mit Meßstangen  $\left\{ \begin{array}{l} l_1 = 285,34 \\ l_2 = 285,40 \\ l_3 = 285,30 \\ l_4 = 285,44 \end{array} \right.$  zu  $\left\{ \begin{array}{l} l_5 = 285,40 \\ l_6 = 285,56 \\ l_7 = 285,51 \end{array} \right.$  b) mit Meßband zu  $\left\{ \begin{array}{l} l_8 = 285,30 \\ l_9 = 285,46 \end{array} \right.$  c) mit Meßkette zu

Es liefert:

| die Messungs-<br>gruppe | das Messungsergebnis<br>Gleichung (2) | die mittleren Fehler vor der Ausgleichung<br>Gleichung (5b) | die mittleren Fehler vor der Ausgleichung<br>Gleichung (11)       |
|-------------------------|---------------------------------------|---|---|
| Stangenmessung          | $L_{St} = 285,37$                     | $m_{St} = \pm \sqrt{\frac{116}{3}} = \pm 6,2 \text{ cm}$    | $M_{St} = \pm \sqrt{\frac{116}{3 \cdot 4}} = \pm 3,1 \text{ cm.}$ |
| Bandmessung             | $L_B = 285,49$                        | $m_B = \pm \sqrt{\frac{134}{2}} = \pm 8,2 \text{ cm}$       | $M_B = \pm \sqrt{\frac{134}{2 \cdot 3}} = \pm 4,7 \text{ cm.}$    |
| Kettenmessung           | $L_K = 285,38$                        | $m_K = \pm \sqrt{\frac{128}{1}} = \pm 11,3 \text{ cm}$      | $M_K = \pm \sqrt{\frac{128}{1 \cdot 2}} = \pm 8,0 \text{ cm.}$    |

Zur Vereinigung der drei ungleichwertigen Ergebnisse der Stangen-, Band- und Kettenmessung haben wir zunächst deren Gewichte  $p_{St}$ ,  $p_B$  und  $p_K$  festzustellen. Wählen wir als Gewichtseinheit eine einmalige Kettenmessung, welcher der mittlere Fehler

$$\mu = m_K = \pm \sqrt{128} = \pm 11,3 \text{ cm}$$

anhaftet, so wird nach Gleichung (14)

$$p_K = 2, \quad p_B = \frac{3 \cdot 128}{134} = 2 \cdot \frac{8,0^2}{4,7^2} = 5,7, \quad p_{St} = \frac{4 \cdot 128}{116} = 2 \cdot \frac{8,0^2}{3,1^2} = 13,2,$$

woraus nach Gleichung (20) und (22)

$$P_L = [p] = 20,9$$

$$M_L = \pm \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm \frac{11,3}{\sqrt{20,9}} = \pm 2,5 \text{ cm} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{als mittlerer Fehler des Endresultates} \\ \text{vor der Ausgleichung.} \end{array} \right.$$

Vereinigung der drei Ergebnisse: Für  $N = 285,30$  liefert Gleichung (18) und (19)

|   | $v$<br>cm | $p$  | $p v$<br>cm | $p v v$<br>qcm   | $v$<br>cm | $p v$<br>cm                  | $p v v$<br>qcm     |
|---|-----------|------|-------------|--|-----------|------------------------------|--------------------|
| $L_{St} = 285,37$   | +7        | 13,2 | 92,4        | 646,8  | +3,4      | +44,9                        | 152                |
| $L_B = 285,49$  | +19       | 5,7  | 108,3       | 2057,7   | -8,6      | -48,9                        | 422                |
| $L_K = 285,38$  | +8        | 2    | 16,0        | 128,0  | +2,4      | +4,8                         | 11                 |
|   |           | 20,9 | +216,7      | 2832,5   |           | +49,7                        | 585                |
| $\frac{[p v]}{[p]} = + \frac{216,7}{20,9} = +10,4 \text{ cm}$ |           |      |             | $p v v = 2832_5 - 20,9 \cdot 10,4^2 = 2832_5 - 2250 = 583$ |           | Abrundungs-<br>differenz 0,8 | 583 (s. links) = 2 |
| somit   |           |      |             |  |           |                              |                    |
| $L = N + \frac{[p v]}{[p]} = 285,40,$                         |           |      |             |  |           |                              |                    |
| als Endresultat aus den drei Messungsgruppen.                 |           |      |             |  |           |                              |                    |

Hieraus liefert:

$$(23a) \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{585}{2}} = \pm 17,2 \text{ cm}$$

$$(23b) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{St} = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 13,2}} = \pm 4,7 \text{ cm} \\ M_B = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 5,7}} = \pm 7,2 \text{ cm} \\ M_K = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 2}} = \pm 12,1 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$(23c) \quad M = \pm \sqrt{\frac{585}{2 \cdot 20,9}} = \pm 3,7 \text{ cm}$$

als mittlere Fehler nach der Ausgleichung.

Die mittleren Fehler vor der Ausgleichung weichen von denjenigen nach der Ausgleichung erheblich ab (vgl. S. 56). Die Abweichung hat ihre Ursache teils in Ungenauigkeiten der mittleren Fehler  $m$ , welche durch solche Beobachtungsfehler erzeugt werden, die, ihrem Betrag nach zwar nicht erheblich genug, um zur Nachmessung zu veranlassen, nach ihrer Entstehung doch den groben Fehlern zugerechnet werden müßten und welche das Messungsergebnis und die Bestimmung des mittleren Fehlers um so stärker beeinflussen, je kleiner die Wiederholungszahl ist. Namentlich wird die Abweichung aber hervorgerufen durch regelmäßige Fehler, die, bei den verschiedenen Beobachtungsgruppen in verschiedenem Betrag auftretend, innerhalb jeder einzelnen Gruppe gleich wirken, in ihr also überhaupt nicht bemerkbar werden.

Hierher gehören: Unrichtigkeiten in der Länge der Meßwerkzeuge (die bei derselben Messungsgruppe überhaupt nicht, wohl aber beim Vergleich der Resultate zweier Gruppen, z. B. einer Stangen- mit der Bandmessung, in die Erscheinung treten), oder in den zur Wägung benutzten Gewichten; Beleuchtungsphasen und Abweichungen von der Vertikalstellung der Signalstangen beim Anzielen; regelmäßige Teilungsfehler an Kreisteilungen usw.



## II. Abschnitt.

## Vermittelnde Beobachtungen.

## 1. Kapitel.

## Fortpflanzung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrößen.

§ 12. Mittlerer Fehler  $M$  und Gewicht  $P$  einer expliziten Funktion  $F$  der beobachteten Größen  $L_1, L_2 \dots L_n$ , welche mit den mittleren Fehlern  $m_1, m_2 \dots m_n$  behaftet sind.

Die gesuchte Größe  $X$  sei als explizite Funktion der Beobachtungsgrößen  $L_1, L_2 \dots L_n$  ausgedrückt:

$$(24a) \quad X = F(L_1, L_2 \dots L_n).$$

Die Beobachtungsgrößen  $L$  seien mit den mittleren Fehlern  $\pm m_1, \pm m_2, \dots \pm m_n$  behaftet. Denken wir uns jeden der Beobachtungswerte um seinen (zunächst als positiv vorausgesetzten) mittleren Fehler  $m$  vergrößert, so wird der Einfluß dieser Änderung der Bestimmungsgrößen  $L$  auf den Funktionswert  $X$  sein:

$$E = F(L_1 + m_1, L_2 + m_2, \dots L_n + m_n) - F(L_1, L_2 \dots L_n).$$

Entwickeln wir den Minuenden mittels der Taylor'schen Reihe, und setzen die mittleren Beobachtungsfehler  $m$  als so klein voraus, daß wir berechtigt sind, Potenzen von ihnen, gegenüber den Beobachtungswerten selbst, zu vernachlässigen, so erhalten wir



$$\begin{aligned}
 E &= F(L_1, L_2 \dots L_n) + m_1 \frac{\partial F}{\partial L_1} + m_2 \frac{\partial F}{\partial L_2} + \dots \\
 &\quad + m_n \frac{\partial F}{\partial L_n} - F(L_1, L_2, \dots, L_n) \\
 &= m_1 \frac{\partial F}{\partial L_1} + m_2 \frac{\partial F}{\partial L_2} + \dots + m_n \frac{\partial F}{\partial L_n}.
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht über in

$$E = + m_1 l_1 + m_2 l_2 + \dots + m_n l_n,$$

wenn man den Differentialquotienten

$$(24b) \quad \frac{\partial F}{\partial L_r} = l_r$$

setzt.

Nun werden wir berechtigt sein, die Gesamtwirkung der mittleren Fehler  $m$  der Beobachtungsgrößen  $L$  auf die Funktion  $X$  als deren mittleren Fehler  $M_X$  zu bezeichnen, wenn es uns gelingt, bei Berechnung dieser Gesamtwirkung der Tatsache Rechnung zu tragen, daß diese mittleren Fehler im Vorzeichen unbestimmt sind, sich also im Zusammenwirken teilweise aufheben können. Der soeben berechnete Fehlereinfluß  $E$  setzt aber, im Gegensatz hierzu, alle mittleren Beobachtungsfehler  $m$  als gleich gerichtet voraus, ist also jedenfalls  $> M_X$ . Immerhin wird er uns zum gesuchten mittleren Fehler  $M_X$  führen, wenn wir durch Quadrieren die Vorzeichen der  $m$  eliminieren. Kehren wir zu diesem Zwecke zur tatsächlich vorhandenen Unbestimmtheit der Vorzeichen von  $m$  zurück, so erhalten wir als Quadrat des Einflusses der Änderungen  $\pm m$  an den Beobachtungsgrößen  $L$

$$\begin{aligned}
 E^2 &= m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2 + \dots + m_n^2 l_n^2 \pm 2m_1 m_2 l_1 l_2 \pm 2m_1 m_3 l_1 l_3 \pm \dots \\
 &\quad \pm 2m_2 m_3 l_2 l_3 \pm \dots \pm 2m_{n-1} m_n l_{n-1} l_n.
 \end{aligned}$$

Die Zahl der Summanden von der Form  $m_1 m_2 l_1 l_2$  ist  $= n \cdot (n - 1)$ , diejenige der quadratischen Summanden nur gleich  $n$ . Dem absoluten Wert nach ist aber die Summe je zweier quadratischer Summanden unter allen Umständen größer als das zugehörige doppelte Produkt ( $a^2 + b^2 > 2ab$ , weil  $a^2 + b^2 - 2ab = [a - b]^2 = \text{positiv}$ ). Überdies sind die quadratischen Summanden alle positiv, die anderen gleich wahrscheinlich  $\pm$  und von ähnlicher Größe, so daß sie gegen die ersteren um so mehr zurücktreten, je größer ihre Zahl ist. Die Unbestimmtheit des Vorzeichens von  $m$  hat also zur Folge, daß die letzteren Summanden sich in der Hauptsache gegenseitig aufheben und daß der ermittelte Wert für  $E^2$  übergeht in das Quadrat des mittleren Fehlers:

$$(24c) \quad M_X^2 = m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2 + \dots + m_n^2 l_n^2 = [m m l l].$$

Das Gewicht  $P_X$  der Unbekannten  $X$  erhalten wir durch Vergleichung der mittleren Fehler nach Gleichung (15). Ist nämlich  $\mu$  der (event. beliebig festgesetzte) mittlere Fehler der Gewichtseinheit ( $p = 1$ ), so ist

$$(24d) \quad P_x : 1 = \mu^2 : M^2$$

$$\frac{1}{P_x} = \frac{M^2}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} [m m l l] = \frac{m_1^2}{\mu^2} l_1^2 + \frac{m_2^2}{\mu^2} l_2^2 + \dots$$

Durch Einführung der Gewichte  $p$  für die Beobachtungsgrößen  $L$  und unter Benutzung von (14) wird hieraus

$$(24d) \quad \frac{1}{P_x} = \frac{l_1^2}{p_1} + \frac{l_2^2}{p_2} + \dots = \left[ \frac{ll}{p} \right].$$

1. Beispiel. Wie groß ist der mittlere Fehler  $m$  und das Gewicht  $P$  von  $X = aL$ , wenn  $a$  ein fehlerfreier Faktor und  $L$  eine mit dem mittleren Fehler  $m$  beobachtete Größe ist?

Gleichung (24c) liefert:

$$M_{aL}^2 = [m m l l] = m^2 \left( \frac{\partial X}{\partial L} \right)^2 = a^2 m^2$$

$$M_{aL} = a \cdot m_L$$

in Übereinstimmung mit der früher abgeleiteten Gleichung (9).

Gleichung (24d) liefert:

$$\frac{1}{P_X} = \left[ \frac{l l}{p} \right] = \frac{a^2}{p},$$

$$P_X = P_{a \cdot L} = \frac{p}{a^2},$$

wenn  $p$  das Gewicht der Beobachtungsgröße  $L$  vorstellt.

2. Beispiel. Wie groß ist der mittlere Fehler  $M$  und das Gewicht  $P$  der Größe  $X = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n$ , wenn  $L_1 \dots$  beobachtete Größen sind, denen die Gewichte  $p_1 \dots$  und die mittleren Fehler  $m_1 \dots$  zukommen.

Gleichung (24c) liefert:

$$\begin{aligned} M_X^2 &= [m m l l] = m_1^2 \left( \frac{\partial X}{\partial L_1} \right)^2 + m_2^2 \left( \frac{\partial X}{\partial L_2} \right)^2 + \dots \\ &= m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2 = [m m] \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (10).

Gleichung (24d) liefert:

$$\frac{1}{P_X} = \left[ \frac{l l}{p} \right] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \left[ \frac{1}{p} \right].$$

Sind die Gewichte und die mittleren Fehler der Einzelgrößen  $L$  einander gleich (wie das z. B. beim Wägen einer Masse in  $n$  Teilen, beim Messen von Strecken für jede einzelne der  $n$  Stangenlagen, oder bei Bildung eines Winkels durch Zusammensetzung aus  $n$  Teilen usw. der Fall ist), so wird

$$M_{L_1 \pm L_2 \pm \dots} = \pm \sqrt{[m m]} = \pm \sqrt{n \cdot m^2} = m \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{P_{L_1 \pm L_2 \pm \dots}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1} = \frac{n}{p_1}$$

$$P_{L_1 \pm L_2 \pm \dots} = \frac{p}{n},$$

d. h. der mittlere Fehler einer Summe oder Differenz gleichwertiger Einzelgrößen wächst proportional der Wurzel aus ihrer Anzahl,

das Gewicht einer Summe oder Differenz gleichwertiger Einzelgrößen nimmt ab proportional ihrer Anzahl.

Es zeigt sich hier ein bemerkenswerter Unterschied, der für die Genauigkeit einer Größe bezeichnend ist:

Wird eine Größe gewonnen als Mittel aus  $n$  Beobachtungen je vom Gewicht  $p = 1$ , so ist das Gewicht des Mittelwertes  $P = n$ ,

wird eine Größe gewonnen durch Addition oder Subtraktion von  $n$  Einzelgrößen je vom Gewicht  $p = 1$ , so ist ihr Gewicht  $P = \frac{1}{n}$ ,

wird eine Größe gewonnen durch Multiplikation einer beobachteten Größe vom Gewicht  $p = 1$  mit einer Konstanten  $n$ , so ist ihr Gewicht  $P = \frac{1}{n^2}$  (Distanzmesser usw.).

Es bedürfte also im zweiten Falle  $n$ -facher, im dritten Falle  $n^2$ -facher Beobachtungswiederholung der Teilgröße, um das Gewicht und die Genauigkeit einer einzigen einfachen direkten Beobachtung für die gesuchte Größe zu erzielen.

3. Beispiel. Wie groß ist der mittlere Fehler einer Dreiecksseite  $AB = c$  und ihr Gewicht, wenn gemessen wurde:

$$\begin{aligned} b &= AC = 106,00 \pm 0,06 \text{ m} \\ \sphericalangle \beta &= 29^\circ 39' \pm 1' \\ \sphericalangle \gamma &= 120^\circ 07' \pm 2' \end{aligned}$$

Die Trigonometrie liefert die Beziehung

$$c = \frac{b}{\sin \beta} \sin \gamma,$$

woraus mittels Gleichung (24c)

$$\begin{aligned} M_c^2 &= \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial \gamma}\right)^2 m_\gamma^2 \\ &= \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} m_b^2 + \left(\frac{b \sin \gamma}{\sin^2 \beta} \cos \beta\right)^2 m_\beta^2 + \left(\frac{b}{\sin \beta} \cos \gamma\right)^2 m_\gamma^2 \\ &= \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} m_b^2 + c^2 \operatorname{ctg}^2 \beta m_\beta^2 + c^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot m_\gamma^2 \end{aligned}$$

( $m_\beta$  und  $m_\gamma$  in analytischem Maß ausgedrückt).

Statt die mittleren Beobachtungsfehler  $m_\beta$  und  $m_\gamma$  durch Division mit  $\varrho'$  auf analytisches Maß zurückzuführen, können wir auch die zugehörigen partiellen Ableitungen mit  $\varrho'$  dividieren und als Winkeleinheit die Minute, als Längeneinheit das cm wählen, wodurch wir erhalten:

$$M_c^2 = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta} \cdot 6^2 + \frac{c^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{\varrho'^2} \cdot 1^2 + \frac{c^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma}{\varrho'^2} \cdot 2^2$$

|                           |                 |                |        |
|---------------------------|-----------------|----------------|--------|
|                           | 90,25 = $l_2^2$ |                | 1·9528 |
|                           | $l_2$           |                | 0·9764 |
| b                         | 2·02531         | sin $\beta$    | 9·6943 |
| $\varepsilon$ sin $\beta$ | 0·30566         | sin $\gamma$   | 9·9370 |
| sin $\gamma$              | 9·93702         | $l_1$          | 0·2427 |
| 185,35 = c                | 2·26799         | 3,06 = $l_1^2$ | 0·4854 |
|                           |                 | $l_3$          | 0·4952 |
|                           |                 | 9,78 = $l_3^2$ | 0·9904 |

$$M_c^2 = 3,06 \cdot 36 + 90,25 \cdot 1 + 9,78 \cdot 4$$

$$= 110 + 90 + 39 = 239 = [m m l l],$$

$$M_c = \pm \sqrt{239} = 15,5 \text{ cm.}$$

Also ist

$$c = 185,35 \pm 0,15_6 \text{ m.}$$

Einfacher noch läßt sich der mittlere Fehler einer Funktion von der obigen Form mittels Logarithmieren finden. Wir haben

$$\log c = \log b + \log \sin \gamma - \log \sin \beta,$$

somit nach Gleichung (10)

$$M_{\log c} = \sqrt{m_{\log b}^2 + m_{\log \sin \gamma}^2 + m_{\log \sin \beta}^2}.$$

Man hat jetzt nur beim Aufschlagen von  $\left. \begin{array}{l} \log b \\ \log \sin \gamma \\ \log \sin \beta \end{array} \right\}$  gleichzeitig zu notieren, welchen Einfluß auf die letzte (fünfte) Stelle des log eine Änderung des numerus um  $\left. \begin{array}{l} 6 \text{ cm} \\ 2' \\ 1' \end{array} \right\}$  ausübt (s. unten).

|                          |                  | $m_{\log}$      | $m_{\log}^2$ |   |
|--------------------------|------------------|-----------------|--------------|---|
| $b$                      | 2·02531          | 24 <sub>6</sub> | 605          |   |
| $\varepsilon \sin \beta$ | 0·30566          | 22              | 484          |   |
| $\sin \gamma$            | 9·93702          | 7               | 49           |   |
| <hr/>                    | <hr/>            | <hr/>           | <hr/>        |   |
| $185,35 \pm 0,15 = c$    | $2·26799 \pm 34$ | 1138            | 1138         | woraus $m_{\log c} = \pm \sqrt{1138}$<br>$= \pm 34$ . |

Ein mittlerer Fehler des  $\log c$  von  $\pm 34$  Einheiten der fünften Stelle liefert (gleichzeitig mit dem Aufschlagen von  $c$ ) den mittleren Fehler des numerus  $M_c = \pm 15$  cm.

Das Gewicht  $P$  der berechneten Seite  $c$  erhalten wir mittels Gleichung (24 d)

$$\frac{1}{P_c} = \frac{1}{\mu^2} [m m l l] = \frac{239}{\mu^2}.$$

Geben wir der Messung der Seite  $b$  das Gewicht 1, so wird  $\mu = 6$  cm und  $\mu^2 = 36$ , somit

$$\frac{1}{P_c} = \frac{239}{36}$$

$$P_c = \frac{36}{239} = 0,15.$$

## 2. Kapitel.

### Ausgleichung vermittelnder gleich genauer Beobachtungen.

Durch den Abschnitt I wurden wir in die Lage versetzt, den wahrscheinlichsten Wert einer direkt und mehrfach beobachteten Größe, seinen mittleren Fehler und sein Gewicht zu bestimmen. Dagegen hat er uns nicht gelehrt, in überschüssiger Zahl vorhandene Beobachtungen auszugleichen, welche zur Bestimmung einer oder mehrerer anderer, von ihnen abhängiger Größen dienen sollen.

Auch das 1. Kapitel des gegenwärtigen Abschnittes zeigte uns nicht, wie die Werte  $L$  für solche vermittelnde Größen auszugleichen, wenn sie in überschüssiger Zahl vorhanden sind, sondern nur, wie sich der ihnen anhaftende Fehler  $m$  auf einen (nicht überbestimmten) Funktionswert fortpflanzt.

Jetzt wollen wir Beobachtungswerte, welche zur Berechnung anderer, von ihnen abhängiger Größen dienen sollen und in überschüssiger Zahl vorhanden sind, so ausgleichen, daß letztere sich übereinstimmend ergeben, gleichgültig, welche der ersteren auch zur Rechnung benützt werden mögen.

Ist die Zahl der gesuchten Unbekannten nicht größer als 2, so läßt sich die Ausgleichung der zu ihrer Berechnung dienenden Beobachtungswerte häufig auf graphischem Wege bewirken, womit der Vorzug erhöhter Anschaulichkeit und der alsbaldigen Erkenntnis etwaiger grober Beobachtungsfehler verbunden ist. Wir behandeln daher zuerst die:

### § 13. Graphische Ausgleichung zusammengehöriger, beobachteter Argument- und Funktionswerte bei zwischen ihnen bestehender bekannter oder unbekannter Beziehung. Beobachtungsfehler.

Um zu untersuchen, ob zwei Größen voneinander abhängig sind, und zutreffendenfalls, welche Beziehung zwischen ihnen besteht, kann man korrespondierende (zusammengehörige) Beobachtungswerte beider als Abszissen und Ordinaten in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem auftragen und die dadurch erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie (Funktionskurve) verbinden. Verläuft die Linie gesetzlos oder parallel, bzw. senkrecht zur Abszisse, so besteht entweder keine Beziehung zwischen den korrespondierenden Beobachtungswerten, sie



sind voneinander unabhängig, oder die beobachteten Funktionswerte sind nicht bloß von den der Beobachtung unterworfenen, sondern überdies noch von anderen Argumenten abhängig.

Im letzteren Falle kann man die korrespondierenden Beobachtungen unter gewissen abgewarteten oder künstlich herbeigeführten, die Wirkung jener weiteren Argumente vorübergehend ausschaltenden Umständen wiederholen.

Läßt die „Funktionskurve“ nach den Sätzen der analytischen Geometrie ein gewisses Gesetz erkennen — gerade Linie zeigt lineare Beziehung,  $n$ -fache Oszillation algebraische Beziehung  $(n + 1)$ -ten Grades an —, so kann man der Zeichnung die Lage- und Formbeziehungen (Abschnitt auf der  $y$ -Achse, Richtungskoeffizient, Parameter usw.) entnehmen: Die Verbindungslinie der mit den zusammengehörigen Beobachtungswerten als Koordinaten aufgetragenen Punkte (Funktionslinie) vermittelt uns die Kenntnis der zwischen beiden bestehenden Beziehung.

Dabei wird das Wesen der Funktionskurve von der Wahl der Verjüngungsverhältnisse für die Abszissen und die Ordinaten und von der Lage der Koordinatenachsen nicht berührt. Ja, es kann sich sogar empfehlen (auch ohne daß die zusammengehörigen Beobachtungswerte Größen verschiedener Gattung sind, in welchem Falle für jeden von beiden je ein passendes Verjüngungsverhältnis gewählt werden muß), Ordinaten und Abszissen in verschiedener Verjüngung zu zeichnen, wenn sie sich erheblich voneinander unterscheiden, oder wenn man auf schärfere Darstellung von Veränderungen einer von ihnen besonderen Wert legt.

Wären die Beobachtungswerte fehlerfrei, so müßte die zu zeichnende Funktionskurve durch sämtliche auf

Grund solcher zusammengehöriger Werte gezeichnete Punkte gehen. Es zeigt sich in der Durchführung jedoch, namentlich wenn ein genügend großer Maßstab gewählt wird, sofort, daß die derart zu zeichnende Linie Unregelmäßigkeiten aufweisen würde, die nicht in der Natur der Beziehung zwischen beiden Beobachtungsgrößen liegen können. Dies tritt besonders in solchen Fällen in die Erscheinung, in denen das Wesen der Beziehung auch noch auf deduktivem Wege erschlossen werden kann. Solche Unregelmäßigkeiten rühren von den den Beobachtungswerten anhaftenden Fehlern  $v$  her, und unsere Aufgabe besteht jetzt darin, eine der erschlossenen Beziehung entsprechende oder (falls diese nicht erschlossen werden kann) eine möglichst einfache Funktionslinie den gezeichneten Punkten so anzupassen, daß die in der Ordinatenrichtung gemessenen Abweichungen  $v$  der Linie von jenen Punkten den Bedingungen (1)  $[v] = 0$  und (4)  $[vv] = \text{Min.}$  entsprechen.

Als Nebenprodukt dieser Lösung ergibt sich dann auf bequemste Weise:

- a) diejenige Stelle, wo zur sicheren Ermittlung der bestehenden Beziehung, und Zeichnung der Funktionslinie die korrespondierenden Beobachtungen zu häufen sind, bzw. wo andererseits Häufung unnütz wäre,
- b) der Nachweis etwaiger grober Fehler,
- c) der dem einzelnen Beobachtungswerte anhaftende, durch Ausgleichung wegzuschaffende Fehler  $v$ ,
- d) der irgend einem Argumentwerte zugehörige ausgeglichene Funktionswert.

Beispiel. Zum Zwecke der Wiederherstellung der wahrscheinlichen Lage einer Baulinie an einer bauplanmäßig 15,00 m breiten Straße wurde eine Anzahl sicherer Gebäudeecken auf eine vorläufige, zu ihr im Abstände von 3 m ungefähr parallel

verlaufende Abszisse aufgenommen. Gesucht ist die Lage der allen Gebäudeecken möglichst sich anpassenden, endgültigen Parallelen.

Lösung. Die abgesteckte Abszisse sowohl, als die gesuchte endgültige Parallele zur wahrscheinlichen Baulinie sind gerade Linien. Wäre es daher möglich, die Entfernungen irgendwelcher, einander gegenüberliegender Punkte beider Geraden zu finden, so könnte man sie als Ordinaten zur abgesteckten Linie als Abszissenachse und zu den zugehörigen Abszissenmaßen auftragen. Die Verbindungslinie der dadurch erhaltenen Punkte müßte dann eine Gerade sein und die Abszissenachse in demselben Punkte schneiden, in dem in Wirklichkeit die gesuchte Parallele die abgesteckte Aufnahme-  
linie schneidet. Daran würde nichts geändert, auch wenn die genannten Entfernungen (die nur klein sein können) etwa in größerem Maßstabe als die Abszissen aufgetragen würden. Diese Entfernungen zwischen beiden, nur um wenig divergenten Geraden lassen sich nun wie folgt berechnen: Setzen wir voraus, daß die aufgenommenen Gebäudeecken genau auf den Baulinien liegen, also genau den Abstand  $a_1 = 3$  m bzw.  $a_2 = 12$  m von der gesuchten Parallelen haben. Setzen wir ferner voraus, daß ihre von uns aufgenommenen Ordinaten  $y$  fehlerfrei gemessen sind, so erhalten wir von der abgesteckten Abszisse aus je einen Punkt der gesuchten Parallelen, wenn wir (unter Beachtung, daß wegen der geringen Divergenz von abgesteckter und Solllinie die bezüglichen Ordinaten ihrer Lage nach zusammenfallen) im betreffenden Fußpunkt die Ordinate

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_1 = y_1 - a_1 & \eta_3 = y_3 - a_2 \\ \eta_2 = y_2 - a_2 & \eta_4 = y_4 - a_4 \end{array} \right\}$$

nach Richtung und Größe auftragen. Die wahre gegenseitige Lage beider Geraden ist dann in der Figur direkt ersichtlich: Die Funktionslinie stellt die Solllinie vor. Da die berechneten und für die gesuchte Lage der Solllinie bestimmenden Ordinaten  $\eta$  von Punkten der letzteren sehr klein sind im Verhältnis zu den zugehörigen Abszissen, so wird man beide in verschiedenem Maßstabe (etwa die Abszissen im Maßstabe 1:1000, die Ordinaten  $\eta$  in 1:10) auftragen.

Würde nun die (durch Überlegung als Gerade erkannte) Funktionslinie durch alle derart gezeichneten Punkte gehen, so wären Lage der Gebäudeecken und eigene Messung fehler-

frei und eine Ausgleichung unnötig. Anderenfalls muß jetzt diejenige Gerade gesucht werden, für welche die algebraische Summe der in der Ordinatenrichtung gemessenen Abstände  $v$  von den Fehlerbildpunkten  $= 0$  ( $[v] = 0$ ) und, da die Zahl solcher Geraden  $\infty$  ist, gleichzeitig  $[vv] = \text{Min.}$  wird.

Alle die Geraden, für welche  $[v] = 0$ , gehen durch einen Punkt, den Schwerpunkt  $S$  des Systems gezeichneter Punkte, dessen Koordinaten

$$\begin{cases} x_s = \frac{[x]}{n} \\ y_s = \frac{[y]}{n} \end{cases} \text{ sind.}$$

## Zahlenbeispiel.

| Punkt<br>Nr. | Gemessen                  |                      | Sollordinate<br>$a$<br>m | $\eta = y - a$<br>cm     |
|--------------|---------------------------|----------------------|--------------------------|--------------------------|
|              | Abszisse<br>$+x$<br>m     | Ordinate<br>$y$<br>m |                          |                          |
| 1            | 53,95                     | - 3,06               | - 3,00                   | - 6                      |
| 2            | 57,02                     | + 11,94              | + 12,00                  | - 6                      |
| 3            | 72,54                     | + 11,98              | + 12,00                  | - 2                      |
| 4            | 94,86                     | - 2,94               | - 3,00                   | + 6                      |
| 5            | 140,22                    | + 12,08              | + 12,00                  | + 8                      |
| 6            | 161,05                    | - 2,95               | - 3,00                   | + 5                      |
| 7            | 212,84                    | - 3,00               | - 3,00                   | 0                        |
| 8            | 221,95                    | + 12,07              | + 12,00                  | + 7                      |
| 9            | 245,36                    | - 2,90               | - 3,00                   | + 10                     |
|              | $x_s = \frac{1259,79}{9}$ |                      |                          | $\eta_s = \frac{+22}{9}$ |
|              | $= 139,98 \text{ m}$      |                      |                          | $= +2,44 \text{ cm}$     |

Um die Lage der Geraden zu finden, für welche  $[vv] = \text{Min.}$ , kann man jetzt für 3 oder mehr verschiedene, durch den Schwerpunkt  $S$  gehende Versuchsgeraden die Abstände  $v$  von den Fehlerbildpunkten (in der Ordinatenrichtung) abgreifen (wobei  $[v] = 0$  sein wird) und je  $[vv]$  berechnen. Trägt man dann diese Werte  $[vv]$  als Ordinaten in den Schnittpunkten

I, II usw. dieser Versuchsgeraden mit irgend einer der ursprünglichen Ordinaten als Fußpunkten auf und zeichnet durch die erhaltenen Punkte eine zu dieser neuen Ordinatenrichtung ( $\#$  zur alten  $x$ -Achse) symmetrische Kurve, so stellt die Ordinate

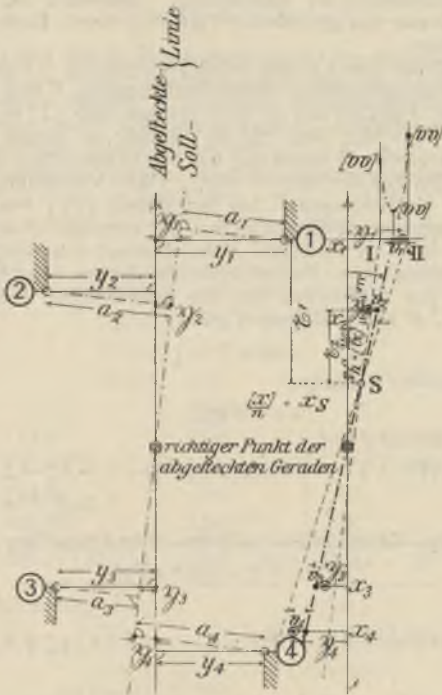


Fig. 4.

nate des unteren Kulminationspunktes den niedersten Wert für  $[vv]$ , deren Fußpunkt einen zweiten Punkt der Sollgeraden vor. Nach Einzeichnung der letzteren wird man für das gegenwärtige Beispiel aus der Figur ablesen: Die gesuchte

Gerade schneidet die abgesteckte bei der Abszisse 98 m und ist gegenüber der letzteren um 6 cm auf 100 m Länge im positiven Sinn verdreht.

Das gezeigte Verfahren zur rein graphischen Auffindung der Funktionslinie ist schwerfällig. Bequemer ist es, zu diesem Zweck das graphische Verfahren durch Rechnung zu unterstützen.

Zieht man durch  $S$  eine beliebige Gerade  $S-I$  und greift in der Ordinatenrichtung deren Entfernungen  $V$  von den gezeichneten Punkten ab, so wird für sie zwar  $[V] = 0$ , aber nicht  $[V V] = \text{Min.}$  sein. Es ist vielmehr zu diesem Zwecke noch eine gewisse Verdrehung um den unbekannt Winkel  $\xi$  und um den Schwerpunkt  $S$  nötig. Diese Verdrehung ändert sämtliche Entfernungen  $V$  um den Betrag  $\varkappa \cdot \xi$ , wenn  $\varkappa$  die Entfernungen der Fußpunkte vom Schwerpunkt  $S$  darstellen. Es wird daher an Stelle von  $V$  der Abstand  $v$  der endgültigen Funktionslinie vom Fehlerbildpunkte treten, wo bei Einführung von Vorzeichen für die verschiedenen Richtungen von  $\varkappa$ ,  $v$ ,  $V$  und  $\xi$  allgemein gültig

$$v = V - \varkappa \xi$$

und wobei wir verlangen:

$$[v v] = \text{Min.}$$

Es muß demnach sein

$$[(V - \varkappa \xi)^2] = V_1^2 - 2 V_1 \varkappa_1 \xi + \varkappa_1^2 \xi^2 + \dots + V_n^2 - 2 V_n \varkappa_n \xi + \varkappa_n^2 \xi^2 = \text{Min.}$$

Die einzige Veränderliche ist jetzt  $\xi$ , und man hat

$$F_{(\xi)} = [(V - \varkappa \xi)^2] = \text{Min.}$$

für

$$\frac{dF}{d\xi} = 0 = -2 V_1 \varkappa_1 + 2 \varkappa_1^2 \xi - \dots - 2 V_n \varkappa_n + 2 \varkappa_n^2 \xi,$$

woraus

$$\xi = \frac{2 V_1 \varkappa_1 + 2 V_2 \varkappa_2 + \dots + 2 V_n \varkappa_n}{2 \varkappa_1^2 + 2 \varkappa_2^2 + \dots + 2 \varkappa_n^2} = \frac{[V \varkappa]}{[\varkappa \varkappa]}.$$

Für die praktische Durchführung wird man natürlich nicht eine beliebige Gerade verwenden, von der aus der Verdrehungswinkel  $\xi$  berechnet wird, sondern eine Parallele zur

Aufnahmelinie durch den Schwerpunkt  $S$ . Damit wird allgemein gültig:

$$\xi = x - x_S = x - \frac{[x]}{n}$$

$$V = \eta - \eta_S = \eta - \frac{[\eta]}{n}$$

Man hat also nur die Durchschnittswerte der Abszissen und der Ordinaten je von den letzteren abzuziehen, ein Verfahren, das wir noch des öfteren, z. B. bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Rückwärtseinschnitt anwenden werden.

