ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 46 Nr kol. 582

Zdzisław Duda
Politechnika Śląska

PROCEDURA OPTYMALNEGO PODZIAŁU GILOTYNOWEGO MATERIAŁU

Streszczenie: W referacie rozpatrywane są zagadnienia optymalnego cięcia materiału na prostokątne arkusze o zadanych wymiarach dla podziału gilotynowego dwuwymiarowego oraz program realizujący to zagadnienie przy pomocy maszyny cyfrowej. Podaje się przykład sprawdzający poprawność zaproponowanych algorytmów.

Na wstępie zostaną podane podstawowe pojęcia używane w pracy.

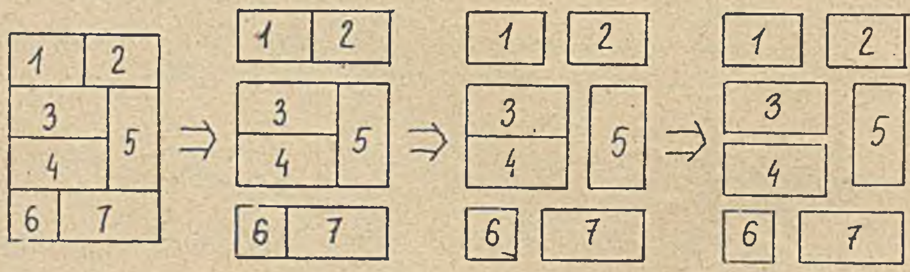
Podział gilotynowy pasma materiału - jest to każdy podział prostokąta na dwa prostokąty, z których każdy następny dzieli się na dwa kolejne lub nie ulega dalszemu podziałowi.

Podział podstawowy prostokąta - jest to gilotynowy podział prostokąta wzdłuż jednego boku przy ustalonej wartości drugiego boku.

Podział jednowymiarowy - jest otrzymywany za pomocą pojedynczego podziału podstawowego.

Podział dwuwymiarowy - jest to każdy podział gilotynowy prostokąta, który nie jest podziałem jednowymiarowym.

Głębokość podziału - jest to liczba całkowita γ, która określa ilość zmian kierunku cięcia (wzdłuż czy wszerz arkusza) potrzebnych do rozkrojenia arkusza materiału według danego programu podziału powiększoną o 1.



Rys.1 Podział dwuwymiarowy przy γ = 3.

W niniejszym referacie rozpatruje się prostokąty o wymiarach będących liczbami całkowitymi nieujemnymi oraz podziały gilotynowe całkowite tych prostokątów. Przez podziały gilotynowe całkowite rozumie się takie, że prostokąty powstałe przy ich podziale mają wymiary wyrażone liczbami całkowitymi.

Zakłada się, że dany jest prostokąt o wymiarach (v,u) przeznaczony do pocięcia, dane są ponadto wymiary handlowe prostokątów na jakie można dzielić prostokąt wyjściowy, które należą do zbioru $\Omega = \{a_i, b_i\}$, i = 1,2,...M, oraz odpowiadające tym wymiarom wartości handlowe odpowiednio P(i), i = 1,2,...M. Zakłada się również, że odpad ma wartość handlową $\emptyset$. Należy podać taki sposób cięcia, tzn. kolejność wykonywania cięć arkuszy, żeby

$$F(v,u) = \max \sum_{i=1}^{M} d(i) \cdot P(i), \qquad (1)$$

gdzie: $d(i)$ - ilość arkuszy o wymiarach (a_i, b_i)

Arkusz o wymiarach (v,u) po rozkroju na arkusze handlowe przedstawia wartość równą $\sum_{i=1}^{M} d(i) \cdot P(i)$. $F(v,u)$ reprezentuje maksimum tej wartości.

W pracy [1] autor zaproponował oryginalne rozwiązanie tego problemu. Zostanie ono przedstawione poniżej.

Sposób ten polega najpierw na wyznaczeniu dwuwymiarowej funkcji plecakowej $F(x,y)$, gdzie $(x,y) \in \langle o,u\rangle \times \langle o,v\rangle$ (iloczyn kartezjański).

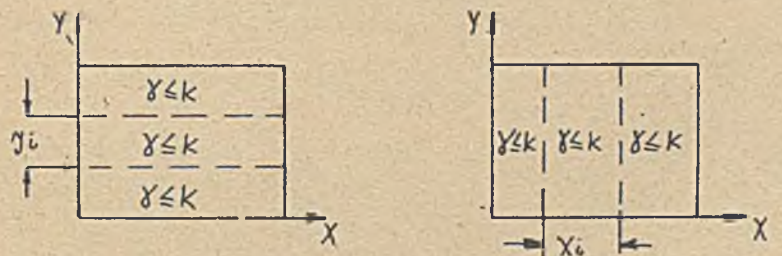
Tablicowanie $F(x,y)$ sprowadza się do wielokrotnego wyznaczenia wartości pewnych jednowymiarowych funkcji plecakowych. Jednowymiarowa funkcja plecakowa dana jest w postaci:

$$F(x) = \max \sum_{i=1}^{M} y(i) \cdot P(i) \qquad (2)$$

przy ograniczeniu $\sum_{i=1}^{M} y(i) \cdot T(i) \leqslant x$,

gdzie x - długość odcinka przeznaczona do podziału
$T(i)$ - długości handlowe, na jakie można dzielić odcinek
$P(i)$ - wartość handlowa odpowiadająca odcinkowi $T(i)$
$y(i)$ - ilość odcinków o długości $T(i)$ powstałych w wyniku podziału.

Przy tablicowaniu $F(x,y)$ korzysta się z faktu, że podział gilotynowy prostokąta o wymiarach (x,y) o głębokości $\gamma = k + 1$ otrzymuje się przez superpozycję podziału podstawowego z podziałami o głębokości $\leqslant k$. Ilustruje to rys.2.



Rys.2 Superpozycja podziału podstawowego z podziałami o głębokości $\leqslant k$

Jeśli istnieje podział prostokąta (x,y) o głębokości $(k+1)$, to można go zrealizować poprzez podział podstawowy prostokątów, które powstały w wyniku podziału o głębokości $\leqslant k$, tzn. (patrz rys.2), w przypadku 2a) przy ustalonym y_i dokonać podziału jednowymiarowego wzdłuż osi X, zaś w przypadku 2b) przy ustalonym x_i dokonać podziału jednowymiarowego wzdłuż osi Y. Oznaczając przez $a = \min \{a_i\}$, $i=1,2,\ldots M$, zaś przez $b=\min\{b_i\}$, $i=1,2,\ldots M$ można zauważyć, że dla $x<a$ i $y<b$ wartość $F(x,y)=\emptyset$. Wystarczy zatem rozpatrzyć prostokąty o wymiarach $x\geq a$ i $y\geq b$. Oznaczając przez $\underline{U}$ wektor $[a, a+1,\ldots u]$, zaś przez $\underline{V}$ wektor $[b,b+1,\ldots v] = [v_1,v_2,\ldots v_s]$ widać, że przy ustalonym y para wektorów $\underline{U}$ oraz $\underline{Q}_k(y) = [F_k(a,y), F_k(a+1),\ldots F_k(u,y)] = [r_1,r_2,\ldots r_r]$ oznacza, że prostokąt o wymiarach (u_i,y) ma wartość r_i. $F_k(a,y)$ oznacza maksymalną wartość prostokąta o wymiarach (a,y) po dokonaniu na nim podziału o głębokości $\leq k$. Zatem wartość $KF(x,\underline{U},\underline{Q}_k(y))$, (przez KF rozumie się jednowymiarową funkcję plecakową), jest maksymalną wartością prostokąta o wymiarach (x,y) przy pewnym podziale podstawowym typu X, tzn. gdy podziału dokonuje się wzdłuż osi X przy ustalonym y. Analogicznie para wektorów $\underline{V}$ oraz $\underline{R}_k(x) = [F_k(x,b),F_k(x,b+1),\ldots F_k(x,v)] = [s_1,s_2,\ldots s_r]$ oznacza, że prostokąt o wymiarach (x,v_i) ma wartość s_i. Zatem $KF(y,\underline{V},\underline{R}_k(x))$ jest maksymalną wartością prostokąta o wymiarach (x,y) przy podziale podstawowym typu Y, tzn. gdy podziału dokonuje się wzdłuż osi Y przy ustalonym X. Zatem $\max / KF(y,\underline{V},\underline{R}_k(x)), KF(x,\underline{U},\underline{Q}_k(y)) /$ oznacza maksymalną wartość prostokąta o wymiarach (x,y) przy podziale o głębokości $\leq k+1$.

