ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 46 Nr kol. 582

Ryszard GESSING
Politechnika Śląska

UOGÓLNIONA ZASADA ROZDZIELNOŚCI W PRZYPADKU LOSOWEGO CZASU STEROWANIA

Streszczenie: Praca dotyczy problemu sterowania, stochastycznie optymalnego, dyskretnym układem liniowym w przypadku kwadratowego wskaźnika jakości, losowego czasu sterowania i zakłóceń należących do dosyć szerokiej klasy procesów stochastycznych.

1 Wprowadzenie

Zasada rozdzielności, zwana też zasadą stochastycznej równoważności jest omawiana obecnie nawet w monografiach dotyczących sterowania stochastycznie optymalnego [6] . Wydaje się, że podobnie jak w [4], celowe jest rozróżnienie tych dwóch sformułowań. Jeżeli więc dla danego problemu obowiązuje zasada rozdzielności to znaczy to, że problem estymacji może być rozwiązany oddzielnie i jego wynik może być wykorzystany do rozwiązania problemu sterowania. Nie znaczy to jednak, że wtedy również obowiązuje zasada stochastycznej równoważności, która mówi, że algorytm sterowania optymalnego powstaje z algorytmu odpowiadającego przypadkowi deterministycznemu przez zastąpienie zmiennych stanu ich ocenami. W przypadku klasycznym ta ostatnia zasada była udowodniona dla problemu liniowo-kwadratowego i zakłóceń w postaci białego szumu [6] . W [2] uogólniono ją na przypadek zakłóceń w postaci kolorowego szumu i dosyć ogólnej postaci wektora określającego bieżącą dostępną informację.

W niniejszej pracy rozpatruje się przypadek, gdy końcowa chwila sterowania jest zmienną losową, a zakłócenia są kolorowe i pokazuje się, że przy pewnych założeniach obowiązuje zasada, którą autor uwzględniając powyższe uwagi nazwał Uogólnioną Zasadą Rozdzielności.

2 Sformułowanie problemu

Będziemy rozważać układy dyskretne opisane równaniem

$$x_{n+1}=A_n x_n+B_n u_n+w_n, \tag{1}$$

gdzie x_n i u_n - wektory stanu i sterowania o wymiarach odpowiednio s i r, a x_0 jest zmienną losową; A_n, B_n - macierze o odpowiednim wymiarze; w_n - wektor zakłóceń będący procesem stochastycznym drugiego rzędu; $n = 0,1,\ldots,N$ - czas dyskretny; N-końcowa chwila sterowania będąca zmienną losową niezależną od innych wielkości, taką że $P(N>F) = 0$ (prawdopodobieństwo że $N>F$ jest równe zero), gdzie $F<\infty$. Zakładamy, że odpowiednie funkcje rozkładu prawdopodobieństwa są znane. Zakładamy również, że wielkości u_k dla $k>n$ nie mają wpływu na zmienną w_{n-1}, $n=1,2,\ldots,F$.

Wskaźnik jakości przyjmujemy w postaci:

$$I = \sum_{n=0}^{N} (x_n^T Q_n x_n + u_n^T H_n u_n) \tag{2}$$

gdzie $Q_n, H_n, n=0,1,\ldots,F$ - macierze symetryczne nieujemnie określone. Jak w [1] wprowadzamy pomocnicze zmienne losowe N_n, $n=0,1,\ldots,F$ określone przez relację

$$N_n = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N \geqslant n \\ 0 & \text{jeżeli } N < n \end{cases} \tag{3}$$

Wtedy wskaźnik jakości (2) można zapisać w postaci:

$$I = \sum_{n=0}^{F} N_n (x_n^T Q_n x_n + u_n^T H_n u_n) \tag{4}$$

Niechaj $\vec{y}_n$ oznacza wektor wielkości, których wartości znane są w chwili n i mogą być wykorzystane do obliczenia wartości u_n.
Wielkości składające na wektor $\vec{y}_n$ można podzielić na pewne grupy. W skład pierwszej grupy: $y_0, y_y, \ldots, y_{n-l}$, $l \geq 0$, wchodzą wielkości wynikające z pomiarów wyjść układu, zatem wielkości te zależą od wartości poprzednich sterowań. W skład drugiej grupy: $v_0, v_1, \ldots, v_{n+m}$, $m > 0$ (lub $m < 0$) wchodzą wielkości, których wartości nie zależą od sterowań i mogą być w związku z tym znane z pewnym wyprzedzeniem w czasie w stosunku do aktualnej chwili n (przypadek $m > 0$)[x]. W skład trzeciej grupy: $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, wchodzą poprzednie sterowania. I w końcu w skład czwartej grupy: $N_0, N_1, \ldots, N_{n+q}$, $q \geqslant 0$ (może być również $q < 0$) wchodzi bieżąca informacja o końcowej chwili sterowania N. Mamy zatem:

