Sammlung Göschen

Elektrische Schwingungen

Von

Dr. Hermann Rohmann

I

Mit 56 Abbildungen

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Physikalische Tabellen von Dr. A. Leick. Nr. 650.

Luftelektrizität von Dr. Karl Kahler. Mit 18 Abbildungen. Nr. 649.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Professor Dr. R. Abegg und Prof. Dr. O. Sackur. Nr. 445.

Allgemeine und physikalische Chemie von Prof. Dr. Hugo Kauffmann in Stuttgart. 2 Teile. Mit 15 Figuren. Nr. 71 u. 698.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Professor an der Bergakademie in Clausthal. Mit 16 Figuren. Nr. 354.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sammlung Göschen

Elektrische Schwingungen

Von

Dr. Hermann Rohmann

Privatdozent an der Universität Straßburg

I

Mit 56 Abbildungen

Marjan Puchel

Berlin und Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H.
1914

Druck
der Spamerschen
Buchdruckerei in Leipzig.

Inhalt.

Literatur siehe im II. Bändchen.

Das unter der Bezeichnung „Elektrische Schwingungen“ zusammengefaßte Arbeitsgebiet der Physik läßt sich kaum scharf scheiden von den sogenannten Wechselstromerscheinungen und berührt sich andererseits vielfach mit der Optik. Die besondere Behandlung rechtfertigt sich durch die weitgehende Ausbildung, welche die Methoden und die experimentellen Hilfsmittel unseres Gebietes erfahren haben. Seine Entwicklung datiert im wesentlichen seit den Hertzschen Arbeiten, die den Nachweis für die Gültigkeit der Maxwellschen Theorie führten. Einen großen Teil seiner Förderung verdankt es der technischen Verwendung in der drahtlosen Telegraphie.

I. Einleitendes aus der Elektrizitätslehre.

Es seien hier zunächst einige aus der Elektrizitätslehre[1]) bekannte Tatsachen und Beziehungen, sowie die einfachsten Gesetze des Wechselstroms kurz zusammengestellt, und zwar in der Form, wie wir sie später vielfach brauchen werden.

1. Aus der Elektrostatik.

A. Elektrische Feldstärke, Potentialdifferenz, Potential.

In dem Raume um elektrisch geladene Körper besteht ein elektrisches Feld, d. h. ein dorthin gebrachter sehr

[1]) Siehe auch G. Jäger, Theoretische Physik Bd. III u. IV (Samml. Göschen) und J. Herrmann, Elektrotechnik Bd. I, III.

kleiner Körper erfährt bestimmte Kräfte, wenn er selbst geladen ist[1]).

Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in einem Punkt ist nach Größe und Richtung gleich derjenigen Kraft, die dort auf die Elektrizitätsmenge $+1$ wirkt[2]).

Der Transport einer Elektrizitätsmenge von einem Punkte des Feldes zu einem anderen erfordert, da dabei die elektrischen Kräfte überwunden werden müssen, im allgemeinen eine bestimmte Arbeit. Diejenige Arbeit, welche geleistet werden muß, wenn die Elektrizitätsmenge $+1$ von einem bestimmten Punkt zu einem anderen gebracht wird, ist die Potentialdifferenz V dieser beiden Punkte. (Für V wird synonym der Ausdruck Spannung gebraucht.) In anderer Ausdrucksweise: Die Potentialdifferenz zweier Punkte des Feldes ist gleich dem negativ genommenen Linienintegral[3]) der elektrischen Feldstärke zwischen diesen beiden Punkten.

Die Potentialdifferenz eines Punktes gegen einen willkürlich als Nullpunkt gewählten nennt man das Potential des ersten Punktes. Meist wird das (unveränderliche) Potential der Erde gleich Null gesetzt; die Potentialdifferenz eines Punktes gegen die Erde ist also sein Potential.

Auf einem Leiter ist bei statischen Zuständen das Potential überall konstant; Elektrizität befindet sich nur auf seiner Oberfläche in sehr dünner Schicht.

---

[1]) Im allgemeinen erfährt auch ein ungeladener Körper dort Kräfte. Man kann sich aber so einrichten, daß diese sehr klein sind gegen diejenigen, welche auf denselben Körper wirken, wenn er geladen ist und kommt so zu der Vorstellung von Kräften, die auf die Elektrizität selber wirken.

[2]) bzw. $\frac{1}{e}$ derjenigen Kraft, die dort auf die sehr kleine Elektrizitätsmenge e wirkt.

[3]) Unter dem Linienintegral der Feldstärke oder allgemein eines Vektors versteht man das Integral über die Linienelemente einer bestimmten Linie, jedes multipliziert mit der in seine Richtung fallenden Komponente des Vektors. Siehe auch S. Valentiner, Vektoranalysis (Samml. Göschen) § 21.

Der Verlauf (und auch die Stärke) des elektrischen Feldes kann in bekannter Weise durch Kraftlinien veranschaulicht werden. Die Kraftlinien haben an jeder Stelle die Richtung des Feldes; sie entspringen dort, wo sich positive Ladungen befinden und enden bei negativen.

B. Kondensator, Kapazität.

Wenn sich im Raum mehrere Leiter von beliebiger Gestalt und Lage befinden, die auf voneinander verschiedene Potentiale aufgeladen sind, so verlaufen Kraftlinien von jedem einzelnen Leiter zu allen übrigen, und es ist also der Zustand eines Leiters abhängig von demjenigen aller übrigen (Influenz).

Für zwei Leiter kann man aber die Anordnung so treffen, daß alle, oder wenigstens nahezu alle Kraftlinien, die auf dem einen Leiter entspringen, auf dem anderen enden, und daß keine oder sehr wenige nach den übrigen Leitern oder nach der Erde zu laufen[1]).

Dann befindet sich auf dem einen Leiter immer dieselbe Elektrizitätsmenge wie auf dem andern, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Eine solche Anordnung nennt man einen **Kondensator**, die beiden Leiter heißen seine Belegungen.

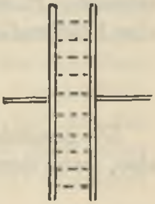


Fig. 1.

Als einfachstes Beispiel sei genannt der Plattenkondensator Fig. 1, der aus zwei ebenen gleichgroßen Metallplatten besteht, die einander in kleinem Abstand gegenüber gestellt sind.

[1]) Vorausgesetzt ist dabei, daß die Potentialdifferenz der beiden Leiter gegeneinander von derselben Größenordnung ist, wie die gegen andere Leiter oder gegen die Erde.

Die Kapazität eines Kondensators ist das Verhältnis der auf einer Belegung befindlichen Elektrizitätsmenge zu der Potentialdifferenz V, die zwischen den Belegungen besteht.

$$C = \frac{e}{V}. \tag{1}$$

Auch einem einzelnen Leiter, der sich frei im Raum, oder wenigstens von anderen Leitern sehr weit entfernt befindet, kommt eine bestimmte, wie oben zu definierende Kapazität zu. Man kann ihn auffassen als Grenzfall eines Kondensators, dessen zweite Belegung sehr weit entfernt ist.

Die Kapazität eines Kondensators läßt sich experimentell nach verschiedenen Methoden bestimmen, auf die wir hier nicht eingehen. Für einfache Formen läßt sie sich berechnen.

Beim Plattenkondensator[1]) z. B. muß das Feld aus Symmetriegründen homogen und senkrecht zu den Platten sein. Die Feldstärke habe also im ganzen Raum zwischen den Platten den konstanten Wert $\mathfrak{E}$; dem entspricht eine Flächendichte σ der Elektrizität auf jeder Belegung:

$$\sigma = \frac{\eta}{4\pi}\mathfrak{E}\ ^{2)}.$$

Die gesamte Elektrizitätsmenge auf einer Belegung ist also, wenn deren Fläche mit S bezeichnet wird:

$$e = \sigma S = \frac{\eta}{4\pi}\mathfrak{E}\cdot S.$$

---

[1]) Siehe auch Jäger, Theoretische Physik III, § 12.

[2]) η ist ein von dem Maßsystem, in dem die elektrischen Größen gemessen werden, abhängiger Faktor; im elektromagnetischen Maßsystem, das wohl auch kurz als CGS-System bezeichnet wird, hat η den Wert: $\frac{1}{9}10^{-20}$ im elektrostatischen Maßsystem ist $\eta = 1$. — Bei Anwendung der obigen Formel ist stillschweigend vorausgesetzt, daß sich zwischen den Belegungen Luft bzw. genauer Vakuum befinde.

Andererseits ist die Potentialdifferenz zwischen den Belegungen

$$V = \mathfrak{E} \cdot l \,,$$

wenn l den Abstand derselben bedeutet.

Mithin:

$$C = \frac{e}{V} = \frac{\eta}{4\pi} \frac{S}{l} \,.$$

C. Laden und Entladen eines Kondensators.

Den Vorgang beim Laden eines Kondensators können wir uns wie folgt vorstellen: Wenn an die Klemmen des Kondensators irgend eine elektromotorische Kraft (etwa ein galvanisches Element), angelegt wird, dann fließt eine bestimmte Menge Elektrizität von der einen Belegung durch den Schließungskreis und das Element hindurch auf die andere Belegung. Für eine gewisse Zeit besteht also ein elektrischer Strom. Die insgesamt durch ihn transportierte Elektrizitätsmenge ist dabei nach (1) gleich $C \cdot V$, wo V gleich der angelegten EMK. ist. Umgekehrt fließt beim Entladen des Kondensators diese Elektrizitätsmenge rückwärts. Die Art und Weise, wie das Überströmen der Elektrizität stattfindet, also der zeitliche Verlauf des Stromes, hängt ganz ab von der Art des Schließungskreises, von seinem Widerstand und seiner Selbstinduktion; wir werden uns unten damit eingehend zu beschäftigen haben.

Dagegen können wir hier leicht eine allgemein gültige Beziehung ableiten zwischen dem Momentanwert des Stromes und der zeitlichen Änderung der Potentialdifferenz am Kondensator.

Es wandere nämlich in der sehr kleinen Zeit dt eine ebenfalls sehr kleine positive Elektrizitätsmenge Δe von der positiven Belegung zur negativen. Dann entspricht das einem in diesem Sinne fließenden Strom:

$$I = \frac{\Delta e}{dt}.$$

Die Ladung e jeder Belegung ändert sich dabei um $de = -\Delta e$, die Potentialdifferenz nach (1) um

$$-dV = -\frac{de}{C}.$$

Es gilt also:

$$I = -\frac{de}{dt} = -C\frac{dV}{dt}. \tag{2}$$

D. Energie des geladenen Kondensators.

Dem geladenen Kondensator kommt ein bestimmter Betrag an elektrostatischer Energie zu, der sich schreiben läßt:

$$W_e = \frac{1}{2}eV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C}. \tag{3}$$

Diese Energie kann man sich lokalisiert denken in dem Raum zwischen den Belegungen, in dem das elektrische Feld besteht; und zwar kommt jedem Volumelement $d\tau$ des Feldes, in dem die Feldstärke $\mathfrak{E}$ herrscht, die Energie:

$$dW_e = \frac{\eta}{8\pi}\mathfrak{E}^2 d\tau \tag{4}$$

zu.

E. Dielektrikum, Dielektrizitätskonstante.

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, in dem Raum zwischen den Kondensatorbelegungen befinde sich Luft, bzw. genauer Vakuum. Füllt man diesen Raum durch ein anderes isolierendes Medium aus, so erhält die Kapazität einen anderen Wert. Das Verhältnis dieser Kapazität zu der ursprünglichen heißt die **Dielektrizitätskonstante** (ε) des betreffenden Mediums, des **Dielektrikums.**

Einige Werte seien hier angeführt:

Vakuum . . . $\varepsilon =$	1	Glas	5 bis 10
Luft (0°, 760 mm)	1,00059	Glimmer . . .	5 bis 8
Petroleum . . .	2,0	Hartgummi . .	2,7
Schwefelkohlenstoff	2,6	Paraffin . . .	1,8 bis 2,3
Wasser.	81	Schwefel . . .	3,6 bis 4,8

F. Miteinander verbundene Kondensatoren.

Zwei oder mehrere Kondensatoren können in verschiedener Weise miteinander verbunden werden. Je nach der Schaltung hat das Aggregat, die Batterie, verschiedene resultierende Kapazität.

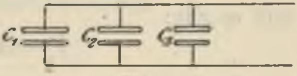


Fig. 2.

Bei der durch Fig. 2 dargestellten Parallelschaltung wird offenbar die resultierende Kapazität gleich der Summe der Einzelkapazitäten. $C = C_1 + C_2 + \ldots$

Die Hintereinanderschaltung (Fig. 3) ergibt eine resultierende Kapazität:

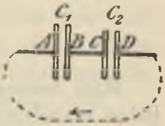


Fig. 3.

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots}$$

Denkt man sich nämlich die (der Einfachheit halber bloß aus zwei Kondensatoren zusammengesetzte) Batterie auf eine Potentialdifferenz V aufgeladen, so wird beim Laden eine bestimmte Elektrizitätsmenge e durch den Schließungsdraht hindurch von der letzten Belegung rechts (D) auf die erste Belegung links (A) fließen. Nach Definition ist dann die Kapazität der Batterie: $C = \frac{e}{V}$. Ferner muß (da die Elektrizitätsmengen auf den Belegungen jedes einzelnen Kondensators für sich einander entgegengesetzt gleich sein müssen), dieselbe Elektrizitätsmenge von B nach C fließen.

Die Spannung am ersten Kondensator ist also:

$$V_1 = \frac{e}{C_1};$$

die am zweiten:

$$V_2 = \frac{e}{C_2},$$

und es gilt:

$$V = V_1 + V_2.$$

Ganz ähnlich ist bei einer beliebigen Anzahl von Kondensatoren:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots$$

daher:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$$

Man bemerkt, daß die Spannung an den Klemmen jedes einzelnen Kondensators kleiner ist als diejenige an den Klemmen des Aggregats. Hintereinander geschaltete Kondensatoren werden daher dann benutzt, wenn eine Batterie zu höherer Spannung aufgeladen werden soll, als es der einzelne Kondensator verträgt.

2. Aus der Elektrodynamik.

A. Das Magnetfeld eines Stromes.

Fließt ein elektrischer Strom I durch einen Leiter, so erzeugt er ein **magnetisches Feld**. Für einen langen geraden Draht als Stromleiter z. B. sind die magnetischen Kraftlinien Kreise um den Draht als Achse (Fig. 4), und zwar umkreisen sie den Strom in demjenigen Sinn, in dem man eine Rechtsschraube (Korkzieher od. dgl.) drehen muß, damit sie sich in der Richtung des Stromes vorwärtsbewegt[1]).

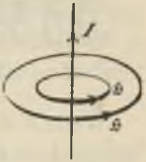


Fig. 4.

Das Gesetz, das allgemein die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit dem Strom verknüpft, läßt sich wie folgt aussprechen:

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über einen Weg, der den Strom umschließt, ist:

$$\int \mathfrak{H}\, dl = \frac{4\pi}{c} \cdot I \quad (5)$$ [2])

und ist Null für jeden Weg, der den Strom nicht umschließt.

Eine in manchen Fällen bequemere Darstellung des Feldes als durch (5) erhält man, wenn man das Feld auffaßt als Superposition der Elementarfelder, die von den einzelnen Elementen der Strombahn herrühren, und die durch das **Biot-Savartsche Gesetz** gegeben sind.

---

[1]) Die Zuordnung des Umlaufssinnes der Kraftlinien zur Richtung des Stromes ist in anderer Weise durch die bekannte Ampèresche Schwimmerregel oder durch die Dreifingerregel gegeben.

[2]) c ist wie das frühere η und das später auftretende μ ein vom Maßsystem, in dem die elektrischen und magnetischen Größen gemessen werden, abhängiger Faktor. Im elektromagnetischen Maßsystem ist: $c = 1$, $\mu = 1$, $\eta = \frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$; im elektrostatischen: $c = 1$, $\eta = 1$, $\mu = \frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$.

B. Magnetfeld einer langen Spule.

Bei beliebiger Gestalt der Stromleiter ist das Magnetfeld kompliziert, nur für bestimmte Formen erhält man einfache Verhältnisse, z. B. für einen Draht, der zu einer Spule von großer Länge und kleinem Querschnitt aufgewickelt ist (Fig. 5). Die magnetische Feldstärke hat merkliche Werte nur im Innern der Spule und ist dort über den Querschnitt und die Länge konstant, d. h. das Feld ist dort homogen.

Fig. 5.

Wenn N die Zahl der Windungen, l die Länge der Spule bedeutet, so ist die magnetische Feldstärke im Innenraum

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{N}{l} \cdot I ,$$

wie sich durch Anwendung von (5) sofort ergibt.

C. Magnetische Energie.

Dem Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters kommt eine bestimmte magnetische Energie zu. Jedes Volumelement des Feldes liefert dazu den Beitrag:

$$\text{(6)} \qquad d\,W_m = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 d\tau \; ^{1)} .$$

Die Energie des ganzen Raumes ergibt sich durch Integration über die sämtlichen Volumelemente. Für die

[1] Wenn der Leiter nicht ins Vakuum, sondern in irgendein Medium eingebettet ist, wäre strenger rechts als Faktor die Permeabilität zuzusetzen. Dieser Faktor hat aber für alle nichtmagnetischen Medien einen so nahe bei 1 liegenden Wert, daß er vernachlässigt werden kann. Magnetische Medien wie Eisen wollen wir von unseren Betrachtungen ausschließen.

oben angeführte Spule ist z. B., wenn ihr Querschnitt mit q bezeichnet wird:

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi}\left(\frac{4\pi}{c}\right)^2 \frac{N^2}{l^2} I^2 \cdot q \cdot l$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mu \frac{4\pi}{c^2} \frac{N^2 q}{l} \cdot I^2 .$$

Die diesem Energiebetrag äquivalente Arbeit muß der Strom bei seinem Entstehen leisten; verschwindet er und damit das Magnetfeld, so tritt sie wieder in anderer Form auf.

D. Selbstinduktionskoeffizient.

Die magnetische Energie eines stromdurchflossenen Leiters läßt sich allgemein schreiben in der Form:

(7) $$W_m = \frac{1}{2} L I^2 .$$

L ist ein nur von der Gestalt des Stromleiters abhängiger Faktor und heißt der Selbstinduktionskoeffizient.

(Eigentlich ist er auch von dem den Leiter umgebenden Medium abhängig, s. aber die Anm.)

E. Gegenseitiger Induktionskoeffizient.

Zwei einander genäherte Leiter, welche von den Strömen I_1 und I_2 durchflossen werden, liefern ein magnetisches Feld, das sich als Superposition der Felder jedes einzelnen Leiters darstellt. Die magnetische Energie wird also:

$$\frac{\mu}{8\pi}\int(\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2)^2\, d\tau = \frac{\mu}{8\pi}\int \mathfrak{H}_1^2\, d\tau + \frac{\mu}{8\pi}\int \mathfrak{H}_2^2\, d\tau$$

$$+ \frac{\mu}{4\pi}\int(\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{H}_2)\, d\tau .$$

Die beiden ersten Glieder rechts sind die Energiebeträge, welche den einzelnen Leitern für sich zukommen und lassen sich in der Form $\frac{1}{2}LI^2$ schreiben; ganz entsprechend läßt sich das letzte Glied darstellen als $L_{12}I_1I_2$. L_{12} ist von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der beiden Leiter abhängig und heißt ihr gegenseitiger Induktionskoeffizient.

Der größte Wert, den der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier Leiter L_1 und L_2 erreichen kann (wenn etwa die beiden Leiter ineinandergesteckte oder auf denselben Kern aufgewickelte Spulen sind, ist:

$$L_{12} = \sqrt{L_1 \cdot L_2}\,.$$

F. Induktionsgesetz.

Durchsetzt ein (etwa durch stromdurchflossene Leiter oder durch permanente Magnete hergestelltes) Magnetfeld eine Spule, und ändert sich das Magnetfeld auf irgend eine Weise, dann wird in der Spule eine elektromotorische Kraft induziert.

Betrachten wir zunächst eine induzierte Spule, die aus einer einzigen ebenen Windung besteht, und die von einem homogenen Magnetfeld durchsetzt wird (Fig. 6).

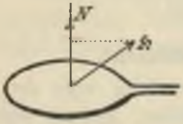


Fig. 6.

Man bezeichnet dann das (mit μ multiplizierte) Produkt aus der Fläche S dieser Spule mit der in Richtung der Flächennormale fallenden Komponente der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}_N$ als Induktionsfluß Q durch die Spule.

$$Q = \mu \cdot \mathfrak{H}_N \cdot S\,. \tag{8}$$

Bei inhomogenem Feld ist analog zu setzen:

$$Q = \mu \int \mathfrak{H}_N \, dS\,. \tag{8a}$$

Im Kraftlinienbild ist Q die Zahl der senkrecht durch die Fläche der Spule hindurchtretenden Kraftlinien.

Unter Einführung dieses Ausdrucks wird die in der Spule induzierte EMK:

$$(9)\quad E = -\frac{1}{c}\,\frac{dQ}{dt}\ \text{(Faradaysches Induktionsgesetz).}$$

In Worten: Die induzierte EMK ist proportional der Änderungsgeschwindigkeit des Induktionsflusses, bzw. der Geschwindigkeit, mit der sich die Zahl der senkrecht durch die Fläche hindurchtretenden Kraftlinien ändert[1]).

Besteht die induzierte Spule aus N Windungen und ist der Induktionsfluß durch jede von ihnen derselbe, so wird die N-fache EMK induziert.

Rührt das induzierende Magnetfeld von einem stromdurchflossenen Leiter her, und wird die Änderung des Induktionsflusses durch eine Änderung des Stromes I_1 in diesem Leiter bewirkt, dann läßt sich die im zweiten Leiter induzierte EMK bequemer ausdrücken mit Hilfe des früher definierten gegenseitigen Induktionskoeffizienten dieser beiden Leiter.

Es gilt nämlich:

$$(10)\qquad E_2 = \pm L_{12}\,\frac{dI_1}{dt}\,.$$

Nebenbei ersieht man hier, durch Vergleich mit (9), daß sich für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten

[1]) Für den Richtungssinn der induzierten EMK gilt das folgende: $\frac{dQ}{dt}$ können wir als eine gerichtete Größe, einen Vektor, auffassen. Die induzierte EMK wirkt dann in demjenigen Sinn, in dem man eine Rechtsschraube drehen muß, damit sie entgegengesetzt der Richtung von $\frac{dQ}{dt}$ vorwärtsbewegt wird (vgl. S. 13), das Minuszeichen in (9) bringt diese Beziehung zum Ausdruck.

eine anschaulichere Definition geben läßt, als oben; L_{12} ist proportional, bzw. bei geeignetem Maßsystem gleich dem magnetischen Induktionsfluß, der durch den einen Leiter geht, wenn im anderen der Strom 1 fließt.

Da ein einzelner Leiter, welcher von einem Strom durchflossen wird, zugleich magnetische Kraftlinien erzeugt, die seine eigene Fläche durchsetzen, so wird auch in ihm selber bei jeder Stromänderung eine EMK entstehen.

Deren Größe läßt sich mit Hilfe des Selbstinduktionskoeffizienten angeben zu:

$$E = -L \frac{dI}{dt} \,. \tag{11}$$

G. Kräfte auf Stromleiter im magnetischen Feld.

Ein Stromleiter erfährt im magnetischen Felde bestimmte Kräfte.