Die obige Tabelle liefert jetzt

| Punkt<br>Nr. | $\xi = x - x_S$<br>m |        | $V = \eta - \eta_S$<br>cm |       | $\xi \cdot V$<br>(Rechenschieber) |     | $\xi \xi$ |
|--------------|----------------------|--------|---------------------------|-------|-----------------------------------|-----|-----------|
|              | +                    | -      | +                         | -     | +                                 | -   |           |
| 1            |                      | 86,03  |                           | 8,44  | 725                               |     | 7 401     |
| 2            |                      | 82,96  |                           | 8,44  | 700                               |     | 6 882     |
| 3            |                      | 67,44  |                           | 4,44  | 299                               |     | 4 548     |
| 4            |                      | 45,12  | 3,56                      |       |                                   | 161 | 2 036     |
| 5            | 0,24                 |        | 5,56                      |       | 1                                 |     | 0         |
| 6            | 21,07                |        | 2,56                      |       | 54                                |     | 444       |
| 7            | 72,86                |        |                           | 2,44  |                                   | 178 | 5 309     |
| 8            | 81,97                |        | 4,56                      |       | 374                               |     | 6 719     |
| 9            | 105,38               |        | 7,56                      |       | 797                               |     | 11 105    |
|              | 281,52               | 281,55 | 23,80                     | 23,76 | 2950                              | 339 | 44 444    |

Abrundung 3.

+2611

oder 26,11 für  $v$  in Mtrn.

$$\xi = + \frac{26,11}{44\,444} = +0,000\,587,$$

analytisch

also: nötige Verdrehung  $\xi$  in positivem Sinn um 5,9 cm auf 100 m.  
Schnittpunkt der Solllinie mit der Abszisse

vom Schwerpunkt  $S$  rückwärts um  $\frac{100 \cdot 2,44}{5,87} = 41,5$  m.

d. h. bei Abszisse  $139,98 - 41,5 = 98,5$  m.



§ 14. Rechnerische Ausgleichung in überschüssiger Zahl vorhandener Beobachtungswerte  $L$  bei bekannter Beziehung zwischen ihnen und den von ihnen abhängigen, gesuchten Größen  $X, Y \dots$  bis zur Aufstellung der Normalgleichungen.

Die zwischen den Beobachtungsgrößen  $L$  und den von ihnen abhängigen Unbekannten  $X, Y \dots$  bestehenden Beziehungen mögen von der Form sein:

$$(25) \quad F(X, Y, Z \dots) - L = 0,$$

so daß sie jede Beobachtungsgröße  $L$  als explizite Funktion der Unbekannten  $X, Y \dots$  ergeben. Diese Gleichungen werden von den Beobachtungswerten  $L$  nur dann scharf erfüllt sein können, wenn letztere entweder fehlerfrei sind, oder wenn keine Überbestimmung vorhanden ist. Beides ist für unsere gegenwärtige Betrachtung ausgeschlossen. Wir müssen vielmehr, um die Beziehungen scharf zu erfüllen, unseren Beobachtungswerten kleine, zunächst noch unbekannte Verbesserungszuschläge beifügen, die wir wie bisher mit  $v$  bezeichnen wollen. Dann stellt  $L + v$  den wahrscheinlichsten Beobachtungswert und  $v$  den Beobachtungsfehler vor, und die Gleichung (25) geht über in die Form

$$(25a) \quad F(X, Y, Z \dots) - L = v.$$

Wir suchen nun zunächst diese Beziehungen in lineare Form überzuführen, eine Aufgabe, die allgemein nur möglich ist, wenn es uns gelingt, die Unbekannten  $X, Y, Z \dots$  durch andere  $x, y, z$  zu ersetzen, die so klein sind, daß wir höhere Potenzen von ihnen vernachlässigen dürfen. Zu diesem Zweck schlagen wir folgenden Weg ein: Wir zerlegen jede der Unbekannten analog Gleichung (7) und (18) in 2 Summanden, nämlich

einen möglichst genauen, irgendwie zu gewinnenden Näherungswert  $N_X \dots$  und einen kleinen, nach Richtung und Größe unbekanntem Zuschlag  $x \dots$ , wodurch unsere Gleichung (25 a) übergeht in

$$(25 \text{ b}) \quad F\{(N_X + x), (N_Y + y), (N_Z + z), \dots\} - L = v.$$

Sodann entwickeln wir nach Taylor in eine Reihe und erhalten unter vorstehender Voraussetzung:

$$(25 \text{ c}) \quad \left\{ \begin{aligned} F(N_X, N_Y, N_Z \dots) + x \frac{\partial F}{\partial N_X} + y \frac{\partial F}{\partial N_Y} \\ + z \frac{\partial F}{\partial N_Z} + \dots - L = v. \end{aligned} \right.$$

Fassen wir die bekannten Summanden zusammen (wozu jetzt auch  $F(N_X, N_Y, N_Z \dots)$  gehört) und führen zur Vereinfachung der Schreibweise folgende Bezeichnungen ein:

$$(25 \text{ d}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial N_X} = a, \quad \frac{\partial F}{\partial N_Y} = b, \quad \frac{\partial F}{\partial N_Z} = c \dots \\ F(N_X, N_Y, N_Z, \dots) - L = l, \end{aligned} \right.$$

so geht die gegebene Beziehung (25) in die Form der „Fehlergleichung“ über:

$$(25 \text{ e}) \quad ax + by + cz + \dots + l = v.$$

Solcher Fehlergleichungen haben wir ebenso viele, als Beobachtungen  $L$  vorhanden sind, nämlich  $\lambda$ . Überbestimmung ist vorhanden und Ausgleich der Werte  $l$  kann also erst eintreten, wenn die Zahl  $\lambda$  der Beobachtungen größer ist, als die Zahl  $x$  der Unbekannten. Für  $\lambda = k$  werden die Verbesserungen  $v$  der Beobachtungswerte  $= 0$ : für die Unbekannten  $x, \dots$  ist in diesem Falle keine Überbestimmung vorhanden.

Aus den  $\lambda$  Fehlergleichungen für die  $\kappa$  Unbekannten

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + l_2 = v_2 \\ \vdots \\ a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda z + \dots + l_\lambda = v_\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ \text{← } \kappa \text{ Unbekannte →} \end{array}$$

wo  $\lambda > \kappa$ , ergeben sich die Werte der unbekanntes Zuschläge  $x, y, \dots$ , die wir künftig kurz als Unbekannte bezeichnen wollen, eindeutig, wenn wir noch die in Gleichung (4) ausgedrückte Bedingung zu Hilfe nehmen, daß die Summe der Quadrate der an den Beobachtungswerten  $L$  anzubringenden Verbesserungen  $v$  ein Minimum sei:

$$[v v] = \text{Min.}$$

Man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= a_1^2 x^2 + 2 a_1 b_1 x y + 2 a_1 c_1 x z + \dots + 2 a_1 l_1 x + b_1^2 y^2 \\ &\quad + 2 b_1 c_1 y z + \dots + 2 b_1 l_1 y + c_1^2 z^2 + \dots + 2 c_1 l_1 z + \dots + l_1^2 \\ v_2^2 &= a_2^2 x^2 + 2 a_2 b_2 x y + 2 a_2 c_2 x z + \dots + 2 a_2 l_2 x + b_2^2 y^2 \\ &\quad + 2 b_2 c_2 y z + \dots + 2 b_2 l_2 y + c_2^2 z^2 + \dots + 2 c_2 l_2 z + \dots + l_2^2, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

woraus durch Addition

$$\begin{aligned} [v^2] &= [a a] x^2 + 2 [a b] x y + 2 [a c] x z + \dots + 2 [a l] x + [b^2] y^2 \\ &\quad + 2 [b c] y z + \dots + 2 [b l] y + [c^2] z^2 + \dots + 2 [c l] z + [l^2]. \end{aligned}$$

Wir haben jetzt diejenigen Werte für  $x, \dots$  zu suchen, für welche  $[v v] = \text{Min.}$  Hierfür haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [v v]}{\partial x} &= 2 [a a] x + 2 [a b] y + 2 [a c] z + \dots + 2 [a l] = 0 \\ \frac{\partial [v v]}{\partial y} &= 2 [a b] x + 2 [b b] y + 2 [b c] z + \dots + 2 [b l] = 0 \\ \frac{\partial [v v]}{\partial z} &= 2 [a c] x + 2 [b c] y + 2 [c c] z + \dots + 2 [c l] = 0. \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Eine kurze Betrachtung zeigt, daß wir auf dieselbe Weise ganz allgemein ebenso viele Gleichungen für  $x, y, z \dots$  in der vorstehenden Form erhalten, als Unbekannte vorhanden sind, und damit ein Mittel für die eindeutige Bestimmung der letzteren. Durch Kürzung mit 2 erhält man aus ihnen die „Normalgleichungen“

$$(26) \quad \begin{cases} [a a] x + [a b] y + [a c] z + \dots + [a l] = 0 \\ [a b] x + [b b] y + [b c] z + \dots + [b l] = 0 \\ [a c] x + [b c] y + [c c] z + \dots + [c l] = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

mit deren Aufstellung die Ausgleichungsaufgabe prinzipiell gelöst ist.

### § 15. Auflösung der Normalgleichungen.

a) Ist nur eine einzige Unbekannte  $X$  vorhanden, welche mit den  $\lambda$  Beobachtungswerten  $L$  in der Beziehung steht

$$F(X) - L = 0,$$

so erhält man nach § 14 durch Einführung eines Näherungswertes  $N_X$  für  $X$  (so daß  $X = N_X + x$ ) die  $\lambda$  Fehlergleichungen von der Form

$$\frac{\partial F}{\partial N_X} x + (F_{N_X} - L) = v,$$

oder mit Benützung der unter (25 d) eingeführten Zeichen

$$a_1 x + l_1 = v_1$$

$$a_2 x + l_2 = v_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

woraus

$$v_1^2 = a_1^2 x^2 + 2 a_1 l_1 x + l_1^2$$

$$v_2^2 = a_2^2 x^2 + 2 a_2 l_2 x + l_2^2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Aus

$$\frac{[v v] = [a a] x^2 + 2 [a l] x + [l l] = \text{Min.}}{\quad}$$

erhält man die Normalgleichung

$$\frac{d[vv]}{dx} = 2[a a]x + 2[a l] = 0$$

und aus ihr den gesuchten Zuschlag

$$(27) \quad x = -\frac{[a l]}{[a a]}, \quad \text{woraus} \quad X = N_X + x.$$

Die Gleichung (27) steht im Einklang mit Gleichung (7)

$L = N + \frac{[v]}{n}$ , wonach der gesuchte Zuschlag zum Näherungswert  $N$  war  $x = \frac{[v]}{n}$ . Denn die Koeffizien-

ten  $a$  der Unbekannten in (27) waren dort alle  $= 1$ . Nur ist zu beachten, daß der zur Berechnung dieses gesuchten Zuschlages  $x$  dienende reduzierte Beobachtungswert dort hieß  $v = \text{Beobachtung} - \text{Näherung} = l - N$ , während er jetzt heißt  $l = F(N_X \dots) - L$ , d. h. Näherung  $-$  Beobachtung. Das Absolutglied  $l$  ist also jetzt mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt.

Auch die Gleichung (1)  $[v] = 0$  findet mit

$$a_1 = a_2 = \dots = 1$$

ihre Bestätigung:

Multiplizieren wir nämlich jede Fehlergleichung des gegenwärtigen Paragraphen mit ihrem Koeffizienten  $a$ , so erhalten wir

$$a_1^2 x + a_1 l_1 = a_1 v_1$$

$$a_2^2 x + a_2 l_2 = a_2 v_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

und durch vertikale Addition die linke Seite der Normalgleichung

$$(28) \quad [a a]x + [a l] = \underline{[a v]} = 0.$$

b) Beim Vorhandensein von zwei Unbekannten  $X$  und  $Y$  laute die Form der Beziehung zwischen ihnen und der Beobachtung  $L$

$$F(X, Y) - L = 0,$$

woraus durch Einführung der Näherungswerte  $N_X$  und  $N_Y$  (so daß  $X = N_X + x$ ,  $Y = N_Y + y$ ) und der Bezeichnungen

$$a = \frac{\partial F}{\partial N_X}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial N_Y}, \quad l = F(N_X, N_Y) - L$$

die Fehlergleichungen entstehen:

$$a_1 x + b_1 y + l_1 = v_1$$

$$a_2 x + b_2 y + l_2 = v_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Aus ihnen ergeben sich durch partielle Differentiation des Ausdruckes für  $[vv]$  die zwei Normalgleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Zuschläge  $x$  und  $y$ :

$$\begin{cases} [a a] x + [a b] y + [a l] = 0 \\ [a b] x + [b b] y + [b l] = 0. \end{cases}$$

Zum Zwecke der Reduktion der Zahl der Unbekannten um eine und Ausrechnung der anderen könnte man irgend eine der bekannten algebraischen Methoden anwenden. In Rücksicht auf möglichst bequeme, schematische Durchführung der Rechnung und unter Berücksichtigung der symmetrischen Anordnung der Koeffizienten von  $x$  und  $y$  (in der einen Diagonalen, von links oben nach rechts unten, stehen nur Quadratsummen, in der anderen identische Produktensummen) hat jedoch der Schöpfer der Methode der kleinsten Quadrate, Gauß, im Jahre 1810 einen vom üblichen etwas abweichenden Rechnungsweg gewiesen, dem wir folgen wollen. Hiernach wird grundsätzlich zuerst die links stehende Unbekannte eliminiert

und zu diesem Zwecke die mit  $\frac{2 \text{ Koeffiz. der I. Reihe}}{1 \text{ Koeffiz. der I. Reihe}}$  multiplizierte erste Gleichung zur unveränderten zweiten Gleichung addiert. Dabei ergibt sich als erste und einzige Reduktionsstufe

$$\left( [b b] - \frac{[a b]}{[a a]} [a b] \right) y + \left( [b l] - \frac{[a b]}{[a a]} [a l] \right) = 0,$$

$$\text{woraus} \quad y = - \frac{[b l] - \frac{[a b]}{[a a]} [a l]}{[b b] - \frac{[a b]}{[a a]} [a b]}.$$

Für die schwerfälligen Differenzausdrücke im Zähler und im Nenner hat Gauß Symbole eingeführt, welche durch die Ziffer 1 ausdrücken, daß es sich um Erzeugnisse der ersten Reduktionsstufe handelt. Jeder Ausdruck der ersten Reduktionsstufe hat (vgl. obige Reduktionsregel) als Nenner des Subtrahenden das Summenglied  $[a a]$ , also braucht das Symbol diesen Nenner nicht besonders anzugeben. Der Zähler des Subtrahenden ist ein Produkt zweier Faktoren, deren jeder wieder die Summe von Produkten je zweier Faktoren ist, von denen je einer  $a$  heißt, während der andere je einer der Faktoren des Minuenden ist. Es genügt daher zur eindeutigen Bezeichnung

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \text{des Zählers } [b l] - \frac{[a b]}{[a a]} [a l] \text{ das Symbol } [b l \cdot 1] \\ \text{„ Nenners } [b b] - \frac{[a b]}{[a a]} [a b] \text{ „ „ } [b b \cdot 1] \\ \text{allgemein d. } \left. \begin{array}{l} \text{Ausdruckes} \end{array} \right\} [b s] - \frac{[a b]}{[a a]} [a s] \text{ „ „ } [b s \cdot 1] \\ \text{usw.,} \end{array} \right.$$



womit die obige Gleichung übergeht in

$$(30) \quad y = -\frac{[b l \cdot 1]}{[b b \cdot 1]}.$$

Um den Wert der links stehenden Unbekannten  $x$  zu berechnen, könnte man jetzt entweder den berechneten Wert der anderen in eine der Normalgleichungen einsetzen, oder statt der links stehenden jetzt die rechts stehende Unbekannte eliminieren. Damit würde aber der Schematismus in der Berechnung gestört, auf den man Wert zu legen hat, wenn es sich um häufig auftretende Rechenarbeiten handelt, deren mechanische Ausführung man untergeordneten Hilfskräften übertragen will. Der erstgenannte Weg der Einsetzung verhindert überdies die Berechnung des Gewichtes und mittleren Fehlers der zuletzt bestimmten Unbekannten, wie wir später sehen werden. Man zieht es daher vor, die Normalgleichungen so umzustellen, daß die Diagonale der Quadratsummen dieselbe Richtung hat wie zuerst, aber die bisher links stehende Unbekannte  $x$  nun rechts erscheint:

$$\begin{cases} [b b] y + [a b] x + [b l] = 0 \\ [a b] y + [a a] x + [a l] = 0. \end{cases}$$

Jetzt ergibt sich der Wert von  $x$  genau auf demselben Wege, wie vorher derjenige von  $y$ .

Auch im Falle der Berechnung zweier Unbekannten erhält man ein Analogon zu Gleichung (1): Multipliziert man die

$$\begin{aligned} 1. \text{ Fehlergl. mit } a_1, & \text{ so erhält man } a_1^2 x + a_1 b_1 y + a_1 l_1 = a_1 v_1 \\ 2. \quad " \quad " \quad a_2, " \quad " \quad " & a_2^2 x + a_2 b_2 y + a_2 l_2 = a_2 v_2 . \\ \vdots & \vdots \end{aligned}$$

Vertikale Addition ergibt die erste Normalgleichung:

$$(31) \quad [a a] x + [a b] y + [a l] = [a v] = 0.$$

Durch Multiplikation der Fehlergleichungen mit  $b_1, b_2 \dots$  und vertikale Addition erhält man ebenso  $[b v] = 0$  in Übereinstimmung mit Gleichungen (1) und (28), die nur spezielle Fälle des gegenwärtigen darstellen.

### c) Auflösung der Normalgleichungen für drei und mehr Unbekannte.

Die Normalgleichungen für drei Unbekannte  $x, y, z$  sind in § 14 aufgestellt worden und lauten

$$\begin{cases} [a a] x + [a b] y + [a c] z + [a l] = 0 \\ [a b] x + [b b] y + [b c] z + [b l] = 0 \\ [a c] x + [b c] y + [c c] z + [c l] = 0 . \end{cases}$$

Gerade wie bei der Bestimmung zweier Unbekannten zeigt sich auch hier in der Anordnung der Koeffizienten eine bemerkenswerte Symmetrie. Die Diagonale durch die Koeffizienten von links oben nach rechts unten trifft die Quadratsummen. Zu beiden Seiten von ihr symmetrisch angeordnet sind identische Produktensummen. Die Entwicklung in § 14 läßt erkennen, daß dieselbe Symmetrie auch für 4, 5 ...  $x$  Unbekannte zutrifft. Wir verwenden daher in allen Fällen das dieser Eigentümlichkeit Rechnung tragende Gaußsche Reduktionsverfahren, mit Hilfe dessen wir grundsätzlich

in der 1. Reduktionsstufe die 1. Unbekannte links eliminieren,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{''} & \text{''} & \text{2.} & & \text{''} & \text{''} & \text{''} \\ \text{''} & \text{''} & \text{3.} & & \text{''} & \text{''} & \text{''} \\ & & \vdots & & & & \end{array}$$

bis schließlich in der  $(x - 1)$ -ten Reduktionsstufe von den  $x$  Unbekannten nur noch eine übrig ist.

Die Eliminierung der linksstehenden Unbekannten erfolgt allgemein in jeder Reduktionsstufe, indem wir zur

2. Normalgl. die mit  $\frac{2. \text{Koeff. der I. Reihe}}{1. \text{Koeff. der I. Reihe}}$  multipl. 1. Gl. addieren,

3. " " "  $\frac{3. \text{Koeff. der I. Reihe}}{1. \text{Koeff. der I. Reihe}}$  " 1. " "

4. " " "  $\frac{4. \text{Koeff. der I. Reihe}}{1. \text{Koeff. der I. Reihe}}$  " 1. " "

⋮ " " " " " " "

wodurch jede folgende Reduktionsstufe gegenüber der vorhergehenden eine Unbekannte und eine Gleichung verliert. Auf obige drei Gleichungen angewandt, ergibt dieses Verfahren unter Benutzung der Symbole (29) als erste Reduktionsstufe zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und derselben bemerkenswerten Symmetrie der Koeffizienten wie bisher:

$$\text{I. Reduktionsstufe} \begin{cases} [b b \cdot 1] y + [b c \cdot 1] z + [b l \cdot 1] = 0 \\ [b c \cdot 1] y + [c c \cdot 1] z + [c l \cdot 1] = 0 \end{cases}$$

Wenden wir das Gaußsche Reduktionsverfahren jetzt auf die erste Reduktionsstufe an, und addieren die mit

$-\frac{[b c \cdot 1]}{[b b \cdot 1]}$  multiplizierte erste Gleichung zur zweiten,

so erhalten wir aus den obigen Gleichungen mit den Unbekannten  $y$  und  $z$  die zweite Reduktionsstufe:

$$[c l \cdot 1] - \frac{[b c \cdot 1]}{[b b \cdot 1]} [b l \cdot 1] + z \left\{ [c c \cdot 1] - \frac{[b c \cdot 1]}{[b b \cdot 1]} [b c \cdot 1] \right\} = 0$$

und daraus die letzte, dritte Unbekannte:

$$z = - \frac{[c l \cdot 1] - \frac{[b c \cdot 1]}{[b b \cdot 1]} [b l \cdot 1]}{[c c \cdot 1] - \frac{[b c \cdot 1]}{[b b \cdot 1]} [b c \cdot 1]}$$

ein Ausdruck, so schwerfällig, wie der auf S. 80 für  $y$  erhaltene.

Für die zweite und (im Falle von mehr als drei Unbekannten) jede folgende Reduktionsstufe müssen wir daher zur Schreibvereinfachung die in (29) eingeführte Symbolik fortsetzen. An Stelle des Nenners  $[aa]$  der ersten tritt für die zweite Reduktionsstufe der Nenner  $[bb \cdot 1]$ , und es bedeutet in ihr ganz analog wie in (29)

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} [cl \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1] = [cl \cdot 2] \\ [df \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bf \cdot 1] = [df \cdot 2] \end{array} \right\} \text{ usw.,}$$

für die dritte Reduktionsstufe kommt der Nenner  $[cc \cdot 2]$ , und es bedeutet beispielsweise

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} [ef \cdot 2] - \frac{[ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cf \cdot 2] = [ef \cdot 3] \\ [fl \cdot 2] - \frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cl \cdot 2] = [fl \cdot 3] \end{array} \right\} \text{ usw.,}$$

für die vierte Reduktionsstufe kommt der Nenner  $[dd \cdot 3]$ , und es bedeutet

$$(29) \quad [fl \cdot 3] - \frac{[df \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} [dl \cdot 3] = [fl \cdot 4] \quad \text{ usw.,}$$

für die fünfte Reduktionsstufe kommt der Nenner  $[ee \cdot 4]$ , und es bedeutet u. a.

$$(29) \quad [fl \cdot 4] - \frac{[ef \cdot 4]}{[ee \cdot 4]} [el \cdot 4] = [fl \cdot 5]$$

usw. Damit geht der oben gefundene Ausdruck für  $z$  über in:

$$(32) \quad z = - \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}.$$

Auch bei drei und mehr Unbekannten erhält man durch Multiplikation der Fehlergleichungen 1, 2 ...  $\lambda$  der Reihe nach mit  $a_1, a_2 \dots a_\lambda$ , bzw.  $b_1, b_2 \dots b_\lambda$ , bzw.  $c_1, c_2 \dots c_\lambda$ , Addition der vertikalen Reihen und Vergleichung mit den Normalgleichungen:

$$(33) \quad \begin{cases} [a a] x + [a b] y + [a c] z + [a l] = \underline{[a v] = 0} \\ [a b] x + [b b] y + [b c] z + [b l] = \underline{[b v] = 0} \\ [a c] x + [b c] y + [c c] z + [c l] = \underline{[c v] = 0} \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit Gleichungen (31) und (28).

Auf gleiche Weise bestimmen wir jetzt die bisher vorletzte Unbekannte  $y$ , nachdem wir die Normalgleichungen so umstellten, daß sie als letzte erscheint und die Quadratsummenkoeffizienten in derselben Diagonale von links oben nach rechts unten stehen wie folgt:

$$[c c] z + [a c] x + [b c] y + [c l] = 0$$

$$[a c] z + [a a] x + [a b] y + [a l] = 0$$

$$[b c] z + [a b] x + [b b] y + [b l] = 0 .$$

Ist  $y$  bestimmt, so sorgen wir endlich durch abermalige Umstellung nach der vorgeführten Regel, daß die jetzt zu bestimmende Unbekannte  $x$  hinten steht. Die Anordnung der Gleichungen wird dann die folgende:

$$[b b] y + [b c] z + [a b] x + [b l] = 0$$

$$[b c] y + [c c] z + [a c] x + [c l] = 0$$

$$[a b] y + [a c] z + [a a] x + [a l] = 0 .$$

Die Arbeit der Reduktion und Auflösung der Gleichungen kann auf diese Weise völlig schematisch erfolgen.

Wir haben damit einen Weg der Auflösung gefunden, der sich in ganz gleicher Weise für beliebig viele Un-

bekannte anwenden läßt. Die Zahl der nötigen Reduktionsstufen ist dabei immer um eins kleiner als die Zahl der Unbekannten.

Das Ergebnis der Auflösung war für:

$$\text{eine Un-} \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{[al]}{[aa]}, \\ [av] = 0, \end{array} \right\} \quad (27) \text{ u. } (28)$$

$$\text{zwei Un-} \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}, \\ [bv] = 0, \end{array} \right\} \quad (30) \text{ u. } (31)$$

$$\text{drei Un-} \left\{ \begin{array}{l} z = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}, \\ [bv] = 0 \\ [cv] = 0. \end{array} \right\} \quad (32) \text{ u. } (33)$$

Die Fortsetzung des Verfahrens ergibt (was sich durch Analogieschluß voraussehen läßt) als Wert der letzten von:

$$\text{vier Un-} \left\{ \begin{array}{l} x_4 = -\frac{[dl \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}, \\ [av] = 0 \\ [bv] = 0 \\ [cv] = 0 \\ [dv] = 0, \end{array} \right\} \quad (34) \text{ u. } (35)$$

$$\text{fünf Un-} \left\{ \begin{array}{l} x_5 = -\frac{[el \cdot 4]}{[ee \cdot 4]}, \\ [av] = 0 \\ \vdots \\ [ev] = 0 \end{array} \right\} \quad (34) \text{ u. } (35)$$

usw.

### § 16. Bestimmung der mittleren Fehler $m$ der Beobachtungswerte $L$ aus den ihnen zuzuschlagenden Verbesserungen $v$ .

Die ursprünglichen Beziehungen zwischen den Unbekannten  $X \dots$  und den Beobachtungswerten  $L_1 \dots L_n$  hießen

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(X, Y \dots) - L_1 = 0. \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Da die Beobachtungswerte  $L$  unmöglich fehlerfrei sein können, sahen wir uns genötigt, ihnen — zunächst noch unbekannte — Verbesserungsbeträge  $+v$  zuzuschlagen, so daß wir uns mit den Gleichungen genügen lassen mußten:

$$(25a) \quad \begin{cases} F_1(X, Y \dots) - L_1 = v_1, \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

womit die wahrscheinlichsten Werte der Beobachtungsgrößen lauteten

$$\begin{cases} L_1 + v_1, \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Wir haben sodann zum Zweck der Einführung linearer Form der Beziehungen die Unbekannten

$$\begin{cases} X \\ Y \\ \vdots \end{cases} \text{ ersetzt durch } \begin{cases} N_X + x \\ N_Y + y \\ \vdots \end{cases}$$

wobei  $N_X, N_Y \dots$  Näherungswerte der Unbekannten und  $x, y \dots$  die jetzt als neue Unbekannte aufzufassenden kleinen Zuschläge zu diesen Näherungswerten darstellten. Die Fehlergleichungen gingen damit über in die Form:

$$(25e) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \dots + l_1 = v_1, \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

so daß an Stelle des negativen Wertes der Beobachtung  $L$  der Überschuß  $l$  desjenigen Wertes über ihn trat, den man durch Einsetzen der Näherungswerte  $N_X, N_Y \dots$  in die Beziehungen  $F(X, Y)$  errechnete.

Der an der Beobachtungsgröße  $L$  anzubringende Verbesserungszuschlag  $+v$  erlitt durch diese Additionalkonstante  $F(N_X, N_Y \dots)$  natürlich ebensowenig eine Änderung, als die der Beobachtung oder der gesuchten Größe  $X \dots$  (s. § 18) innewohnende Genauigkeit.

Die den Beobachtungswerten  $L$  zuzuschlagenden Verbesserungen  $v$  lassen sich nun nach erfolgter Ausrechnung der neuen Unbekannten  $x, y \dots$  oder der Unbekannten  $X, Y \dots$  aus Gleichung (25e) bzw. (25a)



berechnen. Je kleiner diese nötigen Verbesserungen sind, um so genauer ist die Beobachtung ausgeführt. Als Kriterium für die erreichte Beobachtungsgenauigkeit kann demnach die Größe dieser Verbesserungszuschläge  $v$  dienen. Dabei hat uns aber schon die bisherige Untersuchung gezeigt, daß nicht etwa der durchschnittliche

Wert  $d = \frac{[\text{absol. } v]}{n}$  dieser Verbesserungszuschläge einen

zutreffenden Genauigkeitsmaßstab liefert, sondern daß wir, um größere Beobachtungsfehler stärker in die Wag- schale zu werfen und gleichzeitig den störenden Vor- zeichenunterschied wegzubringen, die Quadrate dieser Verbesserungen betrachten müssen. Wir verfahren dabei in Übereinstimmung mit der Bedingung  $[vv] = \text{Min.}$ , welche uns die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten lieferte. Denn es liegt nichts näher, als den Wert der- jenigen Funktion der Beobachtungsfehler, welche wir durch entsprechende Auswahl der Unbekannten zum Min. machen wollen, gleichzeitig als Maßstab für die erreichte Beobachtungsgenauigkeit zu benutzen.

Ist nur eine einzige Unbekannte vorhanden, zu deren Bestimmung  $n$  Beobachtungswerte  $L$  dienen, so daß unsere Fehlergleichungen heißen

$$\begin{array}{c} a_1 x + l_1 - v_1 = 0, \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

so tritt  $ax$  an Stelle von  $L$  in Gleichung (2), und wir haben wie dort nach Gleichung (5 b) direkt den mittleren Fehler einer Beobachtung

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}.$$

Es fragt sich aber, ob der Nenner ( $n - 1$ ) auch im Falle der Bestimmung von 2, 3 ...  $n$  Unbekannten aus

$\lambda$  Beobachtungen bzw.  $\lambda$  unabhängigen Bestimmungsgleichungen gilt. Diese Frage läßt sich durch direkte Entwicklung, einfacher aber noch durch folgende Überlegung beantworten:

a) Welches auch die allgemeine Formel für die Berechnung des mittleren Fehlers  $m$  einer Beobachtung aus den Verbesserungen  $v$  sein möge, für den Fall der Bestimmung einer einzigen Unbekannten aus  $\lambda$  Beobachtungen heißt sie:

$$(5b) \quad m^2 = \frac{[v v]}{\lambda - 1}.$$

- b) Ist  $\lambda < \kappa$ , so lassen sich aus den Gleichungen nicht einmal die Werte der  $\kappa$  Unbekannten, also noch viel weniger die bei der Beobachtung erreichte Genauigkeit errechnen. Die Einsetzung von  $\lambda$  und  $\kappa$  in die gesuchte Formel für  $m$  muß also zu einem imaginären Wert führen.
- c) Ist  $\lambda = \kappa$ , so lassen sich wohl die Werte der Unbekannten  $X, Y \dots$ , aber keine den Beobachtungswerten zuzuschlagenden Verbesserungen  $v$  berechnen. Die zwischen den Werten für die Unbekannten und den Beobachtungsgrößen bestehenden Beziehungen werden durch die Beobachtungswerte, so fehlerhaft sie sein mögen, genau erfüllt. Der mittlere Beobachtungsfehler  $m$  bleibt somit unbestimmt, was die für ihn aufzustellende Formel zum Ausdrucke bringen muß.
- d) Ist  $\lambda > \kappa$ , so ist für die Unbekannten Überbestimmung vorhanden, folglich gehen jetzt die Beziehungen (25) in die Fehlergleichungen (25 a) und (25 e) über. Letztere liefern  $\lambda$ , den Beobachtungswerten  $L$  zuzuschlagende Verbesserungen  $v$ , aus denen sich der mittlere Beobachtungsfehler  $m$  um so sicherer ergibt, je größer  $\lambda$ .

- e) Der gesuchte Ausdruck für den mittleren Beobachtungsfehler  $m$  kann nach dem Vorstehenden nicht bloß abhängig sein von  $[v v]$  und der Zahl  $\lambda$  von Bestimmungsgleichungen, sondern auch von der Zahl  $\kappa$  der Unbekannten, muß also lauten:

$$m = F([v v], \lambda, \kappa).$$

- f) Er darf nur für den Fall  $m = 0$  ergeben, wenn die Beobachtungswerte fehlerfrei sind,  $v_1 = v_2 = \dots = 0$  (was bei wirklichen Beobachtungen nie zutrifft).

Alle diese Forderungen sind erfüllt durch die Gleichung:

$$(36) \quad \underline{m^2 = \frac{[v v]}{\lambda - \kappa}}.$$

Sie liefert:

- a) für  $\kappa = 1$   $m^2 = \frac{[v v]}{\lambda - 1}$  ;
- b) für  $\lambda < \kappa$   $m^2 = \frac{[v v]}{\text{negativ}} = \text{negativ}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{was auch } v \text{ sein möge,} \\ \text{folglich } m \text{ imaginär;} \end{array} \right.$
- c) für  $\lambda = \kappa$   $m^2 = \frac{[v v]}{0}$   
 $= \frac{0}{0} = \text{unbestimmt (weil } v_1 = v_2 = \dots = 0)$ ;
- d) für  $\lambda > \kappa$   $m^2 = \frac{[v v]}{>1}$ .

Je größer  $\lambda$ , um so größer auch die Zahl der zur Berechnung von  $m$  verwendeten  $v$ . Um so sicherer also die Bestimmung von  $m$ .

- f) für  $\lambda > \kappa$  wird  $m$  nur  $= 0$ , wenn  $[v v] = 0$ , weil jeder Einzelbetrag  $v^2$  eine endliche positive Größe darstellt, die mit  $\lambda - \kappa$  wächst.

**§ 17. Ableitung des Wertes  
der Fehlerquadratsumme  $[vv]$  als Nebenprodukt  
der Reduktion der Normalgleichungen.**

Die Berechnung der zur Erkenntnis der Beobachtungsgenauigkeit nötigen Fehlerquadratsumme  $[vv]$  durch Einsetzung der für die Unbekannten  $x \dots$  erhaltenen Werte in die Fehlergleichungen ist schwerfällig. Wir suchen daher auf anderem Wege zum Ziele zu gelangen. In § 14 haben wir für  $[vv]$  beim Vorhandensein von drei Unbekannten die Gleichung aufgestellt:

$$[vv] = [aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + 2[al]x + [bb]y^2 + 2[bc]yz + 2[bl]y + [cc]z^2 + 2[cl]z + [ll],$$

welche für jede beliebige andere Zahl von Unbekannten ganz analog lautet (vgl. z. B. § 15 für eine Unbekannte). Aus obiger Gleichung wollen wir nun versuchen, die Unbekannten  $x, y, z$  zu eliminieren. Zu diesem Zwecke kehren wir zur Auflösung der Normalgleichungen zurück (S. 82), deren erste wir — quadriert und durch  $[aa]$  dividiert — von dem obigen Ausdruck für  $[vv]$  subtrahieren. Unter gleichzeitiger Einsetzung der Gaußschen Symbole erhalten wir dann:

$$[vv] = [bb \cdot 1]y^2 + 2[bc \cdot 1]yz + 2[bl \cdot 1]y + [cc \cdot 1]z^2 + 2[cl \cdot 1]z + [ll \cdot 1].$$

Subtrahieren wir von dem jetzt gewonnenen Ausdrucke für  $[vv]$  die linke Seite der quadrierten und mit  $[bb \cdot 1]$  durchdividierten ersten Gleichung der ersten Reduktionsstufe (s. S. 83), so erhalten wir unter wiederholter Anwendung der Gaußschen Symbolik

$$[vv] = [cc \cdot 2]z^2 + 2[cl \cdot 2]z + [ll \cdot 2].$$

Subtrahieren wir endlich von dem obigen Ausdrucke für  $[vv]$  die linke Seite der quadrierten und durch  $[cc \cdot 2]$

dividierten Gleichung der zweiten Reduktionsstufe  $[cc \cdot 2]x + [cl \cdot 2] = 0$ , so erhalten wir als Quadratsumme der Verbesserungen der Beobachtungen im Falle von drei Unbekannten:

$$(37) \quad [vv] = [ll \cdot 3].$$

Im Falle der Bestimmung von  $x$  Unbekannten ergibt sich genau auf demselben Wege:

$$(37) \quad [vv] = [ll \cdot x].$$

So liefert z. B. die Bestimmung einer einzigen Unbekannten

$$[vv] = [aa]x^2 + 2[al]x + [ll].$$

Setzt man nach (27)

$$x = -\frac{[al]}{[aa]}, \quad x^2 = \frac{[al]^2}{[aa]^2},$$

so kommt

$$(37) \quad [vv] = \frac{[al]^2}{[aa]} - 2\frac{[al]^2}{[aa]} + [ll] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al] = [ll \cdot 1].$$

Erwägt man,

$$\text{daß aus: } [ll] \quad \text{sich ergibt } [ll \cdot 1] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al]$$

$$\text{„ „ } [ll \cdot 1] \quad \text{„ „ } [ll \cdot 2] = [ll \cdot 1] - \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bl \cdot 1]$$

$$\text{„ „ } [ll \cdot 2] \quad \text{„ „ } [ll \cdot 3] = [ll \cdot 2] - \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cl \cdot 2],$$

so wird klar, daß man die Quadratsumme der Verbesserungen  $v$  gelegentlich der Reduktion der Normalgleichungen in demselben Augenblick erhält, in welchem die zuletzt stehende, also zuerst gesuchte Unbekannte gefunden wird. Man hat zu diesem Zwecke außer den Koeffizienten  $[aa]$ ,  $[ab]$ ,  $[ac]$ ,  $[al]$  nur noch die Quadratsumme  $[ll]$  einzuführen und bei der Reduktion ebenso zu behandeln, wie jene.

Da die Beobachtungsverbesserung  $v$ , also auch  $[vv]$  ihren Wert nicht ändert, wenn man statt der zuletzt stehenden nach erfolgter Umstellung die vorher zweit-letzte Unbekannte usw. bestimmt, so erhält man dadurch eine Rechenprobe für die richtige Durchführung der ganzen Reduktionsarbeit, daß die Endwerte  $[ll \cdot x]$  der Reduktion für alle Unbekannte einander gleich sein müssen.

**§ 18. Mittlerer Fehler  $M$  und Gewicht  $P$  der berechneten Unbekannten aus den Verbesserungszuschlägen  $v$  der Beobachtungswerte  $L$ .**

Von den gesuchten Größen  $X, Y \dots$  besitzt jede dieselbe Genauigkeit, wie die ihr entsprechende, durch Subtraktion des Näherungswertes  $N_X, N_Y \dots$  daraus entstandene neue Unbekannte  $x, y \dots$ . Beide bedürfen derselben unbekanntes Verbesserung, um zum unzugänglichen wahren Wert bzw. Zuschlag ergänzt zu werden, beide haben denselben mittleren Fehler  $M$ .

Dieser mittlere Fehler  $M$  hängt jedenfalls vom mittleren Fehler  $m$ , oder den wahrscheinlichen Verbesserungen  $v$  der Beobachtungswerte  $L$  ab, denn je kleiner diese (und je größer ihre Zahl), um so genauer lassen sich auch die gesuchten Größen bestimmen, deren Kenntnis sie vermitteln (s. Satz S. 54/55). Nachdem wir mittels Gleichung (36) gelernt haben, aus den Verbesserungen  $v$  die — im vorliegenden Falle gleich großen — mittleren Fehler  $m$  der Beobachtungswerte  $L$  zu berechnen, gibt uns § 12 die Möglichkeit, auch diejenigen der unbekanntes Zuschläge  $x, y \dots$  oder der Unbekanntes  $X, Y \dots$  zu finden, sobald es uns gelingt, aus den Normalgleichungen

$$\begin{array}{cccc}
 [a a] x + [a b] y + \dots + [a l] = 0 & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

explizite Funktionen für die Unbekannten zu bilden von der Form  $X = F(L_1, L_2 \dots)$ , oder  $x = \varphi(l_1, l_2 \dots)$ , oder

$$(a) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_n l_n; \\ y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \dots + \beta_n l_n. \end{cases}$$

Dabei steht von vornherein fest, daß die zu bestimmenden Koeffizienten

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2 \dots \\ &\beta_1, \beta_2 \dots \end{aligned}$$

Funktionen der Koeffizienten  $a, b \dots$  der Fehlergleichungen sind.

Zur Umwandlung der Normalgleichungen in explizite Form für die Unbekannten nehmen wir den Fall zweier Unbekannten, für welchen Gleichung (30) lieferte:

$$y = -\frac{[b l \cdot 1]}{[b b \cdot 1]}.$$

Der Nenner ist unabhängig von  $l$ , kommt also für die gewünschte auseinandergezogene Form (a) nicht weiter in Betracht. Der Zähler lautet auseinandergezogen

$$\begin{aligned} [b l \cdot 1] &= [b l] - \frac{[a b]}{[a a]} [a l] \\ &= b_1 l_1 + b_2 l_2 + \dots + b_n l_n - \frac{[a b]}{[a a]} (a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n), \end{aligned}$$

woraus wir erhalten

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= -\frac{1}{[b b \cdot 1]} \left\{ \left( b_1 - \frac{[a b]}{[a a]} a_1 \right) l_1 + \left( b_2 - \frac{[a b]}{[a a]} a_2 \right) l_2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left( b_n - \frac{[a b]}{[a a]} a_n \right) l_n \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Vergleichung der Gleichungen (a) und (b) liefert

$$(c) \quad \begin{cases} \beta_1 = -\frac{1}{[b b \cdot 1]} \left( b_1 - \frac{[a b]}{[a a]} a_1 \right), \\ \beta_2 = -\frac{1}{[b b \cdot 1]} \left( b_2 - \frac{[a b]}{[a a]} a_2 \right), \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$



und mit diesen Koeffizienten die Möglichkeit, den Wert der Unbekannten  $y$  nach Gleichung (a) zu berechnen. Daran haben wir nun kein Interesse, wohl aber an der Berechnung von

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_1}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial l_2}\right)^2 \dots,$$

weil nach Gleichungen (24 b), (24 c) und (24 d)

$$M_y^2 = \left[ m^2 \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{\mu^2} \left[ m^2 \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \right].$$

Setzen wir den allen Beobachtungswerten gemeinschaftlichen mittleren Beobachtungsfehler  $m$  gleichzeitig als mittleren Fehler  $\mu$  der Gewichtseinheit fest (behaften jede der Beobachtungen mit dem Gewicht 1), so kommt daraus:

$$(d) \quad M_y^2 = m^2 \left[ \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \right]$$

$$(e) \quad \frac{1}{P_y} = \left[ \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \right].$$

Wir erhalten nun aus Gleichung (a) und (c)

$$\frac{\partial y}{\partial l_1} = \beta_1 = -\frac{1}{[b b \cdot 1]} \left( b_1 - \frac{[a b]}{[a a]} a_1 \right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial l_2} = \beta_2 = -\frac{1}{[b b \cdot 1]} \left( b_2 - \frac{[a b]}{[a a]} a_2 \right) \quad \text{usw.},$$

also

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_1}\right)^2 = \frac{1}{[b b \cdot 1]^2} \left( b_1^2 - 2 a_1 b_1 \frac{[a b]}{[a a]} + a_1^2 \frac{[a b]^2}{[a a]^2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial l_2}\right)^2 = \frac{1}{[b b \cdot 1]^2} \left( b_2^2 - 2 a_2 b_2 \frac{[a b]}{[a a]} + a_2^2 \frac{[a b]^2}{[a a]^2} \right)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

---


$$\left[ \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \right] = \frac{1}{[b b \cdot 1]^2} \left( [b^2] - 2 \frac{[a b]^2}{[a a]} + \frac{[a b]^2}{[a a]} \right)$$

$$= \frac{1}{[b b \cdot 1]^2} \left( [b b] - \frac{[a b]^2}{[a a]} \right) = \frac{1}{[b b \cdot 1]}.$$

Einsetzung in (d) und (e) und in Gleichung (36) liefert für den Fall der Bestimmung von zwei Unbekannten:

$$(38) \quad M_y^2 = \frac{m^2}{[bb \cdot 1]} = \frac{[vv]}{(\lambda - 2)[bb \cdot 1]} = \frac{(ll \cdot 2)}{(\lambda - 2)[bb \cdot 1]}$$

$$(39) \quad P_y = \frac{1}{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]} = [bb \cdot 1].$$

Der Ausdruck  $[bb \cdot 1]$  für das Gewicht der Unbekannten  $y$  ist [in Übereinstimmung mit Gleichung (2)] der Nenner des zur Bestimmung dieser Unbekannten dienenden Bruchs. Er ergibt sich gelegentlich der Reduktion der Normalgleichungen.

Durch Analogieschluß, oder durch Überlegungen und Ableitungen, ähnlich den vorhergehenden, kommt man zum Gewicht  $P$  und zum mittleren Fehler  $M$  der bei der Reduktion der Normalgleichungen jeweils zu hinterst stehenden Unbekannten, gleichgültig, wie groß ihre Zahl auch sei.

Z. B. liefert Gleichung (32) für drei Unbekannte

$$(39) \quad P_{x_3} = [cc \cdot 2],$$

woraus

$$(38) \quad M_{x_3}^2 = \frac{m_L^2}{P_{x_3}} = \frac{[vv]}{(\lambda - 3)[cc \cdot 2]} = \frac{[ll \cdot 3]}{(\lambda - 3)[cc \cdot 2]}$$

Gleichung (34) für vier Unbekannte

$$(39) \quad P_{x_4} = [dd \cdot 3],$$

woraus

$$(38) \quad M_{x_4}^2 = \frac{m_L^2}{P_{x_4}} = \frac{[vv]}{(\lambda - 4)[dd \cdot 3]} = \frac{[ll \cdot 4]}{(\lambda - 4)[dd \cdot 3]}$$

usw.

**§ 19. Praktische Ausrechnung der Koeffizienten für die Normalgleichungen. Bedürfnis veränderter Größe der Unbekannten, oder der Maßeinheit. Vereinfachte Schreibweise. Rechnungsproben.**

In § 14 haben wir erfahren, wie wir aus den vorhandenen Beziehungen zwischen den Unbekannten  $X, Y \dots$  und den Beobachtungsgrößen  $L$  von der Form (25)  $F(X, Y \dots) - L = 0$  die Fehlergleichungen

$$(25e) \quad \begin{cases} ax + by + \dots + l = v \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

und aus ihnen die Normalgleichungen

$$(26) \quad \begin{cases} [aa]x + [ab]y + \dots + [al] = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

erhalten.

Die darauf folgenden Paragraphen haben uns die Auflösung dieser Normalgleichungen gezeigt. Jetzt handelt es sich um die praktische Ausführung der Rechnung.

Die Koeffizienten  $a, b \dots$  der Fehlergleichungen mögen bereits gewonnen sein. Diejenigen der Normalgleichungen sind zu berechnen. Sie sind teils Quadratsummen  $[aa], [bb] \dots [ll]$ , teils Produktensummen  $[ab], [ac] \dots [bc] \dots$ . Für die Bildung der einzelnen Quadrate und Produkte, wie für die Reduktion der Normalgleichungen verwendet man, soweit die Genauigkeit von drei Stellen ausreicht, den gewöhnlichen logarithmischen Rechenstab, für größere Genauigkeit Quadrat- bzw. Produktentafeln, oder größere Rechenschieber bzw. Rechenwalzen, und, falls auch deren Stellenzahl nicht ausreicht, Logarithmentafeln bzw. Rechenmaschinen.

Sind die einzelnen Koeffizienten und Absolutglieder  $a, b, \dots l$  sehr ungleich, so nötigt das Vorhandensein besonders kleiner Werte ( $< 1$ ), wenn sie neben den großen überhaupt noch zum Ausdruck kommen sollen, zum Mitschleppen vieler Stellen, zumal

in den quadratischen Summen. Dadurch wird die praktische Rechnung erheblich erschwert. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn es gelingt, den Koeffizienten und Absolutgliedern ungefähr gleiche Stellenzahl zu verschaffen. Hierfür gibt es zwei Wege. Bei dem einen führen wir statt der Unbekannten mit den abnorm kleinen oder großen Koeffizienten in den Fehlergleichungen ihren 10-ten, 100-ten ... Teil oder ihr 10-faches, 100-faches ... als neue Unbekannte ein, wodurch die zugehörigen Koeffizienten auf den 10-fachen, 100-fachen ... Betrag steigen, bzw. auf den 10-ten, 100-ten Teil ermäßigt werden. Bei Begehung des andern wählen wir die Maßeinheiten für die Unbekannten und die Beobachtungsgrößen nach Bedarf in Abweichung von den bisher eingeführten. (Längen in m oder dm oder cm usw., Winkel in Minuten oder Sekunden oder in analytischem Maß, Gewichte in kg oder g usw., jedoch konsequent in einer und derselben Aufgabe immer gleich.)

Die schon in § 15 erkannte symmetrische Anordnung gleicher Koeffizienten der Normalgleichungen, welche zu einem eigentümlichen Reduktions- und Auflösungsverfahren führte, ermöglicht uns auch eine einfachere, abgekürzte Schreibweise. Betrachten wir z. B. die Normalgleichungen für vier Unbekannte:

$$[a a] x_1 + [a b] x_2 + [a c] x_3 + [a d] x_4 + [a l] = 0$$

$$[a b] x_1 + [b b] x_2 + [b c] x_3 + [b d] x_4 + [b l] = 0$$

$$[a c] x_1 + [b c] x_2 + [c c] x_3 + [c d] x_4 + [c l] = 0$$

$$[a d] x_1 + [b d] x_2 + [c d] x_3 + [d d] x_4 + [d l] = 0 ,$$

so erkennen wir, daß wir genau dieselben Koeffizienten in derselben Reihenfolge erhalten, wenn wir statt der Glei-

chungen selbst jede Zeile zunächst vertikal von oben nach unten bis zur Diagonale der Quadratsummen und dann von ihr ab nach rechts horizontal weiter lesen. Unter dieser Voraussetzung können wir also den Aufschrieb der Glieder links von der Quadratsummendiagonale sparen; daß sie gemacht ist, deuten wir durch Unterstreichen des ersten (quadratischen) Koeffizienten auf jeder Zeile und eventuell durch Punkte an. Den Anschrieb  $x, y \dots$  der Unbekannten müssen wir in diesem Fall sparen, weil er, solange wir in vertikaler Richtung lesen, nicht richtig wäre.

$$\begin{array}{l}
 \text{Abgekürzter} \\
 \text{Anschrieb} \\
 \text{der} \\
 \text{Koeffizienten} \\
 \text{der Normal-} \\
 \text{gleichungen}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{ccccc}
 \underline{[a a]} & [a b] & [a c] & [a d] & [a l] \\
 \cdot & \underline{[b b]} & [b c] & [b d] & [b l] \\
 \cdot & \cdot & \underline{[c c]} & [c d] & [c l] \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[d d]} & [d l]
 \end{array}
 \right.$$

Genau dieselben Schreibkürzungen wenden wir bei jeder Reduktionsstufe an.

Ein wichtiges Erfordernis für die stufenweise Ausführung längerer Rechnungen, von denen sich eine auf der anderen aufbaut, ist die Herstellung von Rechenproben. Die bloße Wiederholung der Rechnung genügt hierfür nicht.

Eine durchgreifende Probe für die Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen, wie auch für deren Reduktion erhält man durch Einführung der Summe  $s$  der Zahlenwerte der Koeffizienten und Absolutglieder jeder Fehlergleichung:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \dots + l_1 \\ s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \dots + l_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Multipliziert man nämlich die erste Zeile dieser Summengleichung (40) mit  $a_1$ , die zweite mit  $a_2$  usw. und addiert vertikal, so erhält man die Kontrollgleichung

$$(41) \quad [a s] = [a a] + [a b] + [a c] + \dots + [a l].$$

Führt man dieselbe Multiplikation mit

$$b_1, \quad b_2 \dots$$

$$\vdots$$

$$l_1, \quad l_2 \dots$$

$$s_1, \quad s_2 \dots$$

durch und addiert, so erhält man

$$(41) \quad \begin{cases} [b s] = [a b] + [b b] + [b c] + \dots + [b l] \\ \vdots \\ [l s] = [a l] + [b l] + [c l] + \dots + [l l] \\ [s s] = [a s] + [b s] + [c s] + \dots + [l s] \end{cases}$$

Rechnet man also außer den zur Gewinnung der Unbekannten jedenfalls erforderlichen Produktsummen

$$[a a] \quad [a b] \quad [a c] \quad \dots \quad [a l]$$

$$[b b] \quad [b c] \quad \dots \quad [b l]$$

$$\vdots$$

noch die Produktensummen

$$[a s]$$

$$[b s]$$

$$\vdots$$

$$[l s]$$

so ist nach Gleichung (41) durch jede dieser letzteren eine Zeile der Koeffizienten der Normalgleichungen summarisch geprüft. Die Quadratsumme  $[l l]$ , welche zum Zweck der Ableitung von  $[v v]$  nach Gleichung (36) berechnet werden muß, wird durch die vorletzte der Kontrollgleichungen (41), und sämtliche Koeffizienten der

Normalgleichungen einschließlich der Kontrollprodukts-  
summen  $[a s] \dots [l s]$  werden durch  $[s s]$  geprüft.

Will man daher auf die zeilenweise Kontrolle ver-  
zichten, so genügt nach (41), letzte Gleichung als einzige  
summarisch durchgreifende Probe die Berechnung von

$$[s s] = [a a] + [a b] + \dots + [b b] + [b c] + \dots + [c l] + [l l]$$

(s. schematische Darstellung unten, in welcher jede Zeile  
rechts und links des Vertikalstrichs und die beiden durch  
fetten Druck hervorgehobenen Flächen je gleiche Wert-  
summen beherbergen).

$$(41) \left\{ \begin{array}{l|l} \text{Koeffiz. der Normalgleichungen} & \text{Probe} \\ \hline [a a] [a b] [a c] \dots [a l] & [a s] \\ [a b] [b b] [b c] \dots [b l] & [b s] \\ [a c] [b c] [c c] \dots [c l] & [c s] \\ \vdots & \vdots \\ [a l] [b l] [c l] \dots [l l] & [l s] \\ \hline [a s] [b s] [c s] \dots [l s] & [s s] \end{array} \right.$$

oder abgekürzt geschrieben

$$(41) \left\{ \begin{array}{l|l} \underline{[a a]} \quad [a b] \quad [a c] \quad \dots \quad [a l] & \text{Probe} \\ & [a s] \\ \cdot \quad \underline{[b b]} \quad [b c] \quad \dots \quad [b l] & [b s] \\ \cdot \quad \cdot \quad \underline{[c c]} \quad \dots \quad [c l] & [c s] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \underline{[l l]} & [l s] \\ \hline \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \underline{[s s]} \end{array} \right.$$

Bei der Reduktion der Normalgleichungen zum Zwecke  
der Gewinnung von  $x_1, x_2 \dots$  spielen diese Unbekannten  
nur die passive Rolle, daß in jeder neuen Reduktionsstufe  
eine von ihnen, nämlich die in der vorhergehenden Stufe



links aufgeführte, verschwindet. Man kann daher den Anschrieb der Unbekannten selbst füglich unterlassen, geändert werden durch die Reduktion nur die Koeffizienten  $[aa]$ ,  $[ab]$  usw. Dehnt man die Reduktionsarbeit auch auf die Summenglieder  $[as]$ ,  $[bs]$ ... der Kontrollgleichungen (41) aus, so ändert sich dadurch an den zur Berechnung der Unbekannten dienenden Koeffizienten der verschiedenen Reduktionsstufe  $n$  natürlich nicht das geringste.

Man erhält aber auch für sie Kontrollgleichungen:

$$(42) \left\{ \begin{array}{l|l} [bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + \dots + [bl \cdot 1] & -[bs \cdot 1] = 0 \\ [bc \cdot 1] + [cc \cdot 1] + \dots + [cl \cdot 1] & -[cs \cdot 1] = 0 \\ \vdots & \vdots \\ [bl \cdot 1] + [cl \cdot 1] + \dots + [ll \cdot 1] & -[ls \cdot 1] = 0 \\ \hline -[bs \cdot 1] - [cs \cdot 1] - \dots - [ls \cdot 1] & +[ss \cdot 1] = 0 \end{array} \right.$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(42) \left\{ \begin{array}{cccc|c} \underline{[bb \cdot 1]} & [bc \cdot 1] & \dots & [bl \cdot 1] & \text{Probe} \\ & \cdot & & \cdot & [bs \cdot 1] \\ & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \underline{[ll \cdot 1]} & [ls \cdot 1] \\ \hline & \cdot & \cdot & \cdot & \underline{[ss \cdot 1]} \end{array} \right.$$

d. h. dieselbe zeilenweise und Gesamtsummenprobe, wie in Gleichung (41) für die Koeffizienten der Normalgleichungen.

Die Fortsetzung der Reduktion liefert die Koeffizienten der zweiten Reduktionsstufe, welche den Kontrollgleichungen genügen müssen:

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} [cc \cdot 2] + \dots + [cl \cdot 2] & - [cs \cdot 2] = 0 \\ \vdots & \vdots \\ [cl \cdot 2] + \dots + [ll \cdot 2] & - [ls \cdot 2] = 0 \\ \hline -[cs \cdot 2] - \dots - [ls \cdot 2] & + [ss \cdot 2] = 0 \end{array} \right.$$

oder abgekürzt geschrieben

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} \underline{[cc \cdot 2]} \dots [cl \cdot 2] & \begin{array}{l} \text{Probe} \\ [cs \cdot 2] \end{array} \\ \cdot \quad \quad \quad \vdots & \\ \cdot \quad \quad \quad \underline{[ll \cdot 2]} & [ls \cdot 2] \\ \hline \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \underline{[ss \cdot 2]} \end{array} \right.$$

Ist die Zahl der Unbekannten = 3, so fallen die obigen, weitere Glieder andeutenden Vorzeichen und Punkte weg, und es ergibt sich die bei der Reduktion noch übrig gebliebene rechtsstehende Unbekannte

$$z = - \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}.$$

Die Fortsetzung der Reduktion liefert dann als dritte Reduktionsstufe, welche keine Unbekannte mehr enthält:

$$(44) \quad \begin{cases} [ll \cdot 3] - [ls \cdot 3] = 0 \\ -[ls \cdot 3] + [ss \cdot 3] = 0, \end{cases}$$

oder als Haupt- und Schlußprobe in Verbindung mit (37)

$$(44) \quad [ll \cdot 3] = [ls \cdot 3] = [ss \cdot 3] = [vv]$$

drei absolut gleich große Zahlen, deren Wert die Fehlerquadratsumme [vv] vorstellt.

Ist die Zahl der Unbekannten = x, so liefert die x-te Reduktionsstufe

$$[ll \cdot x] = [ls \cdot x] = [ss \cdot x] = [vv].$$

Zahlenbeispiel (für von Haus aus lineare Funktion zwischen den Unbekannten und den Beobachtungsgrößen).

Zur Bestimmung der Richtungsunterschiede zwischen vier von einem Punkte  $O$  ausgehenden Strahlen  $OA, OB, OC, OD$  wurden sämtliche zwölf, zwischen je zweien von ihnen vorhandene Winkel je mit gleicher Genauigkeit gemessen (Winkelmessung in allen Kombinationen) und zwar:

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $AOB = 106^\circ 52' 43''$ n. T. | 7. $BOD = 178^\circ 74' 13''$ n. T. |
| 2. $BOC = 99^\circ 78' 12''$ „ „    | 8. $BOA = 293^\circ 47' 50''$ „ „   |
| 3. $COD = 78^\circ 95' 97''$ „ „    | 9. $COA = 193^\circ 69' 29''$ „ „   |
| 4. $DOA = 114^\circ 73' 35''$ „ „   | 10. $COB = 300^\circ 21' 78''$ „ „  |
| 5. $AOC = 206^\circ 30' 68''$ „ „   | 11. $DOB = 221^\circ 25' 90''$ „ „  |
| 6. $AOD = 285^\circ 26' 60''$ „ „   | 12. $DOC = 321^\circ 05' 00''$ „ „  |

Lösung: Zur gegenseitigen Festlegung von vier Strahlen genügen drei voneinander unabhängige Winkel. Die Zahl der überschüssigen Stücke ist also  $12 - 3 = 9$ , die Zahl der Fehlergleichungen 12, die Zahl der Unbekannten 3.

Die gesuchten („Soll“-) Werte für die Richtungsunterschiede mögen sein:

$$\text{Winkel } AOB = X,$$

$$\text{„ } BOC = Y,$$

$$\text{„ } COD = Z.$$

In § 14 haben wir für die zwischen den Unbekannten und den Beobachtungsgrößen  $L$  bestehenden Beziehungen allgemein folgende Normalform gewählt:

$$(25) \quad F(X, Y, Z) - L = 0 .]$$

Diese Normalform ging durch Einführung von Näherungswerten  $N_X, N_Y, N_Z$  für die Unbekannten und unter Beachtung, daß die Beobachtungswerte  $L$  nicht fehlerfrei sind, sondern Verbesserungszuschläge  $v$  verlangen, in die Form der Fehlergleichungen über:

$$(25e) \quad ax + by + cz + l = v .$$

Da allgemein die Funktion  $F(X, Y, Z)$  lediglich den Sollwert der betreffenden Beobachtungsgröße  $L$  darstellt, so ist im gegenwärtigen Beispiele die dem jeweiligen Beobachtungswert  $L$  entsprechende Funktion  $F$  der Unbekannten einfach durch sinngemäße Addition, bzw. Subtraktion der letzteren zu gewinnen, und es ergeben sich die Fehlergleichungen nach der Regel:

Soll — Ist = Verbesserung.!

Im Interesse bequemer Rechnung [also nicht, wie im Falle nicht linearer Funktion, zur Linearmachung der Beziehungen (25)] führen wir auch hier Näherungswerte für die Unbekannten ein und setzen:

$$AOB = X = N_X + x = 106^\circ 52' 43'' + x,$$

$$BOC = Y = N_Y + y = 99^\circ 78' 12'' + y,$$

$$COD = Z = N_Z + z = 78^\circ 95' 97'' + z.$$

Damit erhalten wir durch Subtraktion jedes gemessenen Winkelwertes je von dem durch entsprechende Zusammensetzung der Unbekannten gewonnenen Sollwerte die 12 Fehlergleichungen:

|                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x$ $+0$ $= v_1$          | 7. $+y + z - 4'' = v_7$     |
| 2. $y$ $+0$ $= v_2$          | 8. $-x$ $+7'' = v_8$        |
| 3. $z + 0 = v_3$             | 9. $-x - y + 16'' = v_9$    |
| 4. $-x - y - z + 13'' = v_4$ | 10. $-y + 10'' = v_{10}$    |
| 5. $+x + y - 13'' = v_5$     | 11. $-y - z + 1'' = v_{11}$ |
| 6. $+x + y + z - 8'' = v_6$  | 12. $-z + 3'' = v_{12}$     |

Die Koeffizienten der Unbekannten sind demnach alle = 1 oder 0. Zur bequemerer Rechnung ist es wünschenswert, daß auch die Absolutglieder  $l$  möglichst nahe dem Werte 1 liegen. Dies wird erreicht, wenn man als Einheit sowohl für die Absolutglieder  $l$ , als auch für die unbekanntes Zuschläge  $x, y, z$  statt der Sekunden Dekasekunden (Zehnersekunden) wählt. Damit erhält man tabellarisch angeordnet folgende Koeffizienten der Fehler- und der Normalgleichungen:

| Fehler-<br>Glei-<br>chung | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>l</i> | <i>s</i> | <i>aa</i> | <i>ab</i> | <i>ac</i> | <i>al</i> | <i>as</i> | <i>bb</i> | <i>bc</i> | <i>bl</i> | <i>bs</i> | <i>cc</i> | <i>cl</i> | <i>cs</i> | <i>ll</i> | <i>ls</i> | <i>ss</i> |   |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---|
|                           | +        | +        | +        | -        | +        | +         | +         | +         | -         | +         | +         | +         | -         | +         | +         | -         | +         | +         | -         | +         |   |
| 1                         | +1       | 0        | 0        | 0        | +1       | 1         | 0         | 0         | 0         | 1         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1 |
| 2                         | 0        | +1       | 0        | 0        | +1       | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1         | 0         | 0         | 1         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1 |
| 3                         | 0        | 0        | +1       | 0        | +1       | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1         | 0         | 1         | 0         | 0         | 0         | 1 |
| 4                         | -1       | -1       | -1       | +1,3     | -1,7     | 1         | 1         | 1         | 1,3       | 1,7       | 1         | 1         | 1,3       | 1,7       | 1         | 1,3       | 1,7       | 1,69      | 2,21      | 2,89      |   |
| 5                         | +1       | +1       | 0        | -1,3     | +0,7     | 1         | 1         | 0         | 1,3       | 0,7       | 1         | 0         | 1,3       | 0,7       | 0         | 0         | 0         | 1,69      | 0,91      | 0,49      |   |
| 6                         | +1       | +1       | +1       | -0,8     | +2,2     | 1         | 1         | 1         | 0,8       | 2,2       | 1         | 1         | 0,8       | 2,2       | 1         | 0,8       | 2,2       | 0,64      | 1,76      | 4,84      |   |
| 7                         | 0        | +1       | +1       | -0,4     | +1,6     | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1         | 1         | 0,4       | 1,6       | 1         | 0,4       | 1,6       | 0,16      | 0,64      | 2,56      |   |
| 8                         | -1       | 0        | 0        | +0,7     | -0,3     | 1         | 0         | 0         | 0,7       | 0,3       | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0,49      | 0,21      | 0,09      |   |
| 9                         | -1       | -1       | 0        | +1,6     | -0,4     | 1         | 1         | 0         | 1,6       | 0,4       | 1         | 0         | 1,6       | 0,4       | 0         | 0         | 0         | 2,56      | 0,64      | 0,16      |   |
| 10                        | 0        | -1       | 0        | +1       | 0        | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1         | 0         | 1         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1         | 0         | 0         |   |
| 11                        | 0        | -1       | -1       | +0,1     | -1,9     | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1         | 1         | 0,1       | 1,9       | 1         | 0,1       | 1,9       | 0,01      | 0,19      | 3,61      |   |
| 12                        | 0        | 0        | -1       | +0,3     | -0,7     | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 0         | 1         | 0,3       | 0,7       | 0,09      | 0,21      | 0,49      |   |
| [ ] = 0                   | 0        | 0        | 0        | +2,5     | +2,5     | 6         | 4         | 2         | 5,7       | 6,3       | 8         | 4         | 6,5       | 9,5       | 6         | 2,9       | 9,1       | 8,33      | 6,77      | 18,13     |   |

Ausrechnung mittels Rechenschiebers:

| Koeffiz. der Normalgleichungen u. Reduktion |                     |                     |              | Probe         |
|---|---------------------|---------------------|--------------|---------------|
| <u>+6</u>                                   | +4                  | +2                  | -5,7         | + 6,3         |
|   | (-2 $\frac{2}{3}$ ) | (-1 $\frac{1}{3}$ ) | (+3,8)       | (- 4,2)       |
|   | <u>+8</u>           | +4                  | -6,5         | + 9,5         |
|   |                     | (- $\frac{2}{3}$ )  | (+1,9)       | (- 2,1)       |
|   |                     | <u>+6</u>           | -2,9         | + 9,1         |
|   |                     |                     | (-5,42)      | (+ 5,98)      |
|   |                     |                     | <u>+8,33</u> | - 6,77        |
|   |                     |                     |              | (- 6,62)      |
|   |                     |                     |              | <u>+18,13</u> |
|   |                     |                     |              | +18,13        |

| 1. Reduktionsstufe u. Reduktion   |                                   |              |               | Probe  |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------|---------------|--------|
| <u>+5<math>\frac{1}{3}</math></u> | +2 $\frac{2}{3}$                  | -2,7         | + 5,3         | + 5,3  |
|                                   | (-1 $\frac{1}{3}$ )               | (+1,35)      | (- 2,65)      |        |
|                                   | <u>+5<math>\frac{1}{3}</math></u> | -1,0         | + 7,0         | + 7,0  |
|                                   |                                   | (-1,37)      | (+ 2,68)      |        |
|                                   |                                   | <u>+2,91</u> | - 0,79        | - 0,79 |
|                                   |                                   |              | (- 5,27)      |        |
|                                   |                                   |              | <u>+11,51</u> | +11,51 |

| 2. Reduktionsstufe u. Reduktion |              |              | Probe |
|---------------------------------|--------------|--------------|-------|
| <u>+4</u>                       | +0,35        | +4,35        | +4,35 |
|                                 | (-0,02)      | (-0,38)      |       |
|                                 | <u>+1,54</u> | +1,89        | +1,89 |
|                                 |              | (-4,74)      |       |
|                                 |              | <u>+6,24</u> | +6,24 |

Hieraus

$$z = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = -\frac{0,35}{4} = -0,09 \text{ Dekasekd.} = -0,9''$$

$$Z = 78^\circ 95' 97'' - 0,9'' = 78^\circ 95' 96,1''$$

$$P_z = [cc \cdot 2] = 4.$$

3. Reduktionsstufe u. Schlußprobe. [v v].

$$\begin{array}{r} \underline{+1,52} \\ +1,51 \\ \underline{+1,50} \end{array}$$

Mittlerer Fehler einer Messung

$$m = \pm \sqrt{\frac{1,51}{9}} = \pm 0,41 \text{ Dekasekd.} = \pm 4,1'',$$

mittlerer Fehler des Winkels  $Z$ 

$$\div \cdot M_z = \frac{m}{\sqrt{P_z}} = \pm \frac{4,1}{2} = \pm 2''.$$

Zum Zwecke der Berechnung der vorletzten Unbekannten  $y$  erfolgt Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen und Wiederholung des Verfahrens:

| Koeffiz. der Normalgleichungen u. Reduktion |                  |                   |              |               | Probe  |
|---|------------------|-------------------|--------------|---------------|--------|
| <u>+6</u>                                   | +2               | +4                | -2,9         | + 9,1         | + 9,1  |
|   | $(-\frac{2}{3})$ | $(-1\frac{1}{3})$ | (+0,97)      | (- 3,0)       |        |
|   | <u>+6</u>        | +4                | +5,7         | + 6,3         | + 6,3  |
|   |                  | $(-2\frac{2}{3})$ | (+1,93)      | (- 6,07)      |        |
|   |                  | <u>+8</u>         | -6,5         | + 9,5         | + 9,5  |
|   |                  |                   | (-1,40)      | (+ 4,40)      |        |
|   |                  |                   | <u>+8,33</u> | + 6,77        | - 6,77 |
|   |                  |                   |              | (-13,8)       |        |
|   |                  |                   |              | <u>+18,13</u> | +18,13 |

| 1. Reduktionsstufe u. Reduktion   |                                   |              |              | Probe |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------|--------------|-------|
| <u>+5<math>\frac{1}{3}</math></u> | +2 $\frac{2}{3}$                  | -4,73        | +3,27        | +3,3  |
|                                   | $(-1\frac{1}{3})$                 | (+2,37)      | (-1,64)      |       |
|                                   | <u>+5<math>\frac{1}{3}</math></u> | -4,57        | +3,43        | +3,43 |
|                                   |                                   | (-4,20)      | (+2,90)      |       |
|                                   |                                   | <u>+6,93</u> | -2,37        | -2,37 |
|                                   |                                   |              | (-2,00)      |       |
|                                   |                                   |              | <u>+4,33</u> | +4,33 |

| 2. Reduktionsstufe u. Reduktion |              |              | Probe |
|---------------------------------|--------------|--------------|-------|
| <u>+4</u>                       | -2,20        | +1,80        | +1,79 |
|                                 | (-1,21)      | (+0,99)      |       |
|                                 | <u>+2,73</u> | +0,53        | +0,53 |
|                                 |              | (-0,81)      |       |
|                                 |              | <u>+2,33</u> | +2,33 |



Hieraus

$$y = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = -\frac{-2,20}{4} = +0,55 \text{ Dekasekd.} = +5,5'' ,$$

also

$$Y = 99^\circ 78' 12'' + 5,5'' = 99^\circ 78' 17,5''$$

$$P_y = [cc \cdot 2] = 4 .$$

3. Reduktionsstufe u. Schlußprobe. [v v].

$$\begin{array}{r} +1,52 \\ \hline +1,52 \\ \hline +1,52 \end{array}$$

in Übereinstimmung mit der Reduktion für  $Z$ .