$$\vec{y}_n = \left[y_0^T, \ldots, y_{n-l}^T, v_0^T, \ldots, v_{n+m}^T, u_0^T, \ldots, u_{n-1}^T, N_0, \ldots, N_{n+q}\right]^T, \tag{5}$$

przy czym dla takich wartości n, dla których, np. $n-l < 0$ grupa $y_0, \ldots, y_{n-l}$ w ogóle w wektorze $\vec{y}_n$ nie występuje, podobnie jeżeli $n+m < 0$ lub $n+q < 0$ to odpowiednio grupy v_i i N_i nie występują w $\vec{y}_n$. Również dla n bliskich F wektor $\vec{y}_n$ może mieć zmodyfikowaną postać.
Niechaj $\vec{Y}_n$ i U_n oznaczają zbiory wartości wielkości odpowiednio $\vec{y}_n$ i u_n, mamy zatem $\vec{y}_n \in \vec{Y}_n$ i $u_n \in U_n$, $n = 0,1,\ldots,F$. Przez dopuszczalny algorytm sterowania będziemy rozumieć funkcje $u_n = h_n(\vec{y}_n)$, $n = 0,1,\ldots,F$, każda z których odwzorowuje $\vec{Y}_n \to U_n$ i dla których wartość oczekiwana wskaźnika jakości;

$$\bar{I}(h) = E \sum_{n=0}^{F} N_n \left[x_n^T Q_n x_n + h_n^T(\vec{y}_n) H_n h_n(\vec{y}_n)\right]^{**)} \tag{6}$$

przyjmuje określoną wartość.

Problem 1

Dla rozważanego układu (1) należy spośród dopuszczalnych algorytmów sterowania wyznaczyć algorytm optymalny $u_n = h_n^0(\vec{y}_n)$, $n = 0,1,\ldots F$, dla którego wskaźnik (6) przyjmuje minimalną wartość, co można zapisać

$$\bar{I}(h^0) = \min_h \bar{I}(h) \tag{7}$$

x) Wielkości v_n mogą na przykład wynikać z pomiarów zakłóceń w_n, jeżeli te ostatnie nie zależą od sterowań u_i, $i=0,1,\ldots,F$.

xx) $h = [h_0, h_1, \ldots, h_F]$

3. Metoda rozwiazania problemu

Podobnie jak w [2] wprowadzamy najpierw bardziej zwarty zapis przedstawiając równanie (1) i wskaźnik (4) w innej postaci. Oznaczmy

zatem $\underline{x}_n = \left[x_n^T, w_n^T, w_{n+1}^T, \ldots, w_{F-1}^T\right]^T$ – wektor $(F-n+1)s$ -wymiarowy;

$A_n^1 = \left[A_n^T, O_1\right]$ – macierz $(F-n+1)s \times s$ – wymiarowa, w której O_1 oznacza macierz zerową $s \times (F-n)s$ – wymiarową; $\underline{A}_n = \left[A_n^1, I\right]$ – macierz $(F-n)s \times (F-n+1)s$ – wymiarowa, w której I oznacza macierz jestnostkową diagonalną $(F-n)s \times (F-n)s$ – wymiarową;

$\underline{B}_n = \left[B_n^T, O_2\right]^T$ – macierz $(F-n)s \times r$ – wymiarowa, w której O_2 oznacza macierz zerową $r \times (F-n)s$ – wymiarową; $Q_n^* = \left[Q_n^T, O_3\right]^T$ – macierz $(F-n+1)s \times s$ – wymiarowa, w której O_3 oznacza macierz zerową $s \times (F-n)s$ -wymiarową; $\underline{Q}_n = \left[Q_n^*, O_4\right]$ – macierz $(F-n+1)s \times (F-n+1)s$ – wymiarowa, w której O_4 oznacza macierz zerową $(F-n+1)s \times (F-n)s$ – wymiarową.

