ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: AUTOMATYKA z. 46 Nr kol. 582

Czesław Smutnicki, Józef Grabowski
Politechnika Wrocławska

OPTYMALIZACJA SEKWENCJI OPERACJI W DYSKRETNYCH SYSTEMACH PRODUKCYJNYCH Z KRYTERIUM MINIMALNO-KOSZTOWYM

Streszczenie. Rozpatrywany jest dyskretny system produkcyjny realizujący niepodzielne zadania w ustalonym porządku technologicznym. Określa się optymalny, ze względu na koszty, rozdział zadań pomiędzy realizatory. Przedstawiono przykład zastosowania, model matematyczny i szczególne przypadki zagadnień.

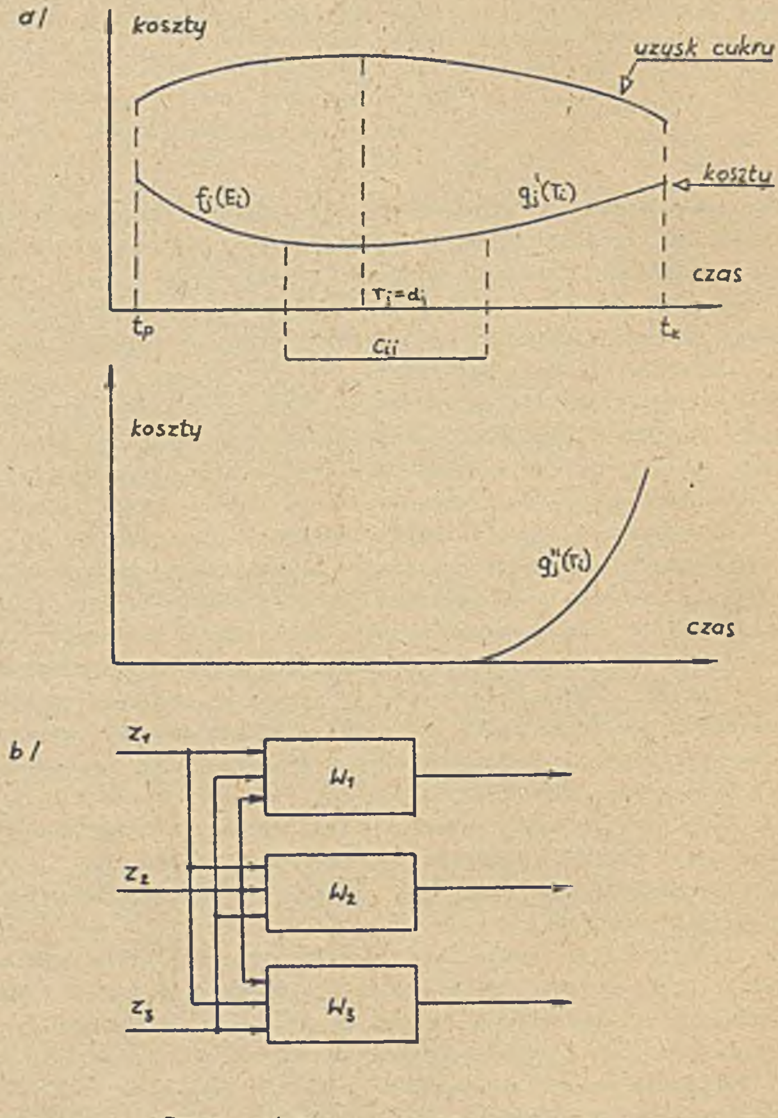
I. Wstęp

W wielu praktycznych zagadnieniach w dyskretnych procesach produkcyjnych istnieje szereg zadań /zwanych dalej operacjami/, które należy zrealizować dysponowanymi środkami /maszyny, brygady ludzi, itp./. Należy dokonać takiego rozdziału środków pomiędzy operacje oraz określić taką kolejność wykonywania operacji, by całkowity koszt, związany z użyciem środków i nieterminowością realizacji, był minimalny.