Man kann sie auffassen als Resultierende aus Kräften, die auf die einzelnen Leiterelemente ausgeübt werden. Diese Elementarkräfte stehen senkrecht zu der Ebene durch Leiterelement und Feldrichtung und sind proportional

$$I \cdot \mathfrak{H} \cdot \sin(I \cdot \mathfrak{H})\, dl \,.$$

In einer für viele Zwecke bequemeren Form lassen sich die Kräfte ausdrücken, wenn man den Induktionsfluß durch den beweglichen Leiter einführt.

Derselbe sei Q für eine bestimmte Lage des Leiters. Wird der letztere nun in einer Richtung x parallel zu sich selber um eine kleine Strecke dx verschoben, so ändere sich Q um $\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$.

Dann ist die Kraft, die den Leiter in dieser Richtung zu verschieben sucht:

$$P_x = -\frac{1}{c} I \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} . \tag{12}$$

Dieselbe Formel gilt, wenn x den Drehungswinkel um irgendeine Achse bedeutet und P_x das Drehmoment um dieselbe.

3. Wechselstrom[1]).

A. Definitionen.

Als Wechselstrom bezeichnet man einen Strom, der periodisch Größe und Richtung ändert. Die einfachste Art eines Wechselstroms liegt dann vor, wenn das Gesetz, nach dem die Stromstärke variiert, das folgende ist:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) . \tag{13}$$

Sinusförmiger Wechselstrom. I_0 bezeichnet man als Amplitude; es ist der größte Wert, den die Stromstärke annimmt; ω als Frequenz[2]), φ als Phase.

Das Gesetz (13), nach dem die Stromstärke verläuft, ist dasselbe, nach dem die Exkursionen eines ungedämpft schwingenden Pendels vor sich gehen; man spricht daher auch von einem Wechselstrom als von einer elektrischen Schwingung.

Wenn man den Sinusstrom als Funktion der Zeit graphisch darstellt, so entsteht die in Fig. 7 wiedergegebene Kurve. Man sieht, daß sich die Werte der Stromstärke je nach Verlauf einer Zeit $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ wiederholen.

---

[1]) Vgl. Herrmann, Elektrotechnik Bd. I u. III (Samml. Göschen).

[2]) Die Größe, die wir hier als Frequenz bezeichnen, wird meist zyklische oder Kreisfrequenz genannt, während man namentlich in der Technik den Ausdruck „Frequenz" gleichbedeutend mit „Schwingungszahl" verwendet (siehe unten). Wir wollen hier unter Frequenz immer $\omega = 2\pi n$, also die Schwingungszahl in 2π sec verstehen.

τ heißt die **Schwingungsdauer**.

In 1 Sek. macht der Strom $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = n$ vollständige Schwingungen; n heißt die **Schwingungszahl**; die Frequenz ω kann also bezeichnet werden als „**Schwingungszahl in 2π sec**".

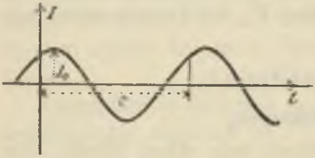


Fig. 7.

Die Phase φ gibt den Wert an, den die Stromstärke zur Zeit $t = 0$ hat; sie ist in gewissem Maße willkürlich, abhängig von der Annahme über den Nullpunkt der Zeit und kann durch geeignete Verfügung über denselben zu Null gemacht werden. Ihre Bedeutung tritt vor allem dort hervor, wo es sich um die gleichzeitige Betrachtung zweier Schwingungen (bzw. allgemein oszillatorischer Größen) handelt. Man spricht dann von der **Phasendifferenz** der beiden Schwingungen, und diese gibt an, um welchen Bruchteil der Periode etwa das Maximum der einen früher oder später eintritt, als das der anderen.

Man bemerkt, daß man unter Einführung einer anderen Phase φ' statt (13) schreiben kann:

$$(13a) \qquad I = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= I_0 \cos(\omega t + \varphi')\,^{1)} .$$

Wenn zwei Wechselströme gleicher Frequenz sich überlagern,

$$(14) \qquad I = I_1 + I_2 = A \sin(\omega t + \varphi_1) + B \sin(\omega t + \varphi_2) ,$$

[1]) Ist die Phase φ (oder φ') gleich 2π, so ergibt sie denselben Verlauf des Stromes wie die Phase Null, braucht also meist nicht in der Rechnung mitgeführt zu werden.

so kann der resultierende Strom wieder in der einfachen Form:

$$(14\,a) \qquad I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

geschrieben werden; ist also wieder ein sinusförmiger Wechselstrom der gleichen Frequenz.

Haben die superponierten Ströme die spezielle Form:

$$(14\,b) \qquad I = A \sin \omega t + B \cos \omega t\,,$$

so ergibt sich, daß in (14 a) zu setzen ist:

$$I_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}\,.$$

B. Messung von Wechselströmen[1]).

Wenn die Frequenz eines Wechselstroms einigermaßen beträchtliche Werte hat,[2]) so können die gebräuchlichen Gleichstromgalvanometer nicht mehr die Momentanwerte der Stromstärke anzeigen. Der Zeiger und das bewegliche System des Instruments müßten dazu oszillierende Bewegungen im Tempo des Wechselstroms machen. Diese Bewegungen bleiben aber wegen des relativ großen Trägheitsmoments der beweglichen Teile sehr klein. Das messende System bleibt also praktisch in einer bestimmten Mittellage in Ruhe.

Bei allen denjenigen Instrumenten, welche wie die Drehspulgalvanometer (für Gleichstrom) Ausschläge geben, die der Stromstärke proportional sind, ent-

---

[1]) Vgl. J. Herrmann, Die elektrischen Meßinstrumente (Samml. Göschen, Bd. 477).

[2]) Bei Zentralen-Wechselstrom ist die Schwingungszahl meist 50, bei den Wechselströmen, die wir später betrachten, geht sie bis zu 10^7 und höher.

fernt sich der Zeiger beim Durchgang eines sinusförmigen Wechselstroms offenbar nicht aus seiner Nullage. Die auf das bewegliche System ausgeübten Kräfte sind einander in jeder Halbperiode entgegengesetzt und heben sich auf.

Anders bei Instrumenten, die (für Gleichstrom) Ausschläge proportional dem Quadrat der Stromstärke geben, wie Hitzdraht-Galvanometer oder Elektrodynamometer[1]). Da ihr Ausschlag unabhängig von der Stromrichtung ist, so erfährt das bewegliche System in jeder Halbperiode zwar veränderliche, aber immer in der gleichen Richtung treibende Kräfte. Unter deren Wirkung wird der Zeiger eine bestimmte konstante Einstellung annehmen, bzw. sehr kleine Oszillationen um sie machen, und dieser konstante Ausschlag ist offenbar proportional dem zeitlichen Mittel aus den Werten von I^2.

Für einen sinusförmigen Wechselstrom $I = I_0 \sin(\omega t)$ ist nun:

$$I^2 = I_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{I_0^2}{2}[1 - \cos(2\omega t)]$$

und also der zeitliche Mittelwert über eine volle Periode (= demjenigen über eine sehr lange Zeit):

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau I^2 dt = \frac{I_0^2}{2}.$$

Diesen Mittelwert $\mathfrak{J}$ des Quadrats der Stromstärke, dem der Ausschlag quadratischer Meßinstrumente proportional ist (und der auch in den Ausdruck

[1]) Wir nehmen hier die Instrumente in ihrer einfachsten Ausführungsform an, bei der wirklich der Ausschlag proportional dem Quadrat der Stromstärke ist. Für technische Zwecke wird oft die Skala oder der Übertragungsmechanismus so verändert, daß der abgelesene Ausschlag ein Maß für die Stromstärke selber und nicht für ihr Quadrat ist.

für die von einem Wechselstrom entwickelte mittlere Joulesche Wärme eintritt), bezeichnet man als Stromeffekt.

Die Quadratwurzel aus dem Stromeffekt ist die sog. Effektivstromstärke. Ihr ist der Ausschlag proportional, wenn die Skala der Instrumente in der angegebenen Weise (Anm. der vor. S.) verändert ist. Bei gewöhnlichen Wechselströmen wird sie häufig benutzt, unseren Zwecken entspricht mehr der Stromeffekt.

C. Scheinbarer Widerstand bei Wechselströmen.

Ein sinusförmiger Wechselstrom entsteht dann, wenn eine sinusförmige Wechselspannung: $V = V_0 \sin \cdot \omega t$ an die Enden eines Leiters angelegt wird.

Der Strom, der dabei zustandekommt, ist aber im allgemeinen nicht mehr, wie bei einer Gleichspannung, bestimmt durch den Widerstand des Leiters, den wir zur Unterscheidung von anderen „scheinbaren Widerständen" jetzt als Ohmschen Widerstand bezeichnen wollen.

Wenn z. B. eine Wechselspannung an einen Leiter von sehr kleinem Ohmschen Widerstand angelegt wird, so fließt doch nur ein sehr kleiner Strom, falls der Leiter eine beträchtliche Selbstinduktion besitzt; weil nämlich bei jeder Stromänderung in dem Leiter durch Induktion elektromotorische Kräfte entstehen, die der Änderung des Stromes entgegenwirken. Man schreibt daher der Selbstinduktion einen scheinbaren Wechselstromwiderstand zu, die Induktanz.

Wird in einen Stromkreis ein Kondensator eingefügt, so bedeutet das bei Gleichstrom Unterbrechung bzw. unendlich großen Widerstand. Ein Wechselstrom kann aber in einem solchen Kreise wohl zustandekommen. Denn, solange die Spannung in einer Richtung wirkt, lädt sie die Platten des Kondensators in einem bestimmten Sinne auf, in der folgenden Halbperiode kehrt sie ihren Sinn um, und lädt entgegengesetzt auf, und dieses Aufladen bedingt natürlich jedesmal einen Strom. Ein eigentlicher „Leitungs"-Strom fließt dabei allerdings nur auf den Drähten bis zu den Kondensatorbelegungen. Im Isolator wird er ersetzt durch den „Verschiebungsstrom". Den scheinbaren Widerstand eines Kondensators gegenüber einem Wechselstrom bezeichnet man als Kondensanz.

Die drei Arten von Widerstand können einzeln oder zusammen im Wechselstromkreis vorhanden sein, wir betrachten im folgenden einige der wichtigsten Fälle genauer.

a) Ohmscher Widerstand.

Liegt an den Enden des Ohmschen Widerstandes R eine Sinusspannung: $V = V_0 \sin \omega t$, so hat der Strom in in jedem Augenblick den Wert:

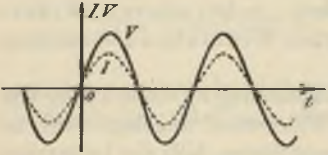


Fig. 8.

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t \,.$$

Strom und Spannung sind gleichphasig (Fig. 8). Das Verhältnis der Momentanwerte von Spannung und Strom ist konstant ($= R$). Im Widerstand wird in der Zeit τ eine Wärmemenge entwickelt gleich:

$$= \int_0^\tau I \cdot V dt = R \int_0^\tau I^2 dt \,.$$

Also pro Zeiteinheit, wenn wir den Stromeffekt $\mathfrak{J}$ einführen:

$$R \cdot \mathfrak{J} \quad (= I_{\text{eff}}^2 \cdot R) \,.$$

b) Selbstinduktion.

Liegt eine Spannung

$$V = V_0 \sin \omega t$$

an den Enden eines Leiters mit der Selbstinduktion L (und mit verschwindend kleinem Ohmschen Widerstand), so wird ein Strom I entstehen, der so groß ist, daß die in der Selbstinduktion induzierte EMK $E = -L\frac{dI}{dt}$, der angelegten Spannung V entgegengesetzt gleich ist.

Es gilt also:

$$L\frac{dI}{dt} = V.$$

Dieser Gleichung genügt der folgende Wert von I:

$$I = -\frac{V_0}{\omega L}\cos \omega t = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Aus diesem Ausdruck, sowie aus der graphischen Darstellung Fig. 9 ersieht man, daß der Strom gegen die Spannung um $\frac{\pi}{2}$ oder 90° phasenverschoben ist; und zwar „eilt er ihr nach", d. h. er erreicht seinen Maximalwert zu einer (um eine viertel Periode) späteren Zeit als die Spannung. Man bemerkt, daß das Verhältnis der Momentanwerte von V und I einen von der Zeit abhängigen, periodischen Wert hat. Von einem eigentlichen Widerstand kann man daher nicht sprechen. Als Wert für den Wechselstromwiderstand, die Induktanz, nimmt

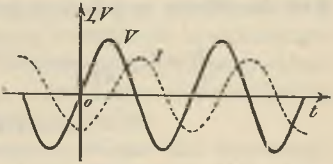


Fig. 9.

man das Verhältnis der Amplituden von Spannung und Strom:

$$\frac{V_0}{I_0} = \omega L$$

(das ist zugleich das Verhältnis von Effektivspannung[1]) und Effektivstrom).

Die im Leiter geleistete Arbeit ist in jedem Augenblick $I \cdot V dt$, also während einer Hälfte der Periode positiv, während der anderen negativ. Im ganzen wird vom Strom in der widerstandslosen Selbstinduktion keine Energie abgegeben, wovon man sich durch Integrieren überzeugt. Die Energie, die der Strom in dem einen Teil der Periode hergibt, wird zur Herstellung des magnetischen Feldes der Selbstinduktion verwandt und wird beim Verschwinden desselben wieder als Stromenergie zurückgegeben.

c) Kapazität.

Wirkt die Spannung $V = V_0 \sin \omega t$ an den Klemmen eines Kondensators mit der Kapazität C, dann ist nach (2) $S \cdot 6$ der Strom in jedem Augenblick:

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} = \omega C V_0 \cos \omega t$$

$$= \omega C V_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)^{2)}.$$

Auch hier ist (vgl. Fig. 10) das Verhältnis der Momentanwerte von Strom und Spannung kein von der Zeit unabhängiges. Als Wechselstromwiderstand des Kondensators

[1]) Spannungseffekt und Effektivspannung werden in der gleichen Weise wie Stromeffekt usw. als Mittelwerte der Spannung definiert.

[2]) Es ist hier $I = +C\frac{dV}{dt}$ $\left(\text{statt } I = -C\frac{dV}{dt}\right)$ gesetzt, weil wir den Strom durch den Kondensator dann als positiv rechnen wollen, wenn er im Sinne der Spannung durch den Kondensator fließt. In (2) ist der Strom dann positiv gerechnet, wenn er durch den Schließungsdraht des Kondensators im Sinne der Spannung fließt.

oder als Kondensanz bezeichnet man das Verhältnis der Amplituden:

$$\frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}.$$

Dieser scheinbare Widerstand nimmt mit wachsender Frequenz ab, während die Induktanz der Frequenz proportional ist.

Spannung und Strom sind auch hier um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander phasenverschoben, es eilt aber jetzt der Strom der Spannung voraus. Auch im Kondensator gibt der Wechselstrom im Mittel keine Energie ab.

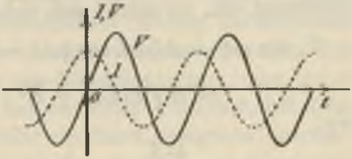


Fig. 10.

d) Ohmscher Widerstand und Selbstinduktion hintereinander geschaltet.

Wenn im Wechselstromkreis zwei oder mehrere Arten von Widerstand vorhanden sind, dann werden die Beziehungen zwischen Spannung und Strom komplizierter. Wir wollen hier nur noch den folgenden Fall betrachten: Ein Stromkreis bestehe aus einem Leiter, der gleichzeitig Widerstand und Selbstinduktion besitzt.

Es wirke an den Klemmen wieder die Spannung: $V = V_0 \sin \omega t$. Es wird dann ein solcher Strom I zustandekommen, daß die nach dem Ohmschen und dem Induktionsgesetz sich ergebende Gegenspannung $-IR - L\frac{dI}{dt}$ der angelegten Spannung gerade entgegengesetzt gleich ist; daß also gilt:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V.$$

Dieser Differentialgleichung genügt der folgende Ansatz für I:

$$I = A \sin(\omega t - \varphi)$$

wo A und φ noch zu bestimmende Konstanten sind.

Setzt man den Ausdruck für I in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$V_0 \sin \omega t = A\,[\omega L \cos(\omega t - \varphi) + R \sin(\omega t - \varphi)]$$
$$= A\sqrt{(\omega L)^2 + R^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi + \psi)\,,$$

wo:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L}{R}\,,$$

vgl. S. 21.

Also wird:

$$A = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}\,; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

und:

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \sin(\omega t - \varphi)\,.$$

Der scheinbare Widerstand ist: $\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}$; man nennt ihn Impedanz. Der Strom eilt der Spannung nach; die Phasenverschiebung liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Wenn ωL sehr groß ist gegen R, so ist sie sehr nahe gleich $\frac{\pi}{2}$; wenn ωL klein gegen R ist, verschwindet sie; wie auch nach dem früheren zu erwarten. Man bemerkt, daß bei hohen Frequenzen schon eine kleine Selbstinduktion hinreicht, um den ersten Fall herbeizuführen.

D. Transformation von Wechselströmen.

Fließt Wechselstrom durch eine Spule L_1, in deren Nähe sich eine zweite L_2 befindet, derart, daß zwischen den beiden Spulen eine gegenseitige Induktion L_{12} besteht, so wird in der zweiten Spule eine Wechselspannung induziert; wenn sie geschlossen ist, kommt in ihr ein Wechselstrom zustande. Die beiden Stromkreise heißen miteinander „gekoppelt". Die Vorrichtung bezeichnet man in der technischen Ausführung als Transformator; eine ganz ähnliche Wirkungsweise hat auch der Induktor, bei dem nicht Wechselstrom, sondern ein durch geeignete Vorrichtungen periodisch unterbrochener und geschlossener Gleichstrom als Primärstrom dient.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wo die zweite Spule offen ist und also in ihr kein Strom zustandekommt.

Wenn an den Klemmen der Primärspule (die einen gegen die Induktanz kleinen Widerstand haben soll), eine Spannung herrscht: $V_1 = V_{10} \sin \omega t$ und in ihr entsprechend der Strom $I_1 = \dfrac{V_{10}}{\omega L_1} \cos \omega t$ fließt, dann wird in der Sekundärspule eine EMK induziert:

$$V_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt} = \frac{L_{12}}{L_1} V_1 .$$

Sind die beiden Spulen so gegeneinander gelagert, daß ihre gegenseitige Induktion den größten möglichen Wert hat, wie das der Fall, wenn sie beide lange, über denselben Kern gewickelte Spulen sind, dann ist $L_{12} = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$. In diesem Fall wird also

$$V_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot V_1 .$$

Die Spannungen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Selbstinduktionen, bzw. nach dem früheren wie die Windungszahlen ihrer Spulen.

Dieser Fall ist bei den technischen Transformatoren mit großer Annäherung verwirklicht. Bei den Transformatoren dagegen, die für schnelle Schwingungen verwandt werden, wird die gegenseitige Induktion meist kleiner, „die Koppelung loser" gemacht.

Wird die Sekundärspule durch einen Widerstand geschlossen, so fließt in ihr ein Strom I_2, dessen Amplitude sich nach (C., d) bestimmt zu[1]):

(Der gesamte Ohmsche Widerstand des Sekundärkreises sei R_2, seine Impedanz also: $\sqrt{(\omega L_2)^2 + R_2^2}$).

$$I_{20} = \frac{V_{20}}{\sqrt{(\omega L_2)^2 + R_2^2}} = \frac{L_{12}}{L_1} \frac{V_{10}}{\sqrt{(\omega L_2)^2 + R_2^2}}$$

$$= \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{(\omega L_2)^2 + R_2^2}} \cdot I_{10} .$$

Zwischen den Strömen I_2 und I_1 besteht im allgemeinen eine Phasenverschiebung. Ist der Widerstand R_2 in dem Sekundärkreis gegen die Induktanz zu vernachlässigen, so ist einfach:

$$I_2 = \frac{L_{12}}{L_2} I_1 ;$$

der Strom in der Sekundärspule ist also unabhängig von der Frequenz proportional demjenigen in der Primärspule; und zwar fließt der eine immer im entgegengesetzten Sinne wie der andere (Phasenverschiebung $= \pi$). wie man leicht überlegt.

Dies Resultat ist praktisch wichtig; Meßinstrumente,

---

[1]) Falls dabei die „Rückwirkung" des Sekundärstromes auf den Primärstrom vernachlässigt wird.

wie Hitzdrahtgalvanometer und ähnliche, darf man bei hohen Frequenzen meist nicht direkt in den zu untersuchenden Stromkreis legen, da ihr Widerstand dort stört. Man schaltet die Instrumente daher mit einer geeigneten Selbstinduktion L_2 zu einem besonderen Stromkreis zusammen und koppelt diesen mit dem zu untersuchenden Stromkreis. Wenn L_2 für alle in Betracht kommenden Frequenzen der oben aufgestellten Bedingung genügt, so ist der Strom im Instrument dem zu messenden immer proportional.

E. Skineffekt.

Ein Gleichstrom, der durch einen Leiter von konstantem Querschnitt fließt, etwa durch einen zylindrischen Draht, ist gleichmäßig über den Querschnitt verteilt; in jedem Flächenelement eines Querschnitts ist die Strömung dieselbe. Beim Wechselstrom ist das im allgemeinen nicht mehr der Fall, die Stromdichte ist vielmehr in den inneren Teilen des Querschnitts kleiner als am Rand. Bei hohen Frequenzen fließt der gesamte Strom wesentlich nur in der oberflächlichsten Schicht des Drahtes. Diese Erscheinung bezeichnet man als Skin-(Haut-) Effekt.

Ihr Zustandekommen können wir uns etwa wie folgt erklären. Wir denken uns den massiven Draht, durch den der Strom fließen soll, aus ineinandergesteckten dünnwandigen Röhren aufgebaut. In Fig. 11 sind davon die äußerste und eine mittlere gezeichnet.


Fig. 11.

Die Querschnitte der einzelnen Röhren seien gleich, so daß sie alle für Gleichstrom denselben Widerstand haben. Wird also an die Enden des Gebildes eine Gleichspannung angelegt, so fließt durch jede Röhre der gleiche Strom.

Betrachten wir nun das magnetische Feld, das eine solche stromdurchflossene Röhre liefert. Dasselbe ist in ihrem Innern Null, im Außenraum ist es dasselbe, wie es ein linearer Strom liefern würde, der in der Achse fließt und der dieselbe Stromstärke hat[1]).

Wenn also die innere Röhre der Figur vom gleichen Strome durchflossen wird, wie die äußere, so liefert sie ein magnetisches Feld auch im Zwischenraum der beiden Röhren, während die äußere Röhre dort kein Feld und im Außenraum dasselbe Feld wie die innere Röhre liefert.

Der gleiche Strom in der inneren Röhre hat also ein Feld mit größerer magnetischer Energie; d. h. aber, die innere Röhre hat größere Selbstinduktion als die äußere bei gleichem Ohmschen Widerstand.

Wenn nun an die beiden Röhren, die als parallel geschaltete Leiter aufzufassen sind[2]), eine Wechselspannung angelegt wird, so fließt offenbar der größere Teil des Gesamtstroms durch die Röhre mit der kleineren Impedanz, also durch die äußere; und entsprechend beim massiven Draht durch die äußeren Schichten. Der Unterschied wird um so größer sein, je höher die Frequenz und je kleiner der spez. Widerstand des Metalles ist.