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń można zależność (1) i (4) zapisać w postaci:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{A}_n \underline{x}_n + \underline{B}_n u_n \tag{8}$$

$$I = \sum_{n=0}^{F} N_0 \left(\underline{x}_n^T \underline{Q}_n \underline{x}_n + u_n^T H_n u_n \right) \tag{9}$$

Do rozwiązania problemu będziemy wykorzystywać zasadę minimalizacji i uśredniania (Min-E), która dla przypadku, gdy N jest zmienną losową została przedstawiona w pracy [1]. Zgodnie z tą zasadą algorytm optymalny wynika z wykonania ciągu operacji występujących w wyrażeniu:

$$\ell_0(\vec{y}_0) = \operatorname*{Min}_{u_0} E_0 \operatorname*{Min}_{u_1} E_1, \ldots, \operatorname*{Min}_{u_F} E_F \, I \tag{10}$$

z uwzględnieniem (8) i odpowiednich funkcji rozkładu; gdzie I jest określone przez (4); E_n oznacza operację warunkowego uśredniania podług wielkości $N_n, \underline{x}_n$, $\vec{y}_{n+1}$, przy zadanym $\vec{y}_n$; $\vec{y}_{n+1}$ – wektor wielkości występujących w $\vec{y}_{n+1}$, a nie występujących w $\vec{y}_n$. Mamy także:

$$\bar{I}(h^0) = \operatorname*{Min}_{h} \bar{I}(h) = E\,\ell_0(\vec{y}_0) \tag{11}$$

4. Przypadek prawie kompletnej informacji bieżącej

Tak będziemy nazywać przypadek, gdy $\vec{y}_n = \vec{y}_n^a = \left[\underline{x}_n^T, N_0, \ldots, N_{n+Q}\right]^T$ (12)

Rozwiążemy teraz Problem 1 dla tak określonego wektora $\vec{y}_n^a$.

Obliczeniowo ciąg operacji występujący w wyrażeniu analogicznym do(10) dla rozpatrywanego przypadku można zrealizować korzystając z następującego równania Bellmana:

$$\ell_n^a(\vec{y}_n^a) = \operatorname*{Min}_{u_n} E_{\cdot/\vec{y}} \left[N_n \left(\underline{x}_n^T \underline{Q}_n \underline{x}_n + u_n^T H_n u_n \right) + \ell_{n+1}^a(\vec{y}_{n+1}^a) \right] \tag{13}$$

$= F, F-1, \ldots, 0$, gdzie zamiast symbolu E_n wprowadzono symbol $E_{\cdot/\vec{y}}$, który oznacza warunkowe uśrednianie wyrażenia zawartego w nawiasie [ ], przy zadanym $\vec{y}_n$. Warunek końcowy ma postać:

$\ell_{F+1}^a(\vec{y}_{F+1}^a) = 0.$

Mamy również: $\bar{I}^a = E\, f_0^a(\vec{y}_0^{\,a})$, (14)

przy czym $\bar{I}^a$ oznacza minimalną wartość uśrednionego wskaźnika (6) osiąganą w przypadku, gdy wektor bieżącej informacji ma postać $\vec{y}_n^{\,a}$ i stosujemy optymalny dla tego przypadku algorytm

$$u_n = u_n^a = h_n^a(\vec{y}_n^{\,a}) \quad n = 0,1,\dots,F.$$

Do wyprowadzenia zależności określających funkcje $h_n^a(\vec{y}_n^{\,a})$ i $f_n^a(\vec{y}_n^{\,a})$ zastosujemy metodę indukcji zupełnej. Załóżmy zatem że:

$$f_{n+1}^a(\vec{y}_{n+1}^{\,a}) = \underline{x}_{n+1}^T\, \underline{S}_{n+1}^a\, \underline{x}_{n+1}\ , \tag{15}$$

gdzie $\underline{S}_{n+1}^a$ pewna znana macierz $(F-n)s \times (F-n)s$ – wymiarowa, której elementy nie zależą od $\underline{x}_{n+1}$ i od $u_0, u_1, \dots, u_n$. Podstawiając (15) do (13) otrzymujemy:

$$f_n^a(\vec{y}_n^{\,a}) = \operatorname*{Min}_{u_n} \mathop{E}_{\cdot|\vec{y}_n^{\,a}} \left[N_n(\underline{x}_n^T \underline{Q}_n \underline{x}_n + u_n^T H_n u_n + \underline{x}_{n+1}^T\, \underline{S}_{n+1}^a\, \underline{x}_{n+1}\right]\ , \tag{16}$$

przy czym przy wykonywaniu operacji uśredniania warunkowego sterowanie u_n jest traktowane jako parametr, który nie zmienia swojej wartości [1]. Uwzględniając (16) i (8) mamy:

$$f^a(\vec{y}_n^{\,a}) = \operatorname*{Min}_{u_n} \left[\hat{N}_n(\underline{x}_n^T\, \underline{Q}_n\, \underline{x}_n + u_n^T H_n u_n) + (\underline{A}_n x_n + \underline{B}_n u_n)^T\, \hat{\underline{S}}_{n+1}^a (A_n \cdot \underline{x}_n + \underline{B}_n u_n)\right] =$$

$$= \underline{x}_n^T \left[\hat{N}_n \underline{Q}_n + \underline{A}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{A}_n\right] \underline{x}_n + \operatorname*{Min}_{u_n} \left\{2\underline{x}_n^T\, \underline{A}_n^T\, \hat{\underline{S}}_{n+1}^a\, \underline{B}_n u_n + u_n^T\left[\hat{N}_n H_n + \underline{B}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{B}_n\right] u_n\right\} \tag{17}$$

gdzie $\hat{\underline{S}}_{n+1}^a = \mathop{E}_{\cdot|\vec{y}_n^{\,a}} \underline{S}_{n+1}^a$; $\hat{N}_n = \mathop{E}_{\cdot|\vec{y}_n^{\,a}} N_n$, przy czym wewnątrz nawiasów { } zgrupowano te wyrażenia, które zależą od u_n. Różniczkując podług u_n, przyrównując do zera i zakładając, że odpowiednia macierz odwrotna istnieje otrzymujemy (przy czym macierz $\hat{S}_{n+1}^a$ s x s wymiarowa zawiera elementy znajdujące się w s pierwszych wierszach i w s pierwszych kolumnach macierzy $\hat{\underline{S}}_{n+1}^a$):

$$u_n^a = -\left(\hat{N}_n H_n + B_n^T\, \hat{S}_{n+1}^a\, B_n\right)^{-1} \underline{B}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a\, \underline{A}_n \underline{x}_n \tag{18}$$

Podstawiając u_n^a określone przez (18) do (17) w miejsce u_n otrzymujemy:

$$f_n^a(\vec{y}_n^{\,a}) = \underline{x}_n^T\, \underline{S}_n^a\, \underline{x}_n\ , \tag{19}$$

gdzie macierz $\underline{S}_n^a$ spełnia równanie

$$\underline{S}_n^a = \hat{N}_n \underline{Q}_n + \underline{A}_n^T\, \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{A}_n - \underline{A}_n^T\, \hat{\underline{S}}_{n+1}^a\, \underline{B}_n (\hat{N}_n H_n + B_n^T\, \hat{S}_{n+1}^a\, B_n)^{-1}\, \underline{B}_n^T\, \hat{\underline{S}}_{n+1}^a\, \underline{A}_n \tag{20}$$

$$\hat{\underline{S}}_{n+1}^a = \mathop{E}_{\cdot|\vec{y}_n^{\,a}} \underline{S}_{n+1}^a\ ; \quad \hat{N}_n = \mathop{E}_{\cdot|\vec{y}_n^{\,a}} N_a \ ^{x)} \tag{21}$$

x) Oczywiście $\hat{N}_n = N_n$ gdy $q \geq 0$ (q–liczba występująca w (12)).

Z założenia o niezależności zmiennych losowych N_i od innych wielkości wynika, że operacja uśredniania występująca w (21) nie wprowadza zależności $\underline{S}^a_{n+1}$ od wielkości $\underline{x}_n$ i $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.
Zatem $\underline{S}^a_n$ nie zależy również od tych wielkości.