Przykładowo rozpatrzmy system inwestycji złożony z pewnej liczby współzależnych zadań realizowanych przez różnych podwykonawców. Czas realizacji i-tej inwestycji jest zależny od podwykonawców w tym sensie, że mogą oni tą samą inwestycję zrealizować w różnym czasie. Każde zadanie ma określony harmonogramem najwcześniejszy pożądany czas rozpoczęcia /czas, w którym podwykonawca może przystąpić do realizacji inwestycji/ oraz najpóźniejszy pożądany czas zakończenia. Rozpoczęcie realizacji zadania wcześniej niż to jest pożądane oznacza konieczność przeznaczenia dodatkowych środkow na przyspieszenie realizacji zadań poprzedzających; zakończenie realizacji później niż to jest pożądane wiąże się z wpłaceniem kary umownej za nieterminowość realizacji. Należy dokonać takiego rozdziału zadań pomiędzy podwykonawców oraz wyznaczyć czasy rozpoczęcia i zakończenia tych zadań, aby koszty realizacji całego systemu były minimalne. Dodatkowo przekroczenie zadanego czasu wykonania całego zadania może być związane ze zwiększeniem kosztów realizacji /karą/.

W innym przypadku koszty realizacji zadań mogą być związane z bezpośrednimi kosztami produkcji.

Na rys. 1 przedstawiono krzywą uzysku cukru dla cukrowni w czasie trwania kampanii cukrowniczej. Odpowiednio do niej określona jest krzywa kosztów produkcji w przeliczeniu na jednostkę produktu. Oczywistym jest, że najkorzystniej jest utrzymywać produkcję w okresie, gdy jej koszty są najmniejsze. Pożądanym czasem rozpoczęcia produkcji jest więc wielkość r_i zaś pożądanym czasem zakończenia d_i. Rozpoczęcie produkcji wcześniej niż w momencie r_i, powoduje wzrost kosztów produkcji określonych funkcją f_j /lewa część krzywej/; zakończenie produkcji później niż d_i powoduje wzrost bezpośrednich kosztów produkcji g_j /prawa część krzywej/. Ponadto zakład ponosi koszty za nieterminową realizację zamówienia produkcyjnego g_j /kara umowna wyznaczona za nieterminową dostawę cukru dla odbiorców/.



Rys.1. a/ Krzywe kosztów.
b/ System zakładów przemysłowych

Rozpatrzmy system cukrowni o różnej wydajności w_j i różnych charakterystykach /krzywe kosztów produkcji/ oraz niepodzielne zamówienie z_i napływające do nich. Czas realizacji i-tego zmówienia w j-tej cukrowni jest określony $c_{ij} = z_i/w_j$. Należy określić taki rozdział zamówień i taką kolejność ich realizacji w poszczególnych cukrowniach, które minimalizują koszty produkcji wynikłe z realizacji wszystkich zamówień.

II. Model matematyczny zagadnienia

Niech będą dane:

- zbiór operacji /zadań do wykonania/

$$N = \{1,2,\dots,n\}$$

- zbiór maszyn różnych typów przeznaczonych do wykonywania operacji

$$B = \{1,2,\dots,b\}$$

- zbiór typów maszyn

$$Q = \{1,2,\dots,q\}$$

- rozbicie zbioru maszyn B na podzbiory maszyn $B^k \subseteq B$ tego samego typu

$$\bigcup_{k \in Q} B^k = B \quad B^k \cap B^l = \emptyset, \quad k,l \in Q, \quad k \neq l$$

- rozbicie zbioru operacji N na podzbiory operacji $N^k \subseteq N$ wykonywanych przy użyciu maszyn tego samego typu

$$\bigcup_{k \in Q} N^k = N, \quad N^k \cap N^l \neq \emptyset, \quad k,l \in Q, \quad k \neq l$$

Zakłada się przy tym, że każda operacja ze zbioru N^k może być wykonywana tylko przy użyciu jednej z maszyn ze zbioru B^k, $k \in Q$ oraz, że wykonywanie operacji nie może być przerywane.

- zbiór relacji reprezentujący wymogi porządku technologicznego wykonywania operacji

$$RT \subset N \times N$$

- czasy wykonywania operacji

$$c : \bigcup_{k \in Q} \left(N^k \times B^k \right) \longrightarrow R^+$$

$$c(j,w) = c_{jw}, \quad j \in N^k, \quad w \in B^k, \quad k \in Q$$

c_{jw} - jest czasem wykonywania j-tej operacji przy użyciu w-tej maszyny.

- najwcześniejszy pożądany czas rozpoczęcia operacji

$$r : N \longrightarrow R^+ \cup \{o\}$$

$$r(j) = r_j, \quad j \in N$$

- najpóźniejszy pożądany czas zakończenia operacji

$$d : N \longrightarrow R^+ \cup \{o\}$$

$$d(j) = d_j, \quad j \in N$$

- zmienne decyzyjne

$$x_{jw} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli j-ta operacja jest wykonywana przy użyciu w-tej maszyny } j \in N^k,\ w \in B^k,\ k \in Q \\ 0 & \text{przeciwnie.} \end{cases}$$

t_j^x - czas rozpoczęcia operacji $j \in N$

t_j^y - czas zakończenia operacji $j \in N$.

Niech będą określone wielkości

- przyspieszenie i opóźnienie :

$$E_j = \max\{o, r_j - t_j^x\}, \quad j \in N$$

$$T_j = \max\{o, t_j^y - d_j\}, \quad j \in N$$

- funkcje kosztów będące karą za nieterminowe wykonywanie operacji

$f_j(E_j)$ - niemalejąca względem E_j

$$f_j(o) = 0, \quad j \in N$$

$g_j(T_j)$ - niemalejąca względem T_j

$$g_j(o) = 0, \quad j \in N$$

- funkcja kosztów użytych maszyn

$$k : B \longrightarrow R^+$$

$$k(w) = k_w, \quad w \in B$$

k_w - jest kosztem użycia /eksploatacji, dzierżawy lub zakupu/ w-tej maszyny.

Model matematyczny przedstawionego zagadnienia jest następujący: znaleźć wielkości: t_j^x, t_j^y, x_{jw}, $w \in B^k$, $j \in N$, $k \in Q$ minimalizujące:

$$K = k_1 + k_2 = \underbrace{\sum_{j \in N} \left[f_j(E_j) + g_j(T_j) \right]}_{k_1} + \underbrace{\sum_{w \in B} h_w \min\left\{1, \sum_{j \in N} x_{jw}\right\}}_{k_2}$$

przy ograniczeniach

$$t_j^y - t_j^x \geqslant \sum_{w \in B^k} x_{jw} c_{jw}, \quad j \in N^k, \quad k \in Q \qquad (1)$$

$$t_j^y - t_i^x \geqslant 0, \quad \langle i,j \rangle \in RT \qquad (2)$$

$$t_j^x, t_j^y \geqslant 0, \quad j \in N \qquad (3)$$

$$(x_{jp} = 1) \wedge (x_{ip} = 1) \Rightarrow (t_j^x - t_i^y \geqslant 0) \dot{\vee} (t_i^x - t_j^y \geqslant 0) \qquad (4)$$

$$p \in B^k, \quad i,j \in N^k, \quad i \neq j, \quad k \in Q$$

$$\sum_{w \ B^k} x_{jw} = 1, \quad j \in N^k, \quad k \in Q \qquad (5)$$

$$x_{jw} \in \{0,1\}, \quad w \in B^k, \quad j \in N^k, \quad k \in Q \qquad (6)$$

Ograniczenie /1/ wyraża warunek, że różnica między czasem rozpoczęcia i zakończenia operacji nie może być mniejsza niż czas wykonywania tej operacji przy użyciu określonej maszyny /patrz ograniczenie /5//. Ograniczenie /2/ reprezentuje wymogi porządku technologicznego. Ograniczenie /4/ jest warunkiem implikacyjnym i wyraża, że jeżeli dwie operacje są wykonywane przy użyciu tej samej maszyny, to jedna z tych operacji musi się zakończyć przed rozpoczęciem drugiej.

Przyjmując dodatkowe założenia dotyczące postaci funkcji f_j i g_j możemy otrzymać następujące szczególne przypadki zagadnień:

1. Zakładając $k_2 = 0$ oraz

$$f_j(E_j) = 0, \quad j \in N$$

otrzymujemy

$$k_1 = \sum_{j \in N} g_j(T_j)$$

Przyjmując liniową funkcję kosztów $g_j(T_j) = w_jT_j$, $j \in N$, otrzymujemy:

$$k_1 = \sum_{j \in N} w_jT_j$$

Jest to dość często spotykany w praktyce przypadek zagadnienia z kryterium ważonej sumy opóźnień realizacji operacji.

2. Zakładając $k_2 = 0$ oraz

$$g_j(T_j) = w_jT_j, \quad j \in N$$

$$d_j = 0, \quad j \in N$$

otrzymujemy

$$T_j = \max\left\{0, t_j^y - d_j\right\}_{d_j=0} = t_j^y$$

oraz

$$k_1 = \sum_{j \in N} w_jt_j^y$$

Jest to drugi często spotykany przypadek z kryterium w postaci ważonej sumy czasów zakończenia operacji.

3. Zakładając

$$f_j(E_j) = \begin{cases} 0 & \text{dla } E_j = 0 \\ M & \text{dla } E_j > 0 \end{cases} \quad j \in N$$

$$g_j(T_j) = \begin{cases} 0 & \text{dla } T_j = 0 \\ M & \text{dla } T_j > 0 \end{cases} \quad j \in N,$$

gdzie M jest pewną dużą liczbą, otrzymujemy

$$k_1 = \sum_{j \in N} \left[f_j(E_j) + g_j(T_j) \right]$$

Jest to postać kryterium dla zagadnienia szukania rozwiązania dopuszczalnego przy nieprzekraczaniu czasów krytycznych r_j i d_j. Jeśli znalezione rozwiązanie daje wartości funkcji celu $k_1 < M$ to jest ono dopuszczalne.

4. Można pokazać, że zagadnienie minimalno-czasowe jest szczególnym przypadkiem zagadnienia minimalno-kosztowego. W tym celu wprowadzona została do zadania produkcyjnego złożonego z n operacji dodatkowa fikcyjna operacja $\{z\}$ o tej własności, że wszystkie operacje $j \in N$ poprzedzają ją oraz czas wykonywania $c_{zw} = 0$ dla dowolnego $w \in B$.

Przyjmując dodatkowo funkcję kosztów związaną z tą operacją w postaci:

$$g_z(T_z) = T_z$$

oraz $d_z = 0$

a także

$$T_z = \max\left\{0, t_z^y - d_z\right\}\Big|_{d_z=0} = t_z^y$$

oraz $k_1 = t_z^y$

Zagadnienie to zostało rozwiązane [Grabowski] w oparciu o metodę grafów dysjunktywnych.

5. Zakładając

$$f_j(E_j) = 0 = g_j(T_j), \quad j \in N$$

$$g_z(T_z) = \begin{cases} 0, & \text{dla } T_z = 0 \\ M, & \text{dla } T_z > 0 \end{cases}$$

otrzymujemy

$$K = g_z(T_z) + \sum_{w \in B} h_w \min\left\{1, \sum_{j\ N} x_{jw}\right\}$$

Kryterium tej postaci występuje w zagadnieniu szukania zbioru maszyn o minimalnym koszcie dla wykonania wszystkich operacji w nieprzekraczalnym horyzoncie czasowym d_z. Jeśli w znalezionym rozwiązaniu $K \geq M$ to zagadnienie nie posiada rozwiązania dopuszczalnego.

III. Ogólna metoda rozwiązywania

Ze względu na znaczną złożoność obliczeniową /NP - złożoność/ zagadnień tego typu, pozytywnego rozwiązania doczekały się jedynie:

- zagadnienia minimalno-czasowe [Grabowski] będące szczególnym przypadkiem zagadnienia minimalno-kosztowego,
- zagadnienia minimalno-kosztowe jednomaszynowe [Lenstra, Rinnoy Kan] z ogólną postacią funkcji celu.