Reasumując funkcję $F_k(x,y)$ można znaleźć rekurencyjnie w sposób następujący:

$$\underline{Q}_k(y) = [F_k(a,y), F_k(a+1,y),\ldots F_k(u,y)] \qquad (3)$$

$$\underline{R}_k(x) = [F_k(x,b), F_k(x,b+1),\ldots F_k(x,v)] \qquad (4)$$

$$G_{k+1}(x,y) = KF(x,\underline{U},\underline{Q}_k(y)) \qquad (5)$$

$$H_{k+1}(x,y) = KF(y,\underline{V},\underline{R}_k(x)) \qquad (6)$$

$$F_{k+1}(x,y) = \max [G_{k+1}(x,y), H_{k+1}(x,y)] \qquad (7)$$

Przez $F_0(x,y)$ rozumie się wartość prostokąta o wymiarach (x,y), który ma głębokość $\emptyset$, czyli nie ulega podziałowi. Jeśli wymiary jego nie są wymiarami handlowymi to ma on wartość $\emptyset$. To narzuca sposób wypełnienia tablicy F_0 dla $a\leq x\leq u$, $b\leq y\leq v$. W pracy (1) zostało podane twierdzenie pozwalające wyznaczyć $F(x,y)$ dla $(x,y)\in\langle a,u\rangle\times\langle b,v\rangle$, gdzie u,v są wymiarami arkusza wyjściowego przeznaczonego do podziału. Twierdzenie to brzmi:

Jeżeli $F_k(x,y) = F_{k+1}(x,y)$ to $F(x,y) = F_k(x,y)$

Jest to intuicyjnie wyczuwalne.
Mając wyznaczoną tablicę wartości dwuwymiarowych funkcji plecakowych można podać program podziału realizującego wartość dwuwymiarowej funkcji plecakowej. Po zrealizowaniu programu podziału arkusz zostanie podzielony na prostokąty, które są albo odpadami, albo ich wymiary należą do zbioru wymiarów handlowych. W kolejnych etapach określa podział jednowymiarowy wzdłuż jednego z boków przy ustalonej długości drugiego. Rozpatruje się przy tym dwa przypadki.

Przypadek 1 - typ X

Przy ustalonym y wyznacza się najpierw wartość $u\emptyset = \min\{x: F(u,y)= F(x,y)\}$. Jeśli $u\emptyset < u$ to wystąpi odpad przy rozpatrywanym podziale w postaci prostokąta $(u-u\emptyset,y)$. Zatem wystarczy rozpatrzyć podział prostokąta o wymiarach $(u\emptyset,y)$. Zadaniem jest znalezienie pierwiastków równania

$$F(u\emptyset,y) = \sum_{i=1}^{k} F(u_i,y) \qquad (8)$$

$$\text{spełniających warunki} \quad \sum_{i=1}^{k} u_i = u\phi \qquad u_i > 0 \tag{9}$$

$$\text{oraz} \qquad F(u_i,y) = F(\alpha,y) + F(\beta,y) \tag{10}$$

$$\alpha + \beta = u_i \tag{11}$$

przy niewiadomych α, β jest sprzeczne.

Po wyznaczeniu podziału typu X na otrzymanych prostokątach, których wymiary nie należą do zbioru wymiarów handlowych i nie są odpadami dokonywany jest podział typu Y.

Przypadek 2 - typ Y.

Przy ustalonym x wyznacza się najpierw $u\phi = \min(y_i: F(x,v) = F(x,y_i))$
Dalsze postępowanie jest analogiczne jak w przypadku 1.

Wyznaczanie programu podziału kończy się wtedy, gdy wszystkie otrzymane w kolejnym kroku prostokąty należą do zbioru wymiarów handlowych lub są odpadami.
Zaproponowany algorytm został sprawdzony na maszynie cyfrowej. Schemat sieciowy oraz program napisany w języku FORTRAN został zamieszczony w pracy [4]. Jest to oczywiście jeden z możliwych wariantów rozwiązania tego problemu. Wydaje się być istotnym sposób wyprowadzania wyników. W pracy [4] zaproponowano żeby program podziału realizujący podział optymalny był umieszczony w następującej tabeli:

KOD	WARTOŚĆ USTALONA	PODZIAŁY PODSTAWOWE	

Rys. 3. Tablica podziałów podstawowych

Kod : 1 - oznacza, że dokonuje się cięcia typu Y
0 - oznacza, że dokonuje się cięcia typu X

PODZIAŁY PODSTAWOWE - kolejne wartości oznaczają wymiary jednego z boków prostokątów na jakie został podzielony prostokąt wyjściowy przy ustalonej wartości drugiego boku, które znajduje się w rubryce WARTOŚĆ USTALONA.

Sposób powstania tej tablicy jest następujący.
Wyniki ostateczne oraz niektóre rezultaty obliczeń pośrednich niezbędne do dalszego postępowania zapamiętywane są w tablicy $\underline{P}$. W pierwszej kolumnie tej tablicy wpisywane są wartości kodu (0 lub 1), w drugiej kolumnie wpisywane są wartości ustalone, tzn. wartości boków rozpatrywanych prostokątów, wzdłuż których w aktualnym podziale podstawowym nie dokonuje się cięć. Zakłada się, że na 20 pozycji (20 kolumna) jest wpisywane 1, jeżeli badany prostokąt ma wymiary handlowe lub jest odpadem. Oznacza to, że prostokąt ten nie będzie już dzielony na mniejsze. Niech rozpatrywane zagadnienia rozpoczyna się od cięcia typu X, tzn. ustala się dł.V. Wówczas $P(1,1)=\phi$, $P(1,2)=V$. Wyznaczanie podziałów podstawowych jest przeprowadzane w jednym z podprogramów (PODZIAŁ). Rozwiązuje się zatem (8) ÷ (11). Podprogram ten określa, więc na jakie prostokąty został podzielony prostokąt wyjściowy przy aktualnym podziale podstawowym oraz czy przy tym podziale podstawowym występuje odpad, czy nie. Następnie uzupełnia się dany wiersz macierzy $\underline{P}$ pierwiastkami równania (8). Ostatni niezerowy element wiersza macierzy

(ale leżący co najwyżej w 19 kolumnie) jest odpadem, jeżeli istnieje. Potem sprawdza się, czy tak wyznaczone prostokąty mają wymiary handlowe lub też mają podlegać dalszemu podziałowi. Jest to realizowane w innym podprogramie (OMEGA). Jeśli mają wymiary handlowe to rozpatruje się kolejny prostokąt powstały w poprzednim podziale podstawowym. Po rozpatrzeniu wszystkich prostokątów, na których dokonano podziału danego typu zmienia się typ cięcia i rozpatruje tylko te, które w poprzednim typie cięcia uległy podziałowi podstawowemu. Postępowanie kończy się, gdy przy danym typie cięcia wszystkie rozpatrywane prostokąty są odpadami lub mają wymiary handlowe. Wydaje się, że ten sposób jest wystarczający dla odtworzenia graficznego optymalnego podziału.

Przykład:

Dane:

Wymiary handlowe arkuszy	Wartości arkusza
4,5	20
4,6	24
6,5	30
10,6	60
10,9	90
7,5	35

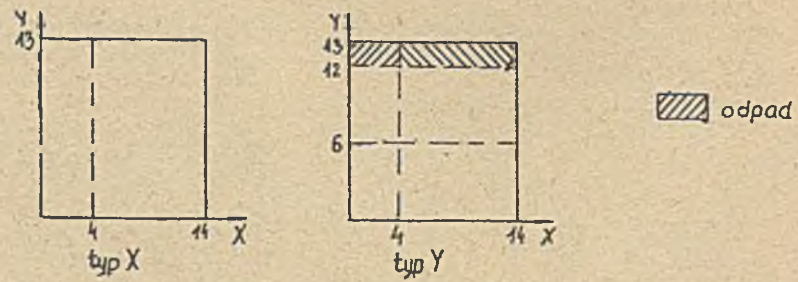
Wymiary arkusza przeznaczonego do cięcia (14,13).

Wyniki:

KOD	WARTOŚĆ USTALONA	PODZIAŁY PODSTAWOWE		
0	13	4	10	
1	4	6	6	1
1	10	6	6	1

Rys. 4. Tablica podziałów podstawowych

Z tablicy tej można odtworzyć graficznie optymalny program podziału prostokąta o wymiarach (14,13).



Rys.5. Optymalny podział arkusza z przykładu

Zagadnienie optymalnego rozkroju pasma materiału spotyka się często w praktyce. Może ono dotyczyć optymalnego cięcia blachy, tkaniny, szkła itp. Wybrany wskaźnik jakości pozwolił na wykorzystanie algorytmu przedstawionego w pracy. Przy takim wskaźniku opracowany algorytm może być w pełni wykorzystany w przypadku dużej ilości zamówień na arkusze o zadanych wymiarach handlowych.

LITERATURA

[1] Przybylak F.: Praca doktorska, Gliwice 1977.

[2] Gilmore P.C., Gomory R.E.: Multistage Cutting Stock. Problems of two and more Dimensions 1965.

[3] Gilmore P.C., Gomory R.E.: A linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem 1961.

[4] Duda Z.: Praca magisterska, Gliwice 1977.

ПРОЦЕДУРА ОПТИМАЛЬНОГО ГИЛОТИННОГО ДВУРАЗМЕРНОГО РАЗДЕЛА

Р е з ю м е

В докладе разрабатывается проблемма оптимального раздела материала на прямоугольные листы с заданными размерами для гилотинного двуразмерного раздела.

Даётся тоже пример проверяющий предложенный алгоритм.

PROCEDURE OF THE OPTIMUM TWO/DIMENSIONAL GILLOTINE CUTTING

S u m m a r y

In the paper the problem of optimum material cutting is discused. Only rectangular sheets with magnitude and two-dimensional gillotine cutting are considered. An example is given, checking the algorithm proposed.