W celu zakończenia dowodu indukcyjnego zauważmy, że dla n=F mamy

$$f^a_F(\vec{y}^a_F) = \underline{x}^T_F \underline{S}^a_F \underline{x}_F \text{ gdzie } \underline{x}_F = x_F \quad \text{oraz}$$

$$\underline{S}^a_F = Q_F \hat{N}_F \tag{21a}$$

Ostatnia relacja określa warunek końcowy dla równań (20) i (21).
Dla przykładu rozpatrzmy przypadek, gdy w wektorze (12) q=0. Oznaczmy przez $p_n = P(N_n=1 \mid N_{n-1}=1)$ (prawdopodobieństwo, że $N_n=1$ pod warunkiem że $N_{n-1}=1$) . Nietrudno zauważyć, że w tym przypadku z zależności (21) otrzymujemy:

$$\hat{\underline{S}}^a_{n+1} = p_{n+1} \underline{S}^a_{n+1} \qquad \hat{N}_n = N_n \tag{22}$$

5. Przypadek niekompletnej informacji bieżącej, gdy wektor $\vec{y}_n$ jest określony przez (5)

Obliczeniowo ciąg operacji występujący w wyrażeniu (10) obowiązującym dla rozpatrywanego przypadku można wykonać korzystając z następującego równania Bellmana

$$f_n(\vec{y}_n) = \underset{u_n}{\text{Min}}\, \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E} \left[N_n(\underline{x}^T_n \underline{Q}_n \underline{x}_n + u^T_n H_n u_n) + f_{n+1}(\vec{y}_{n+1}) \right] \tag{23}$$

n =F,F-1,...,0, przy czym $f_{F+1}(\vec{y}_{F+1}) = 0$. Minimalną wartość uśrednionego wskaźnika jakości, osiąganą przy sterowaniu zgodnie z algorytmem optymalnym oznaczymy dla rozpatrywanego przypadku przez $\bar{I}^{ic}$. Zgodnie z (11) mamy:

$$\bar{I}^{ic} = \bar{I}(h^o) = E\, f_0(\vec{y}_0) \tag{24}$$

Korzystając z metody indukcji zupełnej wyprowadzimy teraz wzory na $h^o_n(\vec{y}_n)$ i $f_n(\vec{y}_n)$, n= F, F-1,...,0. Załóżmy zatem że:

$$f_{n+1}(\vec{y}_{n+1}) = \underset{\cdot|\vec{y}_{n+1}}{E} \left[\underline{x}^T_{n+1} \underline{S}^a_{n+1} \underline{x}_n \right] + F_{n+1}, \tag{25}$$

gdzie $\underline{S}^a_{n+1}$ macierz występująca we wzorze (15), a F_{n+1} - liczba rzeczywista, której wartość nie zależy od wielkości $u_0, u_1, \ldots, u_n$.

Podstawiając (25) do (23) i wykorzystując podstawowe własności operacji uśredniania warunkowego otrzymujemy:

$$f_n(\vec{y}_n) = \underset{u_n}{\text{Min}}\, \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E} \left[N_n(\underline{x}^T_n \underline{Q}_n \underline{x} + u^T_n H_n u_n) + \underline{x}^T_{n+1} \underline{S}^a_{n+1} \underline{x}_{n+1} + F_{n+1} \right], \tag{26}$$

przy czym przy wykonywaniu operacji uśredniania warunkowego sterowanie u_n jest traktowane jako parametr, który nie zmienia swojej wartości. Uwzględniając (26) i (8) mamy:

$$f_n(\vec{y}_n) = \underset{u_n}{\text{Min}}\, \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E} \Big[N_n(\underline{x}^T_n \underline{Q}_n \underline{x}_n + u^T_n H_n u_n) + (\underline{A}_n \underline{x}_n + \underline{B}_n u_n)^T \underline{S}^a_{n+1} (\underline{A}_n \underline{x}_n +$$

$$+ \underline{B}_n u_n) + F_{n+1} \Big] = \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E} \left[\underline{x}^T_n (N_n \underline{Q}_n + \underline{A}^T_n \underline{S}^a_{n+1} \underline{A}_n) \underline{x}_n + F_{n+1} \right] +$$

$$+ \min_{u_n} \left\{ 2\hat{\underline{x}}_n \underline{A}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{B}_n u_n + u_n^T (\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n) u_n \right\} , \qquad (27)$$

gdzie: $\hat{\underline{S}}_{n+1}^a = E_{\cdot|\vec{y}_n} \underline{S}_{n+1}^a$; $\hat{N}_n = E_{\cdot|\vec{y}_n} N_n$; $\hat{\underline{x}}_n = E_{\cdot|\vec{y}_n} \underline{x}_n$,

przy czym w nawiasach $\{\cdot\}$ zgrupowano te wyrażenia, które zależą od u_n. Wykorzystano również zależność że:

$E_{\cdot|\vec{y}_n} 2\underline{x}_n \underline{A}_n \underline{S}_{n+1}^a \underline{B}_n u_n = 2 \hat{\underline{x}}_n \underline{A}_n \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{B}_n u_n$, która wynika z niezależności zmiennych losowych $\underline{x}_n$ i N_{n+q+1}. Różniczkując podług u_n i przyrównując zera otrzymujemy, zakładając, że odpowiednia macierz odwrotna istnieje:

$$\hat{u}_n^a = -(\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n)^{-1} \underline{B}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{A}_n \hat{\underline{x}}_n \qquad (28)$$

Podstawiając $\hat{u}_n^a$ określone przez (28) do (27) w miejsce u_n otrzymujemy:

$$f_n(\vec{y}_n)= E_{\cdot|\vec{y}_n} \left[\underline{x}_n^T (\hat{N}_n \underline{Q}_n + \underline{A}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{A}_n) \underline{x}_n + 2 \underline{x}_n^T \underline{A}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{B}_n \hat{u}_n^a + \right.$$

$$\left. + \hat{u}_n^{a\,T} (\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n) \hat{u}_n^a + F_{n+1}\right] = E_{\cdot|\vec{y}_n} \left[\underline{x}_n^T (\hat{N}_n \underline{Q}_n + \underline{A}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{A}_n)\underline{x}_n - \right.$$

$$\left. -2 u_n^{a\,T}(\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n) \hat{u}_n^a + \hat{u}_n^{a\,T} (\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n) \hat{u}_n^a + F_{n+1}\right], \qquad (29)$$

gdzie u_n^a jest określone przez (18).

Uwzględniając to, że dla dowolnej macierzy symetrycznej V mamy:

$$\hat{u}_n^{a\,T} V \hat{u}_n^a - 2u_n^{a\,T} V \hat{u}_n^a = - u_n^{a\,T} V u_n^a + \tilde{u}_n^{a\,T} V \tilde{u}_n^a , \qquad (30)$$

gdzie $\tilde{u}_n^a = u_n^a - \hat{u}_n^a$ otrzymujemy:

$$f_n(\vec{y}_n)= E_{\cdot|\vec{y}_n} \left[\underline{x}_n^T(\hat{N}_n \underline{Q}_n + \underline{A}_n^T \hat{\underline{S}}_{n+1}^a \underline{A}_n)\underline{x}_n - u_n^{a\,T}(\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B) u_n^a + \right.$$

$$\left. + \tilde{u}_n^{a\,T}(\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n) \tilde{u}_n^a + F_{n+1} \right] \qquad (31)$$

Podstawiając do (31) w miejsce u_n^a prawą stronę zależności (18) otrzymujemy po przekształceniach:

$$f_n (\vec{y}_n) = E_{\cdot|\vec{y}_n} \left[\underline{x}_n^T \underline{S}_n^a \underline{x}_b\right] + F_n , \qquad (32)$$

gdzie $\underline{S}_n^a$ określone jest przez wzory (20),(21) i nie zależy od $\underline{x}_n$ i od $u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}$. Mamy także:

$$F_n = E_{\cdot|\vec{y}_n} \left[F_{n+1} + \tilde{u}_n^{a\,T}(\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n) \tilde{u}_n^a\right] \qquad (33)$$

Jeżeli założymy że $\underline{P}_n = E_{\cdot|\vec{y}_n} \tilde{\underline{x}}_n \tilde{\underline{x}}_n^T$, gdzie $\tilde{\underline{x}}_n = \underline{x}_n - \hat{\underline{x}}_n$, nie zależy od $u_o, u_1, \ldots, u_{n-1}$, to wyniknie stąd, że również F_n nie zależy od u_o, $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Dla zakończenia dowodu indukcyjnego zauważmy, że wzór (32) jest ważny dla n=F i mamy wtedy:

$$f_F(\vec{y}_F) = \underset{\cdot|\vec{y}_F}{E}\left[\underline{x}_F^T\, \underline{S}_F^a\, \underline{x}_F\right] + F_F, \text{ gdzie } \underline{S}_F^a = \hat{N}_F Q_F \text{ i } F_F = 0.$$

Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie, które uogólnia klasyczną zasadę rozdzielności.

Twierdzenie 1. Uogólniona Zasada Rozdzielności

Załóżmy, że oceny $\hat{\underline{x}}_n = \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E}\, \underline{x}_n$, mają taką własność, że macierze $\underline{P}_n = \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E}\, \tilde{\underline{x}}_n \tilde{\underline{x}}_n^T$ nie zależą od sterowań u_i, $i=0,1,\ldots,n-1$, $n=0,1,\ldots,F-1$. Załóżmy także, że zmienna losowa N nie zależy od innych zmiennych i że $P(N>F)=0$. Wtedy

1) Algorytm optymalny $u_n = \hat{u}_n^a = h_n^o(\vec{y}_n)$, $n=0,1,\ldots,F$, określony w Problemie 1 wynika z algorytmu (18) odpowiadającemu przypadkowi prawie kompletnej informacji, przez zastąpienie zmiennych ich ocenami i ma postać:

$$u_n = \hat{u}_n^a = -(\hat{N}_n H_n + B_n^T \hat{S}_{n+1}^a B_n)^{-1} \underline{B}_n^T\, \underline{\hat{S}}_{n+1}^a\, \underline{A}_n \hat{\underline{x}}_n, \tag{34}$$

gdzie $\hat{u}_n^a = \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E}\, u_n^a$, $\hat{\underline{x}}_n = \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E}\, \underline{x}_n$, $\hat{N}_n = \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E}\, N_n$ są ocenami odpowiednich wielkości, a macierze $\hat{\underline{S}}_{n+1}^a$ i S_{n+1}^a są określone równaniami (20), (21) i (21a).

1) Wartość oczekiwana wskaźnika jakości $\bar{I}^{ic}$ osiągana przy stosowaniu algorytmu (34) spełnia związek:

$$\bar{I}^{ic} = \bar{I}^a + \sum_{n=0}^{F-1} t_r\, U_n(\hat{N}_n H_n + B_n^T S_{n+1}^a B_n), \tag{35}$$

$$\text{gdzie } \bar{I}^a = E\, \underline{x}_0^T\, \underline{S}_0^a\, \underline{x}_0 \tag{36}$$

jest wartością oczekiwaną wskaźnika osiąganą przy stosowaniu algorytmu optymalnego (18) odpowiadającego przypadkowi prawie kompletnej informacji. Mamy także $U_n = t_r\, E\, \tilde{u}_n^a\, \tilde{u}_n^{aT}$, gdzie $\tilde{u}_n^a = u_n^a - \hat{u}_n^a$, a t_r jest śladem macierzy.

Dowód zależności (35) wynika bezpośrednio z relacji (32), (33) i (24).

6) Problem estymacji

Rozwiązanie problemu estymacji będzie zależeć od tego jakie wielkości wchodzą w skład wektora $\vec{y}_n$, przy czym informacja o czasie N nie ma wpływu na sposób estymacji. Dla przypadku, gdy $\vec{y}_n$ jest określone przez (5) rozwiązanie problemu estymacji zostało podane w [2]. Zakładano tam że w równaniu wyjście

$$y_n = C_n\, x_n + r_n \tag{37}$$

wektor r_n reprezentujący błędy pomiaru jest gaussowskim białym szumem niezależnym od innych wielkości, natomiast zakłócenia w_n są kolorowym szumem.

Omówimy tutaj tylko zmiany jakie trzeba było wprowadzić, aby rozważyć przypadek, gdy r_n jest kolorowym szumem. Jeżeli, więc układ jest opisany równaniem (1) i (37), a w_n i r_n są gaussowskimi kolorowymi szumami oraz $\vec{y}_n = \left[y_0^T,\ldots, y_n^T, u_0^T,\ldots, u_{n-1}^T\right]^T$, wtedy należy rozszerzyć wymiar wektora stanu, wprowadzając wektor

$$x_n^* = \left[x_n^T, w_n^T, \dots, w_{F-1}^T, r_n^T, \dots, r_{F-1}^T\right]^T$$ o wymiarze $(F-n+1)s+(F-n)p$,

gdzie p wymiar wektorów y_n i r_n. Następnie podobnie jak w [2], należy odpowiednio określić macierze