Przedstawione ogólne zagadnienia z kryterium minimalno-kosztowym modeluje się przy użyciu teorii grafów dysjunktywnych konstruując dla zagadnienia graf dysjunktywny dwuczłonowy

$$\bar{D} = \langle A, U; V, V^0 \rangle ,$$

gdzie A - zbiór wierzchołków grafu reprezentujący zdarzenia rozpoczęcia i zakończenia operacji; U - zbiór łuków reprezentujących relację porządku technologicznego; V, V^o - zbiory łuków dysjunktywnych sekwencyjnych i operacyjnych /odpowiednio/. Każde rozwiązanie dopuszczalne zagadnienia jest reprezentowane przez graf bezkonturowy

$$D_{rp} = \langle A, U \cup S_r \cup S_p^o \rangle ,$$

gdzie S_r i S_p^o - reprezentacje zbiorów V i V^o oraz przez k_{rp} - minimalny koszt realizacji systemu operacji. Niech R_{Ddi} będzie rodziną grafów bezkonturowych D_{rp} takich, że spełniony jest warunek implikacyjny /4/. Zagadnienie optymalizacji sekwencji operacji z kryterium kosztowym jest równoważne zagadnieniu znalezienia grafu $D^* \in R_{Ddi}$, dla którego koszt k^* przyjmuje wartość minimalną. Dla znalezienia grafu D^* wykorzystuje się zmodyfikowaną metodę branch-and-bound.

Algorytm

Krok 1 /testowanie/. Obliczyć dolne ograniczenie LB wartości kosztów dla następników grafu D_{rp}. Jeżeli $LB \geqslant k^*$, gdzie k^* - najlepsze do tej pory znalezione rozwiązanie, to przejść do kroku 4.

Krok 2 /rozwiązywanie/. Obliczyć minimalny koszt k_{rp} rozwiązania D_{rp}. Jeśli $k_{rp} < k^*$ to $k^* := k_{rp}$. Określić zbiór łuków dysjunktywnych do przełączenia. Jeśli zbiór ten jest pusty to przejść do kroku 4.

Krok 3 /rozgałęzienie/. Wybrać łuk i dokonać przełączenia otrzymując nowy graf D_{sq} i nowe rozwiązanie. Przejść do kroku 1.

Krok 4 /cofanie/. Jeśli nie ma poprzednika, do którego moglibyśmy się cofnąć to stop, k^* jest rozwiązaniem optymalnym. Inaczej wykonać operacje związane z aktualizacją zbiorów łuków dysjunktywnych. Przejść do kroku 3.

LITERATURA

1 Grabowski J.: Algorytmy optymalizacji i sterowania w dyskretnych systemach produkcyjnych. Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej. Seria: Monografie. Wrocław 1977.

2 Grabowski J.: Formulation and Solution of the Sequencing Problem with Parallel Machines. Proc. of 8th IFIP Conference on Optimization Techniques, September 5-9, 1977, Würzburg, Federal Republic of Germany.

3 Lenstra J.K.: Sequencing by Enumerative Methods. Matematisch Centrum, Amsterdam 1976.

4 Rinnoy Kan A.H.G.: Machine Scheduling Problems. Ed. H.E. Stenfert Kroese B.V., Leiden 1976.

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАЦИЙ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ С МИНИМАЛЬНО-СТОИМОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ

Р е з ю м е

Рассматривается дискретная производственная система, реализирующая неделимые задания в установленном технологическом порядке.

Определяется оптимальное, с точки зрения стоимости, распределение заданий между реализаторы. Даются примеры применения, математическая модель и выбранные вопросы данной проблеммы.

OPERATION SEQUENCE OPTIMIZATION IN DISCRETE PRODUCTION SYSTEMS WITH MINIMUM-COSTS CRITERION

S u m m a r y

In the paper a diskrete production system is considered, performing nondivisible tasks in fixed technological order. For the optimum tasks assignment problem, a mathematical model and application example are presented.