

Sammlung Götschen

# Technische Schwingungslehre

Von

Dr.-Ing. L. Zipperer

II

**Schwingungen in Maschinenanlagen  
(Torsions- und Biegungsschwingungen)**

Mit 44 Abbildungen.



961

# Sammlung Götschen

Unser heutiges Wissen  
in kurzen, klaren, allgemeinverständlichen  
Einzeldarstellungen

---

Walter de Gruyter & Co.

vormalig G. J. Götschen'sche Verlagehandlung / J. Guttentag, Verlags-  
buchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W. 10 und Leipzig

---

Zweck und Ziel der „Sammlung Götschen“  
ist, in Einzeldarstellungen eine klare, leicht-  
verständliche und übersichtliche Einführung  
in sämtliche Gebiete der Wissenschaft und  
Technik zu geben; in engem Rahmen, auf  
streng wissenschaftlicher Grundlage und unter  
Berücksichtigung des neuesten Standes der  
Forschung bearbeitet, soll jedes Bändchen  
zuverlässige Belehrung bieten. Jedes einzelne  
Gebiet ist in sich geschlossen dargestellt, aber  
dennoch stehen alle Bändchen in innerem Zu-  
sammenhange miteinander, so daß das Ganze,  
wenn es vollendet vorliegt, eine einheitliche,  
systematische Darstellung unseres gesamten  
Wissens bilden dürfte.

Ausführliche Verzeichnisse  
der bisher erschienenen Bände umsonst und postfrei

# Maschinenbautechnische Bibliothek

aus der Sammlung Göschel

**Praktisches Maschinenzeichnen mit Einführung in die Maschinenlehre** von Ing. R. Schiffner und Prof. Dipl.-Ing. W. Tochtermann.

I. Das Maschinenzeichnen. Zeichnen nach Vorlage und Zeichnen nach Modell. Mit 68 Tafeln . . . . . Nr. 589

II. Die wichtigsten Maschinenteile in zeichnerischer und konstruktiver Hinsicht. Mit 61 Tafeln . . . . . Nr. 590

**Die Maschinenelemente** von Ober-Ing. Friedr. Barth, Neubearb. von Dr.-Ing. E. vom Ende . . . . . Mit 152 Fig. Nr. 3

**Maschinenmeßkunde** von Dr.-Ing. L. Zipperer. Mit 98 Abb. Nr. 880

**Dynamik** von Dr. W. Müller. Mit 121 Figuren . . . . . Nr. 902, 903

**Metallurgie** von Dr. August Geltz. 2 Bände. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314

**Eisenhüttenkunde** von Prof. Dr.-Ing. M.v. Schwarz. 2 Bde. Mit 86 Abbild. und 3 Tafeln . . . . . Nr. 152, 153

**Technische Wärmelehre (Thermodynamik)** von Dipl.-Ing. K. Walther und M. Röttlinger. Mit 54 Figuren. Nr. 242

**Technische Schwingungslehre** von Dr.-Ing. L. Zipperer. 2 Bde. Mit 93 Abbild. . . . . Nr. 953, 961

**Mechanische Technologie** von Geh. Hofrat Professor A. Lüdcke. 2 Bände. Mit 249 Fig. . . . . Nr. 340, 341

**Die thermodynam. Grundlagen d. Wärmekraft- u. Kältemaschinen** v. Dipl.-Ing. M. Röttlinger. Mit 73 Fig. Nr. 2

**Die Kalkulation im Maschinenbau** von Stud.-Rat Ing. H. Bethmann. Mit 61 Figuren . . . . . Nr. 486

**Die Werkstoffe des Maschinenbaues** von Dr. A. Thum. 2 Bände. Mit 73 Abbildungen . . . . . Nr. 476, 996

**Die Dampfmaschinen.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedrich Barth.

I. Wärme- und dampftechnische Grundlagen. Mit 64 Fig. Nr. 8

II. Bau und Betrieb der Dampfmaschinen. Mit 115 Fig. Nr. 572

**Die Dampfkessel.** Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Oberingenieur Friedrich Barth.

I. Kesselsysteme und Feuerungen. Mit 43 Figuren . . . . . Nr. 9

II. Bau und Betrieb der Dampfkessel. Mit 42 Figuren. Nr. 521

**Gasmaschinen und Ölmaschinen** von Ing. A. Kirschke u. Dipl.-Ing. Ernst Oehler. 2 Bde. Mit 118 Abb. u. 4 Taf. Nr. 316, 651

**Die Wasserturbinen** v. Dipl.-Ing. P. Holl u. Baurat E. Treiber.

I. Allgemeines. Die Freistrahlturbinen. Mit 86 Abbild. Nr. 541

II. Die Überdruckturbinen. Die Wasserkraftanlagen. Mit 75 Abbildungen . . . . . Nr. 542

**Wasserkraftanlagen** von Dr.-Ing. Felix Bundschu.

I. Allgemeines und Stauwerke. Mit 67 Abb. . . . . Nr. 665

II. Werkwasserleitungen u. Entwurfsgrundlagen. Mit 77 Abb. Nr. 666

**Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion** von Prof. Dipl.-Ing. C. Zietemann. 3 Bde. Mit 312 Fig. Nr. 274, 715, 716

**Die zweckmäßigste Betriebskraft** v. Ob.-Ing. Friedr. Barth.

I. Einteilung. Dampfkraftanlagen. Verschiedene Kraftmaschinen. Mit 19 Abbild. . . . . Nr. 224

II. Gas-, Wasser- und Windkraft-Anlagen. Mit 24 Abbild.	Nr. 225
III. Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graphische Darstellungen. Wahl der Betriebskraft. Mit 13 Abbild.	Nr. 474
<b>Eisenbahnfahrzeuge</b> von Reg.-Baum. a. D. H. Hinnenthal.	
I. Die Dampflokomotiven. Mit 95 Abbild. und 2 Tafeln	Nr. 107
II. Die Eisenbahnwagen und Bremsen. Neu bearbeitet von Ad. Wolff. Mit 85 Abbild.	Nr. 108
<b>Kolonial- und Kleinbahnen</b> von Prof. F. Baltzer. 2 Bde. Mit 29 Textabbild.	Nr. 816, 817
<b>Luftschiffahrt</b> von Prof. Dipl.-Ing. C. Eberhardt. Mit 38 Fig.	Nr. 842
<b>Flugtechnik</b> von Prof. Dipl.-Ing. C. Eberhardt. Mit 62 Fig.	Nr. 841
<b>Automobile.</b> Personen- und Lastautomobile sowie Elektrokarren. Von Ing. R. Thebis. Mit 77 Abbild.	Nr. 948
<b>Pumpen- und Druckwasseranlagen</b> von Prof. Dipl.-Ing. R. Vogdt. Mit 117 Fig.	Nr. 290
<b>Pumpen-Anlagen.</b> Aufgaben und Lösungen. Von Städt. Baurat Dipl.-Ing. Fr. Krauß. Mit 53 Abbildungen	Nr. 996
<b>Die Hebezeuge</b> von Prof. Dipl.-Ing. G. Tafel.	
I. Entwurf von Winden und Kranen. Mit 251 Fig.	Nr. 414
II. Fördermittel im Betrieb. Mit 150 Handskizzen	Nr. 417
<b>Die landwirtschaftlichen Maschinen</b> von Dipl.-Ing. Karl Walther. 3 Bände. Mit 258 Abbild.	Nr. 407—409
<b>Die Werkzeugmaschinen für Holzbearbeitung</b> von Dr. Karl Trautvetter. Mit 99 Abbild.	Nr. 582
<b>Die Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung</b> von Ingenieur Professor Hermann Wilda.	
I. Die Mechanismen der Werkzeugmaschinen. Die Drehbänke. Die Fräsmaschinen. Mit 339 Abbild.	Nr. 561
II. Die Bohr- und Schleifmaschinen. Die Herstellung von Zahnrädern auf Werkzeugmaschinen. Mit 128 Abb.	Nr. 562
III. Hobel-, Shaping- und Stoßmaschinen. Sägen und Scheren. Antrieb und Kraftbedarf. Mit 98 Abbild.	Nr. 821
<b>Gießereimaschinen</b> von Dipl.-Ing. Emil Treiber. Mit 69 Fig.	Nr. 548
<b>Die Gleichstrommaschine</b> von Prof. Dipl.-Ing. Fr. Sallinger. 2 Bände. Mit 6 Tafeln u. 129 Figuren	Nr. 256, 881
<b>Aufgabensammlung über die Gleichstrommaschine</b> mit Lösungen v. Prof. Dipl.-Ing. Fr. Sallinger. Mit 38 Fig.	Nr. 912
<b>Wechselstromerzeuger</b> von Prof. Dipl.-Ing. Fr. Sallinger. Mit 77 Fig.	Nr. 547
<b>Wechselstrom-Kommutatormaschinen</b> von Ingenieur Karl Baudisch. Mit 62 Fig. im Text u. 20 Abbild. auf 12 Tafeln	Nr. 992
<b>Elektrische Förderanlagen</b> v. Prof. Dr.-Ing. A. Schwaiger. Mit 30 Abbildungen	Nr. 678
<b>Die Pressluftwerkzeuge</b> von Dipl.-Ing. P. Illtis. Mit 77 Abb.	Nr. 493
<b>Die Baumaschinen</b> von Ing. Jos. Körting. Mit 126 Abb.	Nr. 702
<b>Englisch für Techniker.</b> Ein Lese- und Übungsbuch von Dir. Ing. Carl Volk. 2 Bände. Mit 44 Figuren	Nr. 705, 706
<b>Technisches Wörterbuch,</b> enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinen- und Schiffbaues von Erich Krebs.	
I: Deutsch-Englisch	Nr. 395
II. Englisch-Deutsch	Nr. 396

---

Weitere Bände sind in Vorbereitung

Sammlung Götschen

# Technische Schwingungslehre

Von

**Dr.-Ing. L. Zipperer**

in Oppau.

II

Schwingungen in Maschinenanlagen  
(Torsions- und Biegungsschwingungen)

Mit 44 Abbildungen



Berlin und Leipzig

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Götschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-  
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

1927



130361

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,  
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Druck von C. G. Röder G.m.b.H., Leipzig. 807027.

DA299/101

# Inhaltsangabe.

## I. Analytische Verfahren.

	Seite
1. Torsionsschwingungen.	
a) Geschichtlicher Rückblick . . . . .	7
b) Bestimmung der Eigenfrequenzen . . . . .	8
1. Mittelbare Verfahren . . . . .	8
$\alpha$ ) Eingespannter Stab mit Schwungscheibe . . . . .	8
$\beta$ ) Welle mit drei Schwungscheiben . . . . .	9
$\gamma$ ) Welle mit beliebig vielen Scheiben . . . . .	13
$\delta$ ) Näherungsverfahren . . . . .	17
2. Unmittelbare Verfahren nach:	
$\alpha$ ) Gümbel-Geiger . . . . .	18
$\beta$ ) Tolle . . . . .	23
$\gamma$ ) Dreves . . . . .	42
3. Berechnung der Wellenkonstanten . . . . .	47
4. Berechnungsbeispiele . . . . .	50
$\alpha$ ) Welle mit drei Scheiben (berechnet nach mittelbaren Verfahren, Gümbel-Geiger und Tolle) . . . . .	50
$\beta$ ) Durchrechnung einer Maschinenanlage nach Tolle . . . . .	79
2. Biegungsschwingungen.	
$\alpha$ ) Welle mit einer Masse . . . . .	97
$\beta$ ) Welle mit mehreren Massen . . . . .	99
$\gamma$ ) Näherungsverfahren (Krause, Dunkerley, Kull) . . . . .	103
$\delta$ ) Graphisches Verfahren nach Stodola . . . . .	107

## II. Experimentelle Verfahren.

1. Torsionsschwingungen (Torsiographen nach Geiger und Frahm). . . . .	109
2. Biegungsschwingungen (Vibrograph nach Geiger) . . . . .	113

	Seite
III. Mittel zur Beseitigung der Schwingungen bei:	
1. Torsionsschwingungen . . . . .	116
2. Biegungsschwingungen (statisches und dynamisches Auswuchten) . . . . .	117

#### Anhang.

#### Fundamentalschwingungen.

1. Theoretische Betrachtungen . . . . .	120
2. Experimentelle Untersuchungen . . . . .	122
3. Mittel zur Beseitigung . . . . .	122
Sachverzeichnis . . . . .	124



## Literaturverzeichnis.

- Blaeß, V., Zur graphischen Berechnung der kritischen Drehzahl rasch umlaufender Wellen. V. d. I. 1914, S. 183.
- Über den Massenausgleich raschumlaufender Körper. Z. f. angew. Math. u. Mech. Heft 6. 1926.
- Borowicz, W. v., Beitrag zur Berechnung kritischer Geschwindigkeiten von zwei- und mehrfach gelagerten Wellen. Dissertation T. H. München 1915.
- Dreves, R., Neues graphisches Verfahren auf statischer Grundlage zur Untersuchung beliebiger Wellenmassensysteme auf freie Drehschwingungen. V. d. I. 1918, S. 588.
- Föppl, O., Berechnung der Biegungsschwingungszahl einer Welle, die mit mehreren Lasten behaftet ist. Z. f. angew. Math. u. Mech. Heft 1, 1927.
- Frahm, H., Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen. V. d. I. 1902, S. 797.
- Ein neuer Torsionsindikator mit Lichtbildaufzeichnung und seine Ergebnisse. V. d. I. 1918, S. 177.
- Geiger, J., Über Verdrehungsschwingungen von Wellen. Dissertation T. H. Berlin 1914.
- Der Torsiograph, ein neues Instrument zur Untersuchung von Wellen. V. d. I. 1916, S. 811.
- Die Theorie des Torsiographen. E. T. Z. 1918.
- Zur Berechnung der Verdrehungsschwingungen von Wellenleitungen. V. d. I. 1921, S. 1241.
- Zur Theorie des Vibrographen. Zeitschrift: Werft — Reederei — Hafen 1924, Heft 11.
- Mechanische Schwingungen und deren Messung. (Springer.) Berlin 1927.
- Gümbel, L., Verdrehungsschwingungen eines Stabes mit fester Drehachse und beliebiger zur Drehachse symmetrischer Massenverteilung unter dem Einfluß beliebiger harmonischer Kräfte. V. d. I. 1912, S. 1025.
- Verdrehungsschwingungen und ihre Dämpfung. V. d. I. 1922, S. 252.
- Heymann, H., Die Auswuchtung rotierender Massen. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1924.

- Holzer, H., Torsionsschwingungen von Wellen mit beliebig vielen Massen. Schiffbau 1907, S. 823.
- Berechnung der Drehschwingungen. (Springer.) Berlin 1921.
- Hort, H., Über neuere dynamisch-statische Wuchtmaschinen. E. T. Z. 1925, Heft 29.
- W., Neuere vereinigte dynamisch-statische Wuchtmaschinen. V. d. I. 1925, S. 1606.
- Hummel, Ch., Kritische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager. V. d. I. 1926. Formungsheft 287.
- Krause, M., Zur Berechnung der kritischen Drehzahlen rasch umlaufender Wellen. V. d. I. 1914, S. 878 und 1276.
- Kull, G., Kritische Drehzahlen schnell umlaufender Wellen. V. d. I. 1918, S. 249, 320 und 619.
- Kutzbach, K., Untersuchungen über Wirkung und Anwendung von Pendeln und Pendelketten im Maschinenbau. V. d. I. 1917, S. 917.
- Lehr, E., Die umlaufenden Massen als Schwingungserreger. V. d. I.-Verlag. Maschinenbau 1922, S. 206; 1923, S. 62.
- Lorenz, H., Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen. V. d. I. 1919, S. 240, 595, 866, 888.
- Magg, J., Drillungsschwingungen in Kurbelwellen. V. d. I. 1918, S. 743; 1919, S. 155.
- Saß, F., Beiträge zur Berechnung kritischer Torsionsdrehzahlen. V. d. I. 1921, S. 67.
- Schmidt, E., Untersuchungen über Fundamentalschwingungen. V. d. I. 1923, S. 33.
- Schröder, A., Zusammenhang der Indikator-Drehkraftdiagramme von Zweitakt-Dieselmotoren mit den Drehschwingungen ihrer Wellen. Dissertation T. H. Berlin, 1926.
- Seelmann, Die Reduktion der Kurbelkröpfung. V. d. I. 1925, S. 601.
- Stodola, Dampfturbinen. (Springer.) Berlin.
- Tolle, M., Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl. (Springer.) Berlin 1921.
- V. d. I. Sonderheft Mechanik 1925.
- Wydler, H., Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen und das Gesetz ihres Ausgleiches. (Springer.) Berlin 1922.
- Ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis befindet sich in Hort, Technische Schwingungslehre.

# I. Analytische Verfahren.

## 1. Torsionsschwingungen.

### a) Geschichtlicher Rückblick.

Zahlreiche Wellenbrüche in den Maschinenanlagen von Seedampfern in den letzten Jahren des vergangenen Jahrhunderts ließen aus den eigenartigen Verdrehungsstrukturen erkennen, daß der Bruch nur durch Zusatzbeanspruchungen infolge Resonanzerscheinungen möglich war. Die Werft Blohm & Voß in Hamburg ließ diese Erscheinungen durch Frahm<sup>1)</sup> untersuchen, wobei sich ergab, daß von 21 untersuchten Maschinenanlagen 8 Anlagen im Gebiet der kritischen Drehzahlen liefen. Frahm ersetzte zur Berechnung der Eigenfrequenzen die Anlage durch ein System mit zwei Massen. Zwei Jahre später zeigte Roth<sup>2)</sup> wie man die Eigenfrequenzen für ein Wellensystem mit drei Massen berechnet. Die Berechnung bei beliebig vielen Massen veröffentlichte Holzer<sup>3)</sup> im Jahre 1907. Einige Zeit später lernte man ein graphisches Verfahren von Gümbel<sup>4)</sup> kennen, das von Geiger<sup>5)</sup> vervollständigt wurde. In den Kriegsjahren zeigten Resonanzerscheinungen in den Maschinenanlagen von U-Booten, Luftschiffen und Riesenflugzeugen wieder die Notwendigkeit der dynamischen Behandlung der Wellenleitungen. Es entstand ein neues, vielseitiges Verfahren von Tolle<sup>6)</sup>, das jedoch erst nach dem Kriege der Öffentlichkeit übergeben werden konnte<sup>7)</sup>.

<sup>1)</sup> V. d. I. 1902.

<sup>2)</sup> V. d. I. 1904.

<sup>3)</sup> Schiffbau 1907.

<sup>4)</sup> V. d. I. 1912.

<sup>5)</sup> Dissertation 1914.

<sup>6)</sup> Gutachten für Reichsmarineamt und Verkehrstechnische Prüfungskommission.

<sup>7)</sup> Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl.

Gegen Kriegsende fand die Literatur über Torsionsschwingungen eine Bereicherung durch ein Verfahren von Dreves<sup>1)</sup>. In den letzten Jahren erschienen weitere Werke, die in dem Literaturverzeichnis angegeben sind.

Die einzelnen Verfahren sollen im vorliegenden Band behandelt und durch Beispiele erläutert werden.

Der Luftschiffbau Schütte-Lanz in Mannheim-Rheinau hatte die Notwendigkeit der dynamischen Überprüfung der rein statisch berechneten Wellenanlage bald erkannt. Der Verfasser hatte bei diesen Untersuchungen Gelegenheit, die Vor- und Nachteile der oben angegebenen Verfahren in der Praxis kennenzulernen.

Während in den Kriegsjahren nur wenige Ingenieure das Gebiet beherrschten, ist es heute bereits ein Teil der Vorlesung über Mechanik geworden, so daß die Studierenden schon mit den Grundzügen vertraut die Hochschule verlassen.

## b) Bestimmung der Eigenfrequenzen.

### 1. Mittelbare Verfahren<sup>2)</sup>.

#### α) Eingespannter Stab mit Schwungscheibe.

Die einfachsten Fälle der Torsionsschwingungen haben wir bereits im ersten Band der Technischen Schwingungslehre kennengelernt.

Für eine eingespannte Welle mit einer Schwungscheibe am freien Ende fanden wir auf S. 91, Bd. 1:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{G \cdot J}} l. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> V. d. I. 1918.

<sup>2)</sup> Unter „mittelbare“ Verfahren sind diejenigen zu verstehen, die von der Schwingungs-Differentialgleichung ausgehen.

Die Schwingungsdauer einer Welle mit je einer Schwungscheibe am Ende ist nach S. 93, Bd. I:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_1 \cdot \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{1}{c}}, \quad (2)$$

worin  $c = \frac{G \cdot J}{l}$  ist.

In den obigen Formeln bedeutet:

$\theta$ : das Massenträgheitsmoment, bezogen auf die Drehachse,

$l$ : die Länge der Welle,

$J$ : das polare Trägheitsmoment des Querschnittes,

$G$ : der Gleitmodul des Wellenmaterials.

$\beta$ ) Welle mit  
drei Schwungscheiben  
(Abb. 1).

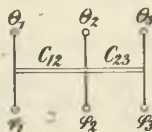


Abb. 1.

Für ein Wellensystem mit  
drei Scheiben erhält man die  
Differentialgleichungen:

$$\theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = - c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3a)$$

$$\theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = + c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) - c_{23} (\varphi_2 - \varphi_3), \quad (3b)$$

$$\theta_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} = + c_{23} (\varphi_2 - \varphi_3). \quad (3c)$$

Aus (3a) ergibt sich:

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = \frac{c_{12}}{\theta_1} \varphi_2 - \frac{c_{12}}{\theta_1} \varphi_1, \quad (4a)$$

$$\frac{d^4 \varphi_1}{d t^4} = \frac{c_{12}}{\theta_1} \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} - \frac{c_{12}}{\theta_1} \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2}, \quad (4b)$$

$$\frac{d^6 \varphi_1}{d t^6} = \frac{c_{12}}{\theta_1} \frac{d^4 \varphi_2}{d t^2} - \frac{c_{12}}{\theta_1} \frac{d^4 \varphi_1}{d t^4}. \quad (4c)$$

Aus (3b):

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} = \frac{c_{12}}{\theta_2} \varphi_1 - \frac{c_{12}}{\theta_2} \varphi_2 + \frac{c_{23}}{\theta_2} \varphi_3 - \frac{c_{23}}{\theta_2} \varphi_2, \quad (5a)$$

$$\frac{d^4 \varphi_2}{d t^2} = \frac{c_{12}}{\theta_2} \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} - \frac{c_{12}}{\theta_2} \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} + \frac{c_{23}}{\theta_2} \frac{d^2 \varphi_3}{d t^2} - \frac{c_{23}}{\theta_2} \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2}. \quad (5b)$$

Aus (3c):

$$\frac{d^2 \varphi_3}{d t^2} = \frac{c_{23}}{\theta_3} \varphi_2 - \frac{c_{23}}{\theta_3} \varphi_3. \quad (6)$$

Durch Addition von (3b) und (3c) erhalten wir:

$$\theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} + \theta_3 \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} = c_{12} \varphi_1 - c_{12} \varphi_2. \quad (7)$$

Aus (5b) wird:

$$\frac{d^2 \varphi_3}{d t^2} = \frac{\theta_2}{c_{23}} \frac{d^4 \varphi_2}{d t^2} - \frac{c_{12}}{c_{23}} \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} + \frac{c_{12}}{c_{23}} \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} + \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2}. \quad (8)$$

In (7) eingesetzt und geordnet erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2 \theta_3}{c_{23}} \frac{d^4 \varphi_2}{d t^4} + \left( \theta_2 + \theta_3 \frac{c_{12}}{c_{23}} + \theta_3 \right) \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} \\ - \theta_3 \frac{c_{12}}{c_{23}} \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} - c_{12} \varphi_1 + c_{12} \varphi_2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Aus dieser Gleichung werden nun die Glieder mit  $\varphi_2$  eliminiert unter Verwendung von Gl. (3a):

$$\theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} = c_{12} \varphi_2 - c_{12} \varphi_1, \quad (10)$$

$$\theta_1 \frac{d^4 \varphi_1}{d t^2} = c_{12} \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} - c_{12} \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2}, \quad (11)$$

$$\theta_1 \frac{d^6 \varphi_1}{d t^2} = c_{12} \frac{d^4 \varphi_2}{d t^2} - c_{12} \frac{d^4 \varphi_1}{d t^2}. \quad (12)$$

Die letzte Gleichung (12) liefert:

$$\frac{d^4 \varphi_2}{d t^2} = \frac{\theta_1}{c_{12}} \frac{d^6 \varphi_1}{d t^6} + \frac{d^4 \varphi_1}{d t^4}. \quad (13)$$

Aus (11) ergibt sich:

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} = \frac{\theta_1}{c_{12}} \frac{d^4 \varphi_1}{d t^2} + \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} \quad (14)$$

und aus (10):

$$\varphi_2 = \frac{\theta_1}{c_{12}} \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} + \varphi_1. \quad (15)$$

Setzt man nun (13), (14), (15) in (9) ein, so ergibt sich nach fallenden Differentialquotienten geordnet und durch

$\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{c_{12} c_{23}}$  dividiert:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \varphi_1}{d t^6} + \left[ c_{12} \left( \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \right) + c_{23} \left( \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} \right) \right] \frac{d^4 \varphi_1}{d t^4} \\ + c_{12} c_{23} \left( \frac{1}{\theta_2 \theta_3} + \frac{1}{\theta_1 \theta_3} + \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \right) \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \varphi_1}{d t^6} + \left[ c_{12} \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} + c_{23} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \theta_3} \right] \frac{d^4 \varphi_1}{d t^4} \\ + c_{12} c_{23} \left( \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2 \theta_3} \right) \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

In gleicher Weise hätte man die Gleichung für  $\varphi_2$  oder  $\varphi_3$  erhalten können.

Setzen wir zur Lösung:

$$\varphi_1 = A e^{\alpha t}, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} = \alpha^2 A e^{\alpha t}, \quad (18a)$$

$$\frac{d^4 \varphi_1}{d t^4} = \alpha^4 A e^{\alpha t}, \quad (18b)$$

$$\frac{d^6 \varphi_1}{d t^6} = \alpha^6 A e^{\alpha t}, \quad (18c)$$

so wird aus Gl. 17:

$$\begin{aligned} \alpha^6 + \left[ c_{12} \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} + c_{23} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \theta_3} \right] \alpha^4 \\ + \left( \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2 \theta_3} \right) c_{12} c_{13} \alpha^2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

und schließlich durch  $\alpha^2$  dividiert:

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \left[ c_{12} \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} + c_{23} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \theta_3} \right] \alpha^2 \\ + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2 \theta_3} c_{12} c_{23} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Nun ist nach den Ableitungen in Bd. I, S. 25  $\alpha = \pm i \omega$ . Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[ c_{12} \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2} + c_{23} \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \cdot \theta_3} \right] \omega^2 \\ + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3} c_{12} c_{23} = 0, \end{aligned} \quad (20a)$$



eine Gleichung, deren Lösung keine Schwierigkeiten bereitet.

γ) Welle mit beliebig vielen Scheiben.

Für ein System mit  $n$  Schwungscheiben hat Holzer<sup>1)</sup> das Bildungsgesetz aufgestellt und kommt zur folgenden charakteristischen Gleichung:

$$a_{n-1} \alpha^{2(n-1)} + a_{n-2} \alpha^{2(n-2)} + \dots + a_x \alpha^{2x} + \dots + a_1 \alpha^{2 \cdot 1} + a_0 = 0. \quad (21)$$

Den Aufbau der Konstanten  $a_{n-1}$ ,  $a_{n-2}$  usw. wollen wir für einige Beispiele angeben.

1.  $n = 2$ :

$$a_1 \alpha^2 + a_0 = 0,$$

$$\alpha^2 + \frac{a_0}{a_1} = 0,$$

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2} c_{12},$$

$$\alpha^2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} c_{12} = 0. \quad (22)$$

2.  $n = 3$ :

$$a_2 \alpha^4 + a_1 \alpha^2 + a_0 = 0,$$

$$\alpha^4 + \frac{a_1}{a_2} \alpha^2 + \frac{a_0}{a_2} = 0,$$

$$\frac{a_0}{a_2} = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2 \theta_3} c_{12} c_{23},$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} c_{12} + \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \theta_3} c_{23},$$

<sup>1)</sup> Schiffbau 1907, S. 823.

$$\alpha^4 + \left[ \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} c_{12} + \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \theta_3} c_{23} \right] \alpha^2 + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2 \theta_3} c_{12} c_{23} = 0. \quad (23)$$

3.  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} \alpha^6 + \frac{a_2}{a_3} \alpha^4 + \frac{a_1}{a_3} \alpha^2 + \frac{a_0}{a_3} &= 0, \\ \alpha^6 + \left[ \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} c_{12} + \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \theta_3} c_{23} + \frac{\theta_3 + \theta_4}{\theta_3 \theta_4} c_{23} \right] \alpha^4 \\ + \left[ \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \theta_2 \theta_3} c_{12} c_{23} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} \cdot \frac{\theta_3 + \theta_4}{\theta_3 \cdot \theta_4} c_{12} c_{34} \right. \\ \left. + \frac{\theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{\theta_2 \theta_3 \theta_4} c_{23} c_{34} \right] \alpha^2 \\ + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \theta_4} c_{12} c_{23} c_{34} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Gleichungen zeigen, wie mühsam das Aufstellen der charakteristischen Gleichung ist, deren Wurzeln die  $n - 1$  Eigenschwingungszahlen der  $n$  Schwungscheiben ergibt.

Mit zunehmender Anzahl der Scheiben wächst rasch die Anzahl der Summanden. So ist z. B. für eine Maschinenanlage eines Luftschiffes, bestehend aus einem 6-Zylinder-motor mit Schwungrad, einem Übersetzungsgetriebe und Luftschraube die Gleichung:

$$\begin{aligned} \alpha^{16} + \frac{a_7}{a_8} \alpha^{14} + \frac{a_6}{a_8} \alpha^{12} + \frac{a_5}{a_8} \alpha^{10} + \frac{a_4}{a_8} \alpha^8 \\ + \frac{a_3}{a_8} \alpha^6 + \frac{a_2}{a_8} \alpha^4 + \frac{a_1}{a_8} \alpha^2 + \frac{a_0}{a_8} &= 0, \end{aligned}$$

zu lösen. Zur Berechnung des Koeffizienten  $\frac{a_4}{a_8}$  sind nun so viel Summanden nötig, als es Kombinationen ohne Wiederholung von  $n - 1 = 8$  Elementen zur 4. Klasse gibt, also

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70 \text{ Summanden}$$

von der Form:

$$\begin{aligned} & c_{12} c_{23} c_{34} c_{45} \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5}{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \theta_4 \cdot \theta_5} \\ \text{bzw.} & c_{12} c_{23} c_{34} c_{56} \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3 \cdot \theta_4} \cdot \frac{\theta_5 + \theta_6}{\theta_5 \cdot \theta_6}. \end{aligned}$$

Übersichtlicher wird die folgende Aufstellung der charakteristischen Gleichung.

Für drei Massen haben wir nach Gl. 3 folgende Gleichungen:

$$\theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} + c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (25a)$$

$$\theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} - c_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) + c_{23} (\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \quad (25b)$$

$$\theta_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d t^2} - c_{23} (\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \quad (25c)$$

Nach steigenden Indizes der  $\varphi$ -Werten geordnet erhält man folgende Form:

$$\theta_1 \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} + c_{12} \varphi_1 - c_{12} \varphi_2 = 0, \quad (26a)$$

$$- c_{12} \varphi_1 + \theta_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d t^2} + c_{12} \varphi_2 + c_{23} \varphi_2 - c_{23} \varphi_3 = 0, \quad (26b)$$

$$- c_{23} \varphi_2 + \theta_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d t^2} + c_{23} \varphi_3 = 0. \quad (26c)$$

Setzen wir zur Lösung:

$$\varphi = A e^{\alpha t} = A e^{i \omega t}, \quad (27)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = -\omega^2 A e^{i \omega t}, \quad (27a)$$

so wird, wenn gleichzeitig durch  $-e^{i \omega t}$  dividiert wird:

$$\theta_1 \omega^2 A_1 - c_{12} A_1 + c_{12} A_2 = 0, \quad (28a)$$

$$c_{12} A_1 + \theta_2 \omega^2 A_2 - c_{12} A_2 - c_{23} A_2 + c_{23} A_3 = 0, \quad (28b)$$

$$c_{23} A_2 + \theta_3 \omega^2 A_3 - c_{23} A_3 = 0 \quad (28c)$$

und:

$$(\theta_1 \omega^2 - c_{12}) A_1 + c_{12} A_2 = 0, \quad (29a)$$

$$c_{12} A_1 + (\theta_2 \omega^2 - c_{12} - c_{23}) A_2 + c_{23} A_3 = 0, \quad (29b)$$

$$c_{23} A_2 + (\theta_3 \omega^2 - c_{23}) A_3 = 0. \quad (29c)$$

Diese drei homogenen, linearen Gleichungen können nur bestehen, wenn die Determinante<sup>1)</sup>

$$\begin{vmatrix} (\theta_1 \omega^2 - c_{12}) & c_{12} & 0 \\ c_{12} & (\theta_2 \omega^2 - c_{12} - c_{23}) & c_{23} \\ 0 & c_{23} & (\theta_3 \omega^2 - c_{23}) \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

wird.

Die Auflösung der Determinante ist:

$$\begin{aligned} & (\theta_1 \omega^2 - c_{12}) \begin{vmatrix} (\theta_2 \omega^2 - c_{12} - c_{23}) & c_{23} \\ c_{23} & (\theta_3 \omega^2 - c_{23}) \end{vmatrix} \\ & - c_{12} \begin{vmatrix} c_{12} & 0 \\ c_{23} & (\theta_3 \omega^2 - c_{23}) \end{vmatrix} \\ & = (\theta_1 \omega^2 - c_{12}) [(\theta_2 \omega^2 - c_{12} - c_{23})(\theta_3 \omega^2 - c_{23}) - c_{23}^2] \\ & - c_{12}^2 (\theta_3 \omega^2 - c_{23}) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

<sup>1)</sup> Mies; Dinglers Journal 1915, S. 102; Tolle, Gutachten.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\omega^4 - \left[ \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2} c_{12} + \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \cdot \theta_3} c_{23} \right] \omega^2 + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3} c_{12} \cdot c_{23} = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung geben die zwei Eigenfrequenzen der drei Scheiben. Die Lösung der Gleichungen geschieht am besten graphisch durch Auftragen der Werte der Gleichung für verschiedene  $\omega$ .

#### d) Näherungsverfahren.

Es liegt nun nahe, ein System mit mehreren Schwungscheiben, dessen genaue Berechnung große Rechenarbeit erfordert, auf ein System mit wenigen Massen zurückzuführen. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder vereinigt man mehrere Massen zu einer resultierenden Masse und bestimmt die dazu gehörende elastische Konstante der Welle oder aber man wählt eine bestimmte elastische Konstante  $c$  und berechnet eine Ersatzschwungscheibