ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 46 Nr kol. 582

Marek Roczniak
Politechnika Krakowska

ZASTOSOWANIE TEORII GRAFÓW W PROJEKTOWANIU OPTYMALNEGO ROZLOKOWANIA OBIEKTÓW

Streszczenie. Stosunkowo od niedawna podejmowane są próby wykorzystania teorii grafów do planowania optymalnego rozlokowania obiektów. Tym niemniej, zostało już opracowanych kilka tego typu metod komputerowych. W referacie, po wstępnym omówieniu problemu optymalnego rozlokowania obiektów, przedstawiono ogólną ideę sposobu wykorzystania teorii grafów, a następnie opisano dotychczas opracowane metody.

Wstęp

Przyjęty wariant rozmieszczenia komórek produkcyjnych niższego stopnia na powierzchni zajmowanej przez komórkę wyższego stopnia / np.stanowisk produkcyjnych w wydziale, czy wydziałów produkcyjnych w zakładzie/ wpływa na poziom kosztów produkcji w komórce wyższego stopnia, ze względu na zależność potrzebnej ilości środków transportowych,powierzchni zajętej przez drogi transportowe i ogólnych kosztów transportu od przyjętego wariantu rozlokowania.
Od wielu lat opracowywane są metody wyboru najlepszego wariantu rozlokowania; w początkowym okresie oddzielnie w różnych dziedzinach zastosowania, a następnie w badaniach operacyjnych jako metody do wielodyscyplinarnego zastosowania. Warto zauważyć, że nazwę "optymalizacja rozlokowania" używa się na oznaczenie trzech różnych zadań. A to:

I. Znaleźć taki wariant rozlokowania, przy którym uzyska się minimalne koszty instalowania rozlokowywanych obiektów. Oczywiście zadania takie mogą wystąpić jedynie wtedy, gdy koszt instalowania obiektu zależy od jego lokalizacji.

II. Znaleźć taki wariant umieszczenia jednego nowego obiektu /lub kilku ze sobą nie związanych/ wśród obiektów już zlokalizowanych,aby uzyskać minimalny koszt użytkowania powiększonego w ten sposób zespołu obiektów.

III. Znaleźć taki wariant rozlokowania obiektów względem siebie by zminimalizować koszt użytkowania zespołu tych obiektów.

Zadanie I i II zazwyczaj mogą być rozwiązywane metodami programowania liniowego, natomiast zadanie III jest wyraźnie odmienne i jak dalej będzie przedstawione, metody liniowe nie mogą być stosowane do jego rozwiązywania. Tematem referatu są zagadnienia związane z rozwiązywaniem tego ostatniego zadania, dlatego też zadania I i II nie będą dokładniej formułowane. Często dla praktycznych zastosowań pożądane by były metody rozwiązujące zadania łączące w sobie cechy zadania I i III, niestety metod takich brak. Przyczyną utrudniającą ich opracowanie są różne / i w różnych jednostkach wyrażone/ funkcje celu zadań I i zadań III.

Model matematyczny zadania

Zadaniem jest rozlokowanie N obiektów w M możliwych miejscach lokalizacji, tak by zminimalizować koszt użytkowania tego zespołu obiektów.
Ograniczenia:

I. Ilość miejsc lokalizacji jest nie mniejsza niż ilość obiektów do rozlokowania.

II. Wszystkie obiekty zostaną rozlokowane i żaden nie zajmie więcej niż jedno miejsce.
III. W żadnym miejscu lokalizacji nie może być umieszczonych więcej niż jeden obiekt.

Przyjęte zostaną następujące oznaczenia:
- Obiekty do rozlokowania będą ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi od 1 do N. Wskaźniki "i" oraz "j" używane będą dla oznaczenia numeru obiektu.
- Miejsca lokalizacji będą ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi od 1 do M. Wskaźniki "p" oraz "q" używane będą dla oznaczenia numeru miejsca lokalizacji.
- Symbolami X_{ip} oraz X_{jq} oznaczone będą dyskretne zmienne decyzyjne. X_{ip} przyjmie wartość 1,gdy obiekt nr "i" stanie w miejscu nr "p" oraz wartość 0,gdy obiekt nr "i" w miejscu nr "p" nie zostanie umieszczony. Podobna zasada obowiązuje również w przypadku zmiennej X_{jq}.
- Symbolami R_{ij} oznaczony zostanie koszt realizacji powiązania obiektów nr "i" oraz nr "j".

Funkcja celu:

$$\text{Zminimalizować } Z_z = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{M} R_{ij} X_{ip} X_{jq} \qquad /1/$$

Ograniczenia:

I. $M \geq N$

II. $$\bigwedge_{1 \leq i \leq N} \sum_{p=1}^{M} X_{ip} = 1$$

III. $$\bigwedge_{1 \leq p \leq M} \sum_{i=1}^{N} X_{ip} = 1$$

Dla dalszej części wywodu wystarczające jest przedstawione powyżej sformułowanie problemu, które mimo tego, że jest ogólniejsze od najczęściej spotykanych w literaturze przedmiotu, nadal pozostaje dość uproszczonym.

Wielkość R_{ij} we wzorze /1/ nie jest parametrem równania, a pewną funkcją dwóch zmiennych, wielkości samego powiązania oraz odległości obiektów /czyli pośrednio zmiennej X/. Przebieg, a nawet charakter tej funkcji nie jest znany, co więcej może być różny w różnych zadaniach. Powszechnie przyjmuje się, że R_{ij} jest liniowo związane z wielkością powiązania, a w przypadku zależności od odległości obiektów przyjmuje się jedno z poniższych założeń.

I. R_{ij} rośnie proporcjonalnie wraz ze wzrostem odległości między obiektami nr "i" oraz nr "j".

II. R_{ij} jest minimalne,gdy obiekt nr "i" sąsiaduje z obiektem nr "j", wzrasta skokowo z rozdzieleniem tych obiektów innym, a dalsze odsuwanie obiektów nr "i" oraz nr "j" od siebie ma stosunkowo niewielki wpływ na wzrost R_{ij}.

Oznaczając przez:
W_{ij} - powiązanie obiektów nr "i" oraz nr "j",
D_{ij} - odległość pomiędzy obiektami nr "i" oraz nr "j",
k_{ij} - przypadające na przyjętą jednostkę powiązania i jednostkę odległości koszt realizacji powiązania obiektów nr "i" oraz nr "j",
można korzystając z założenia I przekształcić wzór /1/ wykorzystując zależność /2/

$$R_{ij} = W_{ij} D_{ij} k_{ij} \qquad /2/$$

i otrzymać wzór /3/

$$\min\{Z_z\} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \sum_{p=1}^{M} \sum_{q=1}^{M} W_{ij} D_{ij} k_{ij} X_{ip} X_{jq} \qquad /3/$$

W_{ij} oraz k_{ij} są parametrami równania, natomiast D_{ij} jest funkcją zmiennej X.

Szereg metod projektowania optymalnego rozlokowania przyjmuje wzór /3/ jako kryterium optymalizacji. W tej liczbie znajdują się znane w Polsce metody trójkątów Schmigalli i CRAFT.

W praktyce wzór /3/ nie może być jednak stosowany w tej postaci zbyt często. Z reguły wartość k_{ij} nie jest znana w czasie projektowania rozlokowania i dlatego przyjmuje się, że k_{ij} każdej pary obiektów jest takie same i niezależne od odległości tych obiektów i w konsekwencji składnik ten pomija się we wzorze. Wtedy Z_z nie jest wyrażone w jednostkach kosztu, lecz ma charakter "tonokilometrów". Uniemożliwia to porównywanie tej funkcji celu z funkcją celu zadań typu I.

Dla przedstawienia funkcji celu w przypadku przyjęcia założenia II konieczne jest wprowadzenie dodatkowych oznaczeń.

