ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 46 Nr kol. 582

Leon Słomiński
Polska Akademia Nauk

ZADANIA KOMBINATORYCZNE Z MINIMAKSOWYM KRYTERIUM

Streszczenie. W pracy przedstawiono najnowsze tendencje i niektóre osiągnięcia w rozwijaniu praktycznej użyteczności modeli optymalizacji kombinatorycznej. Na przykładzie znanego i sprawdzonego w zastosowaniach zadania przydziału ilustruje się dwa kierunki uogólnień funkcji celu: kryterium $\sum_k$-minimaksowe i uogólnione kryterium algebraiczne.

WSTĘP. Praca zawiera nowe idee i pewne wyniki dotyczące rozwinięcia potencjalnych możliwości znanych modeli zadań kombinatorycznych. W kręgu naszego zainteresowania jest przede wszystkim zadanie przydziału, zadanie dobrze znane i o sprawdzonej przydatności w praktyce badań operacyjnych. Zadanie to odgrywa szczególną rolę w programowaniu matematycznym. Ze względu na swoją strukturę może być traktowane jako przypadek szczególny trzech bardzo ważnych klas zadań kombinatorycznych, mianowicie: zadania optymalnych przepływów w sieciach, zadania skojarzenia i zadania optymalnego przekroju matroidów. Okazuje się, że wyniki otrzymane dla zadania przydziału dają się bezpośrednio uogólnić na każdą z wymienionych klasę zadań.

Zadanie przydziału, jako nazwa pewnego modelu matematycznego traktowana jest umownie. Pochodzi ona od jednej z wielu interpretacji praktycznych modelu. Mając n prac i n pracowników oraz znając wydajność każdego pracownika przy wykonywaniu każdej pracy należy przydzielić prace pracownikom (każdy pracownik ma jedną przydzieloną pracę i każdą pracę wykonuje tylko jeden pracownik), tak aby suma wydajności była maksymalna. W praktyce zadanie, którego modelem matematycznym jest zadanie przydziału, może nie mieć najmniejszego związku z problemem przydziału prac pracownikom.

W pkcie 2.1 definiujemy pojęcie przydziału w języku algebraicznym i kombinatorycznym posługując się interpretacją macierzową i grafową. Punkt 2.2 dotyczy problemu zasadniczego - kryteriów optymalności przydziału. Przytaczamy znane kryterium liniowe i minimaksowe. Przedstawiamy dwa uogólnienia tych kryteriów: $\sum_k$-minimaksowe kryterium i kryterium algebraiczne. W pkcie 3 szkicujemy algorytmy rozwiązania zadania przydziału z uogólnionymi kryteriami. Do oceny algorytmów posługujemy się pojęciem złożoności obliczeń. Jest to oszacowanie górne dla liczby podstawowych operacji niezbędnych do rozwiązania zadania. Przyjmuje się, że czas obliczeń pozostaje w prostej proporcji do złożoności obliczeń. Jednym z ważnych wniosków dotyczących algorytmów sprowadza się do tego, że rozwiązywanie zadań uogólnionych nie wymaga zdecydowanie większych nakładów na obliczenia.

Wszystkie twierdzenia i inne wyniki podajemy bez dowodów. Szczegóły algorytmów oraz dowody twierdzeń, albo można znaleźć w cytowanych pracach, albo będą przedmiotem odrębnych publikacji.

2. ZADANIE PRZYDZIAŁU Zadanie przydziału, jak każde zadanie programowania matematycznego, składa się z ograniczeń i z funkcji celu. Najpierw zdefiniujemy ograniczenia zadania, a następnie zajmiemy się kryteriami optymalności.

2.1. Przydział. Niech będą dane dwa zbiory: $M=\{1,\dots,m\}$ i $N=\{1,\dots,n\}$, $|M|\leqslant|N|$. Przydziałem nazwiemy każde jednoznaczne odwzorowanie zbioru liczb M w zbiór liczb N. Wygodnie jest posłużyć się grafem albo macierzą do przedstawienia interesującego nas odwzorowania. Niech $M\cup N$ tworzy zbiór wierzchołków grafu dwudzielnego $G(M,N;E)$, gdzie $E\subseteq M\times N$ jest zbiorem łuków łączących pary wierzchołków. Łukom grafu mogą być przypisane wagi (liczby rzeczywiste). W tej reprezentacji przydział utożsamia się z pojęciem skojarzenia, tzn. ze zbiorem łuków tak dobranych, że każdy wierzchołek $i\in M$ jest połączony łukiem (i,j) z pewnym wierzchołkiem $j\in N$, natomiast żaden wierzchołek z N nie jest połączony z więcej niż z jednym wierzchołkiem z M.

W reprezentacji macierzowej zbiór M traktujemy jako zbiór numerów wierszy a zbiór N jest zbiorem numerów kolumn prostokątnej macierzy $C_{m\times n}$. Element c_{ij} macierzy możemy utożsamiać z wagą łuku (i,j) grafu dwudzielnego, a łuki nie istniejące mogą być wyróżnione w macierzy jako elementy "niedopuszczalne". W ujęciu macierzowym przydziałem nazwiemy każdy podzbiór elementów tak dobranych, żeby w każdym wierszu był dokładnie jeden element i w każdej kolumnie, co najwyżej, jeden element.

W kontekście definicji przydziału następujący warunek, zwany warunkiem Halla-Königa, musi być spełniony, aby graf częściowy $G(M,N;E)$ pełnego grafu dwudzielnego (każda para wierzchołków jest połączona łukiem), zawierał przydział: Dla każdego $X\subseteq M$ musi zachodzić $|X|\leqslant|N(x)|$, gdzie $N(x) = \{j\in N \mid \exists\,(i,j)\in E,\ i\in X\}$.

W interpretacji macierzowej warunek Halla-Königa zapisujemy następująco (dla ustalenia uwagi załóżmy, że macierz $C_{m\times n}$ składa się z jedynek i zer): Macierz $C_{m\times n}$ zawiera przydział wtedy i tylko wtedy, kiedy nie istnieją $H\subseteq M$ i $K\subseteq N$ spełniające nierówność $|H|<|K|$ i takie, że podmacierz $[c_{ij}]$ $i\in H$, $j\in K$, ma wszystkie jedynki podmacierzy $[c_{ij}]$, $i\in M$, $j\in K$.

Bez naruszenia ogólności rozważań można przyjąć $|M|=|N|$ i wtedy przydziałem jest każda permutacja $\pi=\{\pi(1),\dots,\pi(n)\}$ zbioru $N=\{1,\dots,n\}$. Jest to kombinatoryczna definicja przydziału. Jej algebraicznym odpowiednikiem jest następujący układ ograniczeń:

$$D:\ \sum_{i\in N} x_{ij}=1,\ j\in N;\quad \sum_{j\in N} x_{ij}=1,\ i\in N;\quad x_{ij}\geqslant 0,\ i,j\in N.$$

Zmienna rzeczywista x_{ij} powinna przyjąć wartość 1, jeżeli element i przydzielono do elementu j, powinna zaś mieć wartość 0 w przeciwnym przypadku. Warunek $x_{ij}\geqslant 0$ nie jest sprzeczny z powyższym żądaniem, gdyż praktycznie znajdowanie przydziałów optymalnych sprowadza się do przeglądu punktów ekstremalnych wielościanu wypukłego D. Z kolei Birkhoff (1944 r.) udowodnił, że każdy punkt ekstremalny wielościanu wypukłego D odpowiada pewnej macierzy permutacyjnej, a więc pewnej permutacji $\pi\in\Pi$ (Π zbiór wszystkich n! permutacji zbioru N). W dalszych rozważaniach zakładamy, że istnieje n! przydziałów i przydział optymalny (o kryteriach optymalności niżej) można znaleźć w tym zbiorze.

2.2. Kryteria optymalności. Zadanie przydziału polega na znalezieniu przydziału optymalnego w sensie ustalonego kryterium. Poniżej przedstawimy znane kryteria optymalności i ich nowe uogólnienia. Interesujące nas kryteria będą definiowane na wielkościach przypisanych oddzielnie każdej parze (i,j), tzn. każdemu łukowi w grafie lub każdemu elementowi w macierzy. Nie zajmujemy się więc kryteriami, które są definiowane, np. w układzie para-para: $(i_1,j_1)-(i_2,j_2)$, co może oznaczać, że zakłada się powiązania między elementami $i_1,i_2 \in M$ oraz $j_1,j_2 \in N$ (kwadratowe zadanie przydziału ≡ zadanie rozmieszczenia).