Wie sich aus einer genaueren Betrachtung ergibt, nimmt nicht nur die Stromdichte nach dem Innern des Drahtes zu ab, sondern es treten auch Phasenverschiebungen auf zwischen der Strömung in verschiedenen Schichten. Strenggenommen muß daher die Definition des Selbstinduktionskoeffizienten (und auch des Wider-

[1]) wenn die Röhre bzw. der massive Draht entweder gerade oder zu einer Figur zusammengebogen ist, bei der keine scharfen Knicke vorkommen und zwei Stellen des Drahtes einander nicht sehr nahe kommen. Als Beispiel können wir uns den Draht etwa zu einem weiten Kreis gebogen denken.

[2]) zwischen denen übrigens noch gegenseitige Induktion besteht.

standes) für Wechselstrom anders gefaßt werden, als oben angegeben ist.

Wir gehen darauf nicht näher ein, sondern bemerken nur, daß wir mit den bisherigen Vorstellungen auskommen, wenn wir jedem Leiter bestimmte Werte der Selbstinduktion und des (Ohmschen) Widerstandes zuschreiben, welche aber von der Frequenz abhängig sind.

Wie auch unsere angenäherte Betrachtung voraussehen läßt, nimmt die Selbstinduktion mit wachsender Frequenz ab und wird für sehr hohe Frequenzen, wo der Strom nur in der Oberflächenschicht fließt, gleich der Selbstinduktion der betreffenden Röhre für Gleichstrom.

Der Ohmsche Widerstand eines Leiters nimmt dagegen mit wachsender Frequenz zu, da ja der Strom durch immer kleinere Querschnitte fließt.

Während die Veränderlichkeit der Selbstinduktion mit der Frequenz klein ist und meist ganz vernachlässigt werden darf, sind die Änderungen des Widerstandes beträchtlich; und der Widerstand für Wechselstrom von hoher Frequenz wird vielemal größer als der für Gleichstrom.

Die Widerstandsvermehrung eines Drahtes ist um so kleiner, je kleiner sein Querschnitt ist; offenbar, denn wenn man sehr dünne Drähte verwendet, muß die Stromverteilung über den kleinen Querschnitt wieder gleichförmig sein.

Man nimmt daher dünne Drähte als Leiter dort, wo Widerstand und Selbstinduktion von der Frequenz möglichst unabhängig sein sollen, z. B. als Hitzdrähte für Galvanometer usw. Aus dünnen, voneinander isolierten und verdrillten Drähten stellt man Litzen her, die kleinen und bis zu einer gewissen, von der Dicke des Einzeldrahts abhängigen Frequenz konstanten Widerstand und konstante Selbstinduktion haben.

Wird ein massiver Draht zu einer Spule aufgewickelt, so ist die Stromverteilung im Querschnitt nicht mehr symmetrisch um die Drahtachse. Betrachten wir zwei Stromfäden im Draht: einen an der Innenseite der Spule verlaufenden (1) (Fig. 12) und einen auf der Außenseite verlaufenden (2). Der erste entspricht einer Spule von kleinerem Querschnitt, also von kleinerer Selbstinduktion. Durch ihn verläuft bei Wechselstrom der größere Teil des Stromes.

Fig. 12.

Bei einer Spule aus massivem Draht verläuft also der Strom wesentlich auf der Drahtoberfläche, und zwar auf der Seite des Drahtes, die dem Spuleninnern zugekehrt ist.

Die Abhängigkeit des Widerstandes und der Selbstinduktion von der Frequenz ist daher bei der Spule eine andere als bei dem einfachen Skineffekt, qualitativ allerdings ändert sich wenig.

F. Quasistationärer Strom.

Wir sehen, daß bei Wechselstrom die Stromverteilung von derjenigen bei Gleichstrom oder „stationärem Strom" wesentlich abweichen kann und wir bezeichnen daher diese Stromverteilung als quasistationäre. Ein Merkmal bleibt diesen beiden Arten der Stromverteilung gemeinsam: der Gesamtstrom, der in einem bestimmten Augenblick durch einen Querschnitt fließt, ist überall der gleiche, an welcher Stelle des Drahtes auch der Querschnitt angenommen wird. (Die Elektrizitätsmenge, die durch einen Querschnitt hindurchtritt, muß nämlich auch durch jeden anderen treten, da sie sich nach unseren bisherigen Voraussetzungen nirgends anhäuft.) Später werden wir Drahtleitungen und Stromverteilungen betrachten, bei denen das nicht mehr der Fall ist, wo vielmehr die Stromstärken an verschiedenen Stellen des Drahtes verschieden sind. Diese Verteilung bezeichnet man als „nicht quasistationäre“.

II. Schwingungen in Kondensatorkreisen.

1. Eigenschwingungen von Kondensatorkreisen.

Im folgenden betrachten wir Wechselströme, zu deren Erzeugung und Untersuchung „schwingungsfähige Gebilde“ verwandt werden. Diese Ströme sind es, welche wir speziell als elektrische Schwingungen bezeichnen.

Das einfachste schwingungsfähige Gebilde ist der Kondensatorkreis, mit dessen Eigenschaften wir uns zunächst befassen wollen.

A. Kondensatorkreis.

Er besteht aus einem Kondensator (Kapazität C), dessen Klemmen durch eine Drahtleitung, die eine Selbstinduktion L besitzt, miteinander verbunden sind (Fig. 13).

Fig. 13.

Um ihn in Schwingungen zu versetzen, kann man in folgender Weise verfahren: Der Kreis wird zunächst an einer Stelle (F) unterbrochen; es wird dann die Kapazität durch irgend eine Elektrizitätsquelle auf eine bestimmte Spannung aufgeladen und nun plötzlich die Unterbrechungsstelle leitend überbrückt.

Das kann geschehen durch Schließen eines Kontaktes; meist wird es automatisch besorgt durch den Funken, der an der Unterbrechungsstelle F überspringt, wenn beim

Aufladen die Spannung dort genügend hoch geworden ist. Unten gehen wir näher auf die Eigenschaften des Funkens ein; vorläufig können wir annehmen, daß sich die Funkenstrecke nach dem momentan geschehenden Einsetzen so verhält, wie ein metallischer Leiter von kleinem Widerstand.

Betrachten wir nun qualitativ die Vorgänge, welche sich nach dem Schließen des Kontaktes bzw. dem Einsetzen des Funkens im Kondensatorkreise abspielen.

Im ersten Augenblick ist die Kapazität auf eine bestimmte Potentialdifferenz aufgeladen (Anfangs- oder Einsatzspannung); durch die Spule fließt vorerst noch kein Strom. Da aber der Kreis geschlossen ist, beginnt die Kapazität sich durch die Selbstinduktion hindurch zu entladen und es beginnt ein Strom von allmählich anwachsender Stärke. Dabei wird um die Drahtleitung, die wir uns als Spule oder als einfachen Kreis vorstellen können, ein magnetisches Feld erzeugt. Wenn nun der Kondensator vollständig entladen ist, und also an den Enden der Spule keine den Strom unterhaltende Potentialdifferenz mehr wirkt, zerfällt dieses magnetische Feld und induziert dabei in der Spule einen Strom, der im alten Sinne weiter fließt, also die Belegungen des Kondensators umgekehrt wie vorher wieder auflädt. Der Strom nimmt immer mehr ab, je kleiner das Feld wird und je mehr die Kapazität sich auflädt; schließlich ist der alte Anfangszustand, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, wieder hergestellt und das Spiel wiederholt sich. Man übersieht, daß der zeitliche Verlauf des Stromes, sowohl als der der Spannung am Kondensator, dargestellt sein wird durch eine sinusähnliche Kurve.

Die Energie des Kondensatorkreises, welche anfänglich als elektrostatische Energie der geladenen Kapazität vorhanden war ($\frac{1}{2} C \cdot V_0^2$, wenn V_0 die Anfangsspannung ist), verwandelt sich zunächst in die magnetische Energie des Feldes der Selbstinduktion. Im Augenblick, wo der Kondensator vollständig entladen ist, ist nur magnetische Energie im Betrage $\frac{1}{2} LI^2$ vorhanden. Diese verwandelt sich rückwärts wieder in elektrostatische und so fort.

Wenn der Widerstand im Kreise Null ist, und ihm auch auf keine andere Weise Energie entzogen wird (was allerdings in Wirklichkeit nie der Fall sein kann), so dauern die Schwingungen offenbar kontinuierlich an, da die Energie immer wieder unvermindert in die alte Form übergeführt wird. Praktisch wird natürlich jedesmal, wenn Strom fließt, ein gewisser vom Widerstand abhängiger Bruchteil der Energie in Joulesche Wärme übergeführt und es können außerdem noch andere Energieverluste auftreten, so daß die Energie der Schwingungen immer geringer wird. Die Amplituden werden also immer kleiner, klingen ab; die Schwingungen sind „gedämpft". Der Strom ist nicht mehr eigentlich als Wechselstrom zu bezeichnen, wenn man als charakteristisch für diesen die strenge Periodizität ansieht. Aber es unterscheiden sich gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen in ihrem Verhalten so wenig, daß man oft auch die ersteren als Wechselstrom bezeichnet.

B. Differentialgleichung des Kondensatorkreises.

Um die Vorgänge quantitativ zu behandeln, stellen wir die Differentialgleichung des Kreises auf. Wir erhalten sie nach dem vorhergehenden in folgender Weise.

In einem gegebenen Augenblick enthält der Kondensatorkreis eine bestimmte Energiemenge, die sich aus der elektrostatischen Energie des Kondensators und der magnetischen Energie der Selbstinduktion zusammensetzt. Wenn I den Momentanwert der Stromstärke, V den der Spannung am Kondensator bezeichnet, dann gilt:

$$W_e + W_m = W = \tfrac{1}{2} L I^2 + \tfrac{1}{2} C V^2 .$$

Wenn der Widerstand des Kreises R ist, verwandelt sich von dieser Energie in der Zeit dt der Betrag $I^2 R \cdot dt$ in Joulesche Wärme. (Wir wollen vorläufig alle anderen Arten von Energieverlusten ausschließen; man bemerkt, daß jede Energieentziehung, die proportional I^2 ist, ähnlich wirken muß, wie ein Widerstand.)

Nach dem Energieprinzip muß dann die Abnahme der Energie W gleich der in derselben Zeit erzeugten Wärme sein, also:

$$-dW = I^2 R \cdot dt$$

oder

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} C V^2\right) = I^2 R$$

$$-I \cdot L \frac{dI}{dt} - V \cdot C \cdot \frac{dV}{dt} = I^2 R .$$

Nach (2) S. 10 ist: $I = -C \dfrac{dV}{dt}$ also:

(16) $$-L \frac{dI}{dt} + V = I \cdot R .$$

Diese Gleichung kann als „Ohmsches Gesetz" für den Kondensatorkreis bezeichnet werden: rechts steht das Produkt aus Stromstärke und Widerstand, links die Summe der im Kreise wirkenden Spannungen.

Aus (16) erhält man durch Einsetzen von (2)

(17) $$L \frac{d^2 V}{dt^2} + R \frac{dV}{dt} + \frac{V}{C} = 0 ,$$

bzw. wenn zuerst nach t differenziert wird:

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{17a}$$

I und V genügen also derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung (Pendelgleichung).

Die Schwingungen eines Kondensatorkreises, welche nach dieser Gleichung vor sich gehen, bezeichnet man (im Gegensatz zu anderen, im nächsten Kapitel behandelten) als seine Eigenschwingungen, da der Kreis dabei, nachdem er einmal angeregt ist, ohne fremde Einwirkung schwingt.

C. Mechanische Analogien.

Unsere Differentialgleichungen sind formell identisch mit denjenigen eines mechanischen schwingenden Systems, wie es etwa realisiert ist durch einen an seine Ruhelage durch elastische Kräfte gebundenen Massenpunkt, oder durch das Pendel.

Bezeichnen wir bei diesen die Exkursion mit x, die Masse (Trägheitsmoment) mit m, die Direktionskraft (Drehmoment) mit a, die Reibungskonstante mit b, so gilt bekanntlich die Gleichung:

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + ax = 0. \tag{17b}$$

Man sieht, daß vollkommene Analogie besteht, wenn die Selbstinduktion L der Masse m, die reziproke Kapazität $\frac{1}{C}$ der Direktionskraft a, und der Widerstand R der Reibungskonstante b verglichen wird.

Vergleicht man die Exkursionen x der Spannung am Kondensator, so würde die Geschwindigkeit dem Strom proportional sein.

Der oben erörterten Verwandlung von elektrostatischer Energie in magnetische würde z. B. beim Modell entsprechen diejenige von potentieller in kinetische Energie.

Der Erregung durch einen Funken würde es entsprechen, wenn wir das aus seiner Ruhelage herausgebrachte Pendel plötzlich loslassen.

D. Die Lösung der Gleichung.

Eine Lösung der Gleichungen (17) bzw. (17 a) hat die Form

$$I \text{ bzw. } V = e^{-\alpha t};$$

setzt man nämlich diesen Wert in die Gleichung ein, so wird:

$$L(\alpha^2 e^{-\alpha t}) - R(\alpha e^{-\alpha t}) + \frac{e^{-\alpha t}}{C} = 0$$

und man sieht, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn für α eine Wurzel der Gleichung:

$$L\alpha^2 - R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \tag{18}$$

gesetzt wird.

Aus (18) erhält man für α zwei Werte: α_1 und α_2

$$\alpha = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}\right)}.$$

Die beiden partikularen Lösungen $e^{-\alpha_1 t}$ und $e^{-\alpha_2 t}$, die wir so erhalten, sind voneinander unabhängig. Multiplizieren wir also jede mit einer willkürlichen Konstante und addieren sie, so haben wir die vollständige Lösung unserer Gleichung:

$$I \text{ bzw. } V = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}. \tag{19}$$

Wenn die α sich als reelle Größen ergeben, wenn also

$$\frac{R^2}{4L^2} \gtreqless \frac{1}{LC}; \qquad R^2 \gtreqless 4\frac{L}{C} \quad \text{ist;}$$

d. h. wenn der im Kondensatorkreise vorhandene Widerstand einen kritischen Wert übersteigt, dann ist die Lösung einfach eine Exponentialfunktion bzw. eine Summe von zweien. Der Kondensatorkreis führt dann keine eigentlichen Schwingungen aus, er ist „aperiodisch" oder „überaperiodisch" gedämpft.

Dieser Fall interessiert uns im folgenden wenig; wir wollen die Lösung genauer nur betrachten unter der Voraussetzung, daß

$$R^2 < 4\frac{L}{C} \quad \text{ist.} \tag{20}$$

Dann werden die beiden Werte von α komplex

$$\alpha = \delta \pm i\omega; \qquad i = \sqrt{-1}$$

wo gesetzt ist:

$$\delta = \frac{R}{2L}; \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}. \tag{21}$$

Unsere Lösung wird dann:

$$I \text{ bzw. } V = A_1 e^{-\delta t} e^{+i\omega t} + A_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}.$$

Dieser Ausdruck hat bloß komplexe Form. (Wenn ein reeller Anfangszustand vorliegt, so bestimmen sich die Koeffizienten A_1 und A_2 so, daß der Ausdruck reell wird.)

Man kann also wegen $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ unter Einführung anderer Bezeichnungen für die willkürlichen Konstanten schreiben:

$$I \text{ bzw. } V = e^{-\delta t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)$$

oder umgeformt:

$$I \text{ bzw. } V = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi). \tag{22}$$

E. Frequenz und Dämpfung des Kondensatorkreises.

Die Lösungen (22), veranschaulicht durch Fig. 14, stellen gedämpfte Sinusschwingungen dar; die Amplituden nehmen nach einem Exponentialgesetz ab.

Das Verhältnis einer Amplitude A zur nächstfolgenden gleichgerichteten A' ist: (wie man aus (22) ersieht, folgen die Maximalwerte aufeinander in Zeiten $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$)

$$\frac{A}{A'} = e^{\delta \cdot \frac{2\pi}{\omega}} = e^{\delta\tau}.$$

D. h. das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden ist während des ganzen Ablaufs der Schwingun-

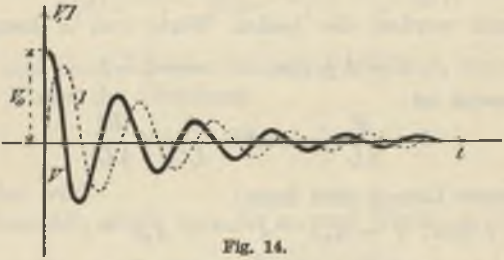


Fig. 14.

gen konstant. Die Logarithmen zweier aufeinanderfolgender Amplituden unterscheiden sich also um eine konstante Zahl:

$$\mathfrak{d} = \delta \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \delta \cdot \tau. \tag{23}$$

$\mathfrak{d}$ heißt das logarithmische Dekrement der Schwingungen, bzw. des Kondensatorkreises,

δ die Dämpfungskonstante[1]).

Die Frequenz (Schwingungszahl in 2π sec) der Schwingungen ist nach (21)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2}\,. \tag{24}$$

Wenn die Dämpfung klein ist, kann man genähert schreiben:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,. \tag{24a}$$

Die Schwingungsdauer ist also:

$$\tau = 2\pi\sqrt{L\cdot C} \quad \text{(Thomsonsche Formel)}. \tag{24b}$$

Da δ in dem Ausdruck für ω quadratisch auftritt, so ist die Annäherung, welche (24a) gibt, eine sehr gute.

Für den Fall eines logarithmischen Dekrementes $\mathfrak{d} = 0{,}1$ berechnet sich die Frequenz nach der Näherungsformel zu:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und nach strengerer Rechnung zu:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2} = \sqrt{\omega^2 - \frac{\omega^2}{(2\pi)^2}\mathfrak{d}^2}$$
$$= \omega\left(1 - \frac{1}{8\pi^2}\mathfrak{d}^2\right) \approx \omega - \frac{\omega}{10000}\,.$$

---

[1]) Zur Charakterisierung der Dämpfung einer Schwingung verwendet man meist das logarithmische Dekrement, da dasselbe auch bei unbekannter Schwingungszahl die Art des Abklingens übersehen läßt. Das Verhältnis einer Amplitude zur folgenden ist einfach $e^{-\mathfrak{d}}$.

Um einen ungefähren Anhalt zu geben, sei bemerkt, daß unter gewöhnlichen Verhältnissen das logarithmische Dekrement in einem Kondensatorkreis mit Funken ca. 0,1 beträgt. Das bedeutet: die Amplitude fällt auf $\frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}7}$ nach 10 Schwingungen. Beim funkenlosen Kreise ist $\mathfrak{d} = 0{,}01$ (ungefähr), entsprechend vergehen 100 Schwingungen, ehe die Amplitude auf $\frac{1}{e}$ gesunken ist.

Der Fehler ist also für die meisten Zwecke ganz zu vernachlässigen. Bei Überschlagsrechnungen, wo es sich nur um eine Kenntnis der Schwingungszahlen handelt, kann man daher auch von vornherein die Kreise als ungedämpft bzw. widerstandslos voraussetzen.

F. Anfangsbedingungen.

Um die Schwingungen vollständig zu beschreiben, haben wir noch die willkürlichen Konstanten in (22) aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Wenn wir den Kreis in der oben beschriebenen Weise durch einen Funken erregen, dann ist in dem Augenblick, wo der Funke einsetzt, die Spannung an den Klemmen des Kondensators eine gegebene (Anfangsspannung V_0) und der Strom ist Null. Diesen Augenblick wollen wir als Nullpunkt der Zeit nehmen, dann muß die Lösung für $t = 0$ ergeben:

$V_{(t=0)} = V_0$,

$I_{(t=0)} = 0$, d. h. wegen $I = -C\frac{dV}{dt}$ auch: $\frac{dV}{dt} = 0$.

Unsere Lösung in der Form (22) liefert:

$$V_{(t=0)} = A\cos\varphi$$

$$\frac{dV}{dt}_{(t=0)} = -A(\omega\sin\varphi + \delta\cos\varphi)\,.$$

Damit also die Anfangswerte die angegebenen werden, müssen A und φ aus den Gleichungen: $A\cos\varphi = V_0$, $n\sin\varphi + \delta\cos\varphi = 0$ bestimmt werden.

Es ergibt sich:

$$A = V_0\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\delta}{\omega}\,.$$

$\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2$ wird, wie schon oben bemerkt, in fast allen Fällen gegen 1 zu vernachlässigen sein; meist wird auch φ so klein, daß es nicht berücksichtigt zu werden braucht; dann nimmt die Lösung für V die einfache Form an:

(25) $V = V_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$ (Fig. 14, ausgezogene Kurve).

Wegen $I = -C \cdot \frac{dV}{dt}$ erhält man daraus unter ähnlichen Vernachlässigungen für I:

(26) $I = \omega C V_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$ (Fig. 14, punktierte Kurve).

Strom und Spannung sind gegeneinander um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

G. Quasistationäre Kreise.

Es erübrigt noch, auf eine Voraussetzung unserer Ableitung der Schwingungsgleichung des Kondensatorkreises hinzuweisen, die wir oben nicht ausdrücklich erwähnt haben, die aber den Anwendungsbereich der Formeln beschränkt.

Wir hatten angenommen, daß bei einem Kondensatorkreise sich die elektrostatische Energie als $\frac{1}{2} \cdot CV^2$, die magnetische sich als $\frac{1}{2} \cdot LI^2$ ansetzen lasse; unter C war dabei verstanden die Kapazität des Kondensators, unter L die Selbstinduktion der Drahtleitung.

Dieser Ansatz ist nun nicht allgemein für jeden Kondensatorkreis richtig. Auf der Drahtleitung selber müssen sich, da ihr und ihren Teilen offenbar eine gewisse Kapazität zuzuschreiben ist, elektrostatische Ladungen ansammeln. Dann ist also elektrostatische Energie nicht nur im Kondensator vorhanden und je nach der Art der Leitung kann die verteilte elektrostatische Energie einen mehr oder weniger großen Bruchteil der gesamten Energie ausmachen. Ferner wird dann der Strom, der nach einer Stelle des Drahtes hinfließt, nicht mehr gleich dem von dort abfließenden sein, weil ein Teil der zugeführten Elektrizität zur Aufladung verwandt wird. Es variiert also die Stromstärke längs der Leitung, die Stromverteilung ist nicht quasistationär.

Nur dann, wenn die Ladungen auf dem Drahte einen verschwindend kleinen Teil derjenigen auf dem Kondensator[1]) ausmachen, und wenn entsprechend die Stromverteilung quasistationär ist, gelten unsere Formeln. Einen Kondensatorkreis, der diesen Bedingungen genügt, nennen wir einen quasistationären. Die Schwingungen eines nicht quasistationären Kreises sind komplizierter. Wir kommen später darauf zurück und werden dann auch genauer die Bedingungen kennen lernen, unter denen ein Kreis quasistationär ist. Die experimentelle Entscheidung darüber ist natürlich immer sehr einfach; sei es, daß man den Strom an verschiedenen Stellen mißt, oder daß man die Frequenz bestimmt und mit der nach Thomson berechneten vergleicht. Praktisch kann man die Kreise, namentlich, wenn nicht sehr hohe Frequenz gefordert wird, immer so dimensionieren, daß sie mit großer Annäherung quasistationär sind.

H. Stromeffekt gedämpfter Schwingungen.

Wenn eine gedämpfte Schwingung $I = I_0\, e^{-\delta t} \sin \omega t$ durch ein Hitzdrahtgalvanometer fließt, so wird dessen Ausschlag nicht konstant sein, da der Stromeffekt der Schwingung dauernd abnimmt. In den häufigsten Fällen

[1]) Das wird offenbar um so mehr der Fall sein, je größer die Kapazität des Kondensators und je kürzer die Drahtleitung ist.

klingt sogar der Strom so schnell ab, daß der Zeiger nur eine Zuckung oder eine Art ballistischen Ausschlag gibt, der in komplizierter Weise mit den Werten des Stromes zusammenhängt und sich zur Beobachtung nicht eignet.

Man richtet sich daher praktisch meist so ein, daß man nicht einen einzelnen gedämpften Schwingungszug durch das Instrument schickt, sondern eine regelmäßige Folge von solchen (Fig. 15). Wenn der Kondensatorkreis, der die Schwingungen liefert, durch Funken und Induktor erregt wird, ist das immer von selber der Fall: Funken

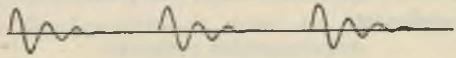


Fig. 15.

und Schwingungszüge folgen aufeinander im Tempo des Unterbrechers am Induktor. Und zwar mögen sie so rasch aufeinander folgen, daß sich wieder eine konstante Einstellung des Galvanometers ergibt. Der konstante Ausschlag ist dann proportional dem Mittelwert von I^2, also dem Ausdruck $\frac{1}{t}\int\limits_0^t I^2 dt$, wo das Integral über eine genügend lange Zeit zu nehmen ist.

Wenn, wie die Fig. 15 zeigt, und wie es praktisch meist ausreichend erfüllt ist, eine Schwingung schon bis zur Unmerklichkeit abgeklungen ist, ehe die zweite einsetzt, können wir den Beitrag einer Schwingung zum Integral setzen gleich:

$$\int\limits_0^\infty I^2 dt = I_0^2 \int\limits_0^\infty e^{-2\delta t} \sin^2 \omega t\, dt \approx \frac{I_0^2}{4\delta}\,.$$

Erfolgen pro Sekunde N derartige Schwingungen, so ist also der Mittelwert von I^2

$$J = N \cdot \frac{I_0^2}{4\delta}. \tag{27}$$

Diese Größe bezeichnet man ebenfalls als Stromeffekt, ihr ist der Ausschlag eines Hitzdrahtgalvanometers proportional. Kennt man die Zahl der Entladungen pro Sekunde N, so erhält man daraus den Stromeffekt der einzelnen Entladung.

In gleicher Weise wird der (etwa am Elektrometer zu beobachtende) Spannungseffekt von gedämpften Schwingungen definiert.

2. Kondensatorkreis unter der Einwirkung äußerer Kräfte.

A. Akustische Analogien.

Oben haben wir die Eigenschwingungen von Kondensatorkreisen untersucht, die dann zustande kommen, wenn der Kreis, dem einmal eine bestimmte Menge Energie zugeführt wurde, weiterhin sich selbst überlassen bleibt.

Nun kann ein Kreis auch in der Weise in Schwingungen versetzt werden, daß dauernd auf ihn geeignete äußere Kräfte wirken, die ihm fortwährend Energie zuführen.

Ganz analog kann ein Pendel z. B. dadurch in Schwingungen von großer Amplitude versetzt werden, daß man ihm in geeignetem Tempo kleine Anstöße gibt. Besonders die Akustik liefert viele Beispiele einer derartigen Erregung schwingungsfähiger Systeme: das Mittönen von Resonanzkästen, das Ansprechen von Saiten und Stimmgabeln auf ihren Eigenton und ähnliches. Es ist bekannt, daß die Amplituden des erregten Systems nur dann groß werden, wenn die erregende Kraft selber eine periodische, sinusförmige ist, und ihre Frequenz ungefähr übereinstimmt mit derjenigen der Eigenschwingungen des Systems. Diese Erscheinung bezeichnet man als Resonanz. Schwingungsfähige Gebilde, „Resonatoren" dienen daher zur Untersuchung von Tönen; man stellt mit ihrer Hilfe die Frequenz eines Tones fest, bzw. bestimmt die verschiedenen Frequenzen, die in einem Tongemisch enthalten sind.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse beim Kondensatorkreis.

B. Der Kondensatorkreis unter der Einwirkung ungedämpfter Schwingungen.

Auf ihn kann man in verschiedener Weise äußere periodische Kräfte einwirken lassen. Die einfachste und am häufigsten angewandte Art ist die folgende:

Man bringt eine von Wechselstrom, oder von Schwingungen durchflossene Spule in die Nähe seiner eigenen Selbstinduktion, so daß in dieser eine periodische elektromotorische Kraft induziert wird.

Die induzierende Spule kann dabei etwa die Selbstinduktion eines durch Funken erregten Kreises sein.

Bei dieser Art der Erregung können wir unter gewissen Voraussetzungen (vgl. S. 65 u. 73) annehmen, es wirke im Kondensatorkreise, eine elektromotorische Kraft E deren zeitlicher Verlauf gegeben ist.

Die Differentialgleichung des Kreises für diesen Fall erhalten wir, wenn wir in der früher aufgestellten Gleichung (16), die wir als Ohmsches Gesetz für den Kondensatorkreis bezeichneten, zu den im Kreise wirkenden Spannungen noch hinzufügen die von außen induzierte elektromotorische Kraft E.

Dann gilt also:

$$E - L\frac{dI}{dt} + V = IR. \tag{28}$$

Setzen wir für I den Wert: $I = -C \cdot \frac{dV}{dt}$ ein, so wird:

$$L\frac{d^2V}{dt^2} + R\frac{dV}{dt} + \frac{V}{C} = -\frac{E}{C}. \tag{29}$$

Diese Differentialgleichung unterscheidet sich von der früher behandelten (homogenen) nur durch das auf der rechten Seite auftretende Glied, das der erregenden Kraft proportional ist. Eine ganz ähnliche Gleichung ergibt sich für I.

Wir wollen nun zunächst für E eine möglichst einfache Form wählen, nämlich E als sinusförmig, ungedämpft annehmen, und zwar von der Form:

$$E = E_0 \cos \nu t\,. \tag{30}$$

Die Lösung von (29) können wir dann ansetzen in der Form:

$$V = A\cos(\nu t + \varphi)\,.$$

In (29) eingesetzt ergibt das:

$$\left(L\nu^2 - \frac{1}{C}\right)\cos(\nu t + \varphi) + \nu R \sin(\nu t + \varphi)$$

$$= \frac{E_0}{AC}\cos \nu t\,.$$

Die linke Seite läßt sich schreiben (S. 21):

$$\sqrt{\left(L\nu^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + (R\nu)^2} \cdot \cos[(\nu t + \varphi) - \psi]\,,$$

wenn $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{R\nu}{L\nu^2 - \dfrac{1}{C}}$ ist.

Die beiden Seiten werden identisch, falls gesetzt wird:

$$(31)\qquad A = \frac{1}{\sqrt{\left(L\nu^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + (R\nu)^2}}\,\frac{E_0}{C}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R\nu}{L\nu^2 - \frac{1}{C}}.$$

Im Kondensatorkreis entsteht also unter der Einwirkung der ungedämpften Schwingung (30) eine „erzwungene Schwingung“ (wie sie im Gegensatz zur Eigenschwingung heißen soll), von der gleichen Frequenz wie die einwirkende[1]):

$$(32)\qquad V = \frac{\frac{E_0}{C}}{\sqrt{\left(L\nu^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + (R\nu)^2}}\cos(\nu t + \varphi);$$

für den Strom erhalten wir daraus mit $I = -C\frac{dV}{dt}$.

$$(32\text{a})\qquad I = \frac{E_0}{\sqrt{\left(L\nu^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + (R\nu)^2}}\sin(\nu t + \varphi).$$

(32) und (32 a) geben nicht die vollständige Lösung unserer Aufgabe. Durch diese Ausdrücke werden die Schwingungen des erregten Kreises nur dann dargestellt, wenn die erregende EMK. zu allen Zeiten dem Ansatz (30) genügte.

[1]) Man bemerkt, daß ein Kreis jetzt auch mit anderer Frequenz als seiner eigenen schwingen kann und daß implizit vorausgesetzt wurde, daß auch für diese Schwingungen die Stromverteilung eine quasistationäre ist.

Wenn dagegen zuerst keine äußere Kraft vorhanden ist ($E = 0$ von $t = -\infty$ bis $t = 0$) und der Kondensatorkreis bis zu diesem Zeitpunkt Null ebenfalls strom- und spannungslos war, und erst dann die Kraft nach (30) zu wirken beginnt, so widerspricht unsere Lösung den Anfangsbedingungen $V = 0$ und $I = 0$ bzw. $\frac{dV}{dt} = 0$ zur Zeit $t = 0$.

Bekanntlich erhält man nun das vollständige Integral der Differentialgleichung (29), wenn man zu der oben angegebenen partikularen Lösung noch hinzusetzt die Lösung der homogenen Gleichung; also den früher betrachteten Ausdruck (22). Die willkürlichen Konstanten A und φ sind darin so zu bestimmen, daß den Anfangsbedingungen Genüge geleistet wird.

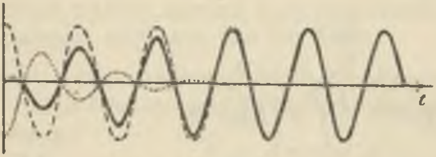


Fig. 16.

Physikalisch bedeutet das: Neben der erzwungenen Schwingung tritt noch die Eigenschwingung des Kondensatorkreises auf, und zwar mit einer von der Art des Einsetzens der erregenden Schwingung abhängigen Amplitude und Phase.

Für den Fall, daß Eigenschwingung und erzwungene Schwingung gleiche Frequenz haben, stellt Fig. 16 den Verlauf der Spannung dar.

Die erzwungene Schwingung allein (gestrichelte Kurve) würde zur Zeit $t = 0$ mit einem großen Wert beginnen. Darüber lagert sich nun noch die punktiert dargestellte Eigenschwingung, die im Anfang einen entgegengesetzten gleich großen Wert hat, so daß die resultierende Spannung (ausgezeichnete Kurve) mit dem Werte Null beginnt und erst allmählich größere Amplituden erhält. Wenn die Eigenschwingung abgeklungen ist, werden die Amplituden konstant.

Wenn wir also z. B. den Stromeffekt im Kreise beobachten, so wird dieser zunächst anwachsen und nach einiger Zeit einen konstanten Wert annehmen, der der erzwungenen Schwingung entspricht. Bei einigermaßen hohen Frequenzen ist dieser konstante Wert schon erreicht in Zeiten, die sehr klein gegen die Einstelldauer der Meßinstrumente sind. Diese zeigen also praktisch nur den Stromeffekt der erzwungenen Schwingung an (falls die erregende Schwingung ungedämpft ist).

C. Resonanz.

(32) kann in eine für die Diskussion geeignetere Form gebracht werden, wenn die Konstanten des Kreises L, C und R ausgedrückt werden durch die Frequenz und die Dämpfung seiner Eigenschwingungen.

Wir setzen:

$$\frac{1}{LC} = \omega^2 + \delta^2, \qquad \frac{R}{2L} = \delta,$$

dann wird:

$$V = E_0 \frac{\omega^2 + \delta^2}{\sqrt{(\nu^2 - \omega^2 - \delta^2)^2 + 4\nu^2\delta^2}} \cdot \cos(\nu t + \varphi) \tag{33}$$

$$I = \frac{E_0}{L} \frac{\nu}{\sqrt{(\nu^2 - \omega^2 - \delta^2)^2 + 4\nu^2\delta^2}} \sin(\nu t + \varphi). \tag{33a}$$

In den Ausdrücken für die Amplituden von Strom und Spannung kommt im Nenner vor:

$$\sqrt{(\nu^2 - \omega^2 - \delta^2)^2 + 4\nu^2\delta^2}.$$

Nehmen wir für einen Moment an, der Kondensatorkreis sei ungedämpft, also $\delta = 0$, so sieht man, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen Null wird, wenn $\nu = \omega$ ist. Die Amplituden des Kreises würden also bei übereinstimmenden Frequenzen unendlich groß werden. Sie hätten endliche und um so kleinere Werte, je mehr ν und ω von einander verschieden sind.

Wenn die Dämpfung nicht Null, aber doch klein gegen die Frequenzen ist, so werden die Amplituden für $\nu = \omega$ nicht unendlich groß, aber sie haben dann maximale Werte. Der Kreis wird also besonders stark dann erregt, wenn die Frequenz der erregenden Schwingung mit seiner eigenen übereinstimmt. Man sagt, er ist dann mit dieser Schwingung in Resonanz.

Genähert bestimmt sich für diesen Fall:

$$V_0 = \frac{\omega \cdot E_0}{2} \cdot \frac{1}{\delta}.$$

Man sieht, daß die Amplituden, die im Kreis entstehen, um so größer sind, je kleiner die Dämpfung ist. Durch kleine äußere Kräfte können also in ihm große Amplituden zustandekommen, wobei seine Energie natürlich entsprechend groß wird.

Das Befremdliche, das darin zu liegen scheint, verschwindet, wenn man beachtet, daß die Zeit, die nach dem Einsetzen der erregenden Schwingung vergeht, bis die Amplituden im Kreis ihren größten Wert erreicht haben, um so größer ist, je kleiner die Dämpfung ist.

Während dieses Anfangszustandes liefert die äußere Kraft dauernd Energie an den Kreis, und diese Energie wird nur zum Teil im Widerstand verbraucht, zum anderen Teil dient sie zur Erhöhung der Amplituden, und zwar so lange, bis der Energieverbrauch im Widerstand gerade gleich der in gleicher Zeit zugeführten Energie ist.

Um genauer zu bestimmen, bei welcher Abstimmung das Maximum der Strom- oder der Spannungsamplituden auftritt, muß man unterscheiden zwischen dem Fall, wo bei festgehaltenem ω die erregende Frequenz ν variiert wird, und demjenigen, wo bei konstantem ν ω variiert wird.

Wie man nach bekannten Methoden leicht berechnet, hat im ersten Fall die Spannungsamplitude ihr Maximum dann, denn $\nu^2 = \omega^2 - \delta^2$, die Stromamplitude dann, wenn $\nu^2 = \omega^2 + \delta^2$ ist. Die Frequenz, bei der maximale Ströme auftreten, ist also etwas verschieden von derjenigen, bei der maximale Spannungen auftreten. Die Abweichungen kommen aber nur bei großer Genauigkeit in Frage, da wie wir schon früher bemerkt haben, bei normalen Kondensatorkreisen δ^2 gegen ω^2 sehr klein ist. Auch im zweiten Fall ergeben sich die maximalen Amplituden bei Frequenzen, die sich nur um ähnliche Beträge voneinander unterscheiden.

Die Beobachtung der maximalen Erregung liefert also ein sehr einfaches Mittel, um die Übereinstimmung zweier Frequenzen nachzuweisen, bzw. um Frequenzen zu bestimmen. Aus der Art, wie sich die Erregung bei Verstimmungen ändert (Resonanzkurve s. u.), ergibt sich ferner die Dämpfung, so daß der als Resonator gebrauchte Kondensatorkreis ein wichtiges Hilfsmittel bei Messungen ist.

Zwischen E und V, der erregenden und der erregten Spannung, besteht nach (31) eine Phasenverschiebung φ, die sich bestimmt aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R\nu}{L\nu^2 - \frac{1}{C}} = \frac{2\nu\delta}{\nu^2 - \omega^2 - \delta^2}.$$

Sie ist ebenso wie die Amplitude von den beiden Frequenzen abhängig. Für $\nu^2 = \omega^2 + \delta^2$, also praktisch für $\nu = \omega$, wird φ gerade gleich $\frac{\pi}{2}$ (Resonanz). Für $\nu > \omega$ liegt φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$; für $\nu < \omega$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π.

Die Beobachtung der Phasenverschiebung liefert also ebenfalls ein Mittel zur Bestimmung der Resonanz; die ihres Ganges auch eine Bestimmung der Dämpfung.

D. Resonanzkurven.

Eine Kurve, deren Ordinaten die Erregung des Kreises bei festgehaltenem ν als Funktion von ω (oder auch umgekehrt als Funktion von ν bei festgehaltenem ω) wiedergeben, nennt man eine Resonanzkurve.

Die Erregung kann dabei gemessen sein durch die Amplituden selber oder durch Mittelwerte, wie Stromeffekt usw.

Die Eigenschaften der Resonanzkurve wurden zuerst von V. Bjerknes untersucht und zu Messungen benutzt.

Da man praktisch meist den Stromeffekt beobachtet, so soll nur seine Resonanzkurve näher betrachtet werden. Weiter soll, wie es ebenfalls der praktischen Anwendung entspricht, die Frequenz ν der erregenden Schwingung konstant und die des Kreises variabel sein. Änderung der Frequenz eines Kondensatorkreises kann sowohl durch Variieren seiner Kapazität als auch seiner Selbstinduktion erzielt werden. Aus experimentellen Gründen wählt man für genauere Messungen immer die erste Art der Variation (für die auch die Formeln etwas einfacher sind); wir wollen sie daher ebenfalls annehmen.

Übrigens sind die einzelnen Arten von Resonanzkurven nicht sehr voneinander verschieden.

Der Stromeffekt ist nach (33 a) und S. 22:

$$J = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{L^2} \frac{\nu^2}{(\nu^2 - x^2)^2 + 4\nu^2\delta^2}.$$

Für $\omega^2 + \delta^2$ haben wir zur Abkürzung x^2 geschrieben; x wäre die Frequenz, welche der Kreis hätte, falls sein Widerstand beseitigt würde; die Größen ω und x sind also praktisch kaum verschieden.

Wür solche Werte von x, die in der Nähe von ν liegen, können wir schreiben:

$$\nu^2 - x^2 = (\nu - x)(\nu + x) = (\nu - x)\, 2\nu.$$

Dann wird:

$$J = \frac{1}{8} \frac{E_0^2}{L^2} \cdot \frac{1}{(\nu - x)^2 + \delta^2}.$$

Für $x = \nu$ hat der Stromeffekt seinen Maximalwert

$$J_r = \frac{1}{8} \frac{E_0^2}{L^2} \frac{1}{\delta^2}.$$

Nehmen wir nun als Ordinaten der Resonanzkurve nicht mehr den Stromeffekt J selber, sondern sein Verhältnis zu dem Stromeffekt bei Resonanz: $y = \frac{J}{J_r}$ (d. h. mit anderen Worten: wenn wir die Resonanzkurve in solchem Maßstab zeichnen, daß die Maximalordinate $= 1$ ist), so erhält die Resonanzkurve die für die Anwendung geeignetste Gestalt:

$$y = \frac{\delta^2}{(\nu - x)^2 + \delta^2}. \tag{34}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve (Fig. 17) hat natürlich bei $x = \nu$ ein Maximum, für das $y = 1$ ist, und ist symmetrisch um die Ordinate bei diesem Punkt. Das Maximum ist um so flacher, je größer δ ist (in der Figur ist punktiert eine zweite Kurve für größeres δ eingezeichnet).

Wenn x um einen bestimmten Betrag Δx kleiner oder größer als δ ist, so wird dadurch y um so kleiner, je kleiner δ ist. D. h. je kleiner die Dämpfung ist, um so schneller nimmt der Stromeffekt bei Verstimmungen ab; um so schärfer ist die Resonanz, wie man sich ausdrückt.

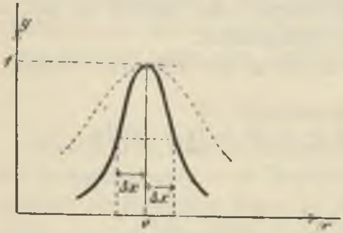


Fig. 17.

Als Maß für die Schärfe der Resonanz kann etwa diejenige Verstimmung dienen, welche den Stromeffekt auf die Hälfte seines Wertes bei Resonanz bringt; d. h. dasjenige Δx, für welches $y = \frac{1}{2}$ ist.

Aus (34) ergibt sich dafür:

$$(35) \qquad y = \tfrac{1}{2}, \quad \text{wenn} \quad \Delta x = \nu - x = \pm \delta.$$

Diese Beziehung benutzt man, um aus einer experimentell aufgenommenen Resonanzkurve die Dämpfung zu bestimmen, indem man diejenige Abszisse aufsucht, für welche $y = \frac{1}{2}$ ist. Das log. Dekrement ergibt sich dann als: $\mathfrak{d} = 2\pi \frac{\delta}{\nu}$.

Da die Veränderungen der Frequenz durch Variieren der Kapazität vorgenommen werden, so ist es öfter bequem, die Werte der Kapazität selber als Abszissen der Resonanzkurve zu wählen.

Bezeichnet man diejenige Kapazität, welche eine Frequenz x ergibt, mit C $\left(x = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$, und diejenige, welche $x = \nu$ ergibt, mit C_r, so läßt sich näherungsweise setzen:

$$\nu - \omega = \frac{1}{2}\nu\frac{C_r - C}{C_r}$$

(da ν und x, also auch C und C_r, nach Voraussetzung nicht sehr voneinander verschieden sein sollen).

Die Gleichung der Resonanzkurve mit C als Abszisse ist dann:

$$y = \frac{\delta^2}{\frac{1}{4}\nu^2\left(\frac{C_r - C}{C_r}\right)^2 + \delta^2}.$$

Sie ist symmetrisch um die Ordinate bei $C = C_r$ und hat die gleiche Gestalt wie die Kurve in Fig. 17.

Es ist:

$$y = \frac{1}{2}, \quad \text{wenn} \quad \frac{C_r - C}{C_r} = \pm 2\frac{\delta}{\nu}.$$

Aus dieser Resonanzkurve erhält man also durch Aufsuchen derjenigen Werte von C, bei denen die Ordinate die Hälfte des Resonanzwertes ist, ebenfalls die Dämpfung δ, oder direkt das log. Dekrement:

$$\mathfrak{d} = 2\pi\frac{\delta}{\nu} = \pi\frac{C_r - C}{C_r}.$$

E. Analyse von Schwingungen.

Wenn die erregende Kraft E aus mehreren Sinusschwingungen mit merklich voneinander verschiedenen Frequenzen besteht, $E = \sum A_i \cos\omega_i t$, so wird der Kondensatorkreis immer dann stärkere Erregung zeigen, wenn seine Frequenz mit einer der erregenden übereinstimmt; und zwar erhält er Amplituden, die proportional sind dem betr. Koeffitienten A_i; man kann so die gegebene Schwingung analysieren (Fig. 18).

Voraussetzung ist dabei allerdings, daß die einzelnen Frequenzen soweit auseinander liegen, daß sich ihre Resonanzkurven nicht mehr überdecken; je weniger der Kreis gedämpft ist, um so genauer wird die Analyse sein.

Zwei sehr benachbarte Frequenzen geben eine Resonanzkurve, die gegen die normale verbreitert erscheint, und nicht mehr einfache Beziehungen aufweist. Noch weniger einfach wird die Resonanzkurve, wenn beliebig viele sehr nahe aneinander liegende Frequenzen in der erregenden Schwingung enthalten sind; dann wird der Kreis fast bei jeder Abstimmung mehr oder weniger stark erregt; von einer Resonanzkurve im obigen Sinne ist nicht mehr die Rede.

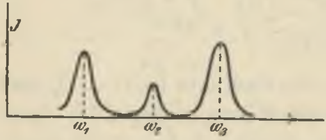


Fig. 18.

Bekanntlich kann nach dem Fourierschen Theorem eine beliebige Zeitfunktion E als Superposition einer Anzahl bzw. unendlich vieler Sinusschwingungen betrachtet werden. Man sieht also, daß nur dann, wenn E sinusförmig ist, sich einfache Beziehungen wie oben ergeben, und daß jede Abweichung der erregenden Kraft von der Sinusform die Resonanzkurve verbreitert und komplizierter macht. Für gewisse Formen von E allerdings erhält man noch ähnliche und relativ einfache Resonanzkurven z. B. dann, wenn E eine gedämpfte Sinusfunktion ist, wie wir sofort betrachten werden.

F. Kondensatorkreis unter der Einwirkung einer gedämpften Schwingung.

Die erregende Kraft möge nun als gedämpfte Sinusschwingung angenommen werden:

$$E = E_0 \, e^{-\delta_1 t} \cos \omega_1 t \,. \tag{36}$$

Das entspricht dem Falle, daß ein Kondensatorkreis, der durch Funken erregt und selbst gedämpft ist, auf einen zweiten Kreis in sog. extrem loser Koppelung (s. u. S. 73) induziert.

Ähnlich wie oben entsteht nun im Sekundärkreise eine erzwungene Schwingung, von gleicher Frequenz und Dämpfung wie die erregende, und außerdem die Eigenschwingung mit einer von der Art des Einsetzens der erregenden Schwingung abhängigen Amplitude und Phase.

Diese beiden Schwingungen sind jetzt gedämpft, man kann daher bei der Betrachtung des Stromeffekts usw. nicht mehr wie bei ungedämpfter Erregung von der einen absehen, sondern muß die strengere Lösung betrachten. Das macht die Formeln komplizierter, aber die qualitativen Resultate bleiben doch ganz dieselben wie oben.

Maximale Erregung („Resonanz“) tritt dann auf, wenn die beiden Frequenzen einander gleich sind (bzw. um Beträge von derselben Größenordnung wie oben voneinander verschieden sind.) Beim Variieren der einen Frequenz ergeben sich Resonanzkurven, welche den früheren ganz ähnlich sind.

Es sei die erregende Kraft dargestellt durch den Ausdruck: (36) für alle Zeiten $t > 0$; dagegen sei bis zur Zeit $t = 0$: $E = 0$ und außerdem der erregte Kreis bis dahin strom- und spannungslos. Das ist dann erfüllt, wenn im erregenden Kreis zur Zeit Null der Funke einsetzt.

Die Konstanten des zweiten Kreises, L, C und R, sowie seine Eigenfrequenz und seine Dämpfung seien jetzt durch den Index 2 gekennzeichnet.

Dann schreibt sich die Lösung der Gl. (29), die man ganz ähnlich wie oben erhält:

$$
\begin{aligned}
V_2 &= V_a + V_b \\
&= V_{a_0} e^{-\delta_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_a) \\
&\quad - V_{b_0} e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_b)\,.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung V_{a_0} und φ_a bestimmen sich wie früher durch Einsetzen von V_a in die Differentialgleichung zu:

$$
\begin{aligned}
V_{a_0} &= \frac{E_0 \cdot (\omega_2^2 + \delta_2^2)}{\sqrt{[(\omega_1^2 - \omega_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2]^2 + 4\,\omega_1^2(\delta_1 - \delta_2)^2}}\,, \\
\operatorname{tg} \varphi_a &= \frac{2\,\omega_1\,(\delta_1 - \delta_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Die Ausdrücke sind ganz analog denen bei ungedämpfter Erregung; der Unterschied besteht nur darin, daß an Stelle von δ getreten ist die Differenz der beiden Dämpfungsfaktoren $\delta_1 - \delta_2$.

Bei den oben angegebenen Anfangsbedingungen wird die Eigenschwingung:

$$
\begin{aligned}
V_{b_0} &= \frac{E_0\,(\omega_2^2 + \delta_2^2)}{\sqrt{[\omega_1^2 - \omega_2^2) - (\delta_1 - \delta_2)^2]^2 + 4\,\omega_1^2\,(\delta_1 - \delta_2)^2}} \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{\omega_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}}{\omega_2}\,, \\
\operatorname{tg} \varphi_0 &= -\frac{\delta_1 - \delta_2}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Die leicht zu berechnenden Ausdrücke für die Stromstärken schreiben wir nicht an.

Man sieht, daß die Spannungsamplituden der Eigenschwingung und der erzwungenen einander gleich sind:

$$\frac{V_{b_0}}{V_{a_0}} = 1; \quad \text{genauer} \quad = \frac{\sqrt{\omega_2^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}}{\omega_2}.$$

Die Stromamplituden verhalten sich also wegen

$$I = -C \cdot \frac{dV}{dt}$$

wie:

$$\frac{I_{b_0}}{I_{a_0}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Fig. 19 gibt den Verlauf der Spannung V bei Resonanz ungefähr wieder. Die Eigenschwingung und die erzwun-

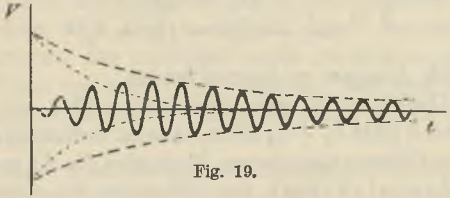


Fig. 19.

gene, aus denen sie sich zusammensetzt, sind nur angedeutet durch Kurven, welche die Maximalwerte miteinander verbinden (Amplitudenkurven). Die Dämpfung der beiden Schwingungen ist verschieden angenommen, man sieht, daß gegen Ende die schwächer gedämpfte vorherrscht.

G. Resonanzkurve des Stromeffekts bei gedämpfter Erregung.

Der Stromeffekt[1]) der Schwingungen im Sekundärkreis wird (wenn wieder angenommen wird, daß die Quadrate der Dämpfungen klein gegen die Frequenzen sind und daß die verwandten Frequenzen nicht sehr stark voneinander abweichen):

$$\int_0^\infty I^2\,dt - J = \frac{1}{8}\frac{E_0^2}{L_2^2}\cdot\frac{\delta_1+\delta_2}{\delta_1\,\delta_2}\cdot\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)^2+(\delta_1+\delta_2)^2},$$

analog demjenigen bei ungedämpfter Erregung.

Der Stromeffekt bei Resonanz ist: für $\omega_1 = \omega_2$

$$J_r = \frac{1}{8}\frac{E_0^2}{L_2^2}\frac{1}{\delta_1\,\delta_2\,(\delta_1+\delta_2)}$$

und die Gleichung der Resonanzkurve mit $y = \frac{J}{J_r}$ als Ordinate ist also:

$$y = \frac{(\delta_1+\delta_2)^2}{(\omega_1-\omega_2)^2+(\delta_1+\delta_2)^2}, \tag{40}$$

wo ω_2 als Abszisse zu betrachten ist.

Die Gleichung ist ganz dieselbe wie (34), nur daß an Stelle von δ jetzt $\delta_1+\delta_2$ steht. Aus ihr bestimmt sich also nach den früher angegebenen Methoden die Summe der Dämpfungsfaktoren von erregender Schwingung und Eigenschwingung bzw. die Summe der Dämpfungen der beiden Kreise. Wir werden im experimentellen Teil sehen, wie man durch geeignete Meßverfahren daraus die Einzeldämpfungen bestimmt.

---

[1]) Vgl. 1. H. Bei N Entladungen oder Schwingungszügen pro Sekunde würde der Stromeffekt natürlich das N-fache sein. Man beobachtet immer in der S. 46 geschilderten Weise, mit so großem N, daß die Meßinstrumente konstante Einstellung zeigen.

3. Gekoppelte Kreise.

A. Induktive Koppelung; Differentialgleichung.

Zwei Kondensatorkreise, deren Selbstinduktionen einander so genähert sind, daß zwischen ihnen eine merkliche gegenseitige Induktion besteht, bezeichnet man als gekoppelte Kreise; speziell als induktiv gekoppelte.

Wenn der eine derselben, den wir als Primärkreis bezeichnen, durch einen Funken in Schwingungen versetzt wird, so schwingt auch der Sedundärkreis, da in ihm elektromotorische Kräfte induziert werden.

Wir haben oben schon die Schwingungen eines Kreises betrachtet, in dem gegebene elektromotorische Kräfte wirken. Für die Anwendung dieser Betrachtungen ist aber eben Voraussetzung, daß die EMK als Funktion der Zeit bekannt ist. Bei gekoppelten Kreisen ist das nicht allgemein der Fall. Es ist zwar immer die auf den Sekundärkreis wirkende EMK gegeben durch den primären Strom; dieser selbst wird aber beeinflußt durch den Strom im Sekundärkreis, der natürlich auch rückwärts auf den ersten Kreis induziert und bewirkt, daß der primäre Strom nicht einfach die Eigenschwingung des Primärkreises ist.

Nur dann, wenn die gegenseitige Induktion der beiden Kreise so klein ist, daß die kleinen Amplituden im Sekundärkreis vernachlässigbar kleine Ströme im primären hervorrufen, kann man die Schwingungen in diesem letzteren als identisch mit seiner Eigenschwingung ansehen und die frühere Rechnung anwenden (vgl. unten).

Bei engerer Koppelung aber ist diese Behandlung nicht mehr möglich; wir müssen dazu vielmehr die strengere Lösung des Problems betrachten.

Die in Betracht kommenden Größen sollen für die beiden Kreise durch Indizes 1 und 2 unterschieden sein. ω_1 und ω_2 seien die Frequenzen, mit denen die Kreise für sich schwingen, wenn sie ungekoppelt sind.

Im Primärkreis wird eine EMK $E_1 = L_{12} \frac{d I_2}{dt}$ induziert; entsprechend im Sekundärkreis: $E_2 = L_{12} \frac{d I_1}{dt}$. Für die Spannungen gelten dann nach (29) die folgenden Gleichungen:

$$
(41) \qquad \begin{aligned}
L_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} V_1 &= -\frac{1}{C_1} L_{12} \frac{d I_2}{dt}, \\
L_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} V_2 &= -\frac{1}{C_2} L_{12} \frac{d I_1}{dt}.
\end{aligned}
$$

Der Einfachheit halber haben wir den Widerstand der Kreise als verschwindend klein vorausgesetzt. Die Schwingungen werden sich daher als ungedämpfte ergeben; jedoch behalten die Beziehungen zwischen den Frequenzen auch für gedämpfte Kreise Gültigkeit.

Drücken wir I_1 und I_2 durch die Werte der Spannungen aus $\left(I = -C \cdot \frac{dV}{dt}\right)$ und setzen:

$$
\frac{1}{L_1 C_1} = \omega_1^2; \quad \frac{1}{L_2 C_2} = \omega_2^2,
$$

so wird:

$$
(42) \qquad \begin{aligned}
\frac{d^2 V_1}{dt^2} + \omega_1^2 V_1 &= \frac{L_{12}}{L_1} \frac{C_2}{C_1} \frac{d^2 V_2}{dt^2}, \\
\frac{d^2 V_2}{dt^2} + \omega_2^2 V_2 &= \frac{L_{12}}{L_2} \frac{C_1}{C_2} \frac{d^2 V_1}{dt^2}.
\end{aligned}
$$

Durch zweimalige Differentiation der zweiten Gleichung und Einsetzen des Wertes für $\frac{d^2 V_2}{d t^2}$ aus der ersten wird

$$\left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}\right) \frac{d^4 V_1}{d t^4} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{d^2 V_1}{d t^2} + \omega_1^2 \omega_2^2 V_1 = 0 .$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich für V_2.

$\frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}$ wollen wir zur Abkürzung mit k^2 bezeichnen; k ist immer kleiner als 1 (vgl. S. 16).

(43) $k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$ heißt der Koppelungskoeffizient.

Wenn wir die Lösungen ansetzen in der Form:

V_1 bzw. $V_2 = e^{-\alpha t}$, so ergibt sich, daß α

eine Wurzel der Gleichung:

$$\alpha^4 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{1 - k^2} \alpha^2 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{1 - k^2} = 0$$

sein muß.

Also:

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2(1 - k^2)} \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4 \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - k^2)}\right).$$

Da k immer kleiner als 1 ist, sind die beiden Werte von α^2 reell und negativ. Die vier Wurzeln α sind also imaginär; je zwei unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Wir wollen sie bezeichnen mit: $\pm i \nu_1$ und $\pm i \nu_2$:

$$\nu_1^2 \text{ bzw. } \nu_2^2 = \frac{1}{2(1 - k^2)} \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \omega_1^2 \omega_2^2 k^2}\right).$$

Für den Fall: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; wenn also die beiden ungekoppelten Kreise gleiche Frequenz haben, gilt:

$$\nu_1^2 = \frac{\omega^2}{1-k}; \qquad \nu_2^2 = \frac{\omega^2}{1+k}. \tag{44}$$

Wenn außerdem k klein gegen 1, ist einfach:

$$\nu_1 = \omega\left(1 + \frac{k}{2}\right); \qquad \nu_2 = \omega\left(1 - \frac{k}{2}\right). \tag{44a}$$

Die allgemeinen Lösungen der Gleichungen haben also die Form:

$$V_1 \text{ bzw. } V_2 = a e^{i\nu_1 t} + b e^{-i\nu_1 t} + c e^{i\nu_2 t} + d e^{-i\nu_2 t},$$

wo a, b, c, d noch zu bestimmende Konstante sind. Wir können statt dessen auch schreiben (vgl. S. 41):

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 \cos(\nu_1 t + \varphi_1) + B_1 \cos(\nu_2 t + \varphi_2), \\ V_2 &= A_2 \cos(\nu_1 t + \psi_1) + B_2 \cos(\nu_2 t + \psi_2). \end{aligned} \tag{45}$$

D. h. die Schwingungen eines jeden der beiden gekoppelten Kreise bestehen im allgemeinen aus einer Superposition von zwei einfachen Sinusschwingungen mit voneinander verschiedenen Frequenzen ν_1 und ν_2, welche verschieden sind von den Frequenzen der ungekoppelten Kreise. (Das eine ν ist größer als das größere ω und das zweite kleiner als das kleinere ω.) Man bezeichnet diese Schwingungen als Koppelschwingungen.

Von den willkürlichen Konstanten A, B, φ und ψ kann man eine Anzahl durch die übrigen ausdrücken; wenn man nämlich in (42) einsetzt, ergibt sich:

$$\varphi_1 = \psi_1; \qquad \varphi_2 = \psi_2$$

und:

$$A_1 (\nu_1^2 - \omega_1^2) = A_2 \frac{L_{12} C_2}{L_1 C_1} \nu_1^2,$$

$$B_1 (\nu_2^2 - \omega_1^2) = B_2 \frac{L_{12} C_2}{L_1 C_1} \nu_2^2,$$

oder wenn wir annehmen: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, und aus (44) den Wert von k einführen:

$$(46) \qquad A_2 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} A_1 ; \qquad B_2 = -\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} B_1 .$$

Die übrigbleibenden Konstanten A_1, B_1, φ_1 und φ_2 werden so bestimmt, daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

B. Die Koppelschwingungen bei Erregung durch Funken.

Wenn die Schwingungen in der Weise[1]) erregt werden, daß der erste Kreis eine Funkenstrecke enthält, dann sind die Anfangsbedingungen:

Für $t = 0$: $V_1 = V_0$, $V_2 = 0$; $I_1 = I_2 = 0$ bzw. $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt} = 0$.

Wir wollen außerdem $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ voraussetzen, dann bestimmen sich:

$$A_1 = \frac{V_0}{2} ; \qquad B_1 = \frac{V_0}{2} ; \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

und es wird:

$$(47) \qquad \begin{aligned} V_1 &= \frac{V_0}{2} (\cos \nu_1 t + \cos \nu_2 t) , \\ V_2 &= \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (\cos \nu_1 t - \cos \nu_2 t) . \end{aligned}$$

---

[1]) Die Schwingungen können auch mit anderen Anfangsbedingungen erregt werden, so daß nur eine der beiden möglichen Frequenzen mit merklicher Amplitude auftritt.

Die Stromstärken leiten sich daraus in bekannter Weise ab:

$$(48)\quad \begin{aligned} I_1 &= \frac{C_1}{2} \cdot V_0 \cdot (\nu_1 \sin\nu_1 t + \nu_2 \sin\nu_2 t) \\ I_2 &= \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{2} \cdot V_0 \cdot (\nu_1 \sin\nu_1 t - \nu_2 \sin\nu_2 t)\,. \end{aligned}$$

Strom und Spannung in jedem Kreise bilden Schwebungen[1]). Fig. 20 stellt den Verlauf von V im Primärkreise, Fig. 21 den im Sekundärkreise dar. Die Stromamplituden werden wegen des verschiedenen ν_1 und ν_2 nie völlig Null, der Verlauf ist aber im übrigen ein ganz ähnlicher.

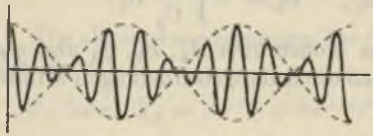


Fig. 20.

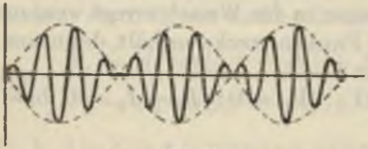


Fig. 21.

Die Dauer einer Schwebung bzw. die Anzahl von Perioden, die sie umfaßt, ist von der Differenz der Frequenzen abhängig und zwar dieser umgekehrt proportional; ist also um so kleiner, je enger die Koppelung ist.

[1]) Bekanntlich kann man eine Superposition von zwei Sinusschwingungen, deren Frequenzen nicht sehr weit auseinander liegen, auffassen als eine einzige Schwingung von mittlerer Frequenz, bei der aber die Amplitude keine Konstante ist, sondern mit der Zeit variiert.

$$\sin\nu_1 t + \sin\nu_2 t = 2 \sin\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\,t \cdot \cos\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\,t\,.$$

Wenn ν_1 ungefähr gleich $\nu_2\,(=\nu)$, so ist das:

$$= \left[2 \cdot \cos\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\,t\right] \sin\nu t;$$

und es ist darin der eingeklammerte Faktor mit der Zeit nur relativ langsam veränderlich.

Strom- und Spannungsamplituden haben im Sekundärkreis immer dann ihren Maximalwert, wenn sie im Primärkreise sich im Minimum befinden und umgekehrt. Der Kreis, dessen Amplituden sich gerade im Maximum befinden, besitzt also immer die gesamte Energie.

D. h. die Energie, die sich ursprünglich nur im ersten Kreise befand, wandert allmählich vollständig in den zweiten Kreis hinüber, dann wieder zurück usw.; pendelt also dauernd zwischen den beiden Kreisen hin und her[1]).

Unterbricht man den ersten Kreis in einem Augenblick, wo seine Amplituden sich gerade im Minimum befinden, so schwingt der zweite Kreis weiter mit der gesamten Energie, die ursprünglich dem ersten Kreise mitgeteilt war; und schwingt dann natürlich mit seiner Eigenfrequenz, da der unterbrochene Primärkreis, in dem kein Strom mehr zustande kommt, keinen Einfluß ausübt.

Wie M. Wien gefunden hat, wird ein solches Ausschalten des Primärkreises von einem geeigneten Funken selbsttätig besorgt. Auf dieser Erscheinung beruht die Methode der Stoßerregung eines Kreises, die auch große praktische Bedeutung erlangt hat.

C. Einfluß der Dämpfung.

Unsere Betrachtungen gelten für widerstandslose Kreise. Hätten wir den Widerstand, wie es der Wirklichkeit mehr entspricht, nicht vernachlässigt, so würden sich ganz ähnlich in jedem Kreis zwei gedämpfte Schwingungen mit voneinander verschiedenen Frequenzen ergeben haben, die von den Frequenzen der nicht gekoppelten Kreise im selben Sinn wie oben abweichen.

---

[1]) Man bemerkt übrigens, daß das ein sehr anschauliches Bild für die Entstehung der Schwebungen und damit der beiden Frequenzen liefert; wenn eine Sinusschwingung ihre Amplitude nach Art einer Schwebung ändert, so kann man sie als eine Superposition von zwei einfachen Schwingungen ansehen.

Ihre Frequenzen bestimmen sich (bei gleicher Frequenz der ungekoppelten Kreise $= \omega$) als [vgl. (44)]:

$$\nu_1 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - k_1}} \qquad \nu_2 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + k_1}}$$

wo:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2}{2\pi}\right)^2}; \quad \mathfrak{d} = \text{log. Dekrement.}$$

k_1 und k sind bei kleinen Dämpfungen nicht wesentlich voneinander verschieden, falls die Koppelung k selber nicht sehr klein ist. Die Dämpfungen der Koppelschwingungen sind von denen der Kreise verschieden. Ihre Dekremente $\mathfrak{D}$ sind bei fester Koppelung:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2}{2} \frac{\nu_1}{\omega}; \qquad \mathfrak{D}_2 = \frac{\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2}{2} \frac{\nu_2}{\omega}.$$

Bei sehr loser Koppelung gelten die Formeln nicht; es ist dann $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{d}_2$, wie früher behandelt.

Die im Sekundärkreis zustande kommenden Amplituden sind nach (47) und (48) unabhängig von der Koppelung und nur abhängig von der Anfangsspannung im Primärkreis und dem Verhältnis der Kapazitäten.

Bei ungedämpften Kreisen sind also die im Sekundärkreis entstehenden maximalen Amplituden unabhängig davon, ob fest oder lose gekoppelt ist. Die Koppelung bestimmt nur die Zeit, wann die Amplituden im Sekundärkreis ihren Maximalwert erreichen.

Wenn die Kreise gedämpft sind, so ergeben sich die Anfangsamplituden wie oben. Da aber jetzt die Schwingungen mit wachsender Zeit immer mehr abklingen, so wird die erste Maximalamplitude im Sekundärkreis um so größer sein, je eher sie eintritt, d. h. je enger die Koppelung ist. Aus den gleichen Gründen wächst auch der Strom und der Spannungseffekt im Sekundärkreis mit der Koppelung.

Wenn die Frequenz des Sekundärkreises von der des Primärkreises verschieden ist, so sind Frequenzen, Dämpfungen und Amplituden der Koppelschwingungen in komplizierterer Weise bestimmt. Was den Stromeffekt im Sekundärkreise betrifft, so nimmt er bei der Verstimmung desselben ab nach Art einer Resonanzkurve, die um so flacher verläuft, je größer die Koppelung ist. Aus ihr kann man also im allgemeinen nicht mehr in der früher angegebenen Art die Dämpfung bestimmen. Nur dann, wenn die Koppelung genügend lose ist und keine Rückwirkung eintritt, wird die Kurve mit der früher aufgestellten „Bjerknesschen" Resonanzkurve identisch.

Das ist mit um so größerer Genauigkeit der Fall, je kleiner k^2 gegen $\frac{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2}{\pi^2}$ ist.

Praktisch bestimmt man die erforderliche Koppelung, indem man die Koppelung so lange loser macht, bis die Form der aufgenommenen Resonanzkurve sich nicht mehr merklich ändert.

D. Direkte Koppelung. Koppelung durch Kapazität.

Außer der oben betrachteten induktiven Koppelung zweier Kondensatorkreise werden mitunter noch andere Arten von Koppelungen verwandt.

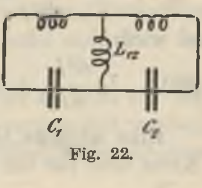


Fig. 22.

Bei der direkten Koppelung (Fig. 22) ist ein Teil der Selbstinduktion (L_{12}) beiden Kreisen gemeinsam. Wenn der Ohmsche Widerstand von L_{12} gegen die Induktanz vernachlässigt werden kann, unterscheidet sich diese Koppelung nicht von der induktiven; die Gleichungen bleiben dieselben.

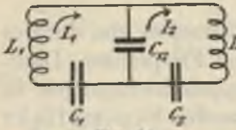


Fig. 23.

Bei der Koppelung durch Kapazität (auch kapazitative genannt; Fig. 23) kann man jeden Einzelkreis als mit zwei hintereinandergeschalteten Kondensatoren versehen betrachten. Den einzelnen Kreisen kommt also die resultierende Kapazität

$$C_1^1 = \frac{C_1 C_{12}}{C_1 + C_{12}} \text{ bzw. } C_2^1 = \frac{C_2 C_{12}}{C_2 + C_{12}} \text{ zu.}$$

Für den ersten Kreis allein gilt: nach (16)

$$R_1 I_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + V_1 ,$$

wo V_1 die an den Klemmen der Kondensatorbatterie herrschende Spannung bedeutet.

Ist nun der zweite Kreis angelegt und fließt in ihm ein Strom I_2, so liefert dieser an den Klemmen von C_{12} eine Spannung V_{12}, die als äußere elektromotorische Kraft für den ersten Kreis wirkt, so daß gilt:

$$R_1 I_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + V_1 - V_{12} ,$$

differenziert man das und setzt nach (2)

$$\frac{dV_{12}}{dt} = -\frac{I_2}{C_{12}}; \qquad \frac{dV_1}{dt} = -\frac{I_1}{C_1^1},$$

so wird:

$$(49) \qquad L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{21}}\right) - \frac{I_2}{C_{12}} = 0 .$$

Eine analoge Gleichung ergibt sich für den zweiten Kreis und für die Spannungen.

III. Experimentelles über die Herstellung und Untersuchung elektrischer Schwingungen.

1. Der Funke.

A. Der ideale Funke.

Wir haben bei den theoretischen Betrachtungen wiederholt vom Funken gesprochen, als demjenigen Mittel, das am häufigsten benutzt wird, um die Schwingungen in Kondensatorkreisen zu erregen. Dabei haben wir immer einen idealen Funken vorausgesetzt, dem wir Eigenschaften zuschrieben, wie sie für die Rechnung am bequemsten waren, nämlich: plötzliches Einsetzen und konstanten Widerstand.

Dem wirklichen Funken kommen diese Eigenschaften nur mit mehr oder weniger großer Annäherung zu; von einem Widerstand im gewöhnlichen Sinne kann man eigentlich nicht sprechen, wie wir unten sehen werden; die Schwingungen in Kondensatorkreisen mit Funken verlaufen daher nicht genau nach den oben aufgestellten Gesetzen. Unter bestimmten Bedingungen treten sogar qualitative Unterschiede auf.

B. Elektrische Entladung durch Gase.

Über den Mechanismus der Stromleitung beim Funken wie auch bei den verwandten Erscheinungen (Entladung in Geißlerröhren, Lichtbogen) macht man sich etwa folgende Vorstellung:

Ein Gas (auch ein Metalldampf) ist an sich ein Isolator, es kann jedoch in einen Leiter verwandelt werden, wenn einzelnen Partikelchen, Molekülen, oder Atomen elektrische Ladungen mitgeteilt werden. Diese geladenen Partikel heißen Ionen; das Gas, in dem sie sich befinden, nennt man ionisiert. Die Ladung eines Ions ist ein meist kleines ganzzahliges Vielfaches eines bestimmten Elementarquantums der Elektrizität, das etwa $4{,}6 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten beträgt. Das negative Elementarquantum (und nur dieses) tritt auch in freiem Zustande, nicht an gewöhnliche Materie geknüpft, als Elektrizitätsträger auf; man bezeichnet es als Elektron.

Das neutrale Molekül oder Atom selber denkt man sich bestehend aus einer größeren Anzahl von Elektronen und einer entsprechenden positiven Ladung, die an die Materie geknüpft ist. Wird auf irgendeine Weise dem Molekül ein Elektron entzogen, so entsteht ein positives Ion; ein negatives dann, wenn ein Elektron sich anheftet.

Befinden sich nun solche Ionen in der Luft[1]) zwischen den Elektroden einer Funkenstrecke, an die eine Potentialdifferenz angelegt ist, dann setzen sich die Ionen in dem elektrischen Feld in Bewegung und fliegen nach den entsprechenden Elektroden hin; dort geben sie ihre Ladung ab und vermitteln so den Transport des Stromes.

Ist die angelegte Spannung hinreichend groß, so erreichen die Ionen so hohe Geschwindigkeiten, daß sie bei ihrem Auftreffen auf neutrale Moleküle des Gases oder der Elektroden diese zertrümmern und sie in Ionen und Elektronen spalten. Diese werden ihrerseits beschleunigt und bilden weitere Elektrizitätsträger. Je größer deren Anzahl pro Volumeinheit wird, um so größer wird die Leitfähigkeit der Gasstrecke. Zugleich treten dabei die bekannten Leuchterscheinungen auf. Beim Funken und beim Lichtbogen erhitzen sich die Elektroden sehr stark, so

[1]) In der Luft ist unter normalen Umständen immer eine (allerdings schwache) Ionisation vorhanden.

daß das Metall dort verdampft und der Dampf die Funkenstrecke erfüllt. Die hohe Temperatur begünstigt die Emission von Ionen und die Leitfähigkeit erreicht relativ hohe Beträge.

C. Charakteristik des Gleichstromlichtbogens.

Ist die elektromotorische Kraft, welche zur Erzeugung der Entladung dient, konstant, wie beim Gleichstrombogen[1]), so bildet sich ein stationärer Zustand heraus; es entstehen dann in jedem Augenblick so viele Elektrizitätsträger, als sich an den Elektroden abscheiden oder durch Wiedervereinigung verloren gehen.

Den Quotienten aus der an den Klemmen des Bogens herrschenden Spannung und dem durch ihn fließenden Strom hat man als Widerstand des Bogens zu bezeichnen.

Nun zeigt der Versuch, daß eine Vergrößerung des durch den Bogen fließenden Stromes (etwa bewirkt durch Ausschalten von Widerstand, der sich außerdem noch im Stromkreis befindet) durchaus nicht die Spannung am Bogen proportional steigert, wie es nach dem Ohmschen Gesetz für einen gewöhnlichen Widerstand sein müßte. Vielmehr nimmt unter Umständen sogar die Spannung mit wachsender Stromstärke ab[2]).

Man kann also beim Bogen den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom nicht durch das Ohmsche Gesetz wiedergeben: $V = I \cdot R$, sondern muß diesen Zusammenhang, der für jeden einzelnen Fall empirisch zu be-

---

[1]) Bei ihm verwendet man allerdings meist so kleine elektromotorische Kräfte, daß der Bogen nicht in der oben beschriebenen Weise, wie der Funke, von selber zustande kommt, sondern durch Berühren der Elektroden und Auseinanderziehen gezündet werden muß. Für unsere Betrachtung ist das unwesentlich.

[2]) Bei größerem Strom werden nämlich unverhältnismäßig viel mehr Ionen erzeugt.

stimmen ist, entweder wiedergeben durch eine Kurve nach Art der Fig. 24 oder in analytischer Form durch: $V = f(I)$.

Diese Kurve bezeichnet man als die Charakteristik des Bogens.

Aus unserer Figur, die etwa die Charakteristik des Kohlebogens wiedergibt, ersieht man, daß der Quotient aus Spannung und Strom für jeden Wert der Stromstärke ein anderer wird; und zwar nimmt diese Größe, die als Widerstand für die betreffende Stromstärke zu bezeichnen ist, mit wachsendem Strom immer mehr ab.

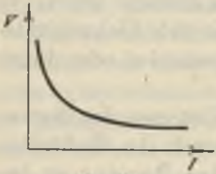


Fig. 24.

Für das Folgende bemerken wir noch:

Überschreitet die Stromstärke einen gewissen Wert, so bleibt die Spannung praktisch konstant (beim Kohlebogen beträgt diese konstante Spannung bekanntlich einige 30 Volt).

Wird der Strom kleiner, so steigt die Spannung rasch an, und wenn die vorhandene EMK nicht ausreicht, um die geforderte Spannung zu liefern, erlischt der Bogen, sein Widerstand wird dann unendlich groß.

D. Wechselstromlichtbogen.

Bei schnellen Änderungen der Stromstärke behält der Bogen seinen alten Widerstand für eine kurze Zeit nach der Veränderung bei und nimmt erst allmählich den der veränderten Stromstärke entsprechenden Widerstand an, da eine gewisse Zeit erforderlich ist, bis der Zustand der Elektroden und die Ionisation sich den neuen Verhältnissen anpaßt.

Es darf sogar der Strom durch den Bogen für kurze Zeit Null werden; der Bogen erlischt dabei nicht, falls nur diese Zeit genügend klein ist.

Derartige Stromänderungen kommen beim Wechselstrombogen vor. Je nach dem Elektrodenmaterial (und der EMK) sind die Frequenzen, bei denen noch ein sicheres Brennen zu erzielen ist, verschieden. Der Kohlebogen (mit Dochtkohlen) brennt bekanntlich bei dem technischen Wechselstrom mit der Schwingungszahl 50 pro Sekunde sehr gut, während bei Metallelektroden viel höhere Frequenzen erforderlich sind.

Die Charakteristik eines Wechselstrombogens wird etwa durch eine Kurve wie Fig. 25 wiedergegeben. Die Charakteristik besteht, ganz ähnlich wie eine Hysteresisschleife, aus zwei Zweigen, die dem ansteigenden und dem absteigenden Strom entsprechen.

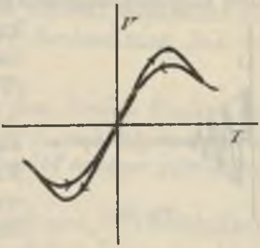


Fig. 25.

Während einer Periode des Wechselstroms nimmt also der Widerstand des Bogens ganz verschiedene Werte an.

Als mittleren Widerstand kann man etwa diejenige Größe definieren, die, mit dem Stromeffekt multipliziert, den Energieverbrauch des Bogens pro Sekunde gibt.

Auch dieser mittlere Widerstand hängt wieder in komplizierter Weise sowohl von der Frequenz als auch von der Amplitude des Wechselstroms ab. Im allgemeinen ist er um so größer, je kleiner die Stromamplitude ist.

E. Der Funke im Kondensatorkreis.

Den Funken im Kondensatorkreis können wir als einen Wechselstrombogen betrachten. Die Amplitude des Wechselstroms nimmt mit wachsender Zeit immer mehr ab, der „Widerstand" des Funken selber also während des Ablaufs einer gedämpften Schwingung immer mehr zu; am Schluß, wenn der Funke erlischt, ist er unendlich groß.

Die Amplituden der Schwingungen nehmen also schneller ab, als es nach dem für konstanten Widerstand geltenden Exponentialgesetz geschehen sollte. Die Amplitudenkurve ist statt einer Exponentialfunktion ungefähr eine Gerade (Fig. 26).

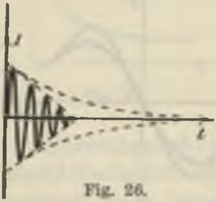


Fig. 26.

Wenn eine solche Schwingung aus einem durch Funken erregten Kreis auf einen Resonanzkreis einwirkt, so ergibt sie nicht die früher berechnete Form der Resonanzkurve, sondern eine etwas verzerrte. Das Maximum liegt bei etwas größeren Frequenzen, als sich für konstanten Funkenwiderstand berechnen würde.

Dämpfung und log. Dekrement, die eigentlich bloß für eine exponentiell abklingende Amplitude definiert sind, lassen sich aus der Resonanzkurve nur als mehr oder weniger gute Näherungen bestimmen

Aus (21) erhält man dann einen Wert für den „Widerstand" des Kondensatorkreises. Meist ist neben dem Funken der übrige Widerstand zu vernachlässigen, so daß man die erhaltene Größe als „Funkenwiderstand" bezeichnen kann. Diese Größe ist aber nicht etwa für eine gegebene Funkenlänge eine Konstante, sondern ist von vielen Umständen abhängig.

Allgemein kann man sagen, daß die Abweichungen der Schwingungen und der Resonanzkurve vom theoretischen Verlauf ebenso wie der Funkenwiderstand mit abnehmender Funkenlänge zunehmen. Außerdem ist die Natur des Elektrodenmaterials von großem Einfluß. Silber und Kupfer ergeben die stärksten Abweichungen, Zink nimmt eine mittlere Stellung ein, fast ideal verhalten sich die leicht verdampfenden Metalle Magnesium und Kalzium.

Um einen möglichst theoretischen Verlauf der Schwingungen zu erzielen, benutzt man daher lange Funken zwischen Magnesiumelektroden und erreicht tatsächlich damit gute Übereinstimmung der Beobachtung mit der Rechnung.

Was die zweite Eigenschaft des idealen Funken betrifft, das plötzliche Einsetzen, so kann es sich natürlich auch da nur um eine mehr oder weniger gute Näherung handeln.

Wie oben geschildert, entwickelt sich die Leitfähigkeit einer Funkenstrecke allmählich, indem Ionen beschleunigt und durch Stoß neue Ionen geschaffen werden. Dazu ist natürlich eine bestimmte Zeit nötig. Nun ist aber die Masse der Elektrizitätsträger eine außerordentlich kleine, bei verhältnismäßig großer Ladung, so daß sie sehr schnell in Bewegung geraten. Tatsächlich ist es möglich, mit Hilfe des Funken noch Frequenzen größer als 10^{10} zu erzeugen; daraus folgt, daß die Leitfähigkeit der Funkenstrecke in Zeiten, die kleiner sind als 10^{-10} Sekunden, beträchtliche Werte erreichen kann.

F. Funkenpotential.

Damit der Funke zwischen zwei Elektroden einsetzt, ist eine bestimmte Potentialdifferenz zwischen ihnen nötig, die hauptsächlich durch die Entfernung der

Elektroden bestimmt ist, außerdem von ihrer Form abhängt.

Diese Einsatzspannung oder Funkenpotential genannte Potentialdifferenz ist für Kugeln von 1 cm Radius als Elektroden etwa:

Volt	bei einer Entfernung von cm
4 700	0,1
17 500	0,5
30 000	1
47 000	2
57 000	3
69 000	5

Aus der Funkenlänge ergibt sich daher sofort die Größe der Anfangsspannung eines Kreises.

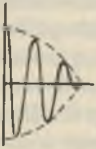
Außerdem kann man eine parallel zum Kondensator geschaltete Funkenstrecke benutzen, um einen Resonanzkreis roh abzustimmen bzw. um die höchste in ihm auftretende Spannungsamplitude ungefähr zu bestimmen.

G. Stoßerregung, Löschfunken.

Der Funke bildet in einem Kondensatorkreis meist die Hauptursache der Dämpfung, außerdem schafft er, wie wir gesehen haben, einen anomalen Ablauf der Schwingungen. Es ist daher die Wiensche Methode der Stoßerregung eines funkenlosen Kreises sehr wichtig geworden.

Das Prinzip derselben haben wir schon früher angegeben (vgl. S. 71). Der zu erregende Kreis wird mit einem andern, dem Stoßkreis, der eine geeignete Funkenstrecke enthält, verhältnismäßig eng gekoppelt, so daß in jedem Kreis zwei verschiedene Frequenzen und daher Schwebungen vorhanden sind. Nach einer halben Schwebung werden die Amplituden im Stoßkreis sehr klein, der Funke erhält also großen Widerstand, unter gewissen Bedingungen (s. u.) erlischt er, und der zweite Kreis schwingt dann für sich mit seiner Eigenfrequenz und Dämpfung weiter (vgl. Fig. 27).

Die Energie des Primärkreises ist ganz oder fast ganz in ihn hinübergewandert. Seine Dämpfung kann sehr klein gemacht werden, da er keinen



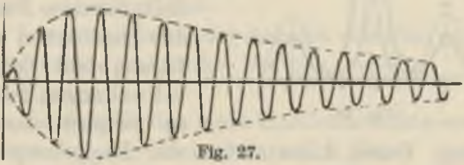


Fig. 27.

Funken enthält. Der Stromeffekt in ihm wird daher relativ groß (viel größer, als wenn der Funke nicht auslöscht, weil dann die Energie rückwärts wandert und im Primärkreis verbraucht wird).

Funken mit Löschwirkung erzielt man am einfachsten dadurch, daß man die Funkenlänge klein macht und als Elektrodenmaterial Silber oder Kupfer nimmt. Für technische Zwecke wendet man Plattenfunkenstrecken an (Fig. 28): kreisförmige, ebene Platten, die in der angedeuteten Weise durch einen Ring aus isolierendem Material, Glimmer, voneinander isoliert sind (die Hohlrinne, in der das Isolationsmaterial endet, verhindert, daß Funken über dessen Ränder hinweglaufen).

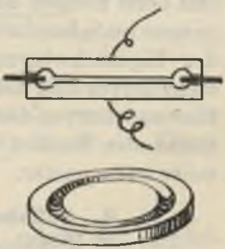


Fig. 28.

Die Funkenlänge wird einige Zehntel Millimeter lang genommen; wenn große Energie erforderlich ist, schaltet man eine Anzahl von Funkenstrecken hintereinander.

Soll bei gegebener Funkenlänge Löschwirkung erzielt werden, so ist ferner eine geeignete Einregulierung der Koppelung zwischen den Kreisen erforderlich. Von ihr hängt die Dauer einer Schwebung ab, also die Zeit, die dem Funken für das Auslöschen zur Verfügung steht. Erfolgen die Schwebungen zu schnell, so versagt die Löschwirkung. Durch Losermachen der Koppelung tritt sie dann ein.

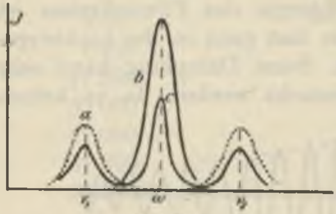


Fig. 29.

Mitunter löscht der Funke bei zu enger Koppelung nicht gleich beim ersten Amplitudenminimum, sondern erst beim zweiten oder bei einem folgenden. Die Schwingungen im Sekundärkreis werden dadurch unreiner; neben der Eigenschwingung treten die Koppelschwingungen mehr hervor und der Stromeffekt ist kleiner. Fig. 29 zeigt Resonanzkurven des Sekundärkreises: a) für einen nichtlöschenden Funken, b) bei guter Löschwirkung, c) bei teilweise versagender.

H. Aufladung des Kondensatorkreises.

Um den Kondensatorkreis auf die zum Durchbrechen der Funkenstrecke nötige Spannung aufzuladen, benutzt man, wenigstens im Laboratorium, meist den Induktor, dessen Sekundärspule an die Klemmen der Funkenstrecke angelegt wird (Fig. 30)[1]. Wenn der Kondensatorkreis

[1] In Fig. 30 ist angenommen, daß die Kapazität des Kondensatorkreises aus zwei hintereinander geschalteten Kondensatoren besteht; eine Schaltungsweise, wie sie praktisch oft benutzt wird.

nicht sehr hohe Frequenz hat, sind dabei keine besonderen Vorsichtsmaßregeln nötig. Die hohe Selbstinduktion der Induktorspule verhindert den Durchgang der schnellen Schwingungen durch sie. Für mehr technische Zwecke werden Wechselstromtransformatoren zur Aufladung benutzt, wobei die Funken sehr schnell aufeinander folgen und neben der dadurch erzielten größeren Energie gewisse praktische Vorteile erhalten werden (tönende Funken).

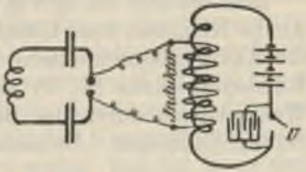


Fig. 30.

Wenn die Amplituden eines Kondensatorkreises (z. B. für Meßzwecke) nur klein sein sollen, kann man den Funken ersetzen durch einen Kontakt, der mechanisch geöffnet und geschlossen wird, etwa einen Stimmgabelunterbrecher oder ähnliches. Die Ladung wird durch Akkumulatoren bewirkt (Fig. 31). (Es werden noch eine Reihe anderer Schaltungen benutzt, die zum Teil einen anderen Anfangszustand des Kondensatorkreises hervorrufen, aber immer die Eigenschwingung liefern.)

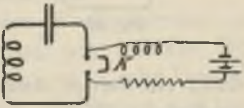


Fig. 31.

2. Ungedämpfte Schwingungen nach der Lichtbogenmethode.

Die oben dargestellten Methoden gestatten sämtlich nur, die mehr oder weniger gedämpften Eigenschwingungen von Kondensatorkreisen herzustellen. Die Erzeugung ungedämpfter Schwingungen von hoher Frequenz wäre natürlich für viele Zwecke sehr erwünscht; ein Mittel[1]) dazu hat man im Lichtbogen gefunden.

Man benutzt die in Fig. 32 dargestellte Anordnung: An die Klemmen eines Gleichstromlichtbogens, der durch die Akkumulatorenbatterie B unterhalten wird, ist der Kondensatorkreis (L, C) angelegt. Der Durchtritt von Wechselstrom durch die Batterie B wird durch große Selbstinduktionen, „Drosselspulen", D verhindert.

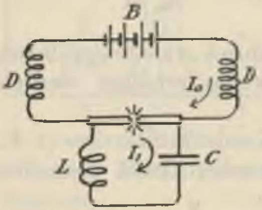


Fig. 32.

Wird an den brennenden Lichtbogen, der vom Gleichstrom I_0 durchflossen sei, und an dessen Klemmen eine entsprechende, aus seiner Charakteristik (vgl. S. 78) zu entnehmende Spannung herrsche, plötzlich der Kondensatorkreis angelegt, so lädt sich der Kondensator auf. Im Kreis fließt dann ein Strom, dessen Momentanwert wir mit I_1 bezeichnen wollen.

Der durch den Lichtbogen fließende Strom wird also kleiner, infolgedessen ändert sich der Widerstand des Bogens und die Spannung an seinen Klemmen nimmt entsprechend der Charakteristik zu. (Wir denken uns den Strom I_0 so gewählt, daß er noch in dem stark abfallenden Teil der Charakteristik liegt.)

Auf diese höhere Spannung lädt sich der Kondensator

[1]) Ungedämpfte Schwingungen liefern auch die gewöhnlichen Wechselstromdynamos; allerdings ist es nicht ganz leicht, damit größere Frequenzen bei einigermaßen beträchtlicher Energie herzustellen. Unter Verwendung neuer Konstruktionsprinzipien ist es jetzt gelungen, Maschinen herzustellen, welche für drahtlose Telegraphie verwendbare Frequenzen liefern. Wir gehen darauf und auf die ebenfalls praktisch ausgeführten Methoden zur Steigerung der Frequenz eines Wechselstroms in geeigneten Transformatoren nicht ein und verweisen auf die Literatur über drahtlose Telegraphie.

auf. Ist die Ladung beendigt, $I_1 = 0$, so hat der Strom durch den Bogen wieder seinen alten Wert, ebenso die Spannung an seinen Klemmen. Infolgedessen entlädt sich jetzt der Kondensator durch den Bogen. Der Strom durch den letzteren wird größer als I_0, infolgedessen sinkt die Klemmspannung unter ihren normalen Wert, und bis zu dieser Spannung entlädt sich der Kondensator. Ist diese Entladung beendigt, so erhält die Klemmspannung des Bogens ihren normalen Wert wieder, und der Kreis muß sich wieder aufladen.

Dabei steigt wieder die Bogenspannung, und man sieht, daß das Spiel kontinuierlich andauert.

Wesentlich für das Zustandekommen der Schwingungen ist es, daß der Lichtbogen einen mit wachsender Stromstärke abnehmenden Widerstand besitzt, oder wie man sagt, eine fallende Charakteristik hat.

Wie groß die Amplituden des Wechselstroms im Kondensatorkreise werden, darüber gibt unsere Betrachtung keinen Aufschluß. Sie hängen in sehr komplizierter Weise von der Charakteristik des Bogens und von den Konstanten des Kondensatorkreises und des Gleichstromzweiges ab.

Falls die Verhältnisse so sind, daß die Amplituden von I_1 klein bleiben gegen I_0, so ist der Wechselstrom ein sinusförmiger, und die Frequenz ist sehr nahe der Eigenfrequenz des Kondensatorkreises.

Werden dagegen die Amplituden größer als I_0, so bleibt der Strom nur ganz angenähert ein sinusförmiger. Die am stärksten vertretene Frequenz hängt dann nicht bloß von den Konstanten des Kondensatorkreises, sondern namentlich auch von der Bogenlänge stark ab.

Diese sogenannten Schwingungen zweiter Art, die in der Technik wegen der größeren Energie allein Verwendung finden, treten besonders gut auf, wenn der Lichtbogen in einer Wasserstoff- oder wasserstoffhaltigen (Alkoholdämpfe) Atmosphäre brennt.

Für drahtlose Telegraphie und Telephonie benutzt man besonders konstruierte Lampen, bei denen die Anode aus Kupfer besteht und gekühlt wird, und in denen außerdem auf den Bogen ein Magnetfeld wirkt. Durch diese Mittel versucht man möglichst kräftige Schwingungen von konstanter Frequenz zu erzeugen, jedoch bleiben namentlich die nicht zu beseitigenden Frequenzänderungen immer störend.

3. Die technische Ausführung der Kondensatorkreise.

Die Kondensatoren und Selbstinduktionen für Schwingungskreise können natürlich in mannigfachster Art ausgeführt werden, und es ist hier nur möglich, einige typische Formen anzuführen. Dabei seien diejenigen Apparate ausgewählt, mit denen man Frequenzen von etwa 10^4 bis 10^7 herstellt, wie sie für drahtlose Telegraphie Verwendung finden.

Der Hauptgesichtspunkt bei der Herstellung eines Kreises ist meist die Erzielung einer kleinen Dämpfung; außerdem hängt die Ausführung davon ab, ob der Kreis große Energie führen soll und hohe Spannungen in ihm auftreten, wie bei Funkenerregung, oder ob er als Resonanzkreis zu Messungen dient.

A. Kondensatoren.

Als Kapazität in durch Funken erregten Kreisen verwendet man am häufigsten Leidener Flaschen (Fig. 33), bei denen die Belegungen durch Glas voneinander getrennt sind.

Diesen sowie allen Kondensatoren mit festem Dielektrikum haften verschiedene Nachteile an.

Bei größeren Spannungen tritt das sog. „Sprühen" auf, d. h. eine Glimmentladung, die von der einen Belegung über die Oberfläche des Glases hinweg zur anderen geht. Sie vergrößert die Dämpfung und beeinflußt auch die Form der Schwingungen. Man kann das Sprühen zum größten Teil beseitigen, indem man die Flaschen unter Öl setzt, oder aber, indem man als Kapazität eine Batterie aus hintereinander- (und eventuell parallel-) geschalteten Flaschen nimmt, so daß die an der einzelnen auftretende Spannung vermindert wird.

Fig. 33.

Ferner verursachen die Schwingungen in dem festen Dielektrikum eine Erwärmung (herrührend von einer dielektrischen Hysteresis, die der magnetischen ganz analog ist). Die Schwingungen verlieren also Energie, ihre Dämpfung ist größer als bei einem verlustlosen Kondensator.

Außerdem ist die Kapazität der Kondensatoren mit festem Dielektrikum von der Frequenz etwas abhängig, was allerdings nur für Messungen in Betracht kommt.

Für Luft als Isolator ist der Hysteresisverlust (ebenso die Frequenzabhängigkeit der Kapazität) ganz unmerklich. Es werden daher für genauere Messungen fast ausschließlich Luftkondensatoren verwandt. Bei normalem Druck ist aber die Durchschlagsfestigkeit eine kleinere als bei einem festen Isolator, d. h. bei demselben Abstand der Belegungen können nur kleinere Spannungen an den Luftkondensator angelegt werden. Für höhere Spannungen hat man daher diese Art Kondensatoren in Behälter eingeschlossen, die mit Luft oder Kohlensäure unter hohem

Druck gefüllt sind, wo dann derselbe Kondensator viel höhere Spannungen aushält.

Zur Aufnahme der Resonanzkurve usw. braucht man Kondensatoren mit kontinuierlich variabler Kapazität, sog. Drehkondensatoren, deren Einrichtung aus Fig. 34 erhellt. Ein festes System von halbkreisförmigen Platten in konstantem Abstand bildet die eine Belegung; die zweite ist ein ähnliches Plattensystem, das um eine Achse gedreht werden kann, derart, daß das bewegliche System in die Zwischenräume des festen hineingeht.

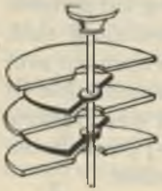


Fig. 34.

In der Nullstellung (Platten auseinander) ist die Kapazität sehr klein, sie nimmt proportional dem Drehungswinkel zu, der daher als relatives Maß für die Kapazität dienen kann

B. Selbstinduktionen.

Als Selbstinduktionen benutzt man vielfach Spulen.

Kleine Dämpfung erzielt man mit weiten Spulen von geringer Windungszahl, die aus massivem, blankem Kupferdraht oder aus Band bestehen. Litzendrähte (vgl. S. 33) lassen sich für höhere Frequenzen nicht mehr in genügend feiner Unterteilung herstellen.

Man hat also immer mit der durch den Skineffekt bewirkten Widerstandsvermehrung und ev. auch mit der Veränderlichkeit der Selbstinduktion mit der Frequenz zu rechnen.

Enggewickelte flache Spulen aus isoliertem Draht sind für die Handhabung bequem, obgleich wegen der Dämpfung nicht sehr günstig.

Um unerwünschte Induktionen auf benachbarte Stromkreise zu verringern, verwendet man lange Spulen die zu einem Ring zusammengebogen sind (Fig. 35). Der größte Teil der magnetischen Kraftlinien verläuft dann in geschlossener Bahn im Innern des Ringes.

Soll die Selbstinduktion berechenbar sein, so gibt man der Drahtleitung einfache geometrische Gestalt, etwa Kreis- oder Rechteckform. Wie Fig. 36 andeutet, kann man eine der kurzen Seiten durch einen Bügel ersetzen, durch dessen Verschieben die Selbstinduktion geändert wird.

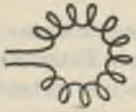


Fig. 35.

Fig. 36.

Andere variable Selbstinduktionen verschafft man sich dadurch, daß man größere oder kleinere Teile einer langen Spule durch einen verschiebbaren Kontakt in den Stromkreis einschaltet; oder dadurch, daß man zwei Spulen hintereinanderschaltet und sie gegeneinander verschiebt.

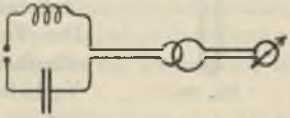


Fig. 37.

Sollen zwei Kreise gekoppelt werden, so legt man ihre Spulen aufeinander, bzw. steckt lange Spulen ineinander. Die Koppelung wird variiert durch Änderung der Entfernung.

Kleine variable Koppelung bewerkstelligt man durch sog. Koppelschleifen: Drahtschleifen von kleiner Selbstinduktion, die in beide Kreise eingeschaltet und gegen ein ander verschiebbar sind. Durch solche Koppelschleifen werden auch die Meßinstrumente erregt, die, wie erwähnt, meist nicht in die Kreise selber eingeschaltet werden (Fig. 37).

4. Die Hilfsmittel zur Messung und zum Nachweis elektrischer Schwingungen.

A. Strom- und Spannungseffekt.

Am häufigsten, namentlich für genauere Messungen, werden Instrumente verwandt, welche auf irgendeine Weise die Wärmeerzeugung des Stromes in einem Widerstand anzeigen, deren Angaben also dem Stromeffekt proportional sind.

Sämtliche Instrumente dieser Art verbrauchen, wenn sie in Tätigkeit versetzt werden, Energie und entziehen diese natürlich den zu untersuchenden Schwingungen. Sie vergrößern also auf jeden Fall die Dämpfung eines zu untersuchenden Kreises, auch dann, wenn sie nicht direkt in ihn eingeschaltet, sondern bloß induktiv mit ihm gekoppelt sind. Die Vermehrung der Dämpfung ist offenbar um so größer, je größer das Verhältnis der entzogenen Energie zu der im Kreise vorhandenen ist. Bei stark erregten Kreisen kommt man daher mit weniger empfindlichen Instrumenten aus; bei schwach erregten, wie lose gekoppelten Resonanzkreisen, muß man dagegen die empfindlichsten Konstruktionen verwenden, um die Schwingungen nicht merklich zu verändern.

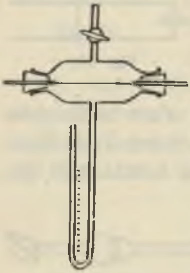


Fig. 38.

a) Hitzdrahtluftthermometer. Die einfachste Form der hierher gehörenden Instrumente ist das Hitzdraht-Luftthermometer (Fig. 38.)

Ein dünner Draht, der vom Strom durchflossen und erwärmt wird, ist in ein geschlossenes Glasgefäß eingesetzt. An diesem Gefäß befindet sich eine U-förmige Kapillare, die durch einen Flüssigkeitsfaden abgeschlossen ist.

Die im Draht entstehende Wärme bewirkt eine Temperatursteigerung der Luftmasse, also eine Zunahme ihres Druckes, die an der Verschiebung des Flüssigkeitsfadens gemessen wird. Die Temperatursteigerung und also die abgelesene Verschiebung ist proportional der pro Sekunde zugeführten Wärmemenge, d. h. dem Stromeffekt.

b) Hitzdrahtgalvanometer. In den bekannten technischen Hitzdrahtgalvanometern wird die Erwärmung eines Hitzdrahtes gemessen durch seine Verlängerung, die man durch geeignete vergrößernde Übertragungen an einem Zeiger sichtbar macht. Für hohe Frequenzen sind besondere Typen konstruiert. Die empfindlicheren Instrumente dieser Art, die sich für orientierende Aufnahmen von Resonanzkurzen eignen, werden wohl als Hitzdraht-Wattmeter bezeichnet. Ihre Skala ist nämlich so gewählt, daß der abgelesene Ausschlag proportional ist dem Stromeffekt, d. h. der Zahl von Watt, die im Instrument in Wärme verwandelt wird.

c) Bolometer. Beim Bolometer benutzt man Hitzdrähte, deren Widerstand von der Temperatur abhängig ist, und bestimmt nach bekannten Methoden mit Gleichstrom die Änderungen des Widerstandes, welche bei der Erwärmung durch einen zu messenden Wechselstrom auftreten. Wenn der Temperaturkoeffizient des Hitzdrahtes konstant ist, dann ist die Widerstandsänderung proportional dem Stromeffekt.

Die Anordnung zur Widerstandsmessung muß so eingerichtet werden, daß der zu messende Wechselstrom nicht durch den Gleichstromzweig von seinem Wege durch den Hitzdraht abgelenkt wird, und daß andererseits der Gleichstrom nicht in die Wechselstromleitungen übertritt, da das die Empfindlichkeit beeinträchtigt. Man verwendet daher das Bolometer oft in der von Rubens und Paalzow angegebenen Schaltung (Fig. 39).

Es werden vier Hitzdrähte H von unter sich gleichem Widerstand verwendet, welche nach Art einer kleinen Wheatstoneschen Brücke zusammengeschaltet sind. An zwei gegenüberliegenden Ecken dieses Vierecks wird der zu messende Wechselstrom (der in einer Schleife induziert werden mag) zugeleitet. Zwischen den beiden anderen Ecken besteht dann offenbar keine Potentialdifferenz. An diese Ecken wird die zur Widerstandsmessung dienende Brückenanordnung in gewöhnlicher Weise angeschlossen. Man sieht, daß auch der Gleichstrom nicht durch die den Wechselstrom zuführende Schleife fließt, und daß daher die Widerstandsmessung nicht beeinträchtigt wird, wenn man diesen Zweig öffnet oder verändert.

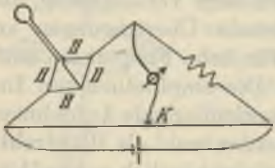


Fig. 39.

Die Einstellung des Kontaktes K wird so vorgenommen, daß ohne Wechselstrom das Galvanometer G den Ausschlag Null ergibt. Wenn dann die Hitzdrähte durch Wechselstrom erwärmt werden, ändert sich der Widerstand der Kombination H. Der dadurch entstehende Ausschlag des Galvanometers dient als Maß für den zugeführten Stromeffekt.

d) Thermoelement. Zwei dünne Drähte aus verschiedenen Materialien (gut bewährt haben sich Konstantan- und Eisendrähte von einigen Hundertstel Millimeter Durchmesser) werden kreuzweise übereinandergelegt und durch eine sehr feine Lötstelle miteinander verbunden. In der durch Fig. 40 angedeuteten Weise wird der zu messende Wechselstrom durchgeschickt. Er erwärmt die Lötstelle und die entstehende thermoelektrische Kraft gibt einen Strom im Galvanometer G[1]). Der Ausschlag des Galvanometers kann auch hier meist direkt als relatives Maß für den Stromeffekt dienen. Zu absoluten Messungen eicht man das Thermoelement, indem man einen anderweitig gemessenen Gleichstrom oder besser Wechselstrom durchschickt.

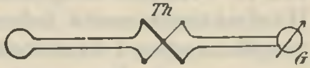


Fig. 40.

Da die beiden Stromkreise sich nur nahezu punktförmig berühren, tritt kaum Strom aus dem einen in den anderen Zweig. Man kann natürlich als Thermoelement auch einfach zwei aneinandergelötete dünne Drähte aus verschiedenem Material verwenden (Fig. 41); dann muß man aber durch Einschalten von Selbstinduktion und Kapazität in der angedeuteten Weise verhindern, daß die Ströme aus dem einen in den anderen Zweig eintreten.

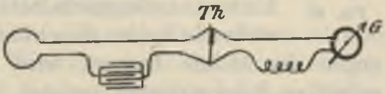


Fig. 41.

Meist hat das Galvanometer selbst hinreichende Selbstinduktion, so daß sich das Einschalten einer besonderen Drosselspule erübrigt. Dem Kondensator im Wechselstromkreis gibt man möglichst große Kapazität (Glimmerkondensator bis zur Größenordnung eines Mikrofarads), um seinen scheinbaren Widerstand gegen den Wechselstrom recht klein zu machen.

Die Empfindlichkeit der Thermoelemente (sowohl als der Bolometer) wird stark erhöht (auf das 10- bis 20fache),

---

1) Die übrigen Lötstellen der dünnen Drähte erwärmen sich nur unmerklich, da sie eine Verbindung mit dicken Zuführungsdrähten herstellen.

wenn man die Hitzdrähte in ein sehr hoch evakuiertes Glasgefäß setzt. Die Wärmeableitung ist dann vermindert, und eine gegebene Wärmezufuhr bewirkt eine größere Temperatursteigerung.

Bei Thermoelement und Bolometer läßt sich so mit sehr empfindlichen Galvanometern erreichen, daß ein Skalenteil Ausschlag an diesen etwa einem Wechselstrom von 10^{-6} Ampere entspricht. Die vorher besprochenen Hitzdrahtinstrumente liefern in empfindlicher Ausführungsform etwa 1 Skalenteil $= 10^{-3}$ Ampere.

Fig. 42.

e) Dynamometer. Auf den Kraftwirkungen zwischen zwei Stromkreisen beruhen die sog. Dynamometer, die ebenfalls einen dem Stromeffekt proportionalen Ausschlag liefern. Das gewöhnliche Elektrodynamometer, wie es für technische Wechselströme Verwendung findet, bei dem ein zu messender Strom zwei hintereinandergeschaltete, senkrecht zueinander stehende Spulen durchfließt und die eine davon gegen die andere bewegt, wird allerdings kaum bei schnellen Schwingungen benutzt. Dagegen wendet man etwas andere Ausführungsformen an, die den Verhältnissen bei höheren Frequenzen besser angepaßt sind.

Ihr Prinzip ist das folgende:

Hängt man vor einer von Wechselstrom (oder auch gedämpften Schwingungen) durchflossenen Spule in der durch Fig. 42 angedeuteten Weise einen geschlossenen Drahtring (oder eine kurz geschlossene Spule) drehbar auf, so erfährt er Kräfte, die dem Stromeffekt proportional sind und ihn so zu drehen suchen, daß seine Windungsebene senkrecht zu derjenigen der ersten Spule steht.

Nehmen wir an, das Magnetfeld der ersten Spule sei in demjenigen Raum, den der Ring einnimmt, homogen

(Fig. 43). Die Kraftlinien stehen senkrecht zur Ebene der ersten Spule und die Feldstärke ist in jedem Augenblick proportional dem Momentanwert des Stromes I_1 in ihr. Die Normale auf der Ebene des Ringes bilde mit den Kraftlinien einen Winkel x, dann ist der magnetische Induktionsfluß durch den Ring:

$$Q = \mu \mathfrak{H} S \cos x \backsim I_1 \cos x,$$

wenn seine Windungsfläche mit S bezeichnet wird.

Nehmen wir an, daß der Ring einen gegen die Induktanz vernachlässigbar kleinen Ohmschen Widerstand hat, und daß ferner durch seine Gegenwart das Feld der ersten Spule nicht merklich beeinflußt wird, so wird (vgl. S. 23) in ihm ein Strom I_2 induziert, der in jedem Augenblick dem Strom I_1 proportional ist, aber im entgegengesetzten Sinn zirkuliert. Der induzierte Strom ist also so gerichtet, daß die Windungsebene des Ringes sich in eine zu derjenigen der Spule senkrechte Lage zu stellen sucht. (Auch aus (12) S. 13 läßt sich dieses Resultat leicht ableiten.)

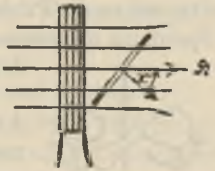


Fig. 43.

Wird der Ring durch elastische Kräfte (Torsionsaufhängung usw.) in seine ursprüngliche Lage zurückgezogen, so entsteht ein Ausschlag proportional dem Mittelwert von $I_1 \cdot I_2$ oder proportional dem von I_1^2, d. h. proportional dem Stromeffekt.

Der Proportionalitätsfaktor ist, wie man sieht, abhängig von dem Winkel, den die Ausgangsstellung mit den Kraftlinien bildet. Er (und damit die Empfindlichkeit) erreicht seinen größten Wert, wenn dieser Winkel 45° beträgt.

Wir entnehmen aus der vorhergehenden Betrachtung das noch zu benutzende Resultat, daß in einem Wechselmagnetfeld ein kurzgeschlossener Ring sich so einzustellen sucht, daß seine Windungsebene den Kraftlinien parallel ist (falls sein Ohmscher Widerstand klein gegen die Induktanz für die betr. Frequenz ist).

f) Elektrometer. Der Spannungseffekt wird seltener zu Messungen benutzt. Er kann beobachtet werden mit einfacheren Formen des Quadrantelektrometers, z. B. den durch Fig. 44 dargestellten, wo die beiden Quadranten an die Punkte anzulegen sind, zwischen denen die Spannung gemessen werden soll, also ev. an die Klemmen des Kondensators.

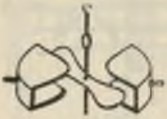


Fig. 44.

g) Geißlerrohr und Funke als Anzeiger für Spannung. Das Auftreten von Spannungen an den Klemmen des Kondensators läßt sich in sehr bequemer Weise erkennen durch ein Geißlerrohr. Eine bis auf einen gewissen Druck ausgepumpte Glasröhre, die keine eigentlichen Elektroden zu besitzen braucht, wird über die Punkte gelegt, an denen Spannungen auftreten. Erreichen diese eine genügende Höhe, so setzt im Rohr eine leuchtende Entladung ein. (Der Wechselstrom hoher Frequenz fließt durch das elektrodenlose Rohr, weil die innere leitend werdende Gasmasse gewissermaßen als Belegung von Kondensatoren dient, deren äußere Belegung die Klemmen oder Drähte bilden, zwischen denen das Rohr aufgelegt ist.)

In ähnlicher Weise erkennt man aus dem Einsetzen einer Funkenstrecke, die zwischen zwei auf Spannung zu untersuchende Punkte geschaltet ist, daß dort die Spannung einen gewissen Minimalwert erreicht.

Das Geißlerrohr (ebenso der Funke) kann auch zu Messungen dienen, wenn mit ihm die in einem Resonanzkreis auftretenden Spannungen beobachtet werden. Maximales Leuchten oder maximale Schlagweite bedeutet natürlich Abstimmung. Bei hohen Frequenzen (Drahtwellen, Bd. II) hat man durch geeignete Wahl der Beobachtungsmethode das Geißlerrohr zu einem sehr empfindlichen Meßinstrument gemacht.

Bestimmte Gasfüllungen der Geißlerröhren eignen sich besonders gut, weil bei ihnen das Leuchten schon bei relativ kleinen Spannungen einsetzt: Wasserstoff oder namentlich Edelgase wie Helium und Neon.

B. Momentanwerte von Strom und Spannung.

a) Oszillograph. Nur für relativ niedrige Frequenzen (bis zu einigen Zehntausend) kann man noch mechanische Apparate konstruieren, die einigermaßen empfindlich sind, und die imstande sind, die erforderlichen schnellen Bewegungen auszuführen, um die Momentanwerte der Amplituden anzuzeigen.

Fig. 45.

Ein solches Instrument ist der Oszillograph, der eine Art Drehspulgalvanometer mit einem beweglichen System von sehr kleiner Masse darstellt (Fig. 45). Eine Schleife aus sehr dünnem Draht ist zwischen den Polen eines Magneten in der gezeichneten Weise ausgespannt. Fließt ein Strom durch sie, so dreht sich der an ihr angebrachte Spiegel, weil der eine Draht nach vorwärts, der andere nach rückwärts getrieben wird.

Die Schleife selber besitzt als mechanisches schwingendes System eine gewisse Eigenfrequenz; nur wenn diese größer ist als die zu messende Frequenz, sind die Ausschläge in jedem Augenblick mit entsprechender Annäherung proportional dem Momentanwert des Stromes. Sobald Resonanz eintritt, ist die Empfindlichkeit zwar groß, aber der Zusammenhang zwischen Strom und Ausschlag wird kompliziert und die Deutung der Resultate ist umständlich. Das letztere ist auch dann der Fall, wenn die zu messende Frequenz höher ist als die Eigenfrequenz des Instruments; außerdem sind dann die Amplituden stark reduziert bzw. unmerklich. Der Anwendungsbereich ist also für Schwingungen ein beschränkter.

b) **Braunsche Röhre.** Für höhere Frequenzen muß man Vorrichtungen benutzen, die den Strom anzeigen, ohne daß dabei merkliche Massen in Bewegung gesetzt werden.

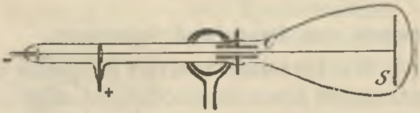


Fig. 46.

Eine solche Vorrichtung von vielseitiger Verwendbarkeit ist die **Braunsche Röhre**: ein hochevakuiertes Glasgefäß von der durch Fig. 46 dargestellten Form, in dem durch Anlegen einer Gleichspannung an die mit + und — bezeichneten Elektroden Kathodenstrahlen erzeugt werden. Dieselben gehen von der — Elektrode aus; durch Diaphragmen wird ein feines Bündel ausgeblendet, das einen Schirm S trifft, der mit geeigneten Substanzen bestrichen ist. An der Auftreffstelle der Strahlen erscheint ein leuchtender Fluoreszenzfleck. Das Kathodenstrahlbündel besteht bekanntlich aus schnell bewegten Elektronen und wird daher sowohl durch elektrische, als auch durch magnetische Kräfte beeinflußt.

Ein elektrisches Feld, das erzeugt wird durch eine an die Belegungen des in der Röhre befindlichen Kondensators C angelegte Spannung, lenkt die Strahlen je nach seiner Richtung nach oben oder unten ab, und der Fleck auf dem Schirm verschiebt sich um eine der Spannung proportionale Größe.

Ein magnetisches Feld (das etwa durch eine wie in Fig. 46 orientierte Spule erzeugt sei) wirkt auf das Kathodenstrahlbündel ähnlich wie auf einen beweglichen Stromleiter, lenkt also die Strahlen ab in einer Richtung, welche senkrecht steht auf der Strahlen- und der Feldrichtung. (In der Figur also ebenfalls nach oben oder unten.)

Da die Elektronen eine sehr kleine (scheinbare) Masse, aber relativ hohe Ladung und sehr hohe Geschwindigkeit haben, so ist auch für die höchsten in Betracht kommenden Frequenzen die Ablenkung des Fluoreszenzflecks in jedem Augenblick proportional dem betr. Wert von Strom oder Spannung.

Schaltet man etwa die Spule von Fig. 46 in einen Kondensatorkreis ein oder legt den Kondensator C an die Klemmen des im Kreise befindlichen, so erhält der Fleck eine rasch auf- und abwärtsgehende Bewegung, die natürlich so schnell vor sich geht, daß man im wesentlichen nur eine leuchtende Linie sieht. Um den Verlauf des Stromes zu erkennen, betrachtet oder photographiert man den Fleck im rotierenden Spiegel, wodurch man Schwingungskurven erhält, wie sie früher dargestellt wurden (Fig. 19, 20, 26, 27).

Durch geeignete Anordnungen kann man diese Figuren auch direkt auf dem Fluoreszenzschirm darstellen.

Der Zusammenhang zwischen zwei Schwingungen kann mit Hilfe der Braunschen Röhre in sehr einfacher Weise untersucht werden. Man läßt dazu die beiden Schwingungen so auf die Röhre einwirken, daß die eine den Fleck in einer bestimmten, etwa in der horizontalen Richtung (x) verschiebt, die zweite in der dazu senkrechten (y). Das kann durch zwei zueinander senkrechte Spulen erreicht werden (Fig. 47) oder dadurch, daß man in der einen Richtung elektrisch in der anderen magnetisch ablenken läßt.

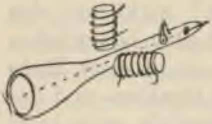


Fig. 47.

Der Fleck macht dann die resultierende Bewegung und beschreibt Kurven, wie sie aus der Akustik als Lissajoussche bekannt sind.

Wenn die Frequenzen der beiden Schwingungen voneinander merklich abweichen, dann sind die Figuren kompliziert.

Am einfachsten ist der Fall gleicher Frequenzen, den wir etwas genauer betrachten wollen. Es sei also die Bewegung des Flecks in der x-Richtung bestimmt durch:

$$x = A \sin \omega t ,$$

die in der dazu senkrechten durch

$$y = B \sin (\omega t + \varphi) .$$

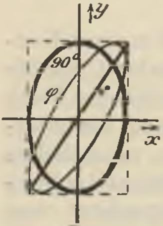


Fig. 48.

Die Gleichung der vom Fleck beschriebenen Kurve erhält man aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von t. Sie stellt im allgemeinsten Falle eine Ellipse dar.

Wenn die Phasenverschiebung φ Null oder 180° beträgt, dann artet die Ellipse in eine Gerade aus (Fig. 48). Wenn $\varphi = 90°$ oder 270° ist, dann liegen die Achsen der Ellipsen in den Koordinatenrichtungen und verhalten sich wie B zu A, für dazwischen liegende Phasen hat die Ellipse eine zwischen diesen Extremen liegende Gestalt, aus der sich die Phase bestimmen läßt.

Wenn die Amplituden der beiden superponierten Schwingungen einander gleich sind, so ist bei $\varphi = 90°$ die Bahn des Flecks ein Kreis [1]), bei beliebiger Phase eine Ellipse, deren große Achse unter 45° geneigt ist (Fig. 49).

Wenn die Schwingungen, die sich auf dem Schirm zusammensetzen, gedämpft sind, dann entstehen nicht mehr einfache Ellipsen, sondern spiralenähnliche Figuren, die aber die gleiche Deutung erlauben.

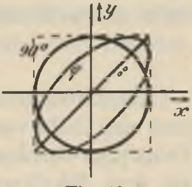


Fig. 49.

c) Das intermittierende Leuchten des Funken usw. Der im Kondensatorkreis enthaltene Funke kann übrigens selber als eine Art Indikator für die Stromstärke benutzt werden.

Betrachtet man ihn nämlich im rotierenden Spiegel, so wird er in ein leuchtendes Band ausgezogen, das aus einzelnen hellen Streifen besteht, die jedesmal maximaler Stromstärke entsprechen (Fig. 50). Der Abstand zweier heller Streifen gibt also bei bekannter Umlaufsgeschwindigkeit des Spiegels die halbe Periode, so daß man darin ein Mittel zur Bestimmung der Frequenz eines Kreises hat, allerdings kein sehr genaues. Feddersen hat durch Beobachtung des Funken zuerst die oszillatorische Natur der Entladung eines Kondensatorkreises nachgewiesen.

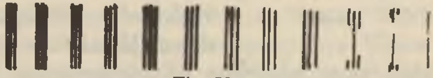


Fig. 50.

Ein von Schwingungen zum Leuchten erregtes Geißlerrohr liefert im rotierenden Spiegel ähnliche Bilder wie

---

[1]) Eine Phasenverschiebung von 90° besteht zwischen den Strömen, wie auch zwischen den Spannungen, in zwei lose gekoppelten Kondensatorkreisen, wenn sie in Resonanz sind. Wir sehen also hier, daß man auch aus der Form der Lissajousschen Figur, ohne Rücksicht auf die Größe der Amplituden im Resonanzkreis, bestimmen kann, ob Resonanz zwischen zwei Kreisen vorhanden ist.

der Funke, da auch sein Leuchten von der Stromstärke abhängt und ihr auch bei schnelleren Änderungen folgt. Wenn man den Elektroden geeignete Gestalt gibt, indem man lange Drähte oder Bleche nimmt, so daß sie nur zum Teil mit Glimmlicht überzogen sind, dann liefert die Länge des Glimmlichtes einen ungefähren Wert für die angelegte (momentane) Spannung (Glimmlichtoszillograph).

C. Detektoren.

Als Detektoren oder Wellenindikatoren bezeichnet man eine Reihe von Apparaten, die auf den verschiedensten Prinzipien beruhen, und die weniger zum Messen dienen als zum Nachweis von Schwingungen eines Kreises.

Sie werden ihrer Empfindlichkeit wegen namentlich in der drahtlosen Telegraphie zum Empfang benutzt.

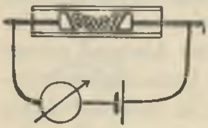


Fig. 51.

a) Kohärer. Die älteste hierhergehörige Konstruktion ist der Kohärer, der allerdings kaum mehr praktische Verwendung findet (Fig. 51). In eine Glasröhre sind zwischen zwei Elektroden Feilspäne von irgend einem Metall lose eingefüllt. Gegenüber einer niedrigen Gleichspannung besitzt die Vorrichtung einen sehr hohen Widerstand, so daß praktisch durch das Galvanometer in der angedeuteten Schaltung kein Strom fließt. Wenn aber der Kohärer (der an die Klemmen eines Kreises geschaltet sein mag) einmal von höheren Wechselspannungen betroffen wird, sinkt sein Widerstand bedeutend, das Galvanometer zeigt einen Ausschlag. Die Widerstandsverminderung bleibt nach dem Aufhören der Schwingungen bestehen. Durch Erschüttern kann der Kohärer wieder in seinen Anfangszustand versetzt werden. Die Wirkungsweise ist nicht ganz aufgeklärt.

b) Magnetdetektor. Seine Wirkungsweise mag an folgender Erscheinung illustriert werden. Wird ein Bündel von Stahldrähten oder ein Stahlband magnetisiert, so daß es remanenten Magnetismus erhält, und dann in ein gedämpftes magnetisches Wechselfeld gebracht (etwa in das der Spule eines Kondensatorkreises), so verliert es dort unter geeigneten Bedingungen seinen Magnetismus. Die Änderung des magnetischen Zustandes kann benutzt werden zur Erregung eines Telephons.

c) Elektrolytischer Detektor (Schlömilchzelle). Er besteht aus zwei in verdünnte Schwefelsäure eintauchenden Elektroden, von denen die Anode aus einem sehr feinen Platindraht besteht, der nur sehr wenig aus einer Glashülle hervorragt (Fig. 52). Die Kathode kann aus dickerem Platindraht oder Blei bestehen.

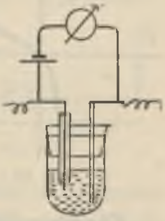


Fig. 52.

An diese Elektroden wird eine Gleichspannung angelegt, die ungefähr ebenso groß ist wie die Polarisationsspannung, so daß durch die Zelle nur wenig Strom fließt. Wird nun eine gedämpfte Schwingung in geeigneter Weise durch die Zelle hindurchgeleitet, so verschwindet scheinbar die Polarisation für kurze Zeit und es fließt ein stärkerer Gleichstrom, der am Galvanometer beobachtet werden kann, oder in einem in den Stromkreis eingeschalteten Telephon ein Knacken gibt.

Die Wirkung der Zelle beruht auf dem unten zu besprechenden Gleichrichtereffekt.

d) Kontaktdetektoren. Eine ganze Klasse von Detektoren, unter denen sich sehr empfindliche und in der Telegraphie jetzt meist benutzte befinden, besteht aus Halbleitern; Metalloxyden oder Sulfiden usw. (meist werden natürliche Kristalle benutzt), die in losem Kontakt von einer kleinen Metall- oder Graphitelektrode (Spitze) berührt werden.

Ihre Wirksamkeit läßt sich (wenigstens teilweise) erklären durch folgende Erscheinungen, die man an leitenden Mineralien, z. B. Bleiglanz, beobachtet hat. Ein derartiges Kristallstück sei so in einen Gleichstromkreis eingeschaltet, daß es von einer Metallelektrode in größerer Ausdehnung berührt wird, während die zweite Elektrode eine Spitze ist, an der der größte Teil des Widerstandes liegt.

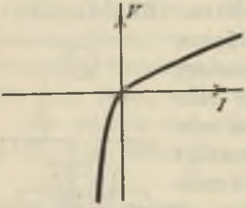


Fig. 53.

Wird dann die EMK im Stromkreis variiert, so ändert sich die Stromstärke *nicht* proportional mit ihr. Ein derartiger Kontakt hat also keinen konstanten Widerstand, er gehorcht dem *Ohm*schen Gesetz nicht.

Für einen Strom, der in einem bestimmten Sinn fließt, ist der Widerstand viel größer als für den gleichen Strom im entgegengesetzten Sinn. Die Charakteristik kann ungefähr durch eine Kurve wie Fig. 53 wiedergegeben werden.

Wäre der Widerstand in der einen Richtung unendlich groß, so würde beim Anlegen einer Wechselspannung Strom nur in der einen Richtung durchgehen, also ein Gleichstrom (mit variabler Amplitude) statt eines Wechselstroms fließen: sog. *Gleichrichter- oder Ventilwirkung.*

Auch wenn der Widerstand des betr. Leiters in der einen Richtung nicht unendlich groß ist, sondern nur im allgemeinen größer ist als der in der anderen, wird durch eine Wechselspannung in ihm eine Gleichstromkomponente erzeugt.

(Man bemerkt, daß die Schlömilchsche Zelle für einen überlagerten Wechselstrom einen ganz ähnlich von der Stromrichtung abhängigen „Widerstand“ hat.)

Zum Nachweis von elektrischen Schwingungen läßt sich ein solcher Leiter in der durch Fig. 54 wiedergegebenen Schaltung verwenden. Durch einen (Sperr- oder Block-) Kondensator, wie wir ihn schon oben beim Thermoelement verwandten, wird dem entstehenden Gleichstrom der Weg durch den Wechselstromzweig verlegt. Nachgewiesen wird der Gleichstrom entweder mit dem Galvanometer oder mit einem Telephon, das bei gedämpften Schwingungen für jeden Schwingungszug ein Knacken gibt.

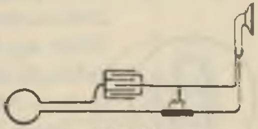


Fig. 54.

Als Mineralien werden benutzt Bleiglanz, Psilomelan, Molybdänglanz, Silizium usw. Die den Kontakt bildenden Spitzen werden aus Graphit oder Stahl und anderen Metallen angefertigt, auch durch eine Reihe von Kontakten ersetzt, die durch grobes Metallpulver hergestellt sind.

Für technische Zwecke hat man eine Unmenge von Kombinationen durchprobiert. Im ganzen stellt sich heraus, daß jeder einigermaßen schlechte Kontakt zwischen verschiedenen Materialien in der obigen Anordnung Gleichstrom liefert.

Allerdings ist die Wirkung aller Detektoren dieser Art wohl nur zum Teil auf die Gleichrichterwirkung zurückzuführen. Oft überwiegt offenbar diejenige elektromotorische Kraft, die beim Erwärmen der Berührungsstelle entsteht. Der Detektor arbeitet dann wie ein Thermoelement.

D. Resonanzdynamometer.

Die oben behandelten Meßinstrumente werden zur Frequenz und Dämpfungsbestimmung von Kondensatorkreisen in der Weise benutzt, daß mit ihnen eine Resonanzkurve aufgenommen wird und aus dieser die gesuchten Größen abgeleitet werden.

Mandelstam und Papalexi haben ein Instrument konstruiert, das Frequenz und Dämpfung auf ganz andere Weise zu bestimmen gestattet.

Das Instrument (Fig. 55) besteht aus zwei senkrecht zueinander stehenden Spulen, in deren Mitte ein kurzgeschlossener Drahtring aufgehängt ist, ähnlich dem bei den Dynamometern verwandten.

Fig. 55.

Spule I, zu der der Ring in seiner Nulllage senkrecht steht, ist mit dem zu untersuchenden Kreis verbunden, Spule II mit einem variablen Resonanzkreis, der mit dem ersten lose gekoppelt ist. (Das Instrument selber führt keine Koppelung herbei, da die Spulen senkrecht aufeinander stehen.)

Wenn der erste Kreis erregt wird (wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß seine Schwingungen ungedämpfte seien), so befindet sich also der Ring unter dem Einfluß zweier zueinander senkrechter magnetischer Wechselfelder von gleicher Frequenz.

Nach dem, was wir oben (S. 102) über die Zusammensetzung zueinander senkrechter Schwingungen gesagt haben, kann das resultierende Magnetfeld in jedem Augenblick nach Größe und Richtung dargestellt werden durch die vom Mittelpunkt aus nach dem Umfang einer Ellipse gezogenen Radienvektoren.

Das magnetische Feld, in dem sich der Ring befindet, ist also eine Art Drehfeld. Wenn die Ellipse in einen Kreis ausartet, so ist es ein reines Drehfeld; im allgemeineren Falle kann es aufgefaßt werden als ein reines Drehfeld, dem ein in Richtung der großen Achse der Ellipse wirkendes einfaches Wechselfeld überlagert ist.

Nun läßt sich zeigen, daß ein Ring, der einen gegen die Induktanz kleinen Ohmschen Widerstand hat, in einem reinen Drehfeld überhaupt keine bewegende Kräfte erfährt. (Die fürs erste anscheinend etwas paradoxe Erscheinung findet sich bekanntlich auch beim gewöhnlichen Drehstrommotor, in dessen Anker beim Ingangsetzen Widerstand eingeschaltet werden muß, damit eine genügende Zugkraft entsteht.)

Fig. 56.

Wir können uns also aus dem auf den Ring wirkenden magnetischen Feld das reine Drehfeld immer wegdenken; es bleibt dann nur das in Richtung der großen Achse der Ellipse wirkende Wechselfeld übrig und in diesem sucht sich, wie angegeben, der Ring immer so einzustellen, daß seine Ebene in Richtung der Kraftlinien, d. h. also in Richtung der großen Achse des elliptischen Drehfeldes liegt.

Falls Spule I das stärkere Magnetfeld liefert und der Resonanzkreis gerade abgestimmt ist, so daß zwischen den beiden (Strömen und den) Magnetfeldern eine Phasenverschiebung von 90° existiert, hat die das Feld darstellende Ellipse die in Fig. 56 mit *r* bezeichnete Lage. Der Ring bleibt also bei Abstimmung in seiner Nullage.

Wird der Resonanzkreis etwas verstimmt, so dreht sich die große Achse der Ellipse im einen oder im anderen Sinne, da die Phasenverschiebung (vgl. S. 55) sich ändert; der Ring schlägt also aus, wenn die Kreise gegeneinander verstimmt sind.

Die genauere Theorie zeigt, daß man nicht nur aus dem Nullwerden des Ausschlags die Resonanz der beiden Kreise feststellen kann, sondern daß man auch die Summe der Dämpfungen der beiden Kreise erhält, wenn man die Ausschläge des Rings als Funktion der Verstimmung des Resonanzkreises aufnimmt.

Die Messungen mit diesem Instrument haben viele Vorzüge vor denen mit Hilfe der Resonanzkurve, außerdem läßt sich mit ihm eine weit größere Genauigkeit erzielen.

5. Einige Beispiele für Messungen mit schnellen Schwingungen in Kondensatorkreisen.

Einige Messungen in Kondensatorkreisen seien hier kurz zusammengestellt.

A. Meßkreis, Frequenzbestimmung.

Einen Kondensatorkreis mit bekannter Selbstinduktion und mit geeichtem variablem Kondensator nennt man einen Meßkreis. Die Frequenz ist entweder nach der Thomsonschen Formel zu berechnen oder für größere Genauigkeit empirisch zu bestimmen (vgl. Wellenlängenmessung in Bd. II).

Mit einem derart geeichten Meßkreis stellt man die Frequenz eines gegebenen Kreises, der nach früher behandelten Methoden erregt ist, fest, indem man ihn genügend lose mit ihm koppelt und seine Frequenz so lange variiert, bis ein eingeschaltetes bzw. induktiv gekoppeltes

Meßinstrument maximale Amplituden anzeigt. Bei kleinerer Dämpfung stimmen dann die Frequenzen überein (ev. sind für größere Genauigkeit die strengeren Formeln zu verwenden. Die Frequenzen können so bis auf etwa $^1/_{1000}$ ihres Wertes genau bestimmt bzw. miteinander verglichen werden (mit Thermoelement und Galvanometer).

B. Bestimmung der Dämpfung.

Nimmt man die Resonanzkurve auf (praktisch nur die des Stromeffektes, der meist mit Thermoelement und Galvanometer beobachtet wird) so erhält man aus ihr nach der S. 58 u. 64 angegebenen graphischen Methode die Summe der Dämpfungen der beiden Kreise, bzw. auch ihrer log. Dekremente. Die Summe $\delta_1 + \delta_2$ sei mit A bezeichnet. Wenn es bekannt ist, daß der Meßkreis viel kleinere Dämpfung hat als der untersuchte, so kann A als Dämpfungskonstante des letzteren genommen werden.

Bei annähernd gleichen Dämpfungen δ_1 und δ_2 verfährt man wie folgt: Man vergrößert die Dämpfung des Meßkreises um eine bekannte Größe, indem man in ihn einen bekannten Widerstand R' einschaltet.

War die Dämpfungskonstante vorher:

$$\delta_2 = \frac{R}{2L_2},$$

so wird sie jetzt:

$$\delta_2' = \frac{R + R'}{2L_2} = \delta_2 + \frac{R'}{2L_2}.$$

Nimmt man mit dem veränderten Meßkreis wieder die Resonanzkurve auf, so erhält man aus ihr jetzt:

$$\delta_1 + \delta_2' = B.$$

Es sei ferner der beobachtete Stromeffekt bei Resonanz im ersten Falle: J_r, nach vergrößerter Dämpfung: J_r'.

Das Verhältnis $\frac{J_r}{J_r'}$ sei gleich C gesetzt.

Nach S. 64 ist:

$$J_r = \frac{\text{konst.}}{\delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2)},$$

also

$$C = \frac{J_r}{J_r'} = \frac{\delta_2' (\delta_1 + \delta_2')}{\delta_2 (\delta_1 + \delta_2)} = \frac{\delta_2 + \frac{R'}{2 L_2}}{\delta_2} \cdot \frac{B}{A},$$

woraus sich ergibt:

$$\delta_2 = \frac{R'}{2 L_2} \cdot \frac{1}{\frac{A}{B} \cdot C - 1}.$$

C. Bestimmung von Selbstinduktionen und Kapazitäten.

Kleinere Selbstinduktionen, deren Bestimmung nach den gewöhnlichen Methoden Schwierigkeiten macht, lassen sich mit Schwingungen sehr bequem und genau messen.

Es wird dazu entweder die zu messende Selbstinduktion mit einer bekannten Kapazität zu einem Kreise zusammengeschaltet, der auf irgend eine Weise erregt wird und dessen Frequenz mit einem geeichten Meßkreis bestimmt wird; oder es wird die Selbstinduktion zu einem Meßkreis zugeschaltet und die Einstellung der Kapazität beobachtet, bei der jetzt Resonanz auf eine gegebene Schwingung stattfindet.

Beim Zuschalten der zu messenden Selbstinduktion ist darauf zu achten, daß sie keine gegenseitige Induktion gegen die vorhandene erhält.

Wenn die Einstellungen der Kapazität des Meßkreises, bei denen ohne und mit zugeschalteter Selbstinduktion L' Resonanz eintritt, mit C_2 und C_2' bezeichnet werden, so gilt:

$$C_2 L_2 = C_2' (L_2 + L') .$$

Also:

$$L' = L_2 \frac{C_2 - C_2'}{C_2'} .$$

Kapazitäten lassen sich ganz ähnlich durch Parallelschalten zum Kondensator des Meßkreises bestimmen.

Sachregister.

GJG
17 85