S_p - zbiór miejsc lokalizacji sąsiednich miejscu nr "p".

s_p - element zbioru S_p.

r_p - moc zbioru S_p.

- elementy zbioru S_p zostaną ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi od 1 do r_p. Wskaźnik "k" użyty będzie do oznaczenia numeru elementu zbioru S_p.

Celem więc jest:

$$\max\{Z_z\} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \sum_{p=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} W_{ij} X_{ip} X_{js_{pk}} \qquad /4/$$

Taką funkcję celu stosują m.in. takie metody, jak: CORELAP, SLP i opracowana przez autora metoda ALOK 3.

Trudno jest ustalić, który ze wzorów /3/ i /4/ jest właściwszy dla optymalizacji rozlokowania obiektów. Jeden i drugi bazują na intuicyjnych założeniach. Z drugiej jednak strony, jak wykazały badania prowadzone przez autora, obie przedstawione funkcje celu działają bardzo współbieżnie i dlatego przyjęta w metodzie funkcja celu nie może wpływać na ocenę wartości metody.

Trzeba jeszcze zauważyć, że wzory /3/ i /4/ nie mają postaci liniowej. W badaniach operacyjnych zadania formułowane w podobny sposób noszą nazwę kwadratowych zadań przydziału i nie są znane żadne sposoby rozwiązywania w sposób ścisły takich zadań. Możliwe do stosowania jest tylko, albo sprawdzenie wszystkich możliwych rozwiązań, albo posłużenie się zasadami heurystycznymi dla poszukiwania w miarę możliwości najlepszego rozwiązania bez przeszukiwania wszystkich możliwych rozwiązań. Praktycznie w zadaniach optymalnego rozlokowania tylko ta druga możliwość jest użyteczna, gdyż nawet przy stosunkowo niewielkich rozmiarach zadania duża liczba możliwych rozwiązań /nie mniej niż N!, gdy M=N/ uniemożliwia ich sprawdzenie nawet przy użyciu komputera.

Teoria grafów w projektowaniu rozlokowania

Całą procedurę rozwiązywania zadania optymalnego rozlokowania obiektów przy użyciu teorii grafów można podzielić na cztery etapy.

ETAP 1

Należy przedstawić dane początkowe, tzn. macierz powiązań obiektów jako graf, zwany dalej grafem powiązań. W tym celu należy jedno-jednoznacznie odwzorować obiekty jako wierzchołki grafu, powiązania między obiektami jako krawędzie grafu, a wartości powiązań jako obciążenia odpowiednich krawędzi. Przyjmując, że powiązania mogą mieć wartości dodatnie, zerowe /gdy obojętne jest jak blisko siebie umieszczone są obiekty/ i ujemne / gdy pożądane jest odsunięcie obiektów od siebie/, graf powiązań jest grafem pełnym, tzn. każda para jego wierzchołków jest połączona krawędzią.

ETAP 2

Należy uzyskać z grafu powiązań graf płaski /tzn. taki graf, który może być narysowany na płaszczyźnie bez skrzyżowań krawędzi/, który będzie miał dodatkowo taką cechę, iż suma obciążeń jego krawędzi nie będzie mniejsza od sumy obciążeń krawędzi jakiegokolwiek innego grafu płaskiego możliwego do uzyskania z grafu powiązań.
Wzór /5/ podaje ilość krawędzi w grafie pełnym.

$$E = \frac{N/N-1/}{2} \qquad /5/$$

Natomiast maksymalna ilość krawędzi w grafie płaskim przedstawia znany wzór Eulera /6/.

$$E_p = 3N-6 \qquad /6/$$

Tak więc możliwe jest uzyskanie co najmniej $\frac{E!}{E_p/E-E_p/!}$ różnych grafów płaskich z grafu pełnego. Biorąc jeszcze pod uwagę trudności z szybką identyfikacją czy dany graf jest grafem płaskim, oczywistym jest, że nawet przy małych rozmiarach zadania nie ma możliwości przeglądnięcia wszystkich możliwych grafów płaskich, by znaleźć maksymalny graf płaski.

W efekcie etap ten może być wykonany jedynie przez zastosowanie odpowiednio dobranej procedury heurystycznej. Od jej trafności zależeć będzie stopień zbliżenia otrzymanego rozwiązania do rozwiązania optymalnego. Jak się okaże dwa następne etapy nie mogą wpłynąć na wartość otrzymanego rozwiązania. Służyć one będą jedynie do przetłumaczenia grafu płaskiego w plan rozlokowania, który jest już zdeterminowany otrzymanym grafem płaskim.

ETAP 3

Należy uzyskać z grafu płaskiego jego graf dualny, który będzie dalej nazywany grafem rozlokowania. Dla wyjaśnienia pojęcia grafu dualnego, pewnego grafu płaskiego, należy wprowadzić pojęcie lica grafu. Graf płaski, jak już wspomniano, można narysować na płaszczyźnie bez przecinających się krawędzi. Na takim rysunku grafu jego krawędzie tworzą szereg pustych wewnątrz przestrzeni. Te przestrzenie właśnie nazywane będą licami grafu. Dodatkowo przestrzeń wokół grafu będzie nazwana również licem grafu /lub licem zewnętrznym/.

Konstruując graf dualny pewnego grafu płaskiego należy:

I. Narysować graf płaski bez przecinających się krawędzi.
II. W każdym licu grafu płaskiego umieścić wierzchołek jego grafu dualnego / dotyczy to również lica zewnętrznego/.
III. Połączyć krawędziami te wierzchołki grafu dualnego, które leżą w sąsiadujących ze sobą licach grafu płaskiego. /Dwa lica sąsiadują ze sobą, jeżeli rozdzielone są krawędzią grafu/.

Uzyskany w ten sposób graf jest grafem dualnym grafu płaskiego.

ETAP 4

Należy tak przekształcić graf dualny, aby jego lica przyjęły kształt wymagany przez odpowiednie rozlokowywane obiekty.

Trzeba zauważyć, że w każdym licu grafu dualnego znajduje się jeden wierzchołek grafu płaskiego, a w etapie 1 przyjęliśmy, że każdy z tych wierzchołków reprezentuje jeden obiekt do rozlokowania. Teraz odwrotnie, interpretujemy każde lico grafu dualnego jako obiekt.

Jak już wspomniano, różnice pomiędzy metodami projektowania optymalnego rozlokowania obiektów przy użyciu teorii grafów sprowadzają się do

sposobu wykonania etapu 2. Różnice te mogą dotyczyć:
I. Sposobu zapewnienia, że otrzymany graf będzie grafem płaskim.
II. Sposobu wyboru najlepszego grafu płaskiego spośród możliwych. /Chodzi tu o przyjęte zasady heurystyczne/.
III. Ilości i rodzaj warunków specjalnych zadania, które mogą być uwzględnione przy poszukiwaniu grafu płaskiego.

W literaturze przedmiotu opublikowane zostały dotychczas następujące metody projektowania optymalnego rozlokowania obiektów przy użyciu teorii grafów: RUGR - autor Krejčiřik, PLANAR 1, PLANAR 2, PLANAR 3, PLANAR 4- autorzy odpowiednio: Moore, Seppänen, Roczniak, Carrie oraz ALOK 3 - autor Roczniak. W dalszej części przedstawione będą te metody z uwzględnieniem wymienionych trzech punktów.

Charakterystyka metod

Levin w/1/był prawdopodobnie pierwszym autorem, który zauważył możliwość wykorzystania teorii grafów do planowania rozlokowania obiektów. Niedługo potem Krejčiřik/2/opracował i opublikował pierwszą wykorzystującą teorię grafów komputerową metodę projektowania rozlokowania obiektów RUGR. Następnie Seppänen i Moore/3/ opracowali prostszy sposób otrzymywania grafu płaskiego z grafu powiązań, a następnie razem z Carrie i Roczniakiem wykonali cztery, wykorzystujące ten sposób, komputerowe procedury PLANAR/4/ . Wreszcze autor tego artykułu opracował metodę ALOK 3 /5/.

RUGR

Krejčiřik zaadoptował w RUGR algorytm Demoucron'a /6/ służący do kreślenia grafu niepłaskiego tak, by zminimalizować ilość przecięć krawędzi. W zastosowaniu do optymalnego rozmieszczenia obiektów algorytm Demoucron'a można przedstawić następująco:
I. Zainicjować budowę grafu płaskiego przez wybór odpowiedniego /z maksymalną sumą obciążeń krawędzi/ cyklu Hamiltona.
II. Wykorzystując pozostałe krawędzie grafu powiązań zbudować pewien graf pomocniczy.
III. Zredukować ilość krawędzi grafu pomocniczego, tak by stał się on grafem dwukolorowym.
IV. Wykorzystać zredukowany graf pomocniczy do uzupełnienia cyklu Hamiltona, tak by otrzymać z niego wymagany graf płaski.

Pewne procedury heurystyczne muszą być zastosowane w pkt I i III . Niestety nie są znane ich dokładniejsze opisy.

Również nie wiele jest wiadome o ilości i rodzaju uwzględnianych przez RUGR warunków specjalnych rozwiązywanego zadania.

PLANAR

Wszystkie cztery metody PLANAR stosują następujący sposób otrzymywania grafu płaskiego.
I. Budowa odpowiedniego / z maksymalną sumą obciążeń krawędzi/ drzewa rozpierającego.
II. Uzupełnianie drzewa inicjującego graf płaski dalszymi krawędziami z grafu powiązań dla uzyskania odpowiedniego grafu płaskiego.

Wszytkie metody PLANAR stosują ten sam sposób otrzymywania drzewa rozpierającego grafu powiązań, który wykorzystuje algorytm Kruskal'a /7/ .

Krok 1

Wybierz z grafu powiązań krawędź z największym obciążeniem.

Krok 2

Wybraną krawędzią z kończącymi ją wierzchołkami zainicjuj budowę drzewa rozpierającego.

Krok 3

Znajdź w grafie powiązań krawędź z największym obciążeniem, która jednocześnie łączy takie dwa wierzchołki, z których jeden i tylko jeden jest już w drzewie rozpierającym.

Krok 4

Rozbuduj drzewo rozpierające przez dodanie do niego wybranej krawędzi.

Krok 5

Sprawdź czy wszystkie wierzchołki grafu powiązań są już w drzewie rozpierającym. Jeżeli nie, wykonaj ponownie kroki 3,4 i 5. Jeżeli tak, to budowa drzewa rozpierającego jest ukończona.

PLANAR 1, PLANAR 2 i PLANAR 3 rozbudowywują drzewo rozpierające do pożądanego grafu płaskiego dodając do niego po jednej krawędzi w każdym kolejnym kroku. Różnią się te metody jedynie wyborem lica aktualnie osiągniętego grafu płaskiego, do którego nowa krawędź będzie wstawiona.

PLANAR 1 dokonuje tego wyboru na zasadzie przypadku, PLANAR 2 w ten sposób, aby jedno z nowo powstałych lic miało jak najkrótszy kontur, a PLANAR 3 w ten sposób, aby nowo wprowadzana krawędź powodowała jak najmniejsze prawdopodobne straty w następnych krokach budowy grafu płaskiego. Straty te wynikają z faktu, że od sposobu wprowadzenia nowej krawędzi do grafu zależy to, które krawędzie z grafu powiązań nie będą już mogły wejść do grafu płaskiego, gdyż spowodowałyby przecięcie krawędzi.
PLANAR 3 wprowadza nową krawędź w ten sposób by suma obciążeń krawędzi, które nie będą mogły już być wykorzystane, była jak najmniejsza. Odmiennie graf płaski buduje metoda PLANAR 4. Nowe krawędzie mogą być przez nią umieszczone jedynie w zewnętrznym licu aktualnie osiągniętego grafu płaskiego. W każdym kroku znajduje się zbiór krawędzi, które po wprowadzeniu wydzielą z lica zewnętrznego lico o konturze z minimalną długością. /Nie mniejszą jednak od trzech krawędzi/. Z tego zbioru wybierana do dodania jest ta krawędź, która ma największe obciążenie.