Die Berechnung ergibt für die Winkel  $y$  und  $z$  dasselbe Gewicht 4. Dies war angesichts der symmetrischen Anordnung der Winkelbeobachtung vorauszusehen, denn jeder der drei gesuchten Winkel erscheint durch die zwölf gemessenen Winkel viermal bestimmt. Wir sind aber dadurch der nochmaligen Umstellung und Reduktion für die Berechnung von  $x$  enthoben. Diese letzte Unbekannte  $x$  werden wir durch Einsetzung von  $y$  und  $z$  in eine der Normalgleichungen ermitteln.

Z. B. liefert die erste Normalgleichung:

$$\begin{aligned} 6x + 4y + 2z - 5,7 &= 0 \\ x &= \frac{5,7 - 4 \cdot 0,55 - 2 \cdot (-0,09)}{6} \\ &= \frac{5,7 - 2,2 + 0,18}{6} = \frac{3,68}{6} \\ &= +0,61 \text{ Dekasekd.} = +6,1'' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X &= 106^\circ 52' 43'' + 6,1'' = 106^\circ 52' 49,1'' \\ P_X &= 4 \\ M_X &= \pm 2'' . \end{aligned}$$

Wir haben also als Schlußresultat:

$$\left. \begin{array}{l} X = 106^\circ 52' 49,1'' \pm 2'' \\ Y = 99^\circ 78' 17,5'' \pm 2'' \\ Z = 78^\circ 95' 96,1'' \pm 2'' \end{array} \right\} P_X = P_Y = P_Z = 4 .$$

Eine durchgreifende Probe erhalten wir schließlich durch Einsetzung der gefundenen Werte für  $x, y, z$  in die Fehler-

gleichungen. Die berechneten  $v$  müssen alsdann den Gleichungen (33) entsprechen:

$$[a v] = 0, \quad [b v] = 0, \quad [c v] = 0,$$

und es muß überdies

$$[v v] = 1,52.$$

| Fehler-Gleichung | $v$  |      | $a v$      |      | $b v$ |      | $c v$ |      | $v v$         |
|------------------|------|------|------------|------|-------|------|-------|------|---------------|
|                  | +    | -    | +          | -    | +     | -    | +     | -    |               |
| 1                | 0,61 |      | 0,61       |      | 0     |      | 0     |      | 0,37          |
| 2                | 0,55 |      | 0          |      | 0,55  |      | 0     |      | 0,30          |
| 3                |      | 0,09 | 0          |      | 0     |      |       | 0,09 | 0,01          |
| 4                | 0,23 |      |            | 0,23 |       | 0,23 |       | 0,23 | 0,05          |
| 5                |      | 0,14 |            | 0,14 |       | 0,14 | 0     |      | 0,02          |
| 6                | 0,27 |      | 0,27       |      | 0,27  |      | 0,27  |      | 0,07          |
| 7                | 0,06 |      | 0          |      | 0,06  |      | 0,06  |      | 0             |
| 8                | 0,09 |      |            | 0,09 | 0     |      |       | 0    | 0,01          |
| 9                | 0,44 |      |            | 0,44 |       | 0,44 |       | 0    | 0,19          |
| 10               | 0,45 |      | 0          |      |       | 0,45 |       | 0    | 0,20          |
| 11               |      | 0,36 | 0          |      | 0,36  |      | 0,36  |      | 0,13          |
| 12               | 0,39 |      | 0          |      | 0     |      |       | 0,39 | 0,15          |
|                  |      |      | [ ] = 0,88 | 0,90 | 1,24  | 1,26 | 0,69  | 0,71 | 1,50          |
|                  |      |      | 0,02       |      | 0,02  |      | 0,02  |      | statt<br>1,52 |

(Abrundungsdifferenzen)

Anmerkung. Hätten wir den Beobachtungswert jedes Winkels mit demjenigen seines Implementes zu einem Werte

vereinigt (gemittelt), so wäre die Zahl der Fehlergleichungen auf die Hälfte reduziert, das Gewicht jedes so gewonnenen Winkels auf das Doppelte gesteigert worden. Im übrigen wäre der Weg der Rechnung derselbe geblieben.

### 3. Kapitel.

## Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit.

### § 20. Erweiterung der für gleichwertige Beobachtungen aufgestellten Ausgleichungsgrundsätze auf ungleichwertige Beobachtungen.

Wenn die einzelnen Beobachtungswerte  $L$ , aus denen die Unbekannten  $X, Y \dots$  errechnet werden sollen, von ungleicher Genauigkeit sind (etwa deshalb, weil sie mit verschiedenerlei Instrumenten, oder nach verschiedenerlei Beobachtungsmethoden, oder auf Grund verschieden oftmaliger Wiederholung gewonnen wurden), so ändert dies weder an den zwischen beiderlei Größen bestehenden Beziehungen (25)  $F(X, Y \dots) - L = 0$ , noch an den durch Einführung von Näherungswerten  $N_x \dots$  für  $X \dots$  gebildeten Beziehungen (25 e)  $ax + \dots + l = v$  das geringste. Nur wird der — im Falle vorhandener Überbestimmung jedem Beobachtungswert  $L$  zuzuschlagende und etwa durch Einsetzung der gefundenen Werte für die Unbekannten in Gleichungen (25 a) oder (25 e) zu ermittelnde — Verbesserungsbetrag  $v$ , welcher durch die unvermeidlichen Beobachtungsungenauigkeiten nötig wird, um so kleiner sein, je genauer die Beobachtungswerte  $L$  sind. Es ist daher nicht mehr angängig, diese Verbesserungszuschläge unterschiedslos den weiteren Unter-

suchungen zugrunde zu legen, wie es im vorigen Kapitel geschah. Vielmehr werden wir den Weg wieder beschreiten müssen, den wir im 2. Kapitel des I. Abschnittes eingeschlagen haben: den Weg der Einführung von Gewichten  $p$  für die einzelnen Beobachtungswerte  $L$ . Dabei ist klar, daß der negative Wert von  $L$  in Gleichung (25) dieselbe Genauigkeit, also auch dasselbe Gewicht hat, wie der eigentliche (positive) Beobachtungswert und wie das Absolutglied  $l$  in (25e), welches gewonnen wurde durch Zuschlag der fehlerfreien Größe  $F(N_X, N_Y \dots)$  zum negativen Beobachtungswert. Sind die Gewichte  $p$  der Beobachtungswerte  $L$  bekannt, so können wir damit die an den letzteren anzubringenden Verbesserungen  $v$  auf diejenigen Beträge zurückführen, welche sich ergeben hätten, wenn den einzelnen Beobachtungswerten  $L$  nicht diese veränderlichen Gewichte  $p_1 \dots p_n$ , sondern allen das gleiche Gewicht 1 zukäme. Durch die Steigerung des Beobachtungsgewichtes von 1 auf  $p$  wurde nämlich auch die Beobachtungsgenauigkeit, und zwar auf das  $\sqrt{p}$ -fache gesteigert (Gleichung 15), also der mittlere Beobachtungsfehler  $m$  und der nötige Verbesserungsbetrag  $v$  im selben Verhältnis herabgedrückt. An Stelle des nötigen Verbesserungsbetrages  $v$  der mit dem Gewichte  $p$  behafteten Beobachtung  $L$  wäre daher  $v\sqrt{p}$  getreten, wenn die Beobachtung nur das Gewicht 1 gehabt hätte. Wir können also alle an den Beobachtungswerten vom Gewicht  $p_1, p_2 \dots$  anzubringenden Verbesserungen  $v$  auf die im 2. Kapitel behandelten eingewichtigen Verbesserungen und die jetzt zu suchende Lösung auf die dort gefundene zurückführen, wenn wir jeden dieser Verbesserungszuschläge mit der Wurzel aus dem zugehörigen Beobachtungsgewicht multiplizieren, statt  $v$  setzen  $v\sqrt{p}$ . Für die Auswahl der

wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten haben wir daher statt der Bedingung  $[v v] = \text{Min.}$  (s. S. 76) die schon in § 9 aufgestellte Bedingung (17):

$$[p v v] = \text{Min.}$$

Wenden wir sie auf die Fehlergleichungen (25e) an, indem wir aus diesen, wie in § 14, zunächst  $v_1^2, v_2^2 \dots$  bilden, jeden der dafür gewonnenen Ausdrücke sodann mit  $p_1, p_2 \dots$  durchmultiplizieren und schließlich addieren, so erhalten wir die durch entsprechende Auswahl der Unbekannten  $x, y \dots$  zum Min. zu machende Summe:

$$[p v v] = [p a a] x^2 + 2 [p a b] x y + 2 [p a c] x z + \dots + 2 [p a l] x \\ + [p b b] y^2 + 2 [p b c] y z + \dots + 2 [p b l] y \\ + [p c c] z^2 + \dots + 2 [p c l] z + [p l l].$$

Durch partielle Ableitung und Kürzung mit 2 entstehen die Normalgleichungen:

$$(26a) \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [p v v]}{\partial x} = [p a a] x + [p a b] y + [p a c] z + \dots + [p a l] = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [p v v]}{\partial y} = [p a b] x + [p b b] y + [p b c] z + \dots + [p b l] = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial [p v v]}{\partial z} = [p a c] x + [p b c] y + [p c c] z + \dots + [p c l] = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Die Normalgleichungen (26a) unterscheiden sich von den entsprechenden Gleichungen (26) in § 14 nur dadurch, daß an Stelle jedes der dortigen Koeffizienten  $a, b \dots$  oder Absolutglieder  $l$  der Fehlergleichungen jetzt getreten sind:  $a\sqrt{p}, b\sqrt{p} \dots l\sqrt{p}$ , gerade wie auch jeder dortige Verbesserungszuschlag  $v$  hier in  $v\sqrt{p}$  überging.

Es ist daher nicht nötig, die auf die Normalgleichungen gegründeten Ableitungen des 2. Kapitels hier zu wiederholen. Wir erhalten vielmehr durch Beachtung dieser Modifikation

a) im Falle der Bestimmung einer einzigen Unbekannten  $x$ :

$$(27a) \quad x = -\frac{[p a l]}{[p a a]}$$

$$(28a) \quad [p a v] = 0$$

$$(37a) \quad [p v v] = [p l l \cdot 1]$$

und für die mittleren Fehler und Gewichte nach der Ausgleichung:  
mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1

$$(36a) \quad \div \cdot \mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{\lambda - 1}},$$

mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht  $p$

$$(36b) \quad \div \cdot m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{p(\lambda - 1)}},$$

Gewicht  $P$  der Unbekannten  $x$

$$(39a) \quad P_x = [p a a],$$

mittlerer Fehler der Unbekannten  $x$

$$(38a) \quad M_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{[p a a] (\lambda - 1)}}.$$

Analog ändern sich die Gleichungen des § 15 bei Bestimmung von zwei, drei oder mehr Unbekannten und lauten z. B.:

b) im Falle der Bestimmung von vier Unbekannten:

$$(29a) \quad \left\{ \begin{array}{l} [p d l \cdot 3] = [p d l \cdot 2] - \frac{[p c d \cdot 2]}{[p c c \cdot 2]} [p c l \cdot 2] \\ [p d d \cdot 3] = [p d d \cdot 2] - \frac{[p c d \cdot 2]}{[p c c \cdot 2]} [p c d \cdot 2] \\ [p l l \cdot 4] = [p l l \cdot 3] - \frac{[p d l \cdot 3]}{[p d d \cdot 3]} [p d l \cdot 3] \end{array} \right.$$

$$(34a) \quad x_4 = -\frac{[p d l \cdot 3]}{[p d d \cdot 3]}$$

$$(35a) \quad \left\{ \begin{array}{l} [p a v] = 0 \\ [p b v] = 0 \\ [p c v] = 0 \\ [p d v] = 0 \end{array} \right.$$

$$(37d) \quad [p v v] = [p l l \cdot 4].$$

Für die mittleren Fehler und Gewichte nach der Ausgleichung erhält man:

mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1

$$(36a) \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{\lambda - 4}},$$

mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht  $p$

$$(36b) \quad m = \frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{p(\lambda - 4)}}$$

Gewicht der bei der Reduktion rechts stehenden Unbekannten

$$(39a) \quad P = [p d d \cdot 3],$$

mittlerer Fehler der rechts stehenden Unbekannten

$$(38a) \quad M = \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{[p d d \cdot 3] (\lambda - 4)}} \\ \text{usw.}$$

Auch die in § 19 aufgestellten Rechenproben durch Einführung der Summen  $s$  der in jeder Fehlergleichung vorhandenen Koeffizienten  $a, b \dots$  und des Absolutgliedes  $l$  bleiben analog bestehen.

Wenn die ursprünglich zwischen den Unbekannten  $X, Y \dots$  und den Beobachtungswerten  $L_1 \dots$  vorhandenen Beziehungen lauteten

$$(25) \quad \begin{cases} F_1(X, Y \dots) - L_1 = 0 \\ F_2(X, Y \dots) - L_2 = 0 \quad \text{usw.}, \end{cases}$$

wobei den Beobachtungswerten  $L_1, L_2 \dots$  die Gewichte  $p_1, p_2 \dots$  zukamen, so haben wir diese Urbeziehungen durch Einführung von Näherungswerten  $N_X, N_Y \dots$  nach dem in § 14 gezeigten Verfahren linear gemacht und die Fehlergleichungen geschaffen:

$$(25e) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots + l_2 = v_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Den Absolutgliedern  $l_1 \dots$  kamen dabei dieselben Gewichte  $p_1, p_2 \dots$  zu, wie den Beobachtungswerten  $L_1, L_2 \dots$ . Wir haben sodann, um die Verbesserungen  $v$  je auf die Gewichts-



einheit zurückzuführen, die Fehlergleichungen (25e) in die Form umgewandelt:

$$(25f) \begin{cases} a_1 \sqrt{p_1} x + b_1 \sqrt{p_1} y + c_1 \sqrt{p_1} z + \dots + l_1 \sqrt{p_1} = v_1 \sqrt{p_1} \\ a_2 \sqrt{p_2} x + b_2 \sqrt{p_2} y + c_2 \sqrt{p_2} z + \dots + l_2 \sqrt{p_2} = v_2 \sqrt{p_2} \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

so daß die Koeffizienten und Absolutglieder der neuen Fehlergleichungen heißen

$$a_1 \sqrt{p_1}, b_1 \sqrt{p_1}, c_1 \sqrt{p_1}, \dots, l_1 \sqrt{p_1} \text{ usw.}$$

Wir können jetzt für die Ausgleichung ungleichwertiger Beobachtungen genau dieselben Summengleichungen (40) bilden, welche wir in § 19 zur Schaffung von Rechenproben gebildet haben, indem wir setzen

$$(40a) \begin{cases} a_1 \sqrt{p_1} + b_1 \sqrt{p_1} + c_1 \sqrt{p_1} + \dots + l_1 \sqrt{p_1} = s_1 \sqrt{p_1} \\ a_2 \sqrt{p_2} + b_2 \sqrt{p_2} + c_2 \sqrt{p_2} + \dots + l_2 \sqrt{p_2} = s_2 \sqrt{p_2} \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Durch Multiplikation der ersten Zeile mit  $a_1 \sqrt{p_1}$ , der zweiten Zeile mit  $a_2 \sqrt{p_2}$  usw. und vertikale Addition kommt:

$$(41a) [paa] + [pab] + [pac] + \dots + [pal] = [pas],$$

durch Multiplikation mit  $b_1 \sqrt{p_1}$  bzw.  $b_2 \sqrt{p_2}$  usw. kommt:

$$(41a) [pab] + [pbb] + [pbc] + \dots + [pbl] = [pbs],$$

durch Multiplikation mit  $l_1 \sqrt{p_1}$  bzw.  $l_2 \sqrt{p_2}$  usw. kommt:

$$(41a) [pal] + [pbl] + [pcl] + \dots + [pll] = [pls],$$

durch Multiplikation mit  $s_1 \sqrt{p_1}$  bzw.  $s_2 \sqrt{p_2}$  usw. kommt:

$$(41a) [pas] + [pbs] + [pcs] + \dots + [pls] = [pss].$$

Wir haben also für die Koeffizienten der Normalgleichungen hier genau dieselben Rechenproben, wie in § 19, sobald wir nicht bloß jeden Koeffizienten und jedes Absolutglied der Fehlergleichungen, sondern auch ihre Summe  $s$  mit der Wurzel aus dem zugehörigen Gewicht multiplizieren.

Ganz ebenso verhält es sich mit den Koeffizienten der ersten Reduktionsstufe, wo

$$(42a) \begin{cases} [pbb \cdot 1] + [pbc \cdot 1] + \dots + [pbl \cdot 1] & - [pbs \cdot 1] = 0 \\ [pbc \cdot 1] + [pcc \cdot 1] + \dots + [pcl \cdot 1] & - [pcs \cdot 1] = 0 \\ \vdots & \vdots \\ [pbl \cdot 1] + [pcl \cdot 1] + \dots + [pll \cdot 1] & - [pls \cdot 1] = 0 \\ \hline - [pbs \cdot 1] - [pcs \cdot 1] - \dots - [pls \cdot 1] & + [pss \cdot 1] = 0 \end{cases}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(42a) \begin{cases} \begin{array}{ccc|c} \underline{[pbb \cdot 1]} & [pbc \cdot 1] & \dots & [pbl \cdot 1] & \text{Probe} \\ & \underline{[pcc \cdot 1]} & \dots & [pcl \cdot 1] & [pbs \cdot 1] \\ & & & \vdots & [pcs \cdot 1] \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & [pll \cdot 1] & [pls \cdot 1] \\ \hline & & & & \underline{[pss \cdot 1]} \end{array} \end{cases}$$

In der zweiten Reduktionsstufe ist:

$$(43a) \begin{cases} [pcc \cdot 2] + \dots + [pcl \cdot 2] & - [pcs \cdot 2] = 0 \\ \vdots & \vdots \\ [pcl \cdot 2] + \dots + [pll \cdot 2] & - [pls \cdot 2] = 0 \\ \hline - [pcs \cdot 2] - \dots - [pls \cdot 2] & + [pss \cdot 2] = 0 \end{cases}$$

oder abgekürzt geschrieben:

$$(43a) \begin{cases} \begin{array}{ccc|c} \underline{[pcc \cdot 2]} & \dots & [pcl \cdot 2] & \text{Probe} \\ & & \vdots & [pcs \cdot 2] \\ & & [pll \cdot 2] & [pls \cdot 2] \\ \hline & & & \underline{[pss \cdot 2]} \end{array} \end{cases}$$

Endlich kommt die Schlußprobe:

$$(44a) \quad [pll \cdot 3] = [pls \cdot 3] = [pss \cdot 3] = [p v v] .$$

Sind die einzelnen *L* gleichartige, mit demselben Instrument und nach denselben Methoden gewonnene Beobachtungswerte, so sind die Gewichte *p*, die wir bisher als bekannt annahmen, einfach proportional den Wiederholungszahlen. Sind sie aber ungleichartig, oder mit ver-

schiedenen Methoden und Instrumenten gewonnen, so wissen wir über ihre Gewichte zunächst nichts.

Wir schätzen in diesem Falle zweckmäßigerweise die ihnen anhaftenden mittleren Fehler  $m$  und berechnen hieraus unter beliebiger Annahme eines Gewichtseinheitsfehlers  $\mu$  das zugehörige Gewicht nach Gleichung (15)

$$m_1 : \mu = \sqrt{1} : \sqrt{p_1}$$

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}$$

oder für  $\mu = 1$

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2} \quad \text{usw.}$$

Führt man mit den so erhaltenen Gewichten, denen gewisse angenommene mittlere Fehler  $m$  zugrunde liegen (mittlere Fehler vor der Ausgleichung), die Ausgleichung durch, so erhält man nach Gleichungen (36 a) und (36 b) mittlere Fehler nach der Ausgleichung, welche mit den ersteren übereinstimmen müssen, wenn diese richtig gewählt wurden und keine einseitigen Fehlerquellen auf die Beobachtungen einwirkten. Nötigenfalls kann man die Rechnung mit ihnen bzw. den aus ihnen abgeleiteten Gewichten wiederholen.

Nach dem soeben Erkannten ist

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2}, \quad p_2 = \frac{1}{m_2^2} \quad \text{usw.,}$$

folglich der Faktor, mit dem sämtliche Koeffizienten und die Absolutglieder und Verbesserungszuschläge  $v$  einer Fehlergleichung multipliziert wurden,  $\sqrt{p} = \frac{1}{m}$ .

Da  $m$  eine Größe gleicher Gattung ist wie  $l$  und  $v$ , so werden diese durch die Multiplikation mit  $\sqrt{p}$  un-

benannte Zahlen, was schon zur Ermöglichung der durchzuführenden Differentiationen, Multiplikationen und Quadrierungen vorausgesetzt war.

#### 4. Kapitel.

### Anwendung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen auf trigonometrische Punkteinschaltung.

#### § 21. Graphisches Ausgleichungsverfahren für Vorwärts- und vereinigt Vor- und Rückwärtseinschneiden.

Die trigonometrische Punkteinschaltung bildet eine der häufigst auftretenden Ausgleichungsaufgaben aus dem Gebiete der Geodäsie. Sie bezweckt die Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten  $x_P$  und  $y_P$  von „Neupunkten“  $P$  auf Grund von Bestimmungsstrahlen, die von „Festpunkten“ ausgehen und deren Richtung durch Beobachtung der Winkel  $\alpha$  im Neupunkt zwischen ihnen selbst, oder der Winkel  $\beta$  in den Festpunkten zwischen ihnen und den Verbindungslinien nach anderen Festpunkten („Feststrahlen“) festgelegt wird. Sind solche Winkel  $\beta$  nur in (mindestens zwei) Festpunkten gemessen, so hat man die Aufgabe des „Vorwärtseinschnittes“. Sind nur Winkel  $\alpha$  im Neupunkt zwischen den (mindestens drei) Bestimmungsstrahlen gemessen, so hat man die Aufgabe des „Rückwärtseinschnittes“. Wurden Winkel sowohl im Neupunkt zwischen den Bestimmungsstrahlen selbst ( $\alpha$ ), als in den Festpunkten zwischen Fest- und Bestimmungsstrahlen ( $\beta$ ) gemessen, so wird der Neupunkt durch „vereinigt Vor- und Rückwärtseinschneiden“ bestimmt. In jedem Falle orientieren wir die beobachteten Winkel oder Richtungen  $\alpha$  oder  $\beta$  zu Richtungs- (Neigungs-)winkeln  $\mu$  der von den Festpunkten gegen den Neupunkt gerichteten Bestimmungsstrahlen. Jede (gleichgültig, ob rein rech-

nerische oder graphische) Lösung geht aus von einem seinen Koordinaten  $x_N$  und  $y_N$  nach irgendwie ermittelten, möglichst nahe dem endgültigen Neupunkt gelegenen „Näherungs“- oder „vorläufigen Punkt“  $N$ , so daß als neue Unbekannte nicht mehr die Koordinaten  $x$  und  $y$  des Neupunktes  $P$  selbst, sondern, in Übereinstimmung mit dem bisherigen, die Zuschläge  $dx$  und  $dy$  gelten, deren Addition die vorläufigen Koordinaten zu den endgültigen ergänzt.

$$(45) \quad \begin{cases} x_P = x_N + dx \\ y_P = y_N + dy \end{cases}$$

Um diese Zuschläge zu finden, beachten wir, daß die Bestimmungsstrahlen infolge von Ungenauigkeiten in unserer eigenen Winkelmessung, sowie infolge von Projektionsverzerrungen und Mißstimmigkeiten zwischen den gegebenen Koordinaten der Festpunkte und dem Standort der letzteren sich nicht in einem Punkte und noch viel weniger gerade im Näherungspunkte  $N$  schneiden, sondern eine fehlerzeigende Figur miteinander bilden werden, in deren Nähe  $N$  liegt und innerhalb welcher wir den wahrscheinlichsten Punkt  $P$  auswählen müssen. Es wird sich also zunächst darum handeln, die gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen und des vorläufigen Punktes  $N$  zu erkennen, — in möglichst großem Maßstabe (etwa 1 : 10) aufzuzeichnen. Zu diesem Zwecke berechnen wir aus den orientierten Richtungswerten  $\mu$  entweder die Entfernungen der Punkte von  $N$ , in denen die Bestimmungsstrahlen die eine oder die andere der durch  $N$  gezogenen Parallelen zu den beiden Koordinatenachsen schneiden. Diese tragen wir sodann im gewählten Maßstabe von  $N$  aus auf den Parallelen in der festgestellten Richtung ab, um schließlich durch ihre Endpunkte die Bestimmungsstrahlen entsprechend ihrer tatsächlichen Lage unter den orientierten Richtungen  $\mu$  gegen die Parallele zur  $-x$ -Achse zu zeichnen. (Zur  $-x$ -Achse, weil die jetzt zu zeichnenden, vom Neupunkte  $P$  ausgehenden Strahlen statt der Neigung  $\mu = nAP$  usw. den Richtungswinkel  $\mu \pm 2R = nPA$  usw. besitzen.) Oder wir berechnen außer den orientierten Richtungen  $\mu$  noch die entsprechenden Richtungs- (Neigungs-)winkel  $\nu$  von den Festpunkten nach dem vorläufigen Punkte  $N$  und aus der Differenz  $\delta = \mu - \nu$  und der Strahlen-

länge  $s$  die Querabweichung  $b$  des Bestimmungsstrahles vom vorläufigen Punkte  $N$ . Sie wird (vom Festpunkte aus gesehen nach links für  $\delta = \overline{+}$ ) von  $N$  im ausgewählten Maßstabe senkrecht zu der wie oben bestimmten orientierten Richtung  $\mu$  abgetragen, um durch den Endpunkt den Be-

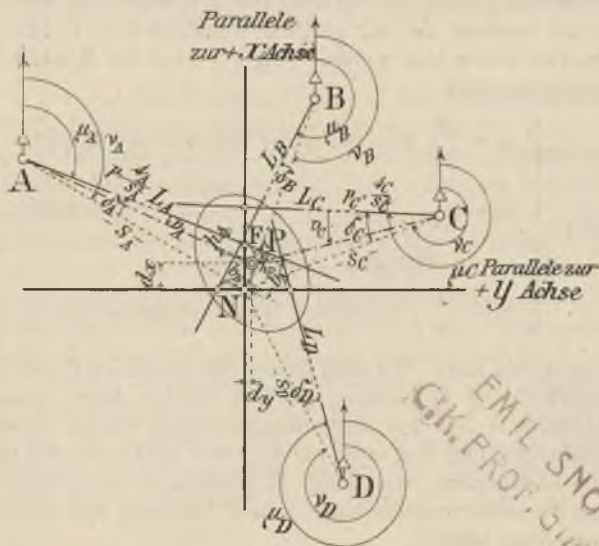


Fig. 5.

stimmungsstrahl parallel zu ebendieser Richtung  $\mu$  zu zeichnen. Ist derart, auf die eine oder die andere Weise die gegenseitige Lage der Bestimmungsstrahlen unter sich und zum Näherungspunkt  $N$  zeichnerisch bekannt, so handelt es sich um die Auswahl des endgültigen Punktes  $P$  in der „fehlerzeigenden Figur“. Dabei ist zu beachten, daß bei gleichem Fehler in der Winkelbeobachtung die lineare

Abweichung des Bestimmungsstrahles vom wahren Punkt wächst proportional der Strahlenlänge  $s$  und demgemäß das Strahlengewicht für die Punktbestimmung umgekehrt proportional zum Quadrat der Strecke  $s$ . Auch wird ein Strahl, der bloß im Festpunkt oder bloß im Neupunkt beobachtet wurde, nur das halbe Gewicht gegenüber einem Strahl besitzen, der mit gleicher Genauigkeit in beiden Punkten beobachtet wurde. Folglich wird das Bestimmungsgewicht

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_s = \frac{1}{s^2} \text{ sein, wenn die Beobachtung einseitig,} \\ p_s = \frac{2}{s^2} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{zweiseitig} \\ \text{erfolgte. Allgemein} \\ p_s = \frac{t}{s^2}, \text{ wobei nach dem Vorhergehenden } t=1 \end{array} \right.$$

oder 2 sein kann. Wo auch immer der endgültige Punkt  $P$  innerhalb der Fehlerfigur gewählt werden möge: seine Abstände  $h$  von den Bestimmungsstrahlen stellen deren Querverfehlung dar, aus welcher sich rückwärts die an den beobachteten orientierten Richtungen  $\mu$  anzubringenden Verbesserungszuschläge  $v$  nach Richtung und Größe berechnen lassen:

$$(47) \quad v'' = \frac{h}{s} \varrho''.$$

Gleiche Genauigkeit der Winkelbeobachtung vorausgesetzt, ist das Richtungsgewicht  $p_\mu = p_\nu = t$ , und wir müssen daher nach Bisherigem verlangen:

$$(48a) \quad [tvv] = \left[ t \frac{h^2}{s^2} \right] \varrho^2 = \varrho^2 \left( t_1 \frac{h_1^2}{s_1^2} + t_2 \frac{h_2^2}{s_2^2} + \dots \right) = \text{Min.}$$



Setzen wir in (48a) nach Gleichung (46)  $p = \frac{t}{s^2}$ , und beachten, daß  $g$  konstant, so geht (48a) über in:

$$[t v v] = g^2 (p_1 h_1^2 + \dots + p_n h_n^2) = \text{Min.},$$

d. h. wir haben in der Fehlerfigur den endgültigen Punkt  $P$  so auszuwählen, daß

$$(48b) \quad \underline{[p h h]} = \text{Min.}$$

Von den verschiedenen Verfahren der Punktauswahl in der fehlerzeigenden Figur benutzen wir das von Bertot 1876 erstmals gezeigte, welches sich auf den Satz stützt: „Sind  $r$  Gerade (Strahlen)  $L_A, L_B \dots L_R$  vom Gewicht  $p_A, p_B \dots p_R$  gegeben, so ist derjenige Punkt  $P$ , für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände  $h$  je multipliziert mit dem Strahlengewicht  $p$  ein Minimum ist, zugleich der Schwerpunkt des aus seinen Lotfußpunkten  $F$  gebildeten Systems von Massenpunkten, wenn jedem von ihnen das Gewicht seines Strahles beigelegt wird.“

Würden wir hiernach durch Schätzung in der Fehlerfigur zufälligerweise den richtigen Punkt  $P$  gefunden haben, für welchen  $[p h h] = \text{Min.}$ , so würden wir diese Tatsache daraus erkennen, daß er der Schwerpunkt  $S$  seiner eigenen Lotfußpunkte  $F$  wäre, d. h. daß

$$(49) \quad x_P = \frac{[p \cdot x_F]}{[p]} \quad \text{und} \quad y_P = \frac{[p \cdot y_F]}{[p]}.$$

Um  $P$  aufzusuchen, benutzen wir den zweiten Satz: „Sind mehrere Gerade  $L$  gegeben, und ist wieder für Punkt  $P$  die Summe der Quadrate seiner Abstände  $h$  je multipliziert mit dem Strahlengewicht  $p$  ein Min., so ist für irgend einen anderen Punkt  $A$  der Schwerpunkt seiner Lotfußpunkte  $\mathfrak{F}_A \dots$ , denen wieder je das Strahlengewicht  $p_A \dots$  zugeschrieben wird, ein Punkt  $S$ , welcher zugleich

der Schwerpunkt der mit denselben Gewichten bedachten Massenpunkte  $Q$  ist, in denen ein Kreis über  $AP$  als Durchmesser die von  $A$  nach den Strahlen gezogenen Projektionslote schneidet.“

Nun kennen wir zwar zunächst den Kreis  $M$  nicht, auf dem  $P$  als gesuchter Gegenpunkt des beliebigen Punktes  $A$

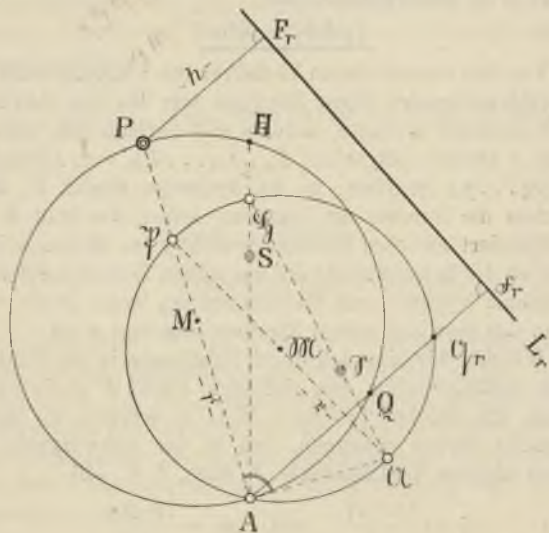


Fig. 6.

liegt, also auch nicht die Schnittpunkte  $Q$  der Projektionslote mit ihm. Dagegen können wir einen beliebigen, den gesuchten Kreis  $M$  schneidenden zweiten Kreis  $\mathcal{M}$  durch  $A$  mit dem beliebigen Halbmesser  $r$  zeichnen, der dem ersten (wie alle Kreise untereinander) ähnlich ist. Erklären wir, was bei sich schneidenden Kreisen zulässig ist,

$A$  als inneren Ähnlichkeitspunkt beider, so schneidet jede durch  $A$  gehende Gerade die letzteren nach einem homologen Punktpaar, folglich sind die Schnittpunkte  $\mathfrak{D}$  des Kreises  $\mathfrak{M}$  mit den Projektionsloten homolog den Schnittpunkten  $Q$  der letzteren mit dem gesuchten Kreise  $M$ . Dann ist aber auch ihr Schwerpunkt  $\mathfrak{S}$  homolog dem Schwerpunkt  $S$  der  $Q$  und  $\mathfrak{F}$ . Die Mittelpunkte  $\mathfrak{M}$  und  $M$  beider Kreise sind einander selbstverständlich homolog, während der auf dem Kreise  $\mathfrak{M}$  liegende, zu  $A$  auf Kreis  $M$  homologe Punkt  $\mathfrak{A}$  der Schnittpunkt der Tangente in  $A$  an Kreis  $M$  mit Kreis  $\mathfrak{M}$  ist.

Bestimmen wir demnach in der fehlerzeigenden Figur nach Gleichung (49) jetzt den Schwerpunkt  $\mathfrak{S}$  der  $\mathfrak{D}$

$$x_{\mathfrak{S}} = \frac{[p \cdot x_{\mathfrak{D}}]}{[p]}, \quad y_{\mathfrak{S}} = \frac{[p \cdot y_{\mathfrak{D}}]}{[p]}$$

und den Schwerpunkt  $S$  der ( $Q$  und)  $\mathfrak{F}$

$$x_S = \frac{[p \cdot x_{\mathfrak{F}}]}{[p]}, \quad y_S = \frac{[p \cdot y_{\mathfrak{F}}]}{[p]},$$

so haben wir in ihnen ein Paar homologer Punkte beider Systeme gefunden. Auch ohne den Schnittpunkt  $H$  des Ähnlichkeitsstrahles  $AS$  mit dem Kreise  $M$  zu kennen, finden wir ferner seinen homologen Punkt  $\mathfrak{H}$  auf dem Kreise  $\mathfrak{M}$  als Schnitt dieses Ähnlichkeitsstrahles mit ihm. Da die Verbindungslinien homologer Punkte in ähnlichen Figuren homolog sind und andere homologe Linien in homologen Punkten schneiden, so ist die Gerade  $HS$  homolog der Geraden  $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$  und der dadurch zu findende Kreispunkt  $\mathfrak{A}$  homolog  $A$ . Dann ist aber  $A\mathfrak{A}$  Tangente in  $A$  an den gesuchten Kreis  $M$ , sein Durchmesser  $AP$  steht somit  $\perp \mathfrak{A}A$  und geht durch den Gegenpunkt  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{A}$  im Kreis  $\mathfrak{M}$ . Für die Strecke  $AP = 2r$  folgt aus der Ähnlichkeit der Kreise  $M$  und  $\mathfrak{M}$  die Proportion:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} (AP = 2r) : 2r = AS : \mathfrak{A}\mathfrak{S}, \quad \text{d. h.} \\ AP = 2r = \frac{AS}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}} \cdot 2r. \end{array} \right.$$

Ist mittels des berechneten Maßes  $AP$  der endgültige Punkt  $P$  in die fehlerzeigende Figur auf der Geraden  $A\mathfrak{B}$  eingetragen, so bilden seine der Figur 5 zu entnehmenden Koordinaten die Zuschläge  $dx$  und  $dy$ , womit man mittels Gleichung (45) die gesuchten Koordinaten  $x_P$  und  $y_P$  gewinnt.

Also Lösung: Nach Aufzeichnung der Fehlerfigur Zeichnung eines beliebigen Kreises  $\mathfrak{M}$  durch einen beliebigen Punkt  $A$  dieser Figur. Bestimmung der Schwerpunkte  $S$  (der  $\mathfrak{H}$ ) und  $\mathfrak{S}$  (der  $\mathfrak{D}$ ). Zeichnung des Linienzuges  $AS\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{B}$  und  $A\mathfrak{B} \perp A\mathfrak{A}$ .

Abtragen der Strecke  $AP = \frac{AS}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}} \cdot 2r$  im gewählten Maßstabe, Abgreifen von  $dx$  und  $dy$ .

Will man sich über die bei der Punktbestimmung erreichte Genauigkeit Aufschluß verschaffen, so entnimmt man die Querverfehlungen  $h$  aus der fehlerzeigenden Figur und erhält unter Beachtung, daß zwei von den  $r$  beobachteten Strahlen zur Bestimmung nötig waren, die Zahl der überschüssigen also  $r - 2$  beträgt, die mittlere lineare Querverfehlung eines Strahles vom Gewicht 1:

$$(51) \quad \mu = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(r - 2)}},$$

die mittlere Querverfehlung eines Strahles vom Gewicht  $p$ :

$$(51) \quad m = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(r - 2)p}},$$

den mittleren linearen Fehler des Punktes  $P$ :

$$(51) \quad M = \pm \sqrt{\frac{[p h h]}{(r - 2) [p]}}$$

den mittleren Fehler einer einseitig beobachteten Richtung

$$(51) \quad m''_{\mu} = \pm \sqrt{\frac{[t v v]}{r - 2}} = \pm g'' \sqrt{\frac{[t \cdot \frac{h^2}{s^2}]}{r - 2}}$$

Wird ein Punkt, wie im vorliegenden Fall, als Schnitt von Strahlen bestimmt, so ist seine Genauigkeit nach verschiedenen Richtungen

verschieden, sobald diese Strahlen nicht gleichmäßig und gleich gewichtig über den Horizont verteilt sind.

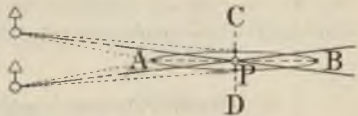


Fig. 7.

Z. B. wird in Figur 7 jede kleine Unsicherheit in der Richtung auch nur eines der beiden Bestimmungsstrahlen deren Schnittpunkt erheblich in der Richtung  $AB$ , nur wenig dagegen in der Richtung  $CD$  verschieben. Es wird möglich sein, unendlich viele Punkte zu finden, für welche die mittlere Querverfehlung  $M$  (oder der mittlere Fehler  $m''_{\mu}$  einer Richtung) einen bestimmten Wert annimmt. Die stetige Verbindung dieser Punkte (Linie gleichen mittleren Fehlers) wird eine Ellipse („Fehlerellipse“) um den Schnittpunkt  $P$  ergeben, deren <sup>große</sup> <sub>kleine</sub> Achse die Richtung der <sup>größten</sup> <sub>kleinsten</sub> Bestimmungunsicherheit und deren Achsenverhältnis das Verhältnis der letzteren anzeigt.

Ebensolche Fehlerellipsen können wir auch im Falle der Verwendung beliebig vieler Bestimmungsstrahlen zeichnen. Wir werden in diesem Falle nur für eine Anzahl — etwa in profilartigen Reihen angeordneter — Punkte nach Gleichung (51) je die mittleren Fehler  $M$  oder  $m_\mu$  bestimmen, sodann nach Art der Interpolation von Horizontalkurven in den Profilrichtungen Punkte bestimmter runder  $M$  oder  $m_\mu$  aufsuchen und schließlich diese durch stetige Kurven verbinden. Wenn wir Wert darauf legen, einen Neupunkt mit möglichst großer und nach jeder Richtung gleicher Zuverlässigkeit zu bestimmen, so müssen wir dafür sorgen, daß nicht bloß die (bezüglich der Richtung neutralen) Fehlerausdrücke  $\mu$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $m_\mu$  absolut möglichst klein werden, sondern auch, daß die Fehlerellipsen sich möglichst der Kreisform nähern.

## § 22. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für trigonometrische Punkteinschaltung durch Vorwärtseinschnitt.

Zur rechnerischen Bestimmung der den Näherungskordinaten  $N_X$  und  $N_Y$  für den Neupunkt beizufügenden Zuschläge  $dx$  und  $dy$  [s. Gleichung (45)] wollen wir vorbereitend die Beziehung feststellen, welche zwischen kleinen Koordinatenänderungen  $dx$  und  $dy$  des Endpunktes  $B$  einer Strecke  $AB$  und der dadurch hervorgerufenen Änderung  $d\varphi$  ihres Richtungs- (Neigungs-)winkels  $\varphi = n AB$  besteht. Für die Koordinaten des Endpunktes  $B$  einer unter dem Richtungswinkel  $n AB$  von  $A$  ausgehenden Strecke  $AB = s$  hat man allgemein:

$$(52) \quad \begin{aligned} y_B &= y_A + AB \cdot \sin n AB \\ x_B &= x_A + AB \cdot \cos n AB, \end{aligned}$$

woraus

$$(52) \quad \operatorname{tg} n AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und

$$(52) \quad n AB = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Daraus folgt durch Differentiation, wenn man  $AB = s$  und  $n AB = \varphi$  setzt:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} d(n AB) \equiv d\varphi = \frac{\Delta x}{s^2} dy - \frac{\Delta y}{s^2} dx, \quad \text{oder} \\ d\varphi'' = \frac{\Delta x}{s^2} \varphi'' dy - \frac{\Delta y}{s^2} \varphi'' dx \\ = \frac{\cos \varphi}{s} \varphi'' dy - \frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' dx \\ = \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta x} \varphi'' dy - \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta y} \varphi'' dx \end{array} \right.$$

Setzen wir

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x}{s^2} \varphi'' = \frac{\cos \varphi}{s} \varphi'' = \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta x} \varphi'' = b \\ -\frac{\Delta y}{s^2} \varphi'' = -\frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' = -\frac{\sin^2 \varphi}{\Delta y} \varphi'' = a, \end{array} \right.$$

wobei also  $b$  das Vorzeichen von  $\cos n AB$  bzw.  $\Delta x$ ,  $a$  das entgegengesetzte Vorzeichen des  $\sin$  bzw.  $\Delta y$  zukommt, so erhalten wir die Veränderung  $d\varphi''$ , welche der Richtungswinkel  $n AB = \varphi$  dadurch erleidet, daß man den Endpunkt  $B$  der Strecke  $AB$  um die kleinen Beträge  $dx$  und  $dy$  parallel den Koordinatenachsen verschiebt.

$$(55) \quad \underline{d\varphi'' = a dx + b dy}.$$



Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  heißt man „Richtungskoeffizienten“.

Verschiebt man statt des Endpunktes  $E$  den Anfangspunkt  $A$  der Strecke um dieselben Beträge, so ändert sich (wie auch geometrisch klar) der Richtungswinkel  $\varphi$  um denselben Betrag  $d\varphi$ , aber in entgegengesetztem Sinne.

Parallele zur

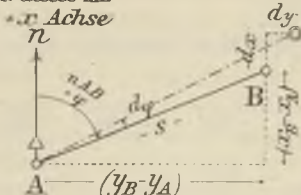


Fig. 8.

Wir können nun zur eigentlichen Aufgabe der Punkteinschaltung übergehen. Die in jedem der  $n_p$

zur Neubestimmung benutzten Festpunkte nach dem Neupunkte beobachteten „äußeren“ oder „Vorwärts“-Richtungen  $\alpha$  seien auf Grund von  $n_f$  weiteren, von den ersteren nach anderen Festpunkten gemessenen Richtungen  $\alpha$  und den zugehörigen, aus den Koordinaten ihrer Endpunkte berechneten Richtungs- (Neigungs-)winkeln  $\varphi$  orientiert. Die orientierten Richtungswerte  $\beta$  nach dem Neupunkt erhalten dabei das Gewicht  $1, 2 \dots n_f$ , wenn zu ihrer Gewinnung  $1, 2 \dots n_f$  gemessene Winkel zwischen dem Neustrahle und  $1, 2 \dots n_f$  Feststrahlen verwendet worden sind. Ist die Beobachtung satzweise ausgeführt, und sind in die Sätze außer dem Neustrahle noch  $n_f$  Richtungen  $\alpha_1 \dots \alpha_{n_f}$  nach Festpunkten (Feststrahlen) aufgenommen worden, so ist das beobachtete Richtungsbüschel  $\alpha$  zur Orientierung um den Winkel  $\omega$  zu verdrehen, der sich ergibt als arithmetisches Mittel

$$\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n_f}.$$
 Damit wird die orientierte Richtung

nach dem Neupunkte  $P \div \cdot \beta = \alpha_P + \frac{[\varphi - \alpha]}{n_f} = \alpha_P + \omega$

und ihr mittlerer Fehler  $m_\beta = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_\omega^2}$ . Setzt man die Richtungswinkel  $\varphi$  der Feststrahlen als fehlerfrei voraus, so ist der mittlere Fehler von  $(\varphi - \alpha)$  gleich demjenigen von  $\alpha$ , somit, da zur Bildung von  $\omega \div \cdot n_f^*$

Werte verwendet wurden,  $m_\omega = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_f}}$ . Damit wird

$$m_\beta = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + \frac{m_\alpha^2}{n_f}} = m_\alpha \sqrt{\frac{n_f + 1}{n_f}}$$

und wir erhalten aus der Proportion (15)  $p_\beta : p_\alpha = m_\alpha^2 : m_\beta^2$  das Gewicht der in den Festpunkten satzweise beobachteten und orientierten „äußeren“ oder „Vorwärts“-Richtungen  $\beta$  nach dem Neupunkte:

$$(56) \quad p_\beta = p_\alpha \frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} = p_\alpha \cdot \frac{n_f}{n_f + 1}.$$

Für  $p_\alpha = 1$  wird  $p_\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$ .

Wir haben nun dreierlei von jedem der Festpunkte  $A, B \dots$  ausgehende, gegen den Neupunkt gerichtete Strahlen zu unterscheiden, nämlich:

1. Die aus der Winkelmessung gewonnenen, zur Bestimmung des Neupunktes dienenden orientierten Richtungen  $\beta$ , welche sich infolge von Ungenauigkeiten (in der Messung, den Festpunktskoordinaten usw.) nicht, wie es sein sollte, in einem Punkte schneiden werden und die wir mit  $nAP, nBP \dots$  bezeichnen wollen.
2. Die Verbindungslinien der benutzten Festpunkte mit dem vorläufigen Punkt  $N$ , deren aus den Koordinaten



oder

$$(c) \quad \begin{cases} v'_A = d\varphi_A + (nAP) - nAP \\ v'_B = d\varphi_B + (nBP) - nBP \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \end{cases}$$

Die Änderungen  $d\varphi$  der Richtungswinkel können wir mittels Gleichung (55) in den Koordinatenzuschlägen  $dx$

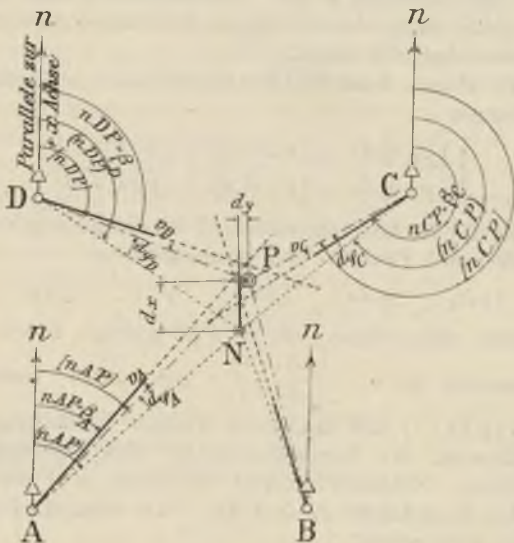


Fig. 9.

und  $dy$  ausdrücken. Bezeichnen wir ferner die Unterschiede  $(nAP) - nAP \dots$  zwischen den (Näherungs-) Richtungswinkeln nach dem vorläufigen Neupunkt  $N$  und den gemessenen, orientierten Richtungen  $\beta$  analog Gleichung (25d) mit  $l_A, l_B \dots$ , dann gehen die obigen Gleichungen

chungen in die gewöhnliche Form der Fehlergleichungen (25e) über:

$$a dx + b dy + l = v,$$

deren wir zur Berechnung der Koordinatenzuschläge  $dx$  und  $dy$  ebenso viele (nämlich  $n_v$ ) erhalten, als orientierte, gemessene Richtungen  $\beta$  nach dem Neupunkt vorhanden sind. Die Gewichte  $p$  der Absolutglieder  $l$  sind nach § 20 gleich denen der orientierten Richtungen  $\beta$ , welche wir oben abgeleitet haben.

Wir können daher jetzt die Koeffizienten der Normalgleichungen

$$(26a) \quad \begin{cases} [paa] dx + [pab] dy + [pal] = 0 \\ [pab] dx + [pbb] dy + [pbl] = 0 \end{cases}$$

und die zur Rechenprobe und zur Fehlerermittlung weiter erforderlichen Produkt- und Quadratsummen

$$[pll], \quad [pas], \quad [pbs], \quad [pls], \quad [pss]$$

ermitteln und sodann, wie in § 20 gezeigt, zuerst die

Unbekannte  $dy = -\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}$  und deren Gewicht

$P_y = [pbb \cdot 1]$  und dann nach erfolgter Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen den Zuschlag  $dx$  berechnen. Schließlich ergibt Gleichung (45) die gesuchten Koordinaten  $x_P$  und  $y_P$ . Wir erhalten weiter, wie in § 20 gezeigt,

$$(37b) \quad [pvv] = [pll \cdot 2]$$

und, da zur Punktbestimmung zwei Strahlen nötig, also  $(n_v - 2)$  davon überschüssig sind,

$$(57) \quad M_y = \pm \sqrt{\frac{[pll \cdot 2]}{(n_v - 2)P_y}} = \pm \sqrt{\frac{[pll \cdot 2]}{(n_v - 2)[pbb \cdot 1]}}$$

**§ 23. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für trigonometrische Punkteinschaltung durch Rückwärts-einschnitt. (Beobachtung nur im Neupunkt.)**

Für die Lösung ist zu unterscheiden zwischen A) Winkel- und B) Richtungsbeobachtung.

**A) Lösung bei Winkelbeobachtung.**

Wie bisher setzen wir wieder voraus, daß uns die Koordinaten  $x_N, y_N$  eines vorläufigen Punktes  $N$  möglichst nahe dem gesuchten Punkt  $P$  bekannt und daß nur die kleinen Zuschläge  $dx$  und  $dy$  gesucht sind, durch deren Addition wir nach Gleichung (45) die Koordinaten  $x_P$  und  $y_P$  des Neupunktes erhalten. Wären letztere schon gefunden, so könnten wir die endgültigen Richtungswinkel  $[nPA], [nPB] \dots$  der Verbindungslinien vom Neupunkt nach den benutzten Festpunkten ableiten und aus ihnen durch Subtraktion die endgültigen Werte

$$[\alpha_1] = [APB] = [nPB] - [nPA]$$

$$[\alpha_2] = [BPC] = [nPC] - [nPB]$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

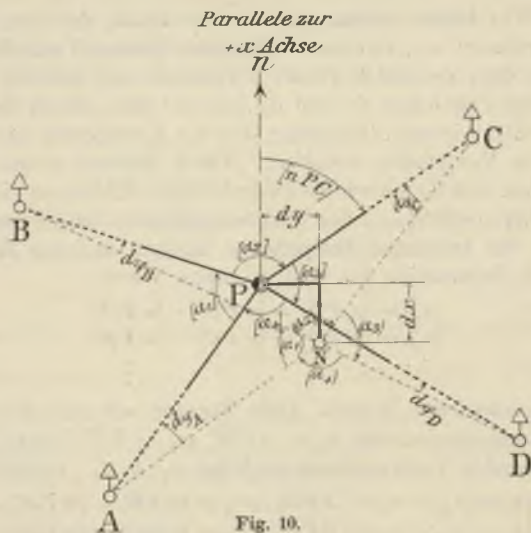
der gemessenen Winkel. Dann könnten wir auch die den Messungsergebnissen  $\alpha_1 = APB, \alpha_2 = BPC$  usw. zuzufügenden Verbesserungszuschläge  $v_1, v_2 \dots$  ermitteln:

$$(a) \begin{cases} v_1 = [\alpha_1] - \alpha_1 = [APB] - \alpha_1 = [nPB] - [nPA] - \alpha_1 \\ v_2 = [\alpha_2] - \alpha_2 = [BPC] - \alpha_2 = [nPC] - [nPB] - \alpha_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Nun können wir aus den Koordinaten des Näherungspunktes  $N$  für  $P$  die vorläufigen Richtungswinkel  $(nPA), (nPB) \dots$  (Scheitel in  $N$ ), und aus ihnen durch Subtraktion Näherungswerte  $(\alpha_1), (\alpha_2) \dots$  für die beobachteten Winkel ableiten:

$$(b) \quad \begin{cases} (\alpha_1) \equiv ANB \equiv (APB) = (nPB) - (nPA) \\ (\alpha_2) \equiv BNC \equiv (BPC) = (nPC) - (nPB) \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Wir können weiter die Veränderungen  $d\varphi_A, d\varphi_B \dots$ , welche die vorläufigen Richtungswinkel  $(nPA), (nPB) \dots$  dadurch erleiden, daß man den vorläufigen Punkt  $N$  nach



$P$  verschiebt, mittels Gleichung (55) in den (zunächst unbekannt) Verschiebungen  $dx$  und  $dy$  ausdrücken, wobei wir allerdings beachten müssen, daß wir jetzt nicht den Endpunkt, sondern den Anfangspunkt der Strecke verschieben, wodurch  $d\varphi$  das entgegengesetzte Vorzeichen erhält. Setzen wir daher



$$(54a) \quad \begin{cases} a = -a = \frac{\sin \varphi}{s} \varphi'' \\ b = -b = -\frac{\cos \varphi}{s} \varphi'' \end{cases}$$

so wird

$$(c) \quad \begin{cases} d\varphi_A = [n PA] - (n PA) = a_A dx + b_A dy \\ d\varphi_B = [n PB] - (n PB) = a_B dx + b_B dy \\ \vdots \end{cases}$$

oder

$$(c) \quad \begin{cases} [n PA] = (n PA) + a_A dx + b_A dy \\ [n PB] = (n PB) + a_B dx + b_B dy \\ \vdots \end{cases}$$

Setzen wir die gewonnenen Werte für  $[n PA] \dots$  in Gleichung (a) ein, so erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$(d) \quad \begin{cases} v_1 = (n PB) + a_B dx + b_B dy - (n PA) - a_A dx - b_A dy - \alpha_1 \\ v_2 = (n PC) + a_C dx + b_C dy - (n PB) - a_B dx - b_B dy - \alpha_2 \\ \vdots \end{cases}$$

Wenn wir unter Benutzung der Gleichungen (b) wie bisher setzen:  $l =$  Näherungswert — gemessener Wert des beobachteten Winkels:

$$(n PB) - (n PA) - \alpha_1 = (\alpha_1) - \alpha_1 = l_1$$

$$(n PC) - (n PB) - \alpha_2 = (\alpha_2) - \alpha_2 = l_2$$

und ferner

$$a_{\text{des rechten Schenkels}} - a_{\text{des linken Schenkels}} = \mathfrak{A}$$

$$b_{\text{des rechten Schenkels}} - b_{\text{des linken Schenkels}} = \mathfrak{B}$$

so erscheinen die Fehlergleichungen (d) in der gewöhnlichen Form:

$$(25e) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \mathfrak{A}_1 dx + \mathfrak{B}_1 dy + l_1 \\ v_2 = \mathfrak{A}_2 dx + \mathfrak{B}_2 dy + l_2 \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Normalform} \\ \text{der Fehler-} \\ \text{gleichungen.} \end{array}$$

Ihre Zahl  $n_r$  ist gleich derjenigen der im Neupunkt beobachteten Winkel  $\alpha$ . Letztere, folglich auch die Absolutglieder  $l$  sind gleichgewichtig. Wir erhalten daher die gesuchten Koordinatenzuschläge  $dx$  und  $dy$  aus den zwei Normalgleichungen:

$$(26a) \quad \begin{cases} [AA] dx + [AB] dy + [Al] = 0 \\ [AB] dx + [BB] dy + [Bl] = 0. \end{cases}$$

Zum Zweck von Rechenproben und zur Fehlerberechnung führen wir analog Gleichungen (40) bis (44) in die Reduktion weiter ein die Produkt- und Quadratsummen:

$$[ll], [AC], [BC], [lC], [CC]$$

und erhalten:

$$\text{die rechts stehende Unbekannte } dy = -\frac{[Bl \cdot 1]}{[BB \cdot 1]}$$

$$\text{und ihr Gewicht } P_{dx} = P_x = [BB \cdot 1],$$

ferner

$$(37b) \quad [vv] = [ll \cdot 2],$$

und (weil zwei der  $n_r$  in  $P$  gemessenen Winkel  $\alpha$  zur Bestimmung von  $P$  nötig, also  $(n_r - 2)$  überschüssig sind)

$$(58) \quad M_y = \pm \sqrt{\frac{[ll \cdot 2]}{(n_r - 2) [BB \cdot 1]}}$$

Die zweite Unbekannte  $dx$ , ihr Gewicht und mittlerer Fehler ergibt sich nach erfolgter Umstellung der Normalgleichungen auf dieselbe Weise.

## B) Lösung bei Richtungsbeobachtung.

Das soeben vorgeführte Verfahren läßt sich ohne weiteres auch auf Richtungsbeobachtungen anwenden, wenn man die als gemessen vorausgesetzten Winkel

durch Subtraktion je zweier Richtungswerte  $\alpha$  gewinnen will. Die Zahl der zu verwendenden Winkel und Fehlergleichungen wäre aber dann beim Vorhandensein von  $n_r$  beobachteten und gleichmäßig zu berücksichtigenden Richtungen  $= \binom{n_r}{2}$ , also sehr groß. Wir suchen daher ein einfacheres Verfahren. Wie bisher mögen die Koordinaten  $x_N, y_N$  eines in möglichster Nähe des gesuchten Neupunktes  $P$  gelegenen vorläufigen Punktes  $N$  bekannt, also die ihnen zuzufügenden Zuschläge  $dx$  und  $dy$  [s. Gleichung (45)] gesucht sein.

Das im Neupunkte  $P$  gemessene Richtungsbüschel  $\alpha$  kann man nun, ohne an der gegenseitigen Lage der Strahlen, also an der Eigenschaft der Richtungen als Messungsergebnissen etwas zu ändern, um den zunächst unbekanntem Betrag  $Z$  derart verdrehen, daß die Individuen dieses mit dem Scheitel nach dem zunächst unbekanntem endgültigen Punkte  $P$  gelegten Strahlenbüschels von den Verbindungslinien dieses Neupunktes mit den Festpunkten möglichst wenig abweichen. Wären Messung der Richtungen und Lage der Festpunkte fehlerfrei und Projektionsverzerrung nicht vorhanden, so müßten dann sogar sämtliche Strahlen durch die entsprechenden Festpunkte gehen; der Unterschied (endgültiger Richtungswinkel  $[nPA] \dots$  — endgültig orientierter Richtungswert  $[\alpha_A] \dots$ ) wäre  $= 0$ . Trifft dies nicht zu, so stellt der Unterschied direkt die am endgültig orientierten Richtungswert  $[\alpha_A] \dots$  anzubringende Verbesserung  $v$  dar. Den unbekanntem Verdrehungswinkel  $Z$  zerlegen wir, wie gewohnt, in einen Näherungswert  $\omega$  und den unbekanntem Zuschlag  $z$ , womit wir erhalten:

$$(59) \quad Z = \omega + z$$

und womit die im Neupunkt  $P$  endgültig orientierte gemessene Richtung wird:

$$(60) \quad [\alpha] = \alpha + \omega + z.$$

Den Näherungsbetrag  $\omega$  gewinnen wir, wenn wir das gemessene Strahlenbüschel mit dem Scheitel — statt auf den endgültigen, aber unbekanntem Punkt  $P$  — vorerst auf den vorläufigen Punkt  $N$  legen und dann um  $\omega$  so verdrehen, daß die Summe der Abweichungen  $l'$  der vorläufig orientierten Richtungswerte  $\alpha_A + \omega$ ,  $\alpha_B + \omega$ , ... von den zugehörigen vorläufigen Richtungswinkeln  $(nPA)$ ,  $(nPB)$  ... wird  $= 0$ , d. h.

$$\begin{aligned} & (nPA) - (\alpha_A + \omega) + (nPB) - (\alpha_B + \omega) + \dots \\ & = v_A - \alpha_A^0 + v_B - \alpha_B^0 + \dots = [l'] = 0. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist also der vorläufige Verdrehungswinkel:

$$\omega = \frac{(nPA) - \alpha_A + (nPB) - \alpha_B + \dots + (nPR) - \alpha_R}{n_r}$$

$$(61) \quad \omega = \frac{\sum \text{d. vorl. Richt.-Winkel} - \sum \text{d. gemess. Richtgen.}}{n_r}$$

Die durch Addition von  $\omega$  zu den gemessenen Richtungswerten  $\alpha$  vorläufig orientierten, aber in ihrer gegenseitigen Lage dadurch nicht veränderten Richtungen  $\alpha + \omega$  mögen heißen  $\alpha^0$ . Wir haben für jeden Bestimmungsstrahl jetzt vier Werte zu unterscheiden, nämlich

1. die im Punkte  $N$  vorläufig orientierte, gemessene Richtung  $\alpha^0$ ,
2. den Richtungswinkel  $(nPA)$ ,  $(nPB)$  ... der Verbindungsstrecke vom vorläufigen Punkte  $N$  zum Festpunkte  $A$ ,  $B$  ... ,
3. die im Neupunkte  $P$  endgültig orientierte, gemessene Richtung  $[\alpha] = \alpha + \omega + z = \alpha^0 + z$ ,

4. den Richtungswinkel  $[n PA]$ ,  $[n PB]$  ... der Verbindungsstrecke vom endgültigen Neupunkte  $P$  zum Festpunkte  $A, B$  ...

Die Werte (2) und (4) unterscheiden sich um die Änderung  $d\varphi''$  am Richtungswinkel  $(n PA)$  ..., welchen eine Verschiebung des Anfangspunktes  $N$  der Strecke  $NA$  ... um die Koordinatenzuschläge  $dx$  und  $dy$ , d. h. nach  $P$  hervorruft. Nach Gleichung (c) von § 23 ist also

$$[NPA] = (n PA) + a_A dx + b_A dy$$

$$[n PB] = (n PB) + a_B dx + b_B dy$$

⋮

Bezeichnen wir endlich, wie gewohnt und schon oben angegeben, den Unterschied: vorläufiger Wert — Beobachtungswert hier  $((n PA) = \nu) - \alpha_A^0$  mit  $l'$  und die Verbesserung des (endgültig orientierten) Beobachtungswertes  $[\alpha]$  mit  $v$ , so erhalten wir die Fehlergleichungen:

$$v_A = [n PA] - [\alpha_A] = (n PA) + a_A dx + b_A dy - \alpha_A^0 - z \\ = a_A dx + b_A dy - z + l'_A$$

$$v_B = [n PB] - [\alpha_B] = (n PB) + a_B dx + b_B dy - \alpha_B^0 - z \\ = a_B dx + b_B dy - z + l'_B$$

⋮

Ihre Zahl ist gleich derjenigen der beobachteten inneren Richtungen, also gleich  $n_r$ . Setzen wir, um den Koeffizienten der dritten Unbekannten positiv zu erhalten,  $d\omega = -z$ , so daß der gesuchte Verdrehungswinkel

$$(59) \quad Z = \omega + z = \omega - d\omega,$$

so gehen die Fehlergleichungen über in:

$$(25e) \quad \begin{cases} v_A = d\omega + a_A dx + b_A dy + l'_A \\ v_B = d\omega + a_B dx + b_B dy + l'_B \\ \vdots \end{cases}$$

Die inneren Richtungen  $\alpha$ , folglich auch die Absolutglieder  $l'$  sind gleichwertig. Man erhält daher unter Beachtung, daß der Koeffizient der ersten Unbekannten  $d\omega$  (sonst  $a$ ) jetzt 1 heißt, für die Bestimmung der drei Unbekannten  $d\omega$ ,  $dx$ ,  $dy$  die drei Normalgleichungen:

$$(26a) \begin{cases} n_r \cdot d\omega + [a] dx + [b] dy + [l'] = 0 \\ [a] d\omega + [a a] dx + [a b] dy + [a l'] = 0 \\ [b] d\omega + [a b] dx + [b b] dy + [b l'] = 0 . \end{cases}$$

Der normale Weg der Auflösung erfordert nun zweimalige Reduktion der Normalgleichungen. Der Umstand aber, daß alle Koeffizienten der ersten Unbekannten  $d\omega$  in den Fehlergleichungen einander gleich sind, ermöglicht eine Vereinfachung durch vorausgehende Eliminierung dieser Unbekannten.

Addiert man nämlich sämtliche Fehlergleichungen und beachtet, daß nach Gleichung (33) allgemein  $[a v] = 0$ , also bei  $a_A = a_B = \dots a_R = 1$ , hier  $[v] = 0$ , so erhält man

$$[v] = n_r \cdot d\omega + [a] dx + [b] dy + [l'] = 0 ,$$

woraus die Durchschnittsgleichung

$$(62) \quad \frac{[v]}{n_r} = d\omega + \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy + \frac{[l']}{n_r} = 0 .$$

Subtrahiert man diese Durchschnittsgleichung von jeder Fehlergleichung, so erhält man ein System reduzierter Fehlergleichungen mit nur zwei Unbekannten.

Setzt man noch die dabei entstehenden Differenzen, nämlich:

$$(63a) \quad \left( a_A - \frac{[a]}{n_r} \right) = \mathfrak{A}_A, \quad \left( b_A - \frac{[b]}{n_r} \right) = \mathfrak{B}_A, \quad \left( l'_A - \frac{[l']}{n_r} \right) = \mathfrak{G}_A$$





Wollen wir schließlich noch den Verdrehungszuschlag  $z = -d\omega$  berechnen, so liefert Gleichung (62)

$$(67) \quad z = -d\omega = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy + \frac{[l']}{n_r},$$

und da  $[l'] = 0$ ,

$$(67) \quad z = -d\omega = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy,$$

womit im Abriß noch die Probe sich ergibt, daß der bei der Richtungsorientierung im endgültigen Neupunkt  $P$  auftretende Verdrehungswinkel sein muß

$$(59) \quad Z = \omega + z = \omega - d\omega.$$

Umstellung der Koeffizienten der Normalgleichungen liefert auf gleiche Weise die zweite Unbekannte  $dx$ , ihr Gewicht  $P_x$  und ihren mittleren Fehler  $M_x$ .

#### § 24. Rechnerisches Ausgleichungsverfahren für vereinigt Vor- und Rückwärtseinschneiden.

Sind zur Bestimmung der Koordinaten  $x_P$  und  $y_P$  eines Neupunktes  $P$  Winkel oder Richtungen sowohl in den Festpunkten  $A, B \dots$  nach dem Neupunkt (äußere oder Vorwärtsrichtungen), als auch im Neupunkt nach den Festpunkten beobachtet (innere oder Rückwärtsrichtungen), so kann man für die ersteren die Fehlergleichungen des § 22, für die letzteren diejenigen des § 23 gleichzeitig zur Anwendung bringen.

Man hat also statt  $n_v$ , wie im Falle des Vor-, oder  $n_r$ , wie im Falle des Rückwärtseinschnittes, jetzt  $(n_v + n_r)$  Fehlergleichungen, wenn von den Festpunkten zum Neupunkt herein  $n_v$ , vom Neupunkt zu den Festpunkten hinaus  $n_r$  Strahlen beobachtet wurden. Die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen

setzen sich also aus  $(n_v + n_r)$  Summanden zusammen. Wir erkennen ferner, daß die Richtungskoeffizienten  $a$  und  $\alpha$ , bzw.  $b$  und  $\beta$  der Fehlergleichungen nach Richtung und Größe einander gleich sind, wenn sie sich auf denselben Bestimmungsstrahl beziehen, d. h. wenn dieser zweiseitig, sowohl von außen nach innen, als von innen nach außen beobachtet wurde. Für den Strahl  $AP$  ist z. B.:

$$a_A = -\frac{\sin n AP}{AP} \varrho'' = +\frac{\sin n PA}{AP} \varrho'' = \alpha_A$$

$$b_A = +\frac{\cos n AP}{AP} \varrho'' = -\frac{\cos n PA}{AP} \varrho'' = \beta_A,$$

ebenso für den Strahl  $BP$  bzw.  $PB$  usw.

Nur die Gewichte  $p$  der Absolutglieder  $l_A, l_B \dots, l_1, l_2 \dots, l'_A, l'_B \dots$  bzw.  $\varrho_A, \varrho_B \dots$  verlangen jetzt, da gleichzeitig innere und äußere Richtungen zur Bestimmung der Unbekannten verwendet werden, noch eine vergleichende Untersuchung.

Als Gewicht  $p$  einer äußeren Richtung oder der Absolutglieder  $l_A, l_B \dots$  haben wir in § 22 für den Fall des Vorwärtseinschnittes festgestellt:

a) im Falle der Winkelmessung:  $p_i = 1, 2 \dots n_f$ , wenn der Neustrahl durch  $1, 2 \dots n_f$  gemessene Winkel mit  $1, 2 \dots n_f$  Feststrahlen verbunden ist,

b) im Falle der Richtungsbeobachtung:  $p_i = p_\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$ , wenn außer dem Neustrahl noch  $n_f$  Feststrahlen dem beobachteten Richtungsbüschel angehören.

Die Gewichte  $p_i$  der inneren Winkel und Richtungen, oder der betreffenden Absolutglieder  $l_1, l_2 \dots$  bzw.  $l'_A, l'_B$  und  $\varrho_A, \varrho_B$  sind für den Fall des Rückwärtseinschnittes je unter sich gleich, also nicht weiter zu be-

rücksichtigen. Sollen sie aber mit äußeren Richtungen in Verbindung gebracht werden, so müssen wir das Verhältnis der beiderseitigen Gewichte feststellen.

Dies ist bei vorhandener Winkelmessung sehr einfach, da bei gleich genauer Beobachtung jedem Winkel — gleichviel, ob sein Scheitel im Festpunkt oder im Neupunkt liegt — gleiches Gewicht zukommt.

Etwas anders ist es bei der Richtungsbeobachtung. Denken wir uns das innere Richtungsbüschel mit dem Scheitel im endgültigen Neupunkt  $P$  nach den benützten fehlerfreien Festpunkten  $A, B \dots$  orientiert, so wird jede beobachtete, orientierte Richtung um einen gewissen Fehlerbetrag von ihrem wahrscheinlichen Wert, dem Richtungswinkel  $[nPA], [nPB] \dots$  abweichen, der sich wie bei der Ableitung S. 131 zusammensetzt aus dem Beobachtungsfehler  $m_\alpha$  einer inneren Richtung und aus dem

Fehler  $m_z = \frac{m_\alpha}{\sqrt{n_r}}$  des Verdrehungswinkels  $Z$  [s. Gleichung (59)].

Daher ist der mittlere Fehler einer orientierten inneren Richtung (im Falle der Beibehaltung dreier Unbekannten  $d\omega, dx, dy$  gleich demjenigen des Absolutgliedes  $l'$ ) analog (S. 131):

$$m_i = m_r = m_\alpha \sqrt{\frac{n_r + 1}{n_r}},$$

und da  $m_\alpha$  für innere und äußere Richtungen gleich ist, analog Gleichung (56)

$$(68) \quad p_i \equiv p_r = \frac{n_r}{n_r + 1}.$$

Wendet man das Verfahren der vorgängigen Eliminierung von  $d\omega$  an, so wird das Absolutglied statt  $l'$ :

$$\div \cdot \mathfrak{Q} \equiv l - \frac{[l']}{n},$$

und sein mittlerer Fehler

$$m_{\mathcal{Q}} = \sqrt{m_i^2 + \frac{m_i^2}{n_r}} = m_i \sqrt{\frac{n_r + 1}{n_r}} = m_{\mathcal{A}} \cdot \frac{n_r + 1}{n_r}.$$

Damit wird

$$(68a) \quad p_{\mathcal{Q}} = \left( \frac{n_r}{n_r + 1} \right)^2.$$

Mit wachsendem  $n_r$  konvergieren  $\frac{n_r}{n_r + 1}$  und  $\left( \frac{n_r}{n_r + 1} \right)^2$  gegen 1. Da nun  $n_r \geq 4$ , wenn im Falle des Rückwärtseinschnittes überhaupt von Ausgleichung die Rede sein soll, so setzen amtliche Vermessungsanweisungen der Einfachheit halber

$$p_i = p_r = p_{\mathcal{Q}} = 1.$$

Die Zahl der überschüssigen Richtungen zum Zwecke der Fehlerberechnung ergibt sich aus der Betrachtung, daß im Falle der Richtungsbeobachtung zur Berechnung der drei Unbekannten  $dx$ ,  $dy$  und  $z$  jedenfalls drei Bestimmungsstücke nötig, also  $(n_v + n_r - 3)$  Stücke überschüssig sind.

Wir haben also bei vereinigttem Vor- und Rückwärtseinschneiden:

A) Im Falle der Winkelbeobachtung

|                           | Fehlergleichungen | Gewicht $p$   |          |
|---------------------------|-------------------|---|----------|
| $n_v$ Gleichungen für     | {                 | $v_A = a_A dx + b_A dy + l_A$                       | $n_{fA}$ |
| $n_v$ Zielungen vorwärts  |                   |   |          |
|                           |                   | $\vdots$  | $\vdots$ |
| $n_r$ Gleichungen für     | {                 | $v_1 = \mathfrak{A}_1 dx + \mathfrak{B}_1 dy + l_1$ | 1        |
| $n_r$ Zielungen rückwärts |                   |   |          |
|                           |                   | $\vdots$  | $\vdots$ |

Normalgleichungen

$$([paa] + [\mathfrak{A}\mathfrak{A}]) dx + ([pab] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) dy + ([pal] + [\mathfrak{A}l]) = 0,$$

$$([pab] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) dx + ([pbb] + [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]) dy + ([pbl] + [\mathfrak{B}l]) = 0.$$

Führt man für die Koeffizienten von  $dx$  und  $dy$  in den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bezeichnungen ein, und setzt z. B.

$$([p a a] + [v v]) = [p a a] \quad \text{usw.},$$

so erhält man

$$dy = -\frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]}$$

$$P_y = [p b b \cdot 1]$$

$$M_y = \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 2]}{[p b b \cdot 1] (n_v + n_r - 2)}}.$$

B) Im Falle der Richtungsbeobachtung und:  
1. der Beibehaltung der dritten Unbekannten  $d\omega$  :

|   | Fehlergleichungen                        | Gewicht $p$ der Beobachtung oder des Absolutgliedes |
|---|--|---|
| $n_v$ Gleichungen für $n_v$ Zielungen vorwärts  | $v_A = a_A dx + b_A dy + l_A$            | $\frac{n_{fA}}{n_{fA} + 1}$                         |
|   | $v_B = a_B dx + b_B dy + l_B$            | $\frac{n_{fB}}{n_{fB} + 1}$                         |
|   | $\vdots$                                 | $\vdots$  |
| $n_r$ Gleichungen für $n_r$ Zielungen rückwärts | $v_A = d\omega + a_A dx + b_A dy + l'_A$ | $\frac{n_r}{n_r + 1}$                               |
|   | $v_B = d\omega + a_B dx + b_B dy + l'_B$ | $\frac{n_r}{n_r + 1}$                               |
|   | $\vdots$                                 | $\vdots$  |
|   | Normalgleichungen                        |   |

$$[p_r] d\omega + [p_r a] dx + [p_r b] dy + [p_r l] = 0,$$

$$[p_v a] d\omega + ([p_v a a] + [p_r a a]) dx + ([p_v a b] + [p_r a b]) dy + ([p_v a l] + [p_r a l']) = 0,$$

$$[p_r b] d\omega + ([p_v a b] + [p_r a b]) dx + ([p_v b b] + [p_r b b]) dy + ([p_v b l] + [p_r b l']) = 0.$$

Führt man für die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bezeichnungen ein und setzt:

$$[p_r] = [p a a], \quad [p_r a] = [p a b], \quad [p_r b] = [p a c],$$

$$([p_v a a] + [p_r a a]) = [p b b], \quad ([p_v a b] + [p_r a b]) = [p b c]$$

usw.,

so hat man

$$dy = - \frac{[p c l \cdot 2]}{[p c c \cdot 2]},$$

$$P_y = [p c c \cdot 2],$$

$$M_{yy} = \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 3]}{[p c c \cdot 2] (n_v + n_r - 3)}}.$$

Im Falle der Richtungsbeobachtung und:

2. der vorgängigen Eliminierung der Unbekannten  $d\omega$ :

|   | Fehlergleichungen  | Gewicht $p$ der Beobachtung oder des Absolutgliedes                                    |
|---|--|--|
| $n_v$ Gleichungen für $n_v$ Zielungen vorwärts  | $\begin{cases} v_A = a_A dx + b_A dy + l_A \\ v_B = a_B dx + b_B dy + l_B \\ \vdots \end{cases}$   | $\frac{n_{fA}}{n_{fA} + 1}$ $\frac{n_{fB}}{n_{fB} + 1}$ $\vdots$                       |
| $n_r$ Gleichungen für $n_r$ Zielungen rückwärts | $\begin{cases} v_A = \mathfrak{A}_A dx + \mathfrak{B}_A dy + \mathfrak{L}_A \\ v_B = \mathfrak{A}_B dx + \mathfrak{B}_B dy + \mathfrak{L}_B \\ \vdots \end{cases}$ | $\left( \frac{n_r}{n_r + 1} \right)^2$ $\left( \frac{n_r}{n_r + 1} \right)^2$ $\vdots$ |
|   | Normalgleichungen  |  |

$$([p_v a a] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{A}]) dx + ([p_v a b] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dy + ([p_v a l] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{L}]) = 0.$$

$$([p_v a b] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{B}]) dx + ([p_r b b] + [p_r \mathfrak{B} \mathfrak{B}]) dy + ([p_r b l] + [p_r \mathfrak{B} \mathfrak{L}]) = 0.$$

Führt man für die Koeffizienten der Unbekannten in den Normalgleichungen wieder die bisherigen Bezeichnungen ein, setzt also

$$([p_v a a] + [p_r \mathfrak{A} \mathfrak{A}]) = [p a a] \quad \text{usw.},$$

so wird

$$dy = -\frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]},$$

$$P_y = [p b b \cdot 1],$$

$$M_y = \pm \sqrt{\frac{[p l l \cdot 2]}{[p b b \cdot 1] (n_v + n_r - 3)}}.$$

### Zahlenbeispiel.

Zur Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten des trigonometrischen Neupunktes 1 wurden auf ihm Richtungen nach benachbarten Dreieckspunkten und in letzteren solche nach dem Neupunkte beobachtet. Die Koordinaten der benutzten Dreieckspunkte sind bekannt und als fehlerfrei anzunehmen.

Gemessen wurde:

|                     |              |              |
|---------------------|--------------|--------------|
| Im Neupunkte 1 nach | Killesberg   | 399° 99' 64" |
|                     | Feuerbach    | 122° 19' 08" |
|                     | Eychen       | 189° 23' 41" |
|                     | Zuffenhausen | 232° 97' 25" |
| In Sandäcker nach   | Eychen       | 355° 00' 62" |
|                     | Feuerbach    | 399° 97' 65" |
|                     | Neupunkt 1   | 4° 68' 37"   |
|                     | Killesberg   | 16° 78' 41"  |
| In Eychen nach      | Feuerbach    | 49° 14' 48"  |
|                     | Neupunkt 1   | 399° 98' 99" |
|                     | Killesberg   | 2° 37' 63"   |
| In Killesberg nach  | Feuerbach    | 0° 03' 93"   |
|                     | Eychen       | 49° 27' 69"  |
|                     | Neupunkt 1   | 57° 66' 26"  |
|                     | Stammheim    | 67° 53' 09"  |



|                    |              |               |
|--------------------|--------------|---------------|
| In Killesberg nach | Kornwestheim | 89° 31' 12''  |
|                    | Cannstatt    | 172° 27' 10'' |
|                    | Berg         | 191° 02' 75'' |
|                    | Falget       | 314° 31' 56'' |
|                    | Weil im Dorf | 392° 84' 22'' |

Gegebene Koordinaten:

|              | $x$      | $y$      |
|--------------|----------|----------|
|              | +        | +        |
| Berg         | 30796,55 | 11731,96 |
| Cannstatt    | 31781,93 | 12010,25 |
| Eychen       | 32632,85 | 8101,42  |
| Falget       | 31114,51 | 8061,89  |
| Feuerbach    | 31962,93 | 7858,74  |
| Killesberg   | 31690,30 | 8485,65  |
| Kornwestheim | 38572,02 | 10181,79 |
| Sandäcker    | 31940,47 | 7360,85  |
| Stammheim    | 36512,78 | 7999,98  |
| Zuffenhausen | 34691,00 | 9175,86  |
| Weil im Dorf | 32949,64 | 4372,99  |

Lösung: Für den Neupunkt 1 seien auf irgendwelche Weise die Näherungskordinaten:

$$N_x = + 31909,96, \quad N_y = + 8428,22$$

ermittelt worden.

Mittels der Formel:

$$\operatorname{tg} n AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

seien ferner die in Spalte 4 von Formular 1 (Abriß) mit senkrechten Ziffern eingetragenen Richtungswinkel  $\varphi$  der Verbindungsstrecken zwischen den durch obige Koordinaten bestimmten Festpunkten berechnet. Damit erfolgt die Orientierung der in den Festpunkten beobachteten und in Spalte 3 des Formulars 1 eingetragenen Richtungsbüschel  $\alpha$ .

Der hierfür nötige Verdrehungswinkel  $\omega$  ist in Spalte 5, die orientierten Richtungen  $\beta$  (worunter auch diejenige des

Neustrahles) sind in Spalte 6 und die hiernach sich ergebenden Beobachtungsverbesserungen  $v$  für die Feststrahlen in Spalte 7 berechnet.

Die orientierten Richtungen  $\beta$  werden jetzt aus Formular 1 als „Richtungen vorwärts“, die im Neupunkte beobachteten Richtungen  $\alpha$  direkt aus dem Feldbuch als „Richtungen rückwärts“ in das Formular 2, Abteilung 1, Spalte 3 übertragen. Gleichzeitig erfolgt der Eintrag der in Formular 1 zur Orientierung der Vorwärtsrichtungen benutzten Zahl von Feststrahlen  $n_f$  in Spalte 5 und die Berechnung der Richtungs-

gewichte  $p = \frac{n_f}{n_f + 1}$  (den Richtungen rückwärts möge

durchweg das Gewicht 1 zugeschrieben werden). Hieraus ergeben sich die Gewichtsfaktoren  $\sqrt{p}$  in Spalte 8 des Formulars 2 (Abteilung 1). Durch die Orientierung der Vorwärtsrichtungen (Verdrehung des ganzen Büschels der in den Festpunkten beobachteten Richtungen um den Winkel  $\omega$ ) in Formular 1 ist an deren gegenseitiger Lage, also an ihrer Eigenschaft als Beobachtungswerte, materiell nichts geändert. Mit ihnen werden nun die aus den Näherungskordinaten für den Neupunkt abgeleiteten Richtungswinkel  $\nu = (NAP), (NBP) \dots$  (s. Spalte 4 der Abteilung 1 von Formular 2) verglichen, wobei sich in Spalte 6 die Absolutglieder  $l$  der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen ergeben.

Auch die Rückwärtsrichtungen  $\alpha$  sollten, und zwar zunächst nach den vorläufigen Richtungswinkeln  $\nu$  (s. Spalte 4 von Formular 2), vorläufig orientiert werden:

$$\alpha_0 = \alpha + \omega,$$

wodurch sich dann die Absolutglieder  $l'$  ergeben würden aus:

$$l' = \nu - \alpha_0 = (\nu - \alpha) - \omega.$$

Die letztere Gleichung zeigt aber, daß zur Bildung dieser Absolutglieder die Durchführung der vorläufigen Orientierung entbehrlich ist: wir finden sie kürzer als Überschuß der Einzelwerte  $(\nu - \alpha)$  für den Verdrehungswinkel über dessen Mittelwert  $\omega$ .

Gleichzeitig mit der Berechnung der Richtungswinkel  $\varphi$  der Verbindungsstrecken vom vorläufigen Punkte 1 nach

den zu seiner endgültigen Bestimmung zu benützenden Festpunkten oder umgekehrt mögen die Strecken selbst

$$s = \frac{\Delta y}{\sin \varphi} = \frac{\Delta x}{\cos \varphi}$$

und die Richtungskoeffizienten

$$a = \frac{\sin \varphi}{s} \varrho, \quad b = -\frac{\cos \varphi}{s} \varrho$$

( $\varphi$  vom Neupunkt zum Festpunkt) logarithmisch oder mittels eines speziellen Hilfsmittels (Tabelle, Rechenschieber, Diagramm) gewonnen worden sein. Letztere werden in Spalte 7 des Formulares 2 eingetragen.

Zur Erzielung bequemer Rechnung sind möglichst gleiche Zahlenwerte für die Absolutglieder  $l$  bzw.  $l'$  und für die Richtungskoeffizienten  $a$  und  $b$  (Koeffizienten der Fehlergleichungen) erwünscht. Dies wird erreicht durch Wahl solcher Maßeinheiten, welche der normalen Beobachtungsgenauigkeit und der mittleren Strahlenlänge angepaßt sind. Im vorliegenden Beispiele wird als Winkeleinheit (für  $l$ ,  $l'$ ,  $\varrho$ ) die Dekasekunde, als Streckeneinheit (für  $dx$ ,  $dy$ ,  $s$ ) das Dezimeter gewählt.

Nun bilden wir in den Spalten 9—11 des Formulares 2, Abteilung 1 durch Multiplikation der Koeffizienten  $a$  und  $b$  und der Absolutglieder  $l$  je mit  $\sqrt{p_\beta}$  die Koeffizienten  $a\sqrt{p_\beta}$ ,  $b\sqrt{p_\beta}$ ,  $l\sqrt{p_\beta}$  der Fehlergleichungen für die Vorwärtsrichtungen, durch Subtraktion der Durchschnittswerte  $a_0 \equiv \frac{[a_r]}{n_r}$  und  $b_0 \equiv \frac{[b_r]}{n_r}$  für  $a$  und  $b$  von diesen Richtungskoeffizienten und Multiplikation mit  $\sqrt{p_i}$  diejenigen für die Rückwärtsrichtungen

$$(\mathfrak{A} = (a - a_0)\sqrt{p_i}; \quad \mathfrak{B} = (b - b_0)\sqrt{p_i}; \quad \mathfrak{L} = l'\sqrt{p_i}).$$

Für letztere besteht die Probe:

$$[\mathfrak{A}] = 0, \quad [\mathfrak{B}] = 0, \quad [\mathfrak{L}] = 0.$$

Schließlich erfolgt die Bildung der Summenglieder

$$s\sqrt{p_\beta} = a\sqrt{p_\beta} + b\sqrt{p_\beta} + l\sqrt{p_\beta}$$

für die Vorwärts-, bzw.

$$= \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$$

für die Rückwärtsrichtungen, wobei die Rechenprobe sich ergibt:

$$\left[ \frac{a\sqrt{p_\beta}}{\mathfrak{A}} \right] + \left[ \frac{b\sqrt{p_\beta}}{\mathfrak{B}} \right] + \left[ \frac{l\sqrt{p_\beta}}{\mathfrak{L}} \right] = [s\sqrt{p_\beta}].$$

(Durch Benutzung dekadischer Ergänzungen wird die Summierung hier, wie auch später in Abteilung 2 des Formulars 2, erheblich bequemer.)

Die Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen erfolgt in Abteilung 2 des Formulars 2. Zur Ausrechnung der einzelnen, hernach zu addierenden Quadrate und Produkte werden Logarithmen-, Quadrat- und Produktentafeln, Rechenmaschinen, oder — bei ungefähr gleich- und nicht allzu großen Koeffizienten — Rechenschieber benutzt. Die in Abteilung 2 gebildeten Koeffizienten der Normalgleichungen werden nach Abteilung 3 des Formulars 2 übertragen, wo die Reduktion der Gleichungen unter Beachtung der Rechenproben entsprechend dem Vordrucke und den früheren Ableitungen erfolgt. Abteilung 4 ist für die Berechnung der mittleren Fehler der Beobachtungswerte und der Unbekannten bestimmt.

Eine durchgreifende Rechenprobe erzielt man in Formular 1 nach Gewinnung der endgültigen Koordinaten des Neupunktes durch Aufstellung des „Abrisses“ auch für ihn. Die Richtungswinkel  $\varphi$  von ihm nach den benutzten Festpunkten oder umgekehrt mögen nach den in der Einleitung hierfür angegebenen Formeln berechnet, und nach Spalte 3 des Abrisses sowohl zu den Festpunkten, als zum Neupunkt übertragen sein (vgl. schräge Ziffern). Das auf letzterem beobachtete Richtungsbüschel  $\alpha$  wird, wie bisher, zum Zwecke der Orientierung um den Winkel  $\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n_r}$  verdreht,

wobei die orientierten Richtungswerte  $\beta$  erscheinen. Dann muß dieser endgültige Verdrehungswinkel  $\omega$  von dem in Spalte 5 der Abteilung 1 vom Formular 2 benutzten vorläufigen um den Betrag

$$z = \frac{[a]}{n_r} dx + \frac{[b]}{n_r} dy = a_0 dx + b_0 dy$$

abweichen:

$$\omega_{\text{endgültig}} = \omega_{\text{vorläufig}} + z.$$

Bildet man schließlich die Differenzen  $v = \varphi - \beta$ , und multipliziert jede Verbesserung  $v$  mit dem zugehörigen  $\sqrt{p}$ , so muß sein

$$[p v v] = [p l l \cdot 2].$$

### III. Abschnitt.

## Bedingte Beobachtungen.

### § 25. Erklärung. Aufstellung der Bedingungs- gleichungen.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Beobachtungsgrößen an sich voneinander unabhängig sind, bzw. nur insoweit zusammenhängen, als sie zur Ermittlung anderer Größen gemeinsam beitragen.

Nun gibt es aber eine Reihe von Aufgaben, in denen die mehrfach beobachteten Größen einer Anzahl ( $\beta$ ) voneinander unabhängiger, streng zu erfüllender mathematischer Bedingungen genügen müssen, „bedingte, direkte Beobachtungen“.

Sind z. B. die drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  eines Dreiecks je mehrfach gemessen, so müssen sie (unbeschadet der Berechnung jedes einzelnen von ihnen nach der Formel  $L = \frac{[pl]}{[p]}$ ) der Bedingung genügen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 R + \text{sphär. Exz.}$$

Die (etwa durch Einwägung ermittelten) Höhenunterschiede  $\Delta h$  der Endpunkte der Seiten eines geschlossenen Polygons müssen (abgesehen von der Mittelbildung im Falle mehrfacher Bestimmung jedes einzelnen  $\Delta h$ ) der Bedingung genügen  $[\Delta h] = 0$ .

Ebenso müssen die Seiten  $s$  und die Brechungswinkel  $\beta$  eines geschlossenen Polygons, gleichgültig, ob sie je aus mehr-

facher Beobachtung gemittelt sind oder nicht, den drei Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} [\beta] &= (2n - 4) \cdot R \quad \text{bzw.} \quad c \cdot 2R \\ [\Delta x] &= [s \cdot \cos \varphi] = 0 \\ [\Delta y] &= [s \cdot \sin \varphi] = 0, \end{aligned}$$

wo  $\varphi$  die aus den Brechungswinkeln  $\beta$  abzuleitenden Richtungswinkel jeder Polygonseite in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem darstellen.

Die erste, wichtigste und häufig schwierigste Aufgabe der Ausgleichung ist im vorliegenden Falle die nach Zahl und Form richtige Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Bedingungsgleichungen zwischen den Beobachtungswerten mehrerer Größen können auftreten, wenn zwischen diesen Größen ein mathematischer Zusammenhang infolge ihrer Zugehörigkeit zu einem abgeschlossenen Gebilde besteht. Ist die Zahl der beobachteten, nur durch jenen mathematischen Zusammenhang miteinander in Verbindung stehenden, sonst aber voneinander unabhängigen Größen gleich der Zahl der zur individuellen Existenz jenes Gebildes nötigen Bestimmungsstücke, so ist keine Überbestimmung vorhanden, also tritt auch keine Bedingungsgleichung auf. Jede weiter hinzutretende Beobachtungsgröße, welche in jenen mathematischen Zusammenhang eingeschlossen ist, liefert eine weitere Bedingungsgleichung.

Die Aufgabe der Ausgleichung bedingter Beobachtungen tritt in der geodätischen Praxis am häufigsten auf bei der Einschaltung von Nivellements- und Dreiecksnetzen.

Suchen wir daher als Beispiel die an einigen Dreiecksnetzen auftretenden Bedingungsgleichungen auf.

Im Falle ausgeführter Winkelbeobachtungen haben wir dreierlei Gruppen solcher Gleichungen, nämlich:

1. Punktgleichungen. Die Summe der in ununterbrochener Folge um einen Punkt herumliegenden Winkel soll  $4R$  betragen. Zur gegenseitigen Festlegung von  $s$  Strahlen braucht man

$$w = (s - 1)$$

unabhängige Winkel.

Jeder weiter gemessene liefert eine Punktgleichung.

2. Winkelsummengleichungen. Die Summe der drei Dreieckswinkel soll betragen:

$$2R + \text{Exzeß.}$$

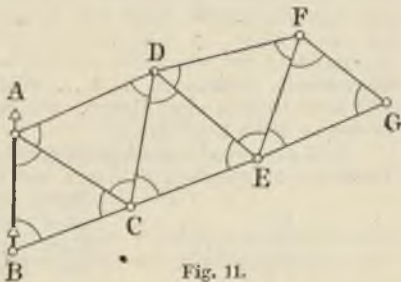


Fig. 11.

Jedes Dreieck, in welchem drei, jedes Viereck, in welchem vier usw. Winkel gemessen sind, liefert eine Winkelsummengleichung.

3. Seitengleichungen. Reiht sich Dreieck an Dreieck so an, daß man von einer gegebenen Dreiecksseite ausgehend die anderen nur in bestimmter Reihenfolge auf bestimmtem Weg ableiten kann, „Dreieckskette“ (s. Fig. 11), so können

|                |         |              |               |
|----------------|---------|--------------|---------------|
| in 2 Dreiecken | 1 Seite | und 6 Winkel | = 7 Stücke    |
| „ 3            | „ 1     | „ 9          | „ = 10 Stücke |
| „ 4            | „ 1     | „ 12         | „ usw.        |

bekannt sein, mittels welcher die gegenseitige Lage von 4, 5, 6 ... Punkten bestimmt ist.

Notwendig zu dieser Bestimmung sind bei  $p$  Punkten allgemein  $(2p - 3)$  voneinander unabhängiger Stücke (worunter sich etwa befinden können 1 Seite und  $2p - 4$  Winkel), also

bei 4 Punkt. od. 2 Dreieck. 5 unabh. Bestimmungsstücke,

|     |   |     |     |   |   |
|-----|---|-----|-----|---|---|
| „ 5 | „ | „ 3 | „ 7 | „ | „ |
| „ 6 | „ | „ 4 | „ 9 | „ | „ |
| ⋮   |   | ⋮   | ⋮   |   |   |



Also sind unter obiger Voraussetzung  
im Falle der aus 2 Dreiecken bestehenden Kette 2 Stücke

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| " | " | " | " | 3 | " | " | " | 3 | " |
| " | " | " | " | 4 | " | " | " | 4 | " |
|   |   |   |   | ⋮ |   |   |   | ⋮ |   |

überschüssig, welche 2, 3, 4 ... Winkelsummengleichungen (für jedes Dreieck eine) liefern. Für Seitengleichungen bleibt in diesem Falle kein Raum.

Sind diagonale Strahlen beobachtet (s. Fig. 13), oder die Dreiecke so gruppiert, daß man zur Berechnung der Länge irgend einer ihrer Seiten von einer bekannten Seite ausgehend verschiedenerlei Winkel und Dreiecke wählen kann, „Dreiecksnetze“ (s. Fig. 12 u. 14), so gewährleistet die Erfüllung der Punkt- und Winkelsummengleichungen noch nicht eine geschlossene Figur. Denn keine Methode der Winkelausgleichung wird uns die wahren Werte der gemessenen

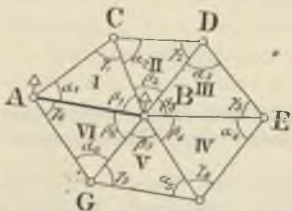


Fig. 12. F

Winkel  $\alpha$  verschaffen, auch die ausgeglichenen Werte sind noch mit Fehlern behaftet. Demgemäß werden sich für

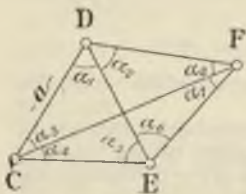


Fig. 13.

irgend eine der Strecken verschiedene Längen ergeben, wenn wir sie, unter Benutzung der, wenn auch nach Punkt- und Winkelsummengleichungen verbesserten Winkel, je aus anderen Dreiecken berechnen.

Im ganzen sind (wie oben angegeben) zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von  $p$  Punkten  $2p - 3$  unabhängige Stücke nötig. Sind eine Dreiecksseite und  $[w]$

Winkel bekannt, so ist demnach die Zahl der überschüssigen Beobachtungen:

(69)

$$\beta = [w] - 2p + 4.$$

Dies ist gleichzeitig die Zahl der aufzustellenden Bedingungsgleichungen.

In Fig. 13 der gegenseitigen Festlegung von vier Punkten sind  $2p - 3 = 5$  unabhängige Bestimmungsstücke nötig. Sind acht Winkel gemessen und eine Seite bekannt, so sind also  $9 - 5 = 4$  Stücke übrig: wir müssen  $\beta = 4$  unabhängige Bedingungsgleichungen aufstellen. Durch die drei unabhängigen Winkelsummengleichungen

- (a)  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 = 2R$   
 (b)  $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_6 + \alpha_7$   
 (c)  $\alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_8$

sind alle in der Figur möglichen Winkelsummengleichungen mit ausgedrückt. Als vierte Bedingung brauchen wir noch eine

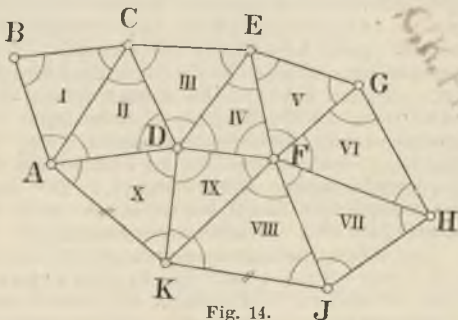


Fig. 14. J

Seitengleichung, welche den linearen Schluß der Figur gewährleistet. Wir erhalten sie, wenn wir, von irgend einer Umfangsseite  $a$  (gleichgültig, ob ihre Länge bekannt ist oder nicht) ausgehend, die Umfangsseiten des Vierecks der Reihe nach eine aus der anderen ableiten, bis wir wieder zu  $a$  gelangen. Dann hebt sich  $a$  weg und wir erhalten:

(d) 
$$\frac{\sin \alpha_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_7 \sin \alpha_5}{\sin \alpha_8 \sin \alpha_6 \sin \alpha_4 \sin \alpha_1} = 1.$$

In Fig. 12 haben wir neben einer Punkt- und sechs Winkelsummengleichungen die auf gleiche Weise erhaltene Seitengleichung:

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 \sin \alpha_5 \sin \alpha_6}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3 \sin \gamma_4 \sin \gamma_5 \sin \gamma_6} = 1$$

usw.

Da wir eine Seitengleichung im Falle der Dreieckskette nicht nötig hatten, dagegen eine solche (und eine weitere Winkelsummengleichung) bekommen, sobald wir in die Kette noch irgend einen zweiseitig beobachteten diagonalen Strahl einschalten (Fig. 13) oder die erstere durch Rückkehr auf die Ausgangsbasis zum Netz ausgestalten (Fig. 12), so erkennen wir: Ist nur eine Dreiecksseite bekannt, so ist die Zahl der Seitengleichungen gleich der Zahl der Dreiecksseiten, welche gestrichen werden müssen, um aus dem Dreiecksnetz eine Kette zu machen, die Zahl der Winkelsummengleichungen ist im Falle bloß zweiseitig beobachteter Strahlen gleich der Zahl von Dreiecken der durch Strahlenschaltung erzielten Kette + der Zahl der gestrichenen Seiten. (Ist ein Punkt im Netz durch reinen Vorwärts- oder Rückwärtseinschnitt festgelegt, so liefert seine Existenz und diejenige seiner Bestimmungsstrahlen keine Winkelsummengleichung, beide bleiben für die Feststellung der Zahl der Bedingungsgleichungen außer Betracht.) Für jeden bloß einseitig beobachteten Strahl kommt aus der nach Vorigem festgestellten Zahl von Winkelsummengleichungen eine in Fortfall. Die übrigen Bedingungsgleichungen bis zur Gesamtzahl von  $\beta = [w] - 2p + 4$  sind Punktgleichungen.

In Fig. 14 sind in 10 Dreiecken 30 Winkel gemessen, 1 Seite muß mindestens bekannt sein, gibt zusammen 31 bekannte Stücke. Nötig sind für die gegenseitige Festlegung der 10 Punkte:  $2p - 3 = 17$  unabhängige Stücke. Also haben wir im ganzen  $31 - 17 = 14$  Bedingungsgleichungen, und zwar 2 Punktgleichungen (bei  $D$  und  $F$ ), 10 Winkelsummengleichungen und 2 Seitengleichungen. (Zum Zwecke der Zurückführung auf die Kette seien z. B. die Seiten  $AK$  und  $KJ$  gestrichen).

Man kann die Zahl der Bedingungsgleichungen statt in der Zahl der gemessenen Winkel auch in der Zahl der beobachteten Strahlen ausdrücken. Sind in einem Punkte  $w$

unabhängige Winkel gemessen, so ersetzen sie  $w + 1$  Richtungen. Folglich ersetzen  $[w]$  in  $p$  Punkten gemessene unabhängige Winkel  $[w] + p$  Richtungen. Setzen wir jeden Strahl als zweiseitig beobachtet voraus, so haben wir also mit  $[w]$  in  $p$  Punkten gemessenen unabhängigen Winkeln:  $s = \frac{[w] + p}{2}$  je zweiseitig beobachtete Strahlen.

Daraus erkennen wir: Sind  $s$  je zweiseitig beobachtete Strahlen im Dreiecksnetz vorhanden, so ist — eine einzige Dreiecksseite als bekannt vorausgesetzt — die Zahl der Bedingungsgleichungen im ganzen

$$(70) \quad \beta = [w] - 2p + 4 = \underline{2s - 3p + 4}.$$

Daraus ergibt sich folgende

Zusammenstellung der obigen Untersuchungen.

| Zahl der Netzpunkte (exkl. reine Vor- oder Rückwärts-Rückschnitte)<br>$p =$ | Zahl der zur Kettenverbindung nötigen Dreiecke | Zahl der zur Kette nötigen Strahlen | Von $s$ zweiseitig beobachteten Netzstrahlen sind für die Dreieckskette überschüssig | Zahl der Winkelsummengleichungen       |
|---|--|-------------------------------------|--|--|
| 3   | 1  | 3                                   | $s - 3 = 0$  | $0 + 1 = 1$                            |
| 4   | 2  | 5                                   | $s - 5$  | $(s - 5) + 2 = s - 3$                  |
| 5   | 3  | 7                                   | $s - 7$  | $(s - 7) + 3 = s - 4$                  |
| ⋮   | ⋮  | ⋮                                   | ⋮  | ⋮                                      |
| $p$   | $p - 2$  | $2p - 3$                            | $s - (2p - 3)$   | $\{s - (2p - 3)\} + p - 2 = s - p + 1$ |

Sind von den  $s$  Strahlen  $s'$  nur einseitig beobachtet, so tritt an Stelle von  $s$  in obiger Gleichung die Differenz  $s - s'$ , also Zahl der Winkelsummengleichungen

$$(71) \quad \underline{(s - s') - p + 1}.$$

Treten Richtungs- an Stelle der bisher vorausgesetzten Winkelbeobachtungen, so fallen die Punktgleichungen weg.

Die Zahl der zur Festlegung unserer  $p$  Dreieckspunkte je zweiseitig beobachteten Strahlen sei wieder  $s$ ,

d. Gesamtzahl d. Bedingungsgleichungen also  $\beta = 2s - 3p + 4$ ,  
 die Zahl der Winkelsummengleichungen ist  $s - p + 1$ ,  
 folglich die Zahl der Seitengleichungen  $s - 2p + 3$ .

Sind unter den  $s$  Strahlen  $s'$  nur einseitig beobachtete (etwaige reine Vor- oder Rückwärtseinschnitte bleiben für die Zählung der Punkte und der Richtungen außer Betracht), so wird

die Zahl der Winkelsummengleichungen  $= (s - s') - p + 1$

die Zahl der Seitengleichungen  $= s - 2p + 3$

d. Gesamtz. d. Bedingungsgleichungen  $\beta = 2s - s' - 3p + 4$ .

Sind mehr als 2 Festpunkte durch ihre Koordinaten gegeben, so liefert der Anschlußzwang weitere Bedingungen. So sind in Fig. 15 in 6 Dreiecken 18 Winkel gemessen

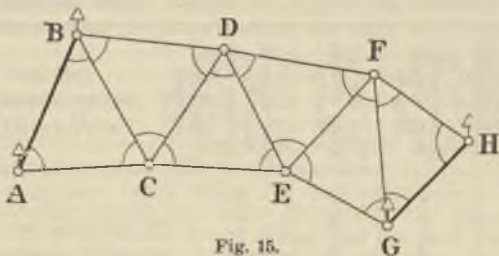


Fig. 15.

und überdies durch die 4 Festpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $G$  und  $H$  5 unabhängige Stücke unabänderlich bekannt. Nötig sind für die Bestimmung der gegenseitigen Lage der 8 Punkte 13 unabhängige Stücke, also brauchen wir für die Ausgleichung  $18 + 5 - 13 = 10$  Bedingungsgleichungen. Hierunter sind 6 Winkelsummen- und 4 weitere Gleichungen, welche die Festhaltung der als fehlerfrei vorausgesetzten Bestimmungselemente für die gegenseitige Lage der 4 Festpunkte verbürgen. Von den letzteren sichern zwei das fehlerfrei gegebene Verhältnis der Streckenlängen  $AB$  und  $GH$ ,  $AG$  und  $BH$ , zwei deren gegebene Divergenz.

§ 26. Ausgleichung bedingter, direkter, durch Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen.

Das Verfahren möge an einem Beispiele gezeigt werden:

Die Beobachtung der drei Winkel eines Dreieckes habe die gleich genauen Werte ergeben:

$$\begin{array}{l} l_1 \text{ an Stelle von } \alpha \\ l_2 \text{ „ „ „ } \beta \\ l_3 \text{ „ „ „ } \gamma . \end{array}$$

Die Bedingungsgleichung

$$(72a) \quad \alpha + \beta + \gamma = 2R + \text{Exz.}$$

wird durch die Beobachtungswerte  $l$  nicht scharf erfüllt sein. Vielmehr wird ein Widerspruch  $w$  sich einstellen, über dessen Vorzeichen wir dem allgemeinen Gebrauche folgend verfügen wollen:

$$w = \text{Ist} - \text{Soll.}$$

Wir erhalten dann:

$$(72b) \quad l_1 + l_2 + l_3 - (2R + E) = w .$$

Wir müssen nun jedem der Beobachtungswerte  $l$  für die Unbekannten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  eine Verbesserung  $v$  zuschlagen, so daß die Bedingungsgleichung (72a) durch die verbesserten Beobachtungswerte erfüllt ist:

$$(72c) \quad (l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) + (l_3 + v_3) = 2R + E$$

und wobei sich aus (72c) und (72b) ergibt:

$$(72d) \quad v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 .$$

Dabei müssen diese Verbesserungszuschläge  $v$  noch der allgemeinen Ausgleichungsbedingung entsprechen:

für gleich genaue Beobachtung:  $[vv] = \text{Min.}$

für verschieden „ „  $[pvv] = \text{Min.}$

Die bisherigen Untersuchungen haben uns nun noch nicht gelehrt, auf welche Weise wir außer der letzteren und Hauptbedingung noch die Nebenbedingung (72a) bzw. (72d) berücksichtigen können. Am liebsten werden wir daher diese wegschaffen, indem wir mit ihrer

Hilfe eine der Unbekannten (etwa  $\gamma = l_3 + v_3$ ) in den beiden anderen ausdrücken.

Wir erhalten dann (unter Weglassung des sphärischen Exzesses)

$$\alpha = l_1 + v_1$$

$$\beta = l_2 + v_2$$

$$\gamma = l_3 + v_3 = 2R - (\alpha + \beta) = 2R - (l_1 + v_1 + l_2 + v_2).$$

Führen wir, wie bisher, für die Unbekannten  $\alpha$  und  $\beta$  Näherungswerte ein und bestimmen die ihnen noch zuzufügenden Zuschläge  $x$  und  $y$  als neue Unbekannte, erklären wir endlich die Beobachtungswerte  $l_1$  und  $l_2$  selbst als solche Näherungswerte, womit

$$\alpha = l_1 + x$$

$$\beta = l_2 + y$$

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta),$$

so erhalten wir die Fehlergleichungen

$$v_1 = \alpha - l_1 = x$$

$$v_2 = \beta - l_2 = y$$

$$v_3 = \gamma - l_3 = 2R - (l_1 + v_1 + l_2 + v_2) - l_3 \\ = 2R - (l_1 + l_2 + l_3) - v_1 - v_2 = -x - y - w,$$

deren Absolutglieder  $0, 0, -w$  durch Abzug der festen und als solche fehlerfreien Näherungswerte an Stelle von  $l_1, l_2, l_3$  getreten sind und mit ihnen gleiches Gewicht haben. Aus den Koeffizienten und Absolutgliedern dieser Fehlergleichungen erhalten wir wie bisher diejenigen der Normalgleichungen:

|     | Koeffizient der Fehlergleichungen |     |     | Probe<br>$s$ | Koeffizienten der Normalgleichungen |      |      |      |      |                 | Probe<br>$ss$          |
|-----|-----------------------------------|-----|-----|--------------|-------------------------------------|------|------|------|------|-----------------|------------------------|
|     | $a$                               | $b$ | $l$ |              | $aa$                                | $ab$ | $al$ | $bb$ | $bl$ | $ll$            |                        |
| 1.  | +1                                | 0   | 0   | +1           | +1                                  | 0    | 0    | 0    | 0    | 0               | +1                     |
| 2.  | 0                                 | +1  | 0   | +1           | 0                                   | 0    | 0    | +1   | 0    | 0               | +1                     |
| 3.  | -1                                | -1  | -w  | -w-2         | +1                                  | +1   | +w   | +1   | +w   | +w <sup>2</sup> | (w <sup>2</sup> +4w+4) |
| [ ] | 0                                 | 0   | -w  | -w           | +2                                  | +1   | +w   | +2   | +w   | +w <sup>2</sup> | w <sup>2</sup> +4w+6   |



womit letztere lauten:

$$2x + y + w = 0$$

$$x + 2y + w = 0$$

oder in abgekürzter Form samt den Koeffizientenproben:

$$\begin{array}{ccc|c} +2 & +1 & +w & 3 + w \\ \hline . & +2 & +w & 3 + w \\ . & . & w^2 & w^2 + 2w \end{array}$$

$$\hline$$

$$\begin{array}{ccc|c} . & . & . & w^2 + 4w + 6 \end{array}$$

(in Übereinstimmung mit der direkten Rechnung).

Die früher gezeigte, gewöhnliche Reduktion liefert

$$y = \frac{-w}{\frac{2}{3}},$$

womit

$$\beta = l_2 - \frac{w}{3},$$

wie vorauszusehen war.

Das Gewicht des ausgeglichenen Winkels  $\beta$  ist:

$$P_y = P_\beta = \frac{3}{2},$$

der mittlere Fehler des Beobachtungswertes eines Winkels

$$m = \pm \sqrt{\frac{[ll \cdot 2]}{\lambda - \kappa}} = \pm \sqrt{\frac{w^2}{\frac{3}{1}}} = \pm \frac{w}{\sqrt{3}},$$

woraus wir erhalten: den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels

$$M_y = M_\beta = \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{w}{3} \sqrt{2}.$$

Ist die Zahl der Unbekannten wie bisher  $= \kappa$ , die Zahl der zwischen ihnen bestehenden, streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen  $= \beta$  (wobei natürlich  $\beta < \kappa$ ), so können wir mittels der letzteren, wie vorstehend für eine Bedingungsgleichung gezeigt, immer  $\beta$  der Un-

bekanntem in den übrigen ausdrücken und damit diese  $\beta$  Unbekannte samt den Bedingungsgleichungen wegschaffen. Die allgemeine Ausgleichungsbedingung  $[vv] = \text{Min.}$  oder  $[p vv] = \text{Min.}$  liefert dann die Normalgleichungen zur Bestimmung der  $\kappa - \beta$  übrigen Unbekannten, ihrer Gewichte und mittleren Fehler für das Verfahren nach vermittelnden Beobachtungen.

### § 27. Ausgleichung bedingter, direkter, gleich genauer Beobachtungen mittels Korrelaten.

Die Wegschaffung der  $\beta$  Bedingungsgleichungen durch Eliminierung einer gleich großen Zahl von den  $\kappa$  Unbekannten ist theoretisch zwar immer möglich, führt aber häufig zu schwerfälligen Koeffizienten der Fehlergleichungen. Bequemer ist es in vielen Fällen, sämtliche  $\kappa$  Unbekannte beizubehalten, sie aber in  $\beta$  neuen Unbekannten  $k$  auszudrücken, über die wir hernach verfügen. Durch sie, die „Korrelaten“, vermehren wir allerdings die Zahl der Unbekannten auf  $(\kappa + \beta)$ , während wir sie nach dem Verfahren des § 26 auf  $(\kappa - \beta)$  herabdrückten. Gelingt es uns aber, die Beziehungen zwischen den  $\beta$  neuen und den  $\kappa$  eigentlichen Unbekannten einfach genug zu gestalten, so wird eine Rechenvereinfachung gegenüber dem Verfahren des § 26 eintreten können, sobald  $\beta \leq \kappa - \beta$ , d. h.  $\beta \leq \frac{\kappa}{2}$ .

Um jene Beziehungen zwischen den  $\kappa$  ursprünglichen und den  $\beta$  neuen Unbekannten (Korrelaten) einfach zu gestalten, sorgen wir zunächst dafür, daß die  $\beta$  durch die Werte der Unbekannten streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen lineare Form annehmen. Zu diesem Zwecke führen wir die Beobachtungs- als Näherungswerte für die Unbekannten  $X \dots$  ein, und betrachten die ihnen zu-

zufügenden Verbesserungen  $v$  als eigentliche Unbekannte  $x, y \dots$ , so daß  $X = l_1 + v_1 = l_1 + x$ ,  $Y = l_2 + v_2 = l_2 + y$  usw. Mit diesem Kunstgriffe erzielen wir nebenbei noch eine erhebliche Rechenvereinfachung.

Die ursprünglichen, durch die gesuchten endgültigen Werte  $X, Y \dots$  der Beobachtungsgrößen zu erfüllenden  $\beta$  Bedingungsgleichungen:

$$(73a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \uparrow F_1(X, Y \dots) = 0 \\ \bar{0} F_2(X, Y \dots) = 0 \\ \downarrow \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right.$$

← \* Unbekannte →

sind voraussichtlich durch die Beobachtungswerte  $l_1, l_2 \dots$  nicht scharf erfüllt. Letztere liefern vielmehr die Gleichungen:

$$(73b) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(l_1, l_2 \dots) = w_1 \\ F_2(l_1, l_2 \dots) = w_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array} \right.$$

wobei die Werte  $w$  die Einflüsse der Beobachtungsfehler auf die Bedingungsgleichungen darstellen.

Die zur Wegschaffung der Widersprüche  $w$  den Beobachtungswerten  $l$  zuzufügenden Verbesserungen  $v$  sind gegenüber den Beobachtungswerten selbst jedenfalls so klein, daß wir höhere Potenzen von ihnen vernachlässigen dürfen. Dann liefert die Taylorsche Reihe an Stelle der Bedingungsgleichungen (a) die Gleichungen:

$$(73c) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(X, Y \dots) \equiv F_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2 \dots) \\ = F_1(l_1, l_2 \dots) + v_1 \frac{\partial F_1}{\partial l_1} + v_2 \frac{\partial F_1}{\partial l_2} + \dots = 0 \\ F_2(X, Y \dots) \equiv F_2(l_1 + v_1, l_2 + v_2 \dots) \\ = F_2(l_1, l_2 \dots) + v_1 \frac{\partial F_2}{\partial l_1} + v_2 \frac{\partial F_2}{\partial l_2} + \dots = 0. \end{array} \right.$$

Durch Subtraktion (c) — (b) erhalten wir

$$\begin{array}{r} v_1 \frac{\partial F_1}{\partial l_1} + v_2 \frac{\partial F_1}{\partial l_2} + \dots + w_1 = 0 \\ v_1 \frac{\partial F_2}{\partial l_1} + v_2 \frac{\partial F_2}{\partial l_2} + \dots + w_2 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

und mittels der schon früher benutzten Substitutionen

$$(25d) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial l_1} = a_1, & \frac{\partial F_1}{\partial l_2} = a_2 \dots \frac{\partial F_1}{\partial l_x} = a_x \\ \frac{\partial F_2}{\partial l_1} = b_1, & \frac{\partial F_2}{\partial l_2} = b_2 \dots \frac{\partial F_2}{\partial l_x} = b_x \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

die reduzierten Bedingungsbedingungen:

$$(73d) \quad \begin{cases} \begin{array}{l} \uparrow \\ \ominus \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + w_2 = 0 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{oder } [a v] = -w_1 \\ \text{,, } [b v] = -w_2 \\ \vdots \end{array} \end{cases}$$

← \* Unbekannte v →

Da  $x > \beta$ , reichen diese reduzierten Bedingungsbedingungen zur eindeutigen Bestimmung der unbekanntem Zuschläge  $v$  nicht aus. Letztere müssen noch der allgemeinen Ausgleichungsbedingung genügen:  $[v v] = \text{Min.}$

Für den jetzt vorliegenden Fall, in welchem die  $x$  gesuchten Verbesserungsgrößen  $v$  außer der gewöhnlichen Minimumsbedingung noch  $\beta$  Nebenbedingungen genügen müssen, haben wir bekanntlich allgemein folgenden Weg der Lösung: Soll irgend eine Funktion  $\varphi(X, Y, Z \dots)$  zum Minimum werden, während die Veränderlichen  $X, Y, Z \dots$  noch  $\beta$  Bedingungen von der Form

$$\begin{array}{l} F_1(X, Y, Z \dots) = 0 \\ F_2(X, Y, Z \dots) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

streng erfüllen müssen, so bilden wir an Stelle der Funktion  $\varphi$  eine andere, welche die erste samt den  $\beta$  Bedingungsgleichungen enthält. Werte für  $X, Y, Z$ , welche dieser neuen Funktion genügen, erfüllen auch die Bedingungen  $F$ . Eine solche Funktion ist z. B.

$$\varphi_1(X, Y, Z \dots) = \varphi(X, Y, Z \dots) + \varrho_1 F_1(X, Y, Z \dots) + \varrho_2 F_2(X, Y, Z \dots) + \dots = \text{Min.}$$

wobei  $\varrho_1, \varrho_2 \dots$  Koeffizienten sind, über die wir nach Bedarf verfügen.

Wegen der Minimumsbedingung setzen wir

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} = 0 \dots$$

und erhalten damit ebenso viele Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind; nämlich  $\kappa$ . Wir besitzen also jetzt einschließlich der  $\beta$  Nebenbedingungen  $(\kappa + \beta)$  Gleichungen für die  $\kappa + \beta$  Unbekannten  $X, Y, Z \dots \varrho_1, \varrho_2 \dots$

Multiplizieren wir im vorliegenden Falle die  $\beta$  Bedingungsgleichungen (73d) der Reihe nach mit

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= -2k_1 \\ \varrho_2 &= -2k_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$(73e) \quad \begin{cases} -2a_1 k_1 v_1 - 2a_2 k_1 v_2 - \dots - 2k_1 w_1 = 0 \\ -2b_1 k_2 v_1 - 2b_2 k_2 v_2 - \dots - 2k_2 w_2 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Zu ihrer Summe addieren wir die zum Minimum zu machende Funktion

$$\varphi(v) \equiv [v v] = v_1^2 + v_2^2 + \dots$$

und ordnen nach  $v$ , womit wir erhalten:

$$(74) \quad \begin{cases} \varphi_1(v_1, v_2 \dots v_\kappa) = v_1^2 - 2v_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots) \\ \quad + v_2^2 - 2v_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots) \\ \quad + \dots - 2(k_1 w_1 + k_2 w_2 + \dots) = \text{Min.} \end{cases}$$

Partielle Ableitung von  $\varphi_1$  nach den  $\varkappa$  Unbekannten  $v_1, v_2 \dots$  liefert die „ $\varkappa$  Korrelatengleichungen“:

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} = 2 v_1 - 2 (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2} = 2 v_2 - 2 (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

oder vereinfacht:

$$(75) \quad \begin{cases} v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots \\ v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots \\ \vdots \end{cases} \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Unbek. } v \\ \downarrow \end{array}$$

←  $\beta$  Korrelaten  $k$  →

Damit haben wir die  $\varkappa$  unbekanntes Zuschläge  $v$  in den  $\beta$  zunächst ebenfalls noch unbekanntes Korrelaten  $k$  ausgedrückt. Um letztere selbst zu finden, setzen wir die Verbesserungen  $v$  aus (75) in die  $\beta$  reduzierten Bedingungsgleichungen (73d) ein.

Durch Zusammenziehen erhalten wir dann  $\beta$  Normalgleichungen zur Berechnung der  $\beta$  Korrelaten  $k$ :

$$(76) \quad \begin{cases} [a a] k_1 + [a b] k_2 + [a c] k_3 + \dots + w_1 = 0 \\ [a b] k_1 + [b b] k_2 + [b c] k_3 + \dots + w_2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{G.L.} \\ \downarrow \end{array}$$

←  $\beta$  Unbekannte  $k$  →

Zur Ermittlung der Korrelaten  $k$  werden wir jetzt dasselbe Reduktionsverfahren und dieselben Rechenproben verwenden, wie bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Zur Erlangung der Unbekanntes  $v$ , bzw.  $X, Y \dots$  setzen wir schließlich die berechneten Werte der Korrelaten in die Korrelatengleichungen (75) ein.

Hieraus ergibt sich allgemein folgender Weg der Ausgleichung bedingter, direkter, gleichgenauer Beobachtungen mittels Korrelaten:

1. Aufstellung der  $\beta$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $\kappa$  Beobachtungsgrößen  $X, Y \dots$  in der Form

$$(73a) \quad \begin{array}{l} F_1(X, Y \dots) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

2. Berechnung der Werte  $w$ , welche die rechte Seite dieser Bedingungsgleichungen annimmt bei Einsetzung der beobachteten Werte  $l$  an Stelle der gesuchten  $X, Y \dots$

$$(73b) \quad \begin{array}{l} F_1(l_1, l_2 \dots) = w_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

3. Berechnung der  $\kappa$  Koeffizienten  $a, b \dots$  aus jeder der  $\beta$  Bedingungsgleichungen  $F$

$$(25d) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\partial F_1}{\partial l_1}, \quad a_2 = \frac{\partial F_1}{\partial l_2}, \quad a_3 = \frac{\partial F_1}{\partial l_3} \dots a_\kappa = \frac{\partial F_1}{\partial l_\kappa} \\ b_1 = \frac{\partial F_2}{\partial l_1}, \quad b_2 = \frac{\partial F_2}{\partial l_2}, \quad b_3 = \frac{\partial F_2}{\partial l_3} \dots b_\kappa = \frac{\partial F_2}{\partial l_\kappa} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

und Anschrieb der  $\beta$  reduzierten Bedingungsgleichungen

$$(73d) \quad \left\{ \begin{array}{l} [a v] \equiv a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots = -w_1 \\ [b v] \equiv b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots = -w_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

4. Berechnung der Koeffizienten  $[aa], [ab] \dots [bb] \dots$  und Anschrieb der  $\beta$  Normalgleichungen für die  $\beta$  Korrelaten

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} [aa] k_1 + [ab] k_2 + \dots + w_1 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$



5. Reduktion der Normalgleichungen und Ausmittlung der rechts zuletzt stehenden Korrelaten  $k$ . Umsetzung der Koeffizienten und Berechnung der nun zuletzt stehenden Korrelaten usw.
6. Einsetzung der gefundenen Korrelaten in die Korrelatengleichung (75). Addition der nach Gleichung (75) gefundenen Verbesserungszuschläge

$$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots$$

$$\vdots$$

zu  $l_1, l_2, \dots$ , wodurch

$$l_1 + v_1 = X$$

$$l_2 + v_2 = Y$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

7. Bildung von  $[v v]$  aus den Korrelatengleichungen (75).
8. Berechnung des mittleren Fehlers  $m$  einer Beobachtung. Durch die  $\beta$  Bedingungsgleichungen sinkt die Zahl der unabhängigen Unbekannten auf  $(\varkappa - \beta)$ . Die Zahl der Beobachtungen ist  $= \varkappa$ , folglich haben wir  $\varkappa - [\varkappa - \beta] = \beta$  überschüssige Beobachtungen und als mittleren Fehler einer Beobachtung:

$$(77) \quad m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{\beta}}$$

Die Bildung der Fehlerquadratsumme  $[v v]$  direkt aus den Verbesserungen  $v$  ist zwar deshalb nicht allzu umständlich, weil die letzteren (als Unbekannte) doch berechnet werden müssen. Gleichwohl ist es schon der Probe wegen wünschenswert, wie bei den vermittelnden Beobachtungen  $[v v]$  auf anderem Wege zu gewinnen. Quadrieren wir jede der Korrelatengleichungen und addieren, so erhalten wir





Wir erkennen, daß durch Einführung von Beobachtungsgewichten  $p_1, p_2 \dots$  lediglich die Koeffizienten  $a, b \dots$  der Korrelatengleichungen in

$$\frac{a_1}{p_1}, \frac{b_1}{p_1} \dots, \frac{a_2}{p_2}, \frac{b_2}{p_2} \dots$$

übergehen.

Setzen wir die Ausdrücke für  $v$  wieder in die unveränderten reduzierten Bedingungsgleichungen (73 d) ein und ziehen wieder zusammen, so erhalten wir wieder  $\beta$  Normalgleichungen zur Berechnung der  $\beta$  Korrelaten  $k$ :

$$(76a) \begin{cases} \left[ \frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{ac}{p} \right] k_3 + \dots + w_1 = 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{bb}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_3 + \dots + w_2 = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \end{cases}$$

Die ganze Auflösung ist also gleich der des § 27, nur ist die rechte Seite der Korrelatengleichungen mit dem Gewicht derjenigen Beobachtung durchzudividieren, welcher die linksseitige Verbesserung  $v$  angehört.

Noch einfacher ist es, schon die reduzierten Bedingungsgleichungen (73 d) umzuformen, so daß sie lauten:

$$\begin{array}{r} \frac{a_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \dots + w_1 = 0 \\ \frac{b_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \frac{b_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \dots + w_2 = 0 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Gleichg.} \\ \downarrow \end{array}$$

←  $\times$  Unbekannte  $v$  →

Durch Substituierung von

$$a_i = \frac{a_i}{\sqrt{p_i}}, \quad b_i = \frac{b_i}{\sqrt{p_i}}, \quad v_i = v_1 \cdot \sqrt{p_1} \quad \text{usw.}$$

gehen sie über in:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + w_1 = 0$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + w_2 = 0.$$

Jetzt hat man mit den Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  genau das Verfahren des § 27 anzuwenden und nur am Schluß bei Berechnung der gesuchten Zuschläge  $v$  zu beachten, daß:

$$a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots = v = v_1 \sqrt{p_1},$$

folglich

$$v_1 = \frac{v_1}{\sqrt{p_1}}$$

$$v_2 = \frac{v_2}{\sqrt{p_2}}$$

$$\vdots$$

Zur Fehlerberechnung braucht man  $[p v v] = [v v]$ ,  
woraus der mittlere Beobachtungsfehler:  
der Gewichtseinheit

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{\beta}} = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{\beta}},$$

einer Beobachtung vom Gewicht  $p$

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}.$$

### Zahlenbeispiel.

Mittels geometrischer Einwägung wurden folgende Höhenunterschiede zwischen fünf Punkten  $A, B, C, D, E$  bestimmt:

| Strecke<br>Nr. | von      | nach     | $\Delta h$ | Lösung der<br>nivellierten<br>Strecke | Zahl<br>der Niv.<br>Wieder-<br>holungen |
|----------------|----------|----------|------------|---------------------------------------|---|
| 1              | <i>D</i> | <i>E</i> | + 10,194 m | 3,5 km                                | 1                                       |
| 2              | <i>E</i> | <i>B</i> | + 10,659 „ | 2,6 „                                 | 1                                       |
| 3              | <i>D</i> | <i>B</i> | + 20,871 „ | 1,7 „                                 | 1                                       |
| 4              | <i>D</i> | <i>C</i> | + 40,791 „ | 1,0 „                                 | 1                                       |
| 5              | <i>B</i> | <i>C</i> | + 19,930 „ | 2,3 „                                 | 1                                       |
| 6              | <i>A</i> | <i>E</i> | + 38,460 „ | 4,2 „                                 | 2                                       |
| 7              | <i>A</i> | <i>D</i> | + 28,248 „ | 1,9 „                                 | 2                                       |
| 8              | <i>A</i> | <i>C</i> | + 69,076 „ | 2,8 „                                 | 2                                       |

Die Höhe des Festpunktes *A* ist zu 201,754 m gegeben. Welches sind die Höhen der übrigen Punkte?

Lösung. Die eingewogenen Strecken bilden zusammen vier geschlossene Figuren:

$$EDB, CDA, ADE, BDC.$$

Bezeichnen wir die ausgeglichenen, zunächst noch unbekanntenen Werte für die eingewogenen Höhenunterschiede der Strecken mit  $X$ , wobei jeder dieser Unbekannten die in der Aufgabe gewählte Streckennummer als Index zukommt, so erhalten wir hieraus vier Bedingungsgleichungen, nämlich:

$$F_1(X \dots) \equiv X_1 + X_2 - X_3 = 0,$$

$$F_2(X \dots) \equiv X_4 - X_8 + X_7 = 0,$$

$$F_3(X \dots) \equiv X_1 - X_6 + X_7 = 0,$$

$$F_4(X \dots) \equiv +X_3 - X_4 + X_5 = 0.$$

Durch partielle Ableitung der Bedingungsgleichungen nach den Unbekannten erhalten wir für den Fall gleichwertiger Beobachtungen die Koeffizienten der Korrelatengleichungen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_1} = a_1 = +1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_2} = a_2 = +1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_3} = a_3 = -1;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_4} = a_4 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_5} = a_5 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_6} = a_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial X_7} = a_7 = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial X_8} = a_8 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_1} = b_1 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_2} = b_2 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_3} = b_3 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_4} = b_4 = +1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_5} = b_5 = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_6} = b_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial X_7} = b_7 = +1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial X_8} = b_8 = -1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_1} = c_1 = +1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_2} = c_2 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_3} = c_3 = 0;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_4} = c_4 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_5} = c_5 = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_6} = c_6 = -1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial X_7} = c_7 = +1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial X_8} = c_8 = 0;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_1} = d_1 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_2} = d_2 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_3} = d_3 = +1;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_4} = d_4 = -1; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_5} = d_5 = +1; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_6} = d_6 = 0;$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial X_7} = d_7 = 0; \quad \frac{\partial F_4}{\partial X_8} = d_8 = 0.$$

Die Einsetzung der beobachteten an Stelle der ausgeglichenen (zunächst unbekannt)en Werte von  $X \dots$  liefert die Widersprüche:

$$F_1 \equiv 10,194 + 10,659 - 20,871 = w_1 = -18 \text{ mm} = -1,8 \text{ cm},$$

$$F_2 \equiv 40,791 - 69,076 + 28,248 = w_2 = -37 \text{ mm} = -3,7 \text{ cm},$$

$$F_3 \equiv 10,194 - 38,460 + 28,248 = w_3 = -18 \text{ mm} = -1,8 \text{ cm},$$

$$F_4 \equiv 20,871 - 40,791 + 19,930 = w_4 = +10 \text{ mm} = +1,0 \text{ cm}.$$



Setzen wir als Gewichtseinheit eine einfach eingewogene Strecke von 1 km Länge fest und beachten, daß (gleiche Zielweiten vorausgesetzt) der mittlere Fehler einer geometrischen Einwägung wächst proportional zur Wurzel aus der Länge, ihr Gewicht also umgekehrt proportional zur Länge, so erhalten die beobachteten Höhenunterschiede die Gewichte:

$$p_1 = \frac{1}{3,5}; \quad p_2 = \frac{1}{2,6}; \quad p_3 = \frac{1}{1,7}; \quad p_4 = \frac{1}{1,0};$$

$$p_5 = \frac{1}{2,3}; \quad p_6 = \frac{2}{4,2}; \quad p_7 = \frac{1}{1,9}; \quad p_8 = \frac{2}{2,8}.$$

Damit gehen die Koeffizienten der Korrelatengleichungen über in:

$$a_1 = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}} = \sqrt{3,5}; \quad a_2 = \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} = \sqrt{2,6}; \quad a_3 = \frac{a_3}{\sqrt{p_3}} = -\sqrt{1,7};$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0.$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0; \quad b_4 = \frac{b_4}{\sqrt{p_4}} = 1; \quad b_5 = b_6 = 0;$$

$$b_7 = \frac{b_7}{\sqrt{p_7}} = \sqrt{\frac{1,9}{2}}; \quad b_8 = \frac{b_8}{\sqrt{p_8}} = -\sqrt{\frac{2,8}{2}}.$$

$$c_1 = \frac{c_1}{\sqrt{p_1}} = \sqrt{3,5}; \quad c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0;$$

$$c_6 = \frac{c_6}{\sqrt{p_6}} = -\sqrt{\frac{4,2}{2}}; \quad c_7 = \frac{c_7}{\sqrt{p_7}} = \sqrt{\frac{1,9}{2}}; \quad c_8 = 0.$$

$$d_1 = d_2 = 0; \quad d_3 = \frac{d_3}{\sqrt{p_3}} = \sqrt{1,7}; \quad d_4 = \frac{d_4}{\sqrt{p_4}} = -1;$$

$$d_5 = \frac{d_5}{\sqrt{p_5}} = \sqrt{2,3}; \quad d_6 = d_7 = d_8 = 0.$$

Wir haben damit die Koeffizienten der reduzierten Bedingungsgleichungen gefunden, welche uns diejenigen der Normalgleichungen zur Berechnung der vier Korrelaten vermitteln.

|    | a     | b     | c     | d     | aa  | ab | ac  | ad  | bb   | bc   | bd  | cc   | cd | dd  |
|----|-------|-------|-------|-------|-----|----|-----|-----|------|------|-----|------|----|-----|
|    |       |       |       |       | +   | +  | -   |     | +    | +    | -   | +    |    | +   |
| 1. | +1,87 | 0     | +1,87 | 0     | 3,5 | 0  | 3,5 | 0   | 0    | 0    | 0   | 3,5  | 0  | 0   |
| 2. | +1,61 | 0     | 0     | 0     | 2,6 | 0  | 0   | 0   | 0    | 0    | 0   | 0    | 0  | 0   |
| 3. | -1,30 | 0     | 0     | +1,30 | 1,7 | 0  | 0   | 1,7 | 0    | 0    | 0   | 0    | 0  | 1,7 |
| 4. | 0     | 1     | 0     | -1,00 | 0   | 0  | 0   | 0   | 1    | 0    | 1   | 0    | 0  | 1,0 |
| 5. | 0     | 0     | 0     | +1,52 | 0   | 0  | 0   | 0   | 0    | 0    | 0   | 0    | 0  | 2,3 |
| 6. | 0     | 0     | -1,45 | 0     | 0   | 0  | 0   | 0   | 0    | 0    | 0   | 2,1  | 0  | 0   |
| 7. | 0     | +0,97 | +0,97 | 0     | 0   | 0  | 0   | 0   | 0,95 | 0,95 | 0   | 0,95 | 0  | 0   |
| 8. | 0     | -1,18 | 0     | 0     | 0   | 0  | 0   | 0   | 1,4  | 0    | 0   | 0    | 0  | 0   |
|    |       |       |       |       | 7,8 | 0  | 3,5 | 1,7 | 3,35 | 0,95 | 1,0 | 6,55 | 0  | 5,0 |

Aus den Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 7,8 k_1 + 0 k_2 + 3,5 k_3 - 1,7 k_4 - 1,8 &= 0, \\ 0 k_1 + 3,35 k_2 + 0,95 k_3 - 1,0 k_4 - 3,7 &= 0, \\ 3,5 k_1 + 0,95 k_2 + 6,55 k_3 + 0 k_4 - 1,8 &= 0, \\ -1,7 k_1 - 1,0 k_2 + 0 k_3 + 5,0 k_4 + 1,0 &= 0 \end{aligned}$$

ergeben sich auf bekannte Weise die vier Korrelaten  $k_1 \dots k_4$  und aus ihnen mittels der Korrelatengleichungen die eingewichtigen Verbesserungen  $v$ , welche durch Division mit  $\sqrt{p}$  in die gesuchten, den Beobachtungswerten zuzuschlagenden Verbesserungen  $v$  übergehen.

| Zielpunkte                     | Ob 1- oder 2seitig beobachtet | Beobachtete Richtungen $\alpha$ |    |    | Endgültige Richtungswinkel $\varphi$ |    |    | Unterschiede $\varphi - \alpha$<br>Orientierungswinkel<br>$\omega = \frac{[\varphi - \alpha]}{n}$   |    |    | Orientierte Richtungen $\beta = \alpha + \omega$ |    |    | Verbesserung $v = \varphi - \beta$ |     | (v in Dekasekunden) |         |   |  |
|--------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|----|----|--------------------------------------|----|----|---|----|----|--|----|----|------------------------------------|-----|---------------------|---------|---|--|
|                                |                               | o                               | '  | '' | o                                    | '  | '' | o   | '  | '' | o  | '  | '' | +                                  | -   | $\sqrt{p}$          | $p v v$ |   |  |
| 1.                             | 2.                            | 3.                              |    |    | 4.                                   |    |    | 5.  |    |    | 6.   |    |    | 7.                                 |     | 8                   |         |   |  |
| <b>A. Festpunkte.</b>          |                               |                                 |    |    |                                      |    |    |   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
| <b>Standpunkt Sandäcker.</b>   |                               |                                 |    |    |                                      |    |    |   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
| Eychen . . . . .               | 1                             | 355                             | 00 | 62 | 52                                   | 14 | 01 | 97  | 13 | 39 | 52   | 15 | 15 |                                    | 114 |                     |         |   |  |
| Feuerbach . . .                | 1                             | 399                             | 97 | 65 | 97                                   | 13 | 01 | 97  | 15 | 36 | 97   | 12 | 18 | 83                                 |     |                     |         |   |  |
| Neupunkt 1 . .                 | 1                             | 4                               | 68 | 37 | 101                                  | 83 | 21 |   |    |    | 101  | 82 | 90 | 31                                 |     | 0,9                 | 7,80    |   |  |
| Killesberg . . .               | 1                             | 16                              | 78 | 41 | 113                                  | 93 | 25 | 97  | 14 | 84 | 113  | 92 | 94 | 31                                 |     |                     |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 45 | 05 |                                      | 03 | 48 |   |    | 13 | 59   |    | 03 | 17                                 | 114 | 114                 |         |   |  |
|                                |                               | 4 $\omega =$                    | 58 | 12 |                                      |    |    |   |    | 3  |  |    | +  | 31                                 | 145 | 114                 |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 03 | 17 |                                      |    |    | $\omega = 97$   | 14 | 53 |  |    | 03 | 48                                 | 31  |                     |         |   |  |
| <b>Standpunkt Eychen.</b>      |                               |                                 |    |    |                                      |    |    |   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
| Feuerbach . . .                | 1                             | 49                              | 14 | 48 | 222                                  | 12 | 56 | 172   | 98 | 08 | 222  | 12 | 58 |                                    | 2   |                     |         |   |  |
| Neupunkt 1 . .                 | 1                             | 399                             | 98 | 99 | 172                                  | 96 | 91 |   |    |    | 172  | 97 | 09 |                                    | 18  | 0,8                 | 2,08    |   |  |
| Killesberg . . .               | 2                             | 2                               | 37 | 63 | 175                                  | 35 | 75 | 172   | 98 | 12 | 175  | 35 | 73 | 2                                  |     |                     |         |   |  |
|                                |                               | 3 $\omega =$                    | 51 | 10 |                                      | 45 | 22 | $\omega = 172$  | 98 | 10 |  |    | 45 | 40                                 | 2   | 2                   |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 94 | 30 |                                      |    |    |   |    |    |  |    | -  | 18                                 | 2   | 20                  |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 45 | 40 |                                      |    |    |   |    |    |  |    | 45 | 22                                 |     | 18                  |         |   |  |
| <b>Standpunkt Killesberg.</b>  |                               |                                 |    |    |                                      |    |    |   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
| Feuerbach . . .                | 1                             | 0                               | 03 | 93 | 326                                  | 11 | 47 | 326   | 07 | 54 | 326  | 11 | 53 |                                    | 6   |                     |         |   |  |
| Eychen . . . . .               | 2                             | 49                              | 27 | 69 | 375                                  | 35 | 75 | 326   | 08 | 06 | 375  | 35 | 29 | 46                                 |     |                     |         |   |  |
| Neupunkt 1 . .                 | 2                             | 57                              | 66 | 26 | 383                                  | 73 | 70 |   |    |    | 383  | 73 | 86 |                                    | 16  | 0,9                 | 2,08    |   |  |
| Stammheim . .                  | 1                             | 67                              | 53 | 09 | 393                                  | 61 | 02 | 326   | 07 | 93 | 393  | 60 | 69 | 33                                 |     |                     |         |   |  |
| Kornwestheim .                 | 1                             | 89                              | 31 | 12 | 15                                   | 38 | 41 | 326   | 07 | 29 | 15   | 38 | 72 |                                    | 31  |                     |         |   |  |
| Cannstatt . . .                | 1                             | 172                             | 27 | 10 | 98                                   | 34 | 53 | 326   | 07 | 43 | 98   | 34 | 70 |                                    | 17  |                     |         |   |  |
| Berg . . . . .                 | 1                             | 191                             | 02 | 75 | 117                                  | 10 | 32 | 326   | 07 | 57 | 117  | 10 | 35 |                                    | 3   |                     |         |   |  |
| Falget . . . . .               | 1                             | 314                             | 31 | 56 | 240                                  | 39 | 08 | 326   | 07 | 52 | 240  | 39 | 16 |                                    | 8   |                     |         |   |  |
| Weil im Dorf .                 | 1                             | 392                             | 84 | 22 | 318                                  | 91 | 68 | 326   | 07 | 46 | 318  | 91 | 82 |                                    | 14  |                     |         |   |  |
|                                |                               | 9 $\omega =$                    | 27 | 72 |                                      | 95 | 96 |   |    | 4  | 80   |    | 96 | 12                                 | 79  | 79                  |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 68 | 40 |                                      |    |    |   |    | 8  |  |    | -  | 16                                 | 79  | 95                  |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 96 | 12 |                                      |    |    | $\omega = 326$  | 07 | 60 |  |    | 95 | 96                                 |     | 16                  |         |   |  |
| <b>B. Neupunkte.</b>           |                               |                                 |    |    |                                      |    |    |   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
| <b>Standpunkt: Neupunkt 1.</b> |                               |                                 |    |    |                                      |    |    |   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
| Killesberg . . .               | 2                             | 399                             | 99 | 64 | 183                                  | 73 | 70 | 183   | 74 | 06 | 183  | 73 | 52 | 18                                 |     | 1                   | 3,24    |   |  |
| Feuerbach . . .                | 1                             | 122                             | 19 | 08 | 305                                  | 92 | 76 | 183   | 73 | 68 | 305  | 92 | 96 |                                    | 20  | 1                   | 4,00    |   |  |
| Eychen . . . . .               | 2                             | 189                             | 23 | 41 | 372                                  | 96 | 91 | 183   | 73 | 50 | 372  | 97 | 29 |                                    | 38  | 1                   | 14,44   |   |  |
| Zuffenhausen .                 | 1                             | 232                             | 97 | 25 | 16                                   | 71 | 54 | 183   | 74 | 29 | 16   | 71 | 13 | 41                                 |     | 1                   | 16,81   |   |  |
|                                |                               | 4 $\omega =$                    | 39 | 38 |                                      | 34 | 91 |   |    | 15 | 53   |    | 34 | 90                                 | 59  | 58                  |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 95 | 52 |                                      |    |    |   |    | 4  |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
|                                |                               |                                 | 34 | 90 |                                      |    |    | $\omega = 183$  | 73 | 88 |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
|                                |                               |                                 |    |    |                                      |    |    | $183^\circ 73' 02'' = \omega_{\text{vortänfig}} \text{ (s. Form. 2)}$   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
|                                |                               |                                 |    |    |                                      |    |    | $\left. \begin{array}{l} z = +86'' \\ \text{soll (s. Abt. 4 von} \\ \text{Form. 2)} = +89'' \end{array} \right\} \text{Abrundungsfehler} = 3''$ |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         |   |  |
|                                |                               |                                 |    |    |                                      |    |    |   |    |    |  |    |    |                                    |     |                     |         | $[p v v] = 50,45$<br>(soll = 48,0<br>= $[p l l \cdot 2]$ )<br>Abrundungsfehler<br>= 2,4 |  |

Bemerkung: Die senkrechten Ziffern beziehen sich auf beobachtete oder gegebene, die schrägen auf neu gewonnene Größen.



**P. Neupunkt 1.**

Nherungskoord.:  $N_x = +31909,96$   $N_y = +8428,22$ ; Verbesserung.:  $dx = -0,23$   $dy = +0,12$ ; Endgult. Koord.:  $X = +31909,73 \pm 0,03$   $Y = +8428,34 \pm 0,01$

**Abt. 1. Bildung der Fehlergleichungen.**

| 1.  | 2.                         | 3.   |    |    | 4.  |    |    | 5.  |   |   | 6.                            |      |            | 7.   |  | 8.   | 9.   |                                     | 10.                       |                           | 11.   |       | 12.   |       |       |
|---|----------------------------|--|----|----|---|----|----|---|---|---|-------------------------------|------|------------|--|--|--|--|-------------------------------------|---------------------------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Laufende Nr.  | Bezeichnung der Festpunkte | Beobachtete: Richtungen vorwärts = $\beta$<br>Richtungen rückwärts = $\alpha$ |    |    | Aus Nährung berechnete Richtungswinkel $\nu$ |    |    | Anzahl d. benutzten festen Richtungen $n_f$ | Gewicht $p_\beta = \frac{n_f}{n_f + 1}$ | $l = \nu - \beta$<br>$l' = (\nu - \alpha)$<br>$-\omega$ | Koeffizienten der Unbekannten |      | $\sqrt{p}$ | $a\sqrt{p_\beta}$<br>$\mathcal{A} = (a - a_0)\sqrt{p_i}$ | $b\sqrt{p_\beta}$<br>$\mathcal{B} = (b - b_0)\sqrt{p_i}$ | $l\sqrt{p_\beta}$<br>$\mathcal{L} = l\sqrt{p_i}$ | $s\sqrt{p} = \frac{(a\sqrt{p} + b\sqrt{p})}{l\sqrt{p}}$<br>$\mathcal{S} = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B}}{\mathcal{L}}$ |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |
|   |                            | o  | '  | '' | o   | '  | '' |   |   |   | o                             | '    |            |  |  |  | ''   | $\omega = \frac{\nu - \alpha}{n_f}$ | $a_0 = \frac{[a_r]}{n_r}$ | $b_0 = \frac{[b_r]}{n_r}$ | $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ |
| <b>Richtungen vorwärts.</b>  |                            |  |    |    |   |    |    |   |   |   |                               |      |            |  |  |  |  |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |
| 1   | Sandäcker . . .           | 101  | 82 | 90 | 101   | 81 | 92 | 3   | $\frac{3}{4} = 0,8$                     | -   | 9,8                           | -    | 6,0        | -  | 0,2  | 0,9  | -  | 5,4                                 | -                         | 0,2                       | -     | 8,8   | -     | 14,4  |       |
| 2   | Eychen . . . .             | 172  | 97 | 09 | 172   | 97 | 06 | 2   | $\frac{2}{8} = 0,7$                     | -   | 0,3                           | -    | 3,3        | -  | 7,3  | 0,8  | -  | 2,6                                 | -                         | 5,8                       | -     | 0,2   | -     | 8,6   |       |
| 3   | Killesberg . . .           | 383  | 73 | 86 | 383   | 72 | 00 | 8   | $\frac{8}{9} = 0,9$                     | -   | 18,6                          | +    | 7,1        | +  | 27,1   | 0,9  | +  | 6,4                                 | +                         | 24,4                      | -     | 16,7  | +     | 14,1  |       |
| <b>Richtungen rückwärts.</b>  |                            |  |    |    |   |    |    |   |   |   |                               |      |            |  |  |  |  |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |
| 1   | Killesberg . . .           | 399  | 99 | 64 | 183   | 72 | 00 | 183   | 72                                      | 36  | -                             | 6,6  | +          | 7,1  | +  | 27,1   | 1  | +                                   | 8,8                       | +                         | 22,9  | -     | 6,6   | +     | 25,1  |
| 2   | Feuerbach . . .            | 122  | 19 | 08 | 305   | 90 | 45 | 183   | 71                                      | 37  | -                             | 16,5 | -          | 11,1   | -  | 1,0  | 1  | -                                   | 9,4                       | -                         | 5,2   | -     | 16,5  | -     | 31,1  |
| 3   | Eychen . . . .             | 189  | 23 | 41 | 372   | 97 | 06 | 183   | 73                                      | 65  | +                             | 6,3  | -          | 3,3  | -  | 7,3  | 1  | -                                   | 1,6                       | -                         | 11,5  | +     | 6,3   | -     | 6,8   |
| 4   | Zuffenhausen .             | 232  | 97 | 25 | 16  | 71 | 93 | 183   | 74                                      | 68  | +                             | 16,6 | +          | 0,6  | -  | 2,1  | 1  | +                                   | 2,3                       | -                         | 6,3   | +     | 16,6  | +     | 12,6  |
| <b>Probe</b>  |                            |  |    |    |   |    |    |   |   |   |                               |      |            |  |  |  |  |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |
| $\left. \begin{array}{l} + 11,1 \\ - 11,0 \\ + 17,5 \\ - 19,0 \\ - 1,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} + 22,9 \\ - 23,0 \\ + 47,3 \\ - 29,0 \\ + 18,3 \end{array} \left. \begin{array}{l} + 22,9 \\ - 23,1 \\ + 22,9 \\ - 48,8 \\ - 25,9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} + 37,7 \\ - 37,9 \\ + 51,8 \\ - 60,9 \\ - 9,1 \end{array}$ |                            |  |    |    |   |    |    |   |   |   |                               |      |            |  |  |  |  |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |
| $\omega = 183 \quad 73 \quad 02$  |                            |  |    |    |   |    |    |   |   |   |                               |      |            |  |  |  |  |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |
| $a_0 = \frac{6,7}{4} = 1,7$   |                            |  |    |    |   |    |    |   |   |   |                               |      |            |  |  |  |  |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |
| $b_0 = \frac{16,7}{4} = 4,2$  |                            |  |    |    |   |    |    |   |   |   |                               |      |            |  |  |  |  |                                     |                           |                           |       |       |       |       |       |

**Abt. 2. Bildung der Koeff. für die Normalgleichungen.**

|   | $p_\beta a a$<br>$\mathcal{A}\mathcal{A}$<br>+ | $p_\beta b b$<br>$\mathcal{B}\mathcal{B}$<br>+ | $p_\beta l l$<br>$\mathcal{L}\mathcal{L}$<br>+ | $p s s$<br>+ | $p_\beta a b$<br>$\mathcal{A}\mathcal{B}$<br>$\pm$ | $p_\beta a l$<br>$\mathcal{A}\mathcal{L}$<br>$\pm$ | $p_\beta b l$<br>$\mathcal{B}\mathcal{L}$<br>$\pm$ |           |
|---|--|--|--|--------------|--|--|--|-----------|
| 1 | 29,16  | 0,04   | 77,44  | 207,36       | + 1,1  | + 47,5   | + 1,8  |           |
| 2 | 6,76   | 33,64  | 0,04   | 73,96        | + 15,1   | + 0,5  | + 1,2  |           |
| 3 | 40,96  | 595,36   | 278,89   | 198,81       | + 156,0  | - 106,8  | - 407,5  |           |
| 1 | 77,44  | 524,41   | 43,56  | 630,01       | + 201,5  | - 58,2   | - 151,1  |           |
| 2 | 88,36  | 27,04  | 272,25   | 967,21       | + 48,9   | + 155,2  | + 85,8   |           |
| 3 | 2,56   | 132,25   | 39,69  | 46,24        | + 18,4   | - 10,1   | - 72,5   |           |
| 4 | 5,29   | 39,69  | 275,56   | 158,76       | - 14,5   | + 38,2   | - 104,6  |           |
|   |  | 250,53   | 1352,43  | 987,43       | 2282,35  | + 426,5  | + 241,4  | + 88,8    |
|   |  |  |  |              |  | - 175,1  | - 735,7  |           |
|   |  | $[p a a]$                                      | $[p b b]$                                      | $[p l l]$    | $[p s s]$  | $[p a b]$  | $[p a l]$  | $[p b l]$ |

Normale Bezeichnung

**Abt. 3. Auflosung der Normalgleichungen.**

|  | I. Fur die Unbekannte $dy$                      |         |          |          | Probe<br>$[p s s]$          |
|--|--|---------|----------|----------|-----------------------------|
|  | $a]$   | $b]$    | $l]$     | $s]$     |                             |
| $[p a]$  | + 250,5  | + 426,5 | + 66,3   | + 743,3  | ist 2282,1<br>soll 2282,3   |
| $[p b]$  | + 1352,4   | - 646,9 | + 1132,0 |          |                             |
| $-\frac{[p a b]}{[p a a]} [p a]$                     | - 726,2  | - 112,9 | - 1265,5 |          |                             |
| $[p l]$  |  | + 987,4 | + 406,8  |          |                             |
| $-\frac{[p a l]}{[p a a]} [p a]$                     |  | - 17,6  | - 196,7  |          |                             |
| $dy = -\frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]}_I$    | $[p b]$  | + 626,2 | - 759,8  | - 133,5  | (statt -133,6)              |
| $= -\frac{759,8}{626,2}$                             | $[p l]$  | + 969,8 | + 210,1  | 210,1    | (statt +210,0)              |
| $= +1,2 \text{ dm}$                                  | $-\frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]} [p b]$ | - 921,9 | - 162,0  |          |                             |
|  | $[p l]$  | + 47,9  | + 48,1   |          |                             |
|  | II. Für die Unbekannte $dx$                     |         |          |          |                             |
|  | $a]$   | $b]$    | $l]$     | $s]$     |                             |
| $[p a]$  | + 1352,4   | + 426,5 | - 646,9  | + 1132,0 | ] ist 2282,1<br>soll 2282,3 |
| $[p b]$  | + 250,5  | + 66,3  | + 743,3  |          |                             |
| $-\frac{[p a b]}{[p a a]} [p a]$                     | - 134,5  | + 204,0 | - 357,0  |          |                             |
| $[p l]$  |  | + 987,4 | + 406,8  |          |                             |
| $-\frac{[p a l]}{[p a a]} [p a]$                     |  | - 309,4 | + 541,5  |          |                             |
| $dx = -\frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]}_{II}$ | $[p b]$  | + 116,0 | + 270,3  | + 386,3  | (statt +386,3)              |
| $= -\frac{270,3}{116,0}$                             | $[p l]$  | + 678,0 | + 948,3  | 948,3    | (statt +948,3)              |
| $= -2,3 \text{ dm}$                                  | $-\frac{[p b l \cdot 1]}{[p b b \cdot 1]} [p b]$ | - 629,9 | - 900,1  |          |                             |
|  | $[p l]$  | + 48,1  | + 48,2   |          |                             |

**Abt. 4. Berechnung der Verbesserungen und mittleren Fehler.**

|   |                            |  |                             |
|---|----------------------------|--|-----------------------------|
| $dx = -0,23 \text{ m}$                    | $M_x = \pm 0,03 \text{ m}$ | $[p v v] = [p l l \cdot 2]$                | + 48,0                      |
|   |                            | $n = n_v + n_r - 3$                        | + 4                         |
|   |                            | $m^2 = \frac{[p l l \cdot 2]}{n}$          | + 12,0                      |
|   |                            | $m$  | $\pm 3,5 \text{ Dekasekd.}$ |
| $dy = +0,12 \text{ m}$                    | $M_y = \pm 0,01 \text{ m}$ | $\sqrt{p_x} = \sqrt{[p b b \cdot 1]}_{II}$ | $\pm \sqrt{116} = \pm 10,8$ |
|   |                            | $\sqrt{p_y} = \sqrt{[p b b \cdot 1]}_I$    | $\pm \sqrt{626,2} = \pm 25$ |
| $z = a_0 dx + b_0 dy$                     |                            | $m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}}$               | $\pm 0,32 \text{ dm}$       |
| $= (-1,7)(-2,3) + 4,2 + 1,2$              |                            | $m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}}$               | $\pm 0,14 \text{ dm}$       |
| $= +3,9 + 5,0$                            |                            |  |                             |
| $= 8,9 \text{ Dekasekd.}$                 |                            |  |                             |
| $= +89''$                                 |                            |  |                             |
| soll (s. Abriß):                          |                            |  |                             |
| $183^\circ 73' 88'' - 183^\circ 73' 02''$ |                            |  |                             |
| $= +86''$                                 |                            |  |                             |
| (Abrundungsfehler 3'')                    |                            |  |                             |

# Sammlung Götschen Fein elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Forstwissenschaft** von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.
- Fremdwort, Das, im Deutschen** von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.
- Fremdwörterbuch, Deutsches, von** Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.
- Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentenererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Centralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- Geodäsie** von Dr. C. Reinherz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.
- Geographie, Astronomische, von** Dr. Stegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
- **Physikalische, von** Dr. Stegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
- **s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.**
- Geologie** v. Professor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.
- Geometrie, Analytische, der Ebene** v. Professor Dr. M. Simon in Strassburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.
- **— Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene** von O. Th. Bürklen, Professor am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.
- **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Strassburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.
- Geometrie, Darstellende, v. Dr. Rob. Haugner, Prof. an der Universität Jena. I.** Mit 110 Figuren. Nr. 142.
- **Ebene, von** G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.
- **Projektive, in synthet. Behandlung** von Dr. Karl Doeblemann, Prof. an der Universität München. Mit 91 Figuren. Nr. 72.
- Geschichte, Badische, von** Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
- **Bayerische, von** Dr. Hans Odel in Augsburg. Nr. 160.
- **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.
- **Deutsche, im Mittelalter (bis 1500)** von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.
- **— im Zeitalter der Reformation u. der Religionskriege** von Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 34.
- **— siehe auch: Quellenkunde.**
- **Französische, von** Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.
- **Griechische, von** Dr. Heinrich Swoboda, Professor an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.
- **des 19. Jahrhunderts v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Univers. Bonn. I.** Bdqn.: 1800—1852. Nr. 216.
- **— 2. Bdqn.: 1853 bis Ende d. Jahrh.** Nr. 217.
- **Israels bis auf die griech. Zeit** von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.
- **Lothringens, von** Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Strassburg. Nr. 6.
- **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Univers. München. III. 6 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Geschichte, Österreichische, I:** Von der Urzeit bis 1439 von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 104.
- II: Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.
- **Römische**, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.
- **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
- **Sächsische**, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolai-gymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
- **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.
- **Spanische**, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.
- **der Chemie** siehe: Chemie.
- **der Malerei** siehe: Malerei.
- **der Mathematik** s.: Mathematik.
- **der Musik** siehe: Musik.
- **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.
- **der Physik** siehe: Physik.
- **des deutschen Romans** s.: Roman.
- **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.
- **des deutschen Unterrichtswesens** siehe: Unterrichtswesen.
- Geschichtswissenschaft, Einleitung in die**, von Dr. Ernst Bernheim, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 270.
- Gesundheitslehre**. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.
- Gewerbewesen** von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.
- Gewichtswesen**. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Gleichstrommaschine**, Die, von C. Kitzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Figuren. Nr. 257.
- Gletscherkunde** von Dr. Fritz Mader in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
- Gottfried von Straßburg**. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
- Grammatik, Deutsche**, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
- **Griechische, I:** Formenlehre von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.
- II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Melzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.
- **Lateinische**. Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Professor Dr. W. Voisch in Magdeburg. Nr. 82.
- **Mittelhochdeutsche**. Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Goltzer, Prof. a. d. Universität Rostock. Nr. 1.
- **Russische**, von Dr. Erich Berner, Professor an der Universität Prag. Nr. 66.
- siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.
- Handelskorrespondenz, Deutsche**, von Prof. Th. de Beaug, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
- **Englische**, von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.



# Sammlung Götschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Handelskorrespondenz, Französische,** v. Professor Th. de Beauv, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.
- **Italienische,** von Professor Alberto de Beauv, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
- **Spanische,** von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.
- Handelspolitik, Auswärtige,** von Dr. Heinr. Sieveling, Prof. an der Universität Marburg. Nr. 245.
- Handelswesen, Das,** von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.
- — II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.
- Harmonielehre** von A. Halm. Mit vielen Notenbelegungen. Nr. 120.
- Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach, und Gottfried von Straßburg.** Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Professor am Königl. Friedrichs-Kollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.
- Hauptliteraturen, Die, d. Orients** v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Universität Wien. I. II. Nr. 162, 163.
- Heldensage, Die deutsche,** von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 32.
- siehe auch: Mythologie.
- Industrie, Anorganische Chemische,** v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.
- — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.
- — III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.
- **der Silikate, der künstl. Bausteine und des Mörtels.** I: Glas- und keramische Industrie von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Tafeln. Nr. 233.
- — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Tafeln. Nr. 234.
- Integralrechnung** von Dr. Friedr. Junker, Professor am Karlsghymn in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.
- Integralrechnung.** Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Professor am Karlsghymnasium in Stuttgart. Mit 50 Figuren. Nr. 147.
- Kartenkunde,** geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm, neu bearbeitet von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbildungen. Nr. 30.
- Kirchenlied.** Martin Luther, Thom. Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Professor G. Berlit, Oberlehrer am Nikolai-gymnasium zu Leipzig. Nr. 7.
- Klimalehre** von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln und 2 Figuren. Nr. 114.
- Kolonialgeschichte** von Dr. Dietrich Schäfer, Professor der Geschichte an der Universität Berlin. Nr. 158.
- Kompositionslehre.** Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149, 150.
- Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten,** von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.
- Kristallographie** von Dr. W. Brühns, Professor an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.
- Rudrun und Dietrichsagen.** Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.
- — siehe auch: **Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.**



# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Kultur, Die, der Renaissance.** Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 189.
- Kulturgeschichte, Deutsche,** von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.
- Künste, Die graphischen,** von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbildungen und Beilagen. Nr. 75.
- Kurzschrift** siehe: Stenographie.
- Landeskunde von Europa** von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpen-einteilung. Nr. 62.
- **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.
- Landeskunde von Baden** von Prof. Dr. O. Kientz in Karlsruhe. III. Profil, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.
- **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.
- **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.
- **von Elsass-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbed in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.
- **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Professor an der Universität Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbildung. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 235.
- **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 10 Textillustration. und 1 Karte. Nr. 244.
- **des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Ziemlich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbildungen u. 1 Karte. Nr. 258.
- Landeskunde von Skandinavien** (Schweden, Norwegen u. Dänemark) von Heinr. Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.
- **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.
- Landwirtschaftliche Betriebslehre** von Ernst Langenbed in Bochum. Nr. 227.
- Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.** Kulturhistorische Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen. Nr. 93.
- Lesings Emilia Galotti.** Mit Einleitung und Anmerkungen von Prof. Dr. W. Dotsch. Nr. 2.
- **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.
- Licht.** Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.
- Literatur, Althochdeutsche,** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Ch. Schauffler, Professor am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.
- Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts.** Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Janzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.
- **des 16. Jahrhunderts I: Martin Luther, Thom. Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

# Sammlung Götschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

**Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts II: Hans Sachs.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

— — **III: Von Brant bis Kollenhagen: Brant, Gutten, Fischart, sowie Cierreos und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

**Literaturen, Die, des Orients.** I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 162.

— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 163.

**Literaturgeschichte, Deutsche,** von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — **Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte** von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286. 287.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gerde, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Dohler, Professor a. d. Universität Heidelberg. Nr. 125.

— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 254.

**Literaturgeschichte, Portugiesische,** von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Slavische,** von Dr. Josef Karáset in Wien. I. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — 2. Teil: Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

**Logarithmen.** Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

**Logik.** Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Ch. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

**Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

**Magnetismus.** Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

**Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V.** von Dr. Rich. Muther, Professor an der Universität Breslau. Nr. 107—111.

**Maschinenelemente, Die.** Kurzgefasstes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Obergeringieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 8.

# Sammlung Götschen Je elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Maßanalyse** von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.
- Mathematik, Geschichte der**, von Dr. A. Sturm, Professor am Ober-gymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.
- Mechanik, Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik.** Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.
- Meereskunde, Physikalische**, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
- Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil)** v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.
- Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil)** von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.
- Meteorologie** von Dr. W. Trabert, Professor an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
- Mineralogie** von Dr. R. Brauns, Professor an der Universität Kiel. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.
- Minnesang und Spruchdichtung.** Walther v. d. Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Professor an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
- Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen.** Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.
- Münzwesen, Maß-, Münz- und Gewichtswesen** von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.
- Murner, Thomas.** Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaisgymn. zu Leipzig. Nr. 7.
- Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen**, von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121.
- Musikalische Formenlehre (Kompositionalelehre)** v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.
- Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.
- **des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.
- Musiklehre, Allgemeine**, v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.
- Mythologie, Deutsche**, von Dr. Friedrich Kauffmann, Professor an der Universität Kiel. Nr. 15.
- **Griechische und römische**, von Dr. Herm. Steuding, Professor am Kgl. Gymnasium in Würzen. Nr. 27.
- siehe auch: Helden Sage.
- Nautik.** Kurzer Abriss des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Theils der Schifffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.
- Nibelunge, Der, Nöt** in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Goltzer, Professor an der Universität Rostod. Nr. 1.
- — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

- Ackpflanzen** von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftlichen Versuchsanstalt Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.
- Pädagogik im Grundriß** von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität Jena. Nr. 12.
- **Geschichte der**, von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.
- Paläontologie** v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.
- Parallelperspektive**. Rechtwinklige und schiefwinklige Aronometrie von Professor J. Vonderlinn in Breslau. Mit 121 Figuren. Nr. 260.
- Perspektive** nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberlehrer an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.
- Petrographie** von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.
- Pflanze, Die**, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.
- Pflanzenbiologie** von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.
- Pflanzen-Morphologie, Anatomie und Phytologie** von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.
- Pflanzenreich, Das**. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reineke in Breslau und Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Figuren. Nr. 122.
- Pflanzenwelt, Die, der Gewässer** von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.
- Pharmakognosie**. Von Apotheker S. Schmitthener, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.
- Philosophie, Einführung in die**, von Dr. Max Wentzher, Prof. a. d. Universität Königsberg. Nr. 281.
- **Psychologie und Logik zur Einführ.** in die Philosophie von Dr. Th. Eisenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Photographie**. Von Prof. H. Kessler, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbild. Nr. 94.
- Physik, Theoretische**, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.
- — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Univ. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.
- — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.
- **Geschichte der**, von A. Kistner, Professor an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.
- — II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.
- Physikalische Aufgabensammlung** von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.
- Physikalische Formelsammlung** von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.
- Plastik, Die, des Abendlandes** von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.
- Poetik, Deutsche**, von Dr. K. Borinski, Dozent a. d. Univ. München. Nr. 40.
- Posamentiererei. Textil-Industrie II:** Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband

80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Psychologie und Logik** zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Eisenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.
- Psychophysik, Grundriß** der, von Dr. G. S. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.
- Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen.** Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbauerschule in Posen. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 290.
- Quellenkunde zur deutschen Geschichte** von Dr. Carl Jacob, Prof. a. d. Universität Tübingen. 2 Bände. Nr. 279. 280.
- Rechnen, kaufmännisches,** von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.
- Rechtslehre, Allgemeine,** von Dr. Th. Sternberg in Charlottenburg. I: Die Methode. Nr. 169.  
— II: Das System. Nr. 170.
- Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche,** von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.
- Redelehre, Deutsche,** v. Hans Probst, Gymnasialprofessor in Bamberg. Mit einer Tafel. Nr. 61.
- Religionsgeschichte, Alttestamentliche,** von D. Dr. Max Löhner, Prof. an der Universität Breslau. Nr. 292.  
— **Indische,** von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.  
— — siehe auch Buddha.
- Religionswissenschaft, Abriss der vergleichenden,** von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.
- Roman.** Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielfke. Nr. 229.
- Russisch-Deutsches Gesprächsbuch** von Dr. Erich Berner, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.
- Russisches Lesebuch** mit Glossar von Dr. Erich Berner, Professor an der Universität Prag. Nr. 67.  
— — siehe auch: Grammatik.
- Sachs, Hans.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.
- Säugetiere. Das Tierreich I: Säugtiere** von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
- Schattenkonstruktionen** v. Prof. J. Vonderlinn in Breslau. Mit 114 Fig. Nr. 236.
- Schmaroher u. Schmarobertum in der Tierwelt.** Erste Einführung in die tierische Schmaroherkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univ. Gießen. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.
- Schule, Die deutsche, im Auslande,** von Hans Amrhein in Halle a. S. Nr. 259.
- Schulpraxis.** Methodik der Volksschule von Dr. R. Senfert, Seminaroberlehrer in Annaberg. Nr. 50.
- Simplicius Simplicissimus** von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. F. Boberg, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.
- Sociologie** von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.
- Spitzenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation** von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.
- Sprachdenkmäler, Gotische,** mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Janzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.
- Sprachwissenschaft, Germanische,** v. Dr. Rich. Coewe in Berlin. Nr. 238.  
— **Indogermanische,** v. Dr. R. Meringer, Prof. a. d. Univ. Graz. Mit einer Tafel. Nr. 59.



# Sammlung Götschen Je in elegantem Lohnwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Sprachwissenschaft, Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.  
— II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.  
— **Semitische,** von Dr. C. Brockmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.
- Staatsrecht, Preussisches,** von Dr. Fritz Stier-Somlo, Professor an der Universität Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.
- Stammeskunde, Deutsche,** von Dr. Rudolf Much, a. o. Professor an d. Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.
- Statik, I. Teil:** Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, diplom. Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.  
— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.
- Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger** von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.  
— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesebüchen u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.
- Sterechemie** von Dr. E. Wedekind, Professor a. d. Universität Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.
- Stereometrie** von Dr. R. Glafer in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.
- Stilkunde** von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.
- Technologie, Allgemeine chemische,** von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.
- Teerfarbstoffe, Die,** mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.
- Telegraphie, Die elektrische,** von Dr. Eud. Reilstab. III. 19 Fig. Nr. 172.
- Testament.** Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staert in Jena. Nr. 272.  
— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.
- Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinensabration und Filzfabrikation** von Prof. Max Gürtler, Dir. der königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.  
— III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Thermodynamik (Technische Wärmelehre)** von K. Walther und M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Fig. Nr. 242.
- Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur** von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.  
— II: Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.
- Tiergeographie** von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.
- Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner,** Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.
- Tierreich, Das, I: Säugetiere** von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Nr. 282.
- Tierzuchtlehre, Allgemeine und spezielle,** von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
- Trigonometrie, Ebene und sphärische,** von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Figuren. Nr. 99.

# Sammlung Götschen

Je elegantem  
Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart** von Dr. Paul Stöhrer, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.
- **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.
- II. Teil: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.
- Urgeschichte der Menschheit** v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.
- Urheberrecht, Das deutsche**, an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.
- Versicherungsmathematik** von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.
- Versicherungswesen, Das**, von Dr. iur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.
- Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Univ. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.
- Volkslied, Das deutsche**, ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.
- Volkswirtschaftslehre** v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 133.
- Volkswirtschaftspolitik** von Präsident Dr. R. van der Borcht in Berlin. Nr. 177.
- Waltherlied, Das**, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.
- Walther von der Vogelweide** mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Guntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.
- Warenkunde**, von Dr. Karl Hassall, Professor an der Wiener Handelsakademie. I. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen Nr. 222.
- II. Teil: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.
- Wärme, Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme.** Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.
- Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik)** von K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.
- Wäscherei.** Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.
- Wasser, Das, und seine Verwendung** in Industrie und Gewerbe von Dr. Ernst Leher, Dipl.-Ingen. in Saalfeld. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.
- Webererei.** Textil-Industrie II: Webererei, Wirerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Wirerei.** Textil-Industrie II: Webererei, Wirerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.
- Wolfram von Eschenbad.** Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichs-Kolleg. 3. Königsberg i. Pr. Nr. 22.



# Sammlung Götschen

Je in elegantem  
Leinwandband 80 Pf.

G. J. Götschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

**Wörterbuch** nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches**, von Dr. Ferd. Dettler, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

**Zeichenschule** von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck u. 135 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

**Zeichnen, Geometrisches**, von H. Beder, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearb. v. Prof. J. Vonderlinn, diplom. und staatl. gepr. Ingenieur in Breslau. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Weitere Bände erscheinen in rascher Folge.

# Sammlung Schubert.

## Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die, auf wissenschaftlicher Grundlage beruhend, den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und zugleich durch eine leicht faßliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

**G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.**

### Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände:

- |   |   |
|---|---|
| 1 Elementare Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.   | 12 Elemente der darstellenden Geometrie von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.   |
| 2 Elementare Planimetrie von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.  | 13 Differentialgleichungen von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Auflage. M. 8.—.   |
| 3 Ebene und sphärische Trigonometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.—.   | 14 Praxis der Gleichungen von Prof. C. Runge in Hannover. M. 5.20.  |
| 4 Elementare Stereometrie von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.40.   | 19 Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungs-Rechnung von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.  |
| 5 Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.60. | 20 Versicherungsmathematik von Dr. W. Grossmann in Wien. M. 5.—.  |
| 6 Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.   | 25 Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.                                       |
| 7 Ebene Geometrie der Lage von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.   | 27 Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.             |
| 8 Analytische Geometrie der Ebene von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.   | 29 Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80. |
| 9 Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.  | 31 Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 8.50.   |
| 10 Differential- und Integralrechnung I. Teil: Differentialrechnung von Prof. Dr. W. Frz. Meyer in Königsberg. M. 9.—.  | 32 Theorie und Praxis der Reihen von Prof. Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.  |
| 11 Differential- und Integralrechnung II. Teil: Integralrechnung von Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg. M. 10.—.   | 34 Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.  |

# Sammlung Schubert.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 35 | Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.                            | 44 | Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen u. Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80. |
| 36 | Mehrdimensionale Geometrie II. Teil: Die Polytope von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.                                 | 45 | Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.                                       |
| 38 | Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung I. Teil v. Prof. E. Grimsehl in Hamburg. M. 6.—.                               | 46 | Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.   |
| 39 | Thermodynamik I. Teil von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.  | 48 | Thermodynamik II. Teil von Prof. Dr. W. Voigt, Göttingen. M. 10.—.   |
| 40 | Mathematische Optik von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.   | 49 | Nicht-Euklidische Geometrie v. Dr. H. Liebmann, Leipzig. M. 6.50.  |
| 41 | Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrodynamik von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.  | 50 | Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung von Dr. J. Horn, Professor an der Bergakademie zu Clausthal. M. 10.—.                                   |
| 42 | Theorie der Elektrizität u. d. Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—. | 51 | Liniengeometrie mit Anwendungen II. Teil von Professor Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 8.—.  |
| 43 | Theorie der ebenen algebraischen Kurven höh. Ordnung v. Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer. M. 10.—.                                    |    |  |

In Vorbereitung bzw. projektiert sind:

- |  |  |
|--|--|
| Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.  | Allgem. Formen- u. Invariantentheorie. Kinematik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.             |
| Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.   | Elektromagnet. Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.                                       |
| Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie v. Prof. Erich Geyger in Kassel | Gruppen- u. Substitutionentheorie von Prof. Dr. E. Netto in Gießen.                                    |
| Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. von Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.            | Theorie der Flächen dritter Ordnung. Mathematische Potentialtheorie v. Prof. Dr. A. Wangerin in Halle. |
| Dynamik von Professor Dr. Karl Heun in Karlsruhe.  | Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Bauwesen von Dr. ing. H. Reißner in Berlin.                      |
| Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.  | Elastizitäts- und Festigkeitslehre im Maschinenbau von Dr. Rudolf Wagner in Stettin.                   |
| Geodäsie von Professor Dr. A. Galle in Potsdam.  | Graphisches Rechnen von Prof. Aug. Adler in Prag.  |
| Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.  | Partielle Differentialgleichungen von Professor J. Horn in Clausthal.                                  |
| Räumliche projektive Geometrie.  | Grundlagen der theoretischen Chemie von Dr. Franz Wenzel in Wien.                                      |
| Geometrische Transformationen II. Teil von Professor Dr. Karl Doehle- mann in München.                   |  |
| Elliptische Funktionen von Dr. Karl Boehm in Heidelberg.   |  |

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

# Grundriß der Handelsgeographie

von

**Dr. Max Eckert**

Privatdozent der Erdkunde an der Universität Kiel

2 Bände

**I: Allgemeine Wirtschafts- und Verkehrsgeographie**

Preis: Broschiert M. 3.80—, geb. in Halbfranz M. 5.—

**II: Spezielle Wirtschafts- und Verkehrsgeographie**

Preis: Broschiert M. 8.—, geb. in Halbfranz M. 9.20

**D**ieser Grundriß ist ein Versuch, die Handelsgeographie als ein einheitliches wissenschaftliches System, das die gesamte Wirtschafts- und Verkehrsgeographie umfaßt, darzustellen. Ihr Wesen und ihre Aufgaben bestimmt der Verfasser dahin, daß sie von der Kenntnis der allgemeinen Lage und der orographischen und hydrographischen Voraussetzungen aus die gründliche Einsicht in die Erwerbs- und Verkehrsverhältnisse sowohl eines einzelnen Landschaftsgebietes bzw. eines einzelnen Wirtschaftsreiches, als auch der gesamten Erde, unter steter Berücksichtigung der wichtigsten klimatologischen, geologischen, volkswirtschaftlichen und politischen Faktoren, vermittelt.

# Leitfaden der Handelsgeographie

von

**Dr. Max Eckert**

Preis: In Leinwand geb. M. 3.—

**D**ieser Leitfaden ist für die Hand des Schülers bestimmt. Er ist im allgemeinen ein Auszug aus dem vorstehenden „Grundriß der Handelsgeographie“; wenn sich aber auch die stoffliche Verteilung im großen und ganzen nach diesem Werk richtet, so sind doch in einzelnen Punkten bedeutende Veränderungen vorgenommen worden. Außerdem wurde das statistische Beiwerk auf ein Minimum beschränkt.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

# Allgemeine und spezielle Wirtschaftsgeographie

von

**Dr. Ernst Friedrich**

Privatdozent an der Universität Leipzig

Mit 3 Karten

Preis: Broschiert M. 6.80, geb. in Halbfranz M. 8.20

Dieses Buch sucht in ein **hologäisches Verständnis** der Wirtschaft (Produktion und Verkehr) einzuführen, indem es zeigt, wie jede örtliche Wirtschaft als Teil in dem zusammenhängenden und durch tellurische Faktoren bestimmten Wirtschaftsleben der Erde dasteht. Dabei wird, wie es richtig ist, die Produktion der Länder in den Vordergrund gestellt, der Verkehr an zweiter Stelle behandelt.

# Zeichenkunst

Methodische Darstellung des gesamten Zeichenwesens  
unter Mitwirkung erster Kräfte herausgegeben von

**Karl Kimmich**

582 Seiten, mit 1091 Text-Illustrationen,  
sowie 57 Farb- und Lichtdrucktafeln

— 2 Bände —

Preis: gebunden M. 25.—