A_n^* o wymiarze $[(F-n)s+(F-n-1)p] \times [(F-n+1)s+(F-n)p]$, B_n^* o wymiarze $[(F-n)s+(F-n-1)p] \times r$, oraz C_n^* o wymiarze $p \times [(F-n+1)s+(F-n)p]$ tak, aby równanie układu (1) i (37) można było zapisać w postaci:

$$x_{n+1}^* = A_n^* x_n^* + B_n^* u_n \tag{38}$$

$$y_n = C_n^* x_n^* \tag{39}$$

Dla znalezienia oceny $\hat{x}_n^* = E_{\cdot|\bar{y}_n} x_n^*$ należy teraz korzystając z otrzymanych równań napisać równania filtru Kalmana. Wśród składowych wektora $\hat{x}_n^*$ $(F-n+1)s$ - pierwszych składowych tworzy ocenę $\hat{x}_n$, która spełnia wymagania Twierdzenia 1.

7. Uwagi końcowe

Wyprowadzona w niniejszej pracy Uogólniona Zasada Rozdzielności zawiera w sobie Uogólnioną Zasadę Stochastycznej Równoważności podaną w [2]. Nie trudno bowiem zauważyć, że z tej pierwszej w przypadku, gdy założymy, że chwila zakończenia sterowania N jest znana, wynika ta druga. Należy zwrócić uwagę na bardzo zwarty wynik w postaci wzorów (34) i (35), obowiązujący dla dowolnej informacji bieżącej określonej przez wektor $\bar{y}_n$ typu (5) i szerokiej klasy zakłóceń. Warto jeszcze zauważyć, że sterowanie optymalne $\hat{u}_n^a$ w przypadku niekompletnej informacji bieżącej stanowi ocenę będącą warunkową wartością oczekiwaną sterowania optymalnego u_n^a obowiązującego w przypadku nazwanym przez nas przypadkiem prawie kompletnej informacji. Ten ostatni przypadek stanowi w niniejszej pracy punkt odniesienia, podobnie jak w Uogólnionej Zasadzie Stochastycznej Równoważności punktem odniesienia jest przypadek kompletnej informacji.

Pewnym ograniczeniem rozważań jest założenie, że zmienna losowa N jest niezależna od innych wielkości. To założenie było potrzebne do wyprowadzenia Twierdzenia i dzięki niemu uzyskano względnie proste i ogólne wyniki. Przypadek, gdy zmienna losowa N zależy od innych wielkości występujących w problemie można by rozważyć wykorzystując Zasadę Min-E [1], jednak wtedy można się spodziewać że uzyskane wyniki znacznie się skomplikują.

LITERATURA

[1] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania oraz jej konsekwencje. Materiały VII KKA, Rzeszów 1977.

[2] Gessing R.: Uogólniona Zasada Stochastycznej Równoważności i jej zastosowania. Archiwum Automatyki i Telemechaniki T XXII z. 4 1977.

[3] Tse E. and Bar-Shalom Y.: Generalized Certainty Equivalece and Dual Effect in Stochastic Control IEEE Transactions on Automatic Control, AC-20 Dec. 1975.

[4] Leondes C.T.: Control and Dynamic Systems Vol. 12 Academic Press 1976.

[5] Rishel R.: Necessary and Sufficient Dynamic Programming Conditions for Continuous Time Stochastic Optimal Control, SIAM J. Control, Vol. 8 No 4, Nov. 1970.

[6] Meditch J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych WNT, Warszawa 1975.

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ДИСТРИБУТИВНОСТИ В СЛУЧАЙНОСТНОМ ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЯ

Р е з ю м е

Работа касается стохастически оптимального управления для дискретных линейных объектов при квадратичных критериях качества в случайностном времени управления и помех принадлежащих к некоторому общему классу стохастических процессов.

THE GENERALIZED SEPARATION PRINCIPLE IN THE CASE OF RANDOM CONTROL TIME

S u m m a r y

The paper is concerned with stochastic optimal control problem for discrete, linear system and quadratic performance index, in the case of random control time and disturbances belonging to some general class of stochastic processes.