Wszystkie cztery metody PLANAR nie uwzględniają żadnych warunków specjalnych zadania.

<u>ALOK 3</u>

ALOK 3 buduje graf płaski w następujący sposób:

I. Inicjuje budowę grafu płaskiego od wyboru takiego łańcucha zamkniętego / cyklu/ grafu powiązań, który składa się z trzech krawędzi i trzech wierzchołków i posiada największą sumę obciążeń krawędzi.
II. Aktualnie osiągnięty graf płaski uzupełniany jest krok za krokiem nowymi elementami aż powstanie pożądany graf płaski. W każdym kroku dodaje się do jednego z już istniejących lic jeden wierzchołek i nie mniej niż dwie krawędzie łączące go z wierzchołkami będącymi już w budowanym grafie. Procedura się kończy, gdy wszystkie wierzchołki grafu powiązań znajdą się w grafie płaskim.

Za każdym razem, gdy graf płaski ma być powiększony podejmowane są trzy decyzje:

- który wierzchołek należy aktualnie wprowadzić do budowanego grafu,
- w którym licu nowy wierzchołek należy umieścić,
- iloma i którymi krawędziami należy go połączyć z wierzchołkami będącymi już w budowanym grafie.

Do podjęcia tych decyzji służy wielostopniowa procedura heurystyczna uwzględniająca tak sumę obciążeń wprowadzanych krawędzi, jak i stratę na skutek eliminacji pewnych krawędzi grafu powiązań jako kandydatów do umieszczenia w grafie płaskim. Szczegółowy opis tej procedury dostępny jest w [5] .
ALOK 3 może uwzględnić następujące warunki specjalne zadania.

I. Rozlokowywane obiekty mogą zajmować powierzchnie różnych wielkości.
II. Mogą istnieć obiekty o narzuconej lokalizacji.
III. Obiekty mogą wykazywać różne wartości powiązań z otoczeniem. Metoda będzie je uwzględniać przy decydowaniu, które obiekty znajdą się na obrzeżach zajmowanej powierzchni.

LITERATURA

[1] Levin P.H.: The use of graphs to decide the optimum layout of buildings, Architects Journal, 1964, vol. 139.

[2] Krejcirik M.: Computer aided plant layout. Computer Aided Design, 1966, vol. 7 nr 2.

[3] Seppänen J., Moore J.M.: Facilities planning with graph theory, Management Science, 1970, vol.7, nr 4.

[4] Carrie A., Moore J.M., Roczniak M., Seppänen J.: Graph theory and symbolic processors for computer aided facilities design, Omega, przyjęty do druku.

[5] Roczniak M.: Projektowanie optymalnego rozmieszczenia obiektów przy użyciu teorii grafów, nieopublikowana praca doktorska. Politechnika Krakowska.

[6] Demoucron G., Malgrange Y.: Graphes planaires, reconnaissance et construction de representation planaires topologique, Recherche Operationelle, 1964, vol. 30, nr 8.

[7] Kruskal J.B.: On the shortest spanning sub-tree of a graph and the travelling salesman problem, Proceedings of the American Mathematical Society, 1956.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ В ПРОЕКТИРОВАНИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ

Р е з ю м е

В работе рассматривается проблемма оптимального размещения объектов, показана идея применения теории графов, а также описаны уже разработанные методы.

GRAPH THEORY APPLICATION IN THE OPTIMAL OBJECTS ALLOCATION DESIGN

S u m m a r y

The theory of graphs is applied in planning the optimal objects allocation from a relatively short time. In the paper, the general features of this approach are presented, and the existing methods described.