Niech elementy macierzy $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ reprezentują koszt przydzielenia elementu i do elementu j (w takim samym układzie macierzowym można zapisać wagi przyporządkowane łukom grafu przydziału). Klasyczne kryterium liniowe prowadzi do następującej postaci zadania przydziału:

$$\min_{[x_{ij}] \in D} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij}x_{ij} \quad - \text{ postać algebraiczna}$$

$$\min_{\pi \in \Pi} \sum_{i \in N} c_{i\pi(i)} \quad - \text{ postać kombinatoryczna}$$

Klasyczne kryterium minimaksowe (równoważne nazwy: kryterium maksiminowe, kryterium wąskiego gardła) daje zadaniu przydziału postać następującą:

$$\min_{[x_{ij}] \in D} \ \max_{(i,j)|x_{ij} > 0} c_{ij}x_{ij} \quad \text{lub równoważną} \quad \min_{\pi \in \Pi} \ \max_{i \in N} c_{i\pi(i)}.$$

Przedstawimy z kolei dwa różne uogólnienia powyższych kryteriów: $\sum_k$-minimaksowe kryterium i kryterium algebraiczne. W obu przypadkach obowiązuje założenie wstępne o sposobie definiowania kosztów. Okaże się, że kryterium liniowe i kryterium minimaksowe są dla obu uogólnień przypadkami szczególnymi.

Kryterium $\sum_k$-minimaksowe [6]. Niech A będzie zbiorem skończonym a f(x), $(x \in A)$, funkcją odwzorowującą zbiór A w zbiór nieujemnych liczb rzeczywistych R. Podzbiór $S \subseteq A$, który spełnia pewne warunki wynikające z założeń zadania, nazwiemy podzbiorem dopuszczalnym. Rodzinę wszystkich podzbiorów dopuszczalnych oznaczymy literą D.

Podzbiór $S_k \subseteq S$ składa się z k elementów (dowolnych) należących do S, $1 \leqslant k \leqslant |S|$. Na koniec niech $\sum_k$ oznacza sumę k elementów z S o kolejno największej wartości f(x). Zadanie kombinatoryczne z $\sum_k$-minimaksowym kryterium definiuje się tak: dla danych D, f(x) i k znaleźć podzbiór dopuszczalny $S^o \in D$, nazywany podzbiorem optymalnym, taki, że

$$\sum_{x \in S_k^o} f(x) = \min_{S \in D} \ \max_{S_k \subseteq S} \sum_{x \in S_k} f(x) .$$

Zauważmy, że ze względu na założenie $f(x) \geqslant 0$, $x \in A$, zachodzi równość:

$\max\limits_{S_k \subseteq S} \sum\limits_{x \in S_k} f(x) = \Sigma_k$. Uwzględniając ostatnią równość w ogólnej postaci zadania otrzymujemy $\sum\limits_{x \in S_k^o} f(x) = \min\limits_{S \in D} \Sigma_k$. Z tej ostatniej postaci będziemy z reguły korzystać, chociaż postać wcześniejsza uzasadnia przyjętą nazwę: zadanie z kryterium Σ_k-minimaksowym (równoważnie można sformułować zadanie Σ_k-maksiminowe).

Utożsamiając π z S, zbiór Π ze zbiorem D, x z parą (i,j) oraz f(x) z $c_{i\pi(i)}$ otrzymamy Σ_k-minimaksowe zadanie przydziału

$$\sum_{i \in N} c_{i\pi^o(i)} = \min_{\pi \in \Pi} \Sigma_k$$

Dla k = 1 otrzymamy znaną postać zadania przydziału z kryterium minimaksowym (Σ_1-minimaksowe zadanie)

$$z_o = \min_{\pi \in \Pi} \max_{i \in N} c_{i\pi(i)}$$

Dla k = n otrzymamy zadanie z kryterium liniowym, minimalizujące sumę kosztów całego przydziału (Σ_n-minimaksowe zadanie)

$$z_o = \min_{\pi \in \Pi} \sum_{i \in N} c_{i\pi(i)}$$

Można oczekiwać, że dla niektórych zadań praktycznych "wąskim gardłem" jest nie jeden element odpowiadający parze (i,j), lecz kilka elementów i wówczas Σ_k-minimaksowe kryterium ($k > 1$) może okazać się przydatne.

Kryterium algebraiczne [1]. Kryterium to przez zdefiniowanie go na pewnej strukturze algebraicznej obejmuje w sposób jednolity kilka znanych kryteriów (np. liniowe, minimaksowe, leksykograficznie wielokryterialne). Umożliwia to zwartą reprezentację całej klasy funckji celu. Podkreślmy, że kryterium algebraiczne nie obejmuje Σ_k-minimaksowego dla $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Niech $(H, *, \leqslant)$ będzie półgrupą przemienną uporządkowaną relacją $\leqslant$, z działaniem $*$ zdefiniowanym na elementach zbioru skończonego H. Założenie powyższe oznacza, że: $(H, *)$ jest zbiorem z działaniem dwuargumentowym $*$ spełniającym prawa łączności i przemienności; $(H, \leqslant)$ jest zbiorem całkowicie uporządkowanym relacją porządku $\leqslant$; $\forall a,b,c \in H$ zachodzi $a \leqslant b \Longrightarrow a * c \leqslant b * c$. Postuluje się również spełnienie w zbiorze H następującego założenia: $\forall a,b \in H$: $a \leqslant b \Longrightarrow \exists c \in H | a * c = b$ (postulat redukcji niezbędny do celów algorytmicznych).

Przyjmując, że c_{ij}, $i,j \in N$, są elementami zbioru H oraz $(H, *, \leqslant)$ tworzy półgrupę spełniającą ustalone wyżej założenia, to zadanie przydziału z kryterium algebraicznym przyjmuje postać:

$$\min_{\pi \in \Pi} \mathop{\ast}_{i \in N} c_{i\pi(i)},$$

gdzie

$$\mathop{\ast}_{i \in N} c_{i\pi(i)} = c_{1\pi(1)} * c_{2\pi(2)} * \cdots * c_{n\pi(n)}.$$

Rozpatrzmy niektóre przypadki szczególne, które otrzymamy przez podstawienie zamiast $(H, \ast, \preccurlyeq)$ różnych systemów:

a) $(R, +, \leqslant)$ - klasyczne zadanie przydziału na minimum sumy kosztów (R - zbiór liczb rzeczywistych z operacją dodawania i ze znaną relacją porządkową);

b) $(R, \max, \leqslant)$ - zadanie przydziału minimaksowe (Σ_1-minimaksowe); w tym przypadku w zbiorze R działaniem algebraicznym jest $\max\{a,b\}, a,b \in R$;

c) $(R^m, +, \prec)$ - leksykograficznie m-kryterialne zadanie przydziału; R^m jest m-wymiarową przestrzenią liczb rzeczywistych, + jest operacją dodawania liczb rzeczywistych, $\prec$ jest relacją porządku leksykograficznego obowiązującego dla przydziałów dopuszczalnych; każde kryterium ma postać sumy (n-elementowej) kosztów;

d) $(R^2, \ast, \prec)$ - leksykograficznie dwukryterialne zadanie przydziału, przy czym działanie algebraiczne $\ast$ zdefiniowane jest dla elementów (par liczb) z dwuwymiarowej przestrzeni R^2:

$$(a,b) \ast (c,d) = \begin{cases} (a,b), & \text{jeżeli } a > c, \\ (c,d), & \text{jeżeli } a < c, \\ (a,b+d), & \text{jeżeli } a = c. \end{cases}$$

Wypiszmy dla lepszej jasności explicite zadania dla systemów c oraz d.

Przypadek c

$$\operatorname*{leks\ min}_{\pi \in \Pi} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i \in N} c^1_{i\pi(i)} \\ \cdots\cdots \\ \sum\limits_{i \in N} c^m_{i\pi(i)} \end{pmatrix}$$

Przypadek d znany jest w klasie zadań transportowych (zadanie przydziału jest zadaniem transportowym szczególnego typu) jako kryterium czas-koszt. Przenosząc tę interpretację kryterium na zadanie przydziału zakładamy istnienie dwóch macierzy: $C^1_{n\times n}$ reprezentuje czas związany z parami (i,j) a $C^2_{n\times n}$ reprezentuje koszt związany z tymi parami. Zadanie przydziału z kryterium "czas-koszt" ma postać

$$\operatorname*{leks\ min}_{[x_{ij}] \in D} \begin{pmatrix} \max\limits_{x_{ij} > 0} c^1_{ij} \\ \sum\limits_{i \in N} \sum\limits_{j \in N} \delta(x_{ij}) c^2_{ij} \end{pmatrix}$$

gdzie
$$\delta(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij}, & \text{jeżeli } c^1_{ij} = \max\limits_{x_{ij} > 0} c^1_{ij} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Zadanie to można interpretować następująco: znaleźć w zbiorze przydziałów przydział minimalizujący największą składową czasu (pierwsze kryterium) a następnie w podzbiorze przydziałów optymalnych ze względu na to kryterium znaleźć przydział minimalizujący sumę kosztów na łukach, które są "wąskimi gardłami".

Przyjęcie porządku leksykograficznego oznacza, że pierwsze z kryteriów jest nadrzędne w stosunku do drugiego. Oczywista, wielokryterialność można definiować i w inny sposób, np. w sensie Pareto.

3. ALGORYTMY DLA ZADANIA PRZYDZIAŁU. Algorytmy będą przedstawione szkicowo, oddzielnie dla zadania Σ_k-minimaksowego i oddzielnie dla zadania algebraicznego. Algorytmy wykazują podobieństwa i w swojej najważniejszej części korzystają ze znanej metody węgierskiej. Efektywność algorytmów ogólnych (tzn. obowiązujących dla ogólnej postaci Σ_k-minimaksowej i ogólnej postaci algebraicznej) można zwiększyć dla przypadków szczególnych.

Algorytm dla zadania przydziału z Σ_k-minimaksowym kryterium. Przyjmijmy, że znany jest dowolny przydział π, dla którego założymy uporządkowanie elementów w ciąg niemalejący: $c_{\pi 1} \leqslant c_{\pi 2} \leqslant \ldots \leqslant c_{\pi n}$. Zdefiniujemy π_1-pomocnicze zadanie przydziału: znaleźć przydział Σ_n-minimalny dla macierzy kosztów $C^1_{n\times n}$ otrzymanej z macierzy $C_{n\times n}$ przez następujące przekształcenie: $c^1_{ij} = \begin{cases} c_{\pi 1}, & \text{jeżeli } c_{ij} \leqslant c_{\pi 1} \\ c_{ij}, & \text{jeżeli } c_{ij} > c_{\pi 1} \end{cases}$. Niech π^k oznacza przydział optymalny Σ_k-minimaksowego zadania przydziału i niech $\pi^k_1, \pi^k_1, \ldots, \pi^k_n$ będą elementami tego rozwiązania ustawionymi od największego do najmniejszego. Następujące twierdzenie [2] jest podstawowe dla algorytmu, który przedstawimy:

Twierdzenie. Jeżeli π^k jest przydziałem optymalnym Σ_k-minimaksowego zadania, to:

(1) π^k jest przydziałem optymalnym π^k_k-pomocniczego zadania przydziału (zadanie pomocnicze jest rozwiązywane na minimum sumy n elementów).

(2) Każdy przydział optymalny π^n dla π^k_k-pomocniczego zadania jest przydziałem optymalnym tego samego zadania w sensie minimum Σ_k.

(3) Dla każdego przydziału optymalnego π^n (o którym mówi się w (2)) zachodzi nierówność: $\pi^k_{k-1} \leqslant \pi^n_k \leqslant \pi^k_k$. Oznacza to m.in., że n-k+1 elementów przydziału π^n jest nie większych od π^k_k.

Twierdzenie pozwala zaproponować następujący bardzo prosty schemat rozwiązywania Σ_k-minimaksowego zadania.

Algorytm

1. Uporządkuj elementy macierzy $C_{n\times n}$ w ciąg niemalejący $c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_{n^2}$.
2. Rozwiąż c_r-pomocnicze zadanie przydziału dla $r = 1,2,\ldots,n^2$.
3. Dla przydziału optymalnego otrzymanego dla każdego zadania oblicz Σ_k. Przydział o najmniejszej wartości Σ_k po zakończeniu rozwiązywania zadań jest szukaną wartością optymalną i przydziałem optymalnym Σ_k-minimaksowego zadania.

Realizacja bezpośrednia przedstawionego algorytmu gwarantuje złożoność obliczeń $O(n^5)$. Lepszy rezultat można otrzymać wykorzystując trzecią część twierdzenia (przedstawiony algorytm wykorzystał bezpośrednio wynik z drugiej części twierdzenia) oraz wprowadzając pewne dodatkowe testy.

Przede wszystkim nakładem obliczeń $O(n^3)$ można ustalić minimalny indeks r_{min} taki, że w macierzy $C^{r_{min}}_{n\times n}$ znaleziony zostanie przydział częściowy o n-k+1 elementach, z których każdy jest nie większy od $c_{r\,min}$. Dalsze obliczenia wystarczy prowadzić dla $c_r \geqslant c_{r\,min}$ wykorzystując każdorazowo raz na początku ustalony przydział częściowy. Wobec tego dla każdej macierzy $C^r_{n\times n}$, $r \geqslant r_{min}+1$ należy wykonać $(k-1)|$iteracji. Do znalezienia przydziału częściowego można wykorzystać algorytm podany w [4] i [5]. Każdą iterację można wykonać z nakładem obliczeń $O(n^2)$ korzystając z metody podanej w [3]. W konsekwencji zadanie wyjściowe rozwiązujemy ze złożonością $O(mkn^2)$, gdzie $m \leqslant n^2$ jest liczbą elementów w macierzy $C_{n\times n}$ o różnych wartościach. Dodatkowymi testami przyspieszającymi w pewnych przypadkach zbieżność algorytmu nie będziemy się tu zajmować.

<u>Algorytm dla zadania przydziału z kryterium algebraicznym</u> [1]. Wprowadzimy kilka dodatkowych pojęć. Dana jest półgrupa $(H, *, \leqslant)$, która spełnia postulaty pktu 2.2. Dla każdego $a \in H$ zbiór <u>dom a</u> definiujemy następująco: $\mathrm{dom}\ a = \{b | a * b = a\}$. Zbiór ten poza elementem neutralnym $e \in H$ może zawierać również inne elementy. Na przykład dla działania "max" $\mathrm{dom}\ a = \{b | b \leqslant a\}$. Mówimy, że zbiór dom a składa się z elementów zdominowanych przez a. <u>Transformację</u> przekształcającą elementy c_{ij} macierzy $C_{n\times n}$ w elementy $\bar{c}_{ij}$ macierzy $\bar{C}_{n\times n}$ nazywamy <u>akceptowalną</u>, jeżeli istnieje element $\alpha \in H$ taki, że dla wszystkich permutacji $\pi \in \Pi$ spełniona jest równość $\mathop{\ast}\limits_{i\in N} c_{i\pi(i)} = \alpha * \mathop{\ast}\limits_{i\in N} \bar{c}_{i\pi(i)}$. Transformację oznaczamy literą T, a stałą α dla danej transformacji oznaczamy symbolem $\alpha(T)$ i nazywamy <u>indeksem transformacji</u>. Superpozycja dwóch transformacji akceptowalnych T_1 i T_2 jest transformacją akceptowalną z indeksem $\alpha(T_1) * \alpha(T_2)$. W algorytmie dla zadania przydziału istotną rolę odgrywa następująca transformacja akcpetowalna (akceptowalności można dowieść) $T(I,J)$. Dla $I \subseteq N$ oraz $J \subseteq N$ przy $|I| > |J|$ niech $\beta = \min\{c_{ij} | i \in I, j \notin J\}$ i dalej:

$$\beta * \bar{c}_{ij} = c_{ij} \qquad (i \in I,\ j \notin J)$$
$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} \qquad (i \in I,\ j \in J \text{ lub } i \notin I,\ j \notin J)$$
$$\bar{c}_{ij} = \beta * c_{ij} \qquad (i \notin I,\ j \in J).$$

Indeks transformacji $T(I,J)$ wynosi $\alpha(T(I,J)) = \beta^{|I|-|J|}$, przy czym $\beta^m = \underbrace{\beta * \beta * \cdots * \beta}_{m\text{-krotnie}}$

<u>Algorytm</u>

Etap początkowy

1. $z := \varepsilon$, gdzie element ε jest zdominowany przez wszystkie elementy c_{ij}.
2. Dla $i \in N$ wykonaj transformację $T(I,J)$ przy $I = \{i\}$, $J = \emptyset$, $z := z * \alpha(T)$.
3. Dla $j \in N$ wykonaj transformację $T(I,J)$ przy $I = N$, $J = N \setminus \{j\}$, $z := z * * \alpha(T)$.

Etap zasadniczy

4. Procedura znakowania wierszy i kolumn.

4.1. Znajdź maksymalny przydział częściowy. Elementy wchodzące do przydziału wyróżnij. Niech liczba elementów wyróżnionych równa się k.

4.2. Jeżeli $k = n$, elementy wyróżnione tworzą przydział optymalny. Wartość optymalna przydziału równa się z. Jeżeli $k \neq n$, wykonaj 4.3.

4.3. Niech I oznacza zbiór wierszy bez elementu wyróżnionego. $J := \emptyset$.

4.4. Jeżeli to jest możliwe, wybierz element c_{ij}, $i \in I$, $j \notin J$, zdominowany przez z. $J := J \cup \{j\}$, $\jmath := j$, idź do 4.5. Jeżeli nie ma takiego elementu, idź do 5.

4.5. Jeżeli istnieje element wyróżniony c_{ij}, $i \notin I$, to $I := I \cup \{i\}$, wróć do 4.4. Jeżeli takiego elementu nie ma, wykonaj 4.6.

4.6. Można znaleźć przydział częściowy o k+1 elementach. Znajdź go. Elementy wchodzące do przydziału wyróżnij. $k := k+1$. Wróć do 4.2.

5. Wykonaj T(I,J), $z := z * \alpha(T)$. Wróć do 4.4

Można wykazać, że algorytm ma złożoność $O(n^4)$. Wprowadzając zmodyfikowaną transformację akceptowalną można uzyskać $O(n^3)$, co pozostaje w pełnej zgodności ze znanymi wcześniej algorytmami o złożoności $O(n^3)$ dla zadań

LITERATURA

[1] Burkard R.E., Hahn W., Zimmermann U.: An Algebraic Approach to Assignment Problems. Mathem. Programm. v. 12, 1977 pp. 318-327.

[2] Dinic E.A.: O reszenii dwoch zadach o naznaczenii. W: Issledowanija po diskretnoj optimizacii. Izd. Nauka, Moskwa 1976.

[3] Dinic E.A., Kronrod M.A.: Odin ałgoritm reszenija zadaczi o naznaczenii. Dokł. AN SSSR t. 189, 1969 No. 1.

[4] Słomiński L.: Bottleneck Assignment Problem: An Efficient Algorithm. IXth Int. Symp. on Mathem. Programm., Budapest 1976 (w druku).

[5] Słomiński L.: An Efficient Approach to the Bottleneck Assignment Problem. Bull. Acad. Pol. Sc. Ser. tech. v. XXV, 1977 No. 4.

[6] Słomiński L.: Zadania rozbicia i przydziału z kryterium typu "wąskie gardło". Semin. nt. Modelowanie i projektowanie systemów zarządzania organizacjami gospodarczymi, Kudowa-Zdrój, 8-11 luty 1978 (ukaże się w pracach Seminarium).

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ С МИНИМАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ

Р е з ю м е

В работе представлены новейшие тенденции и некоторые достижения в развитии практической пригодности моделей комбинаторной оптимализации.

COMBINATORICAL PROBLEMS WITH MINIMAX CRITERION

S u m m a r y

In the paper the newest trends in practical application of combinatorical optimization models are presented. On the example of well known assignment problem two directions of generalization of criterion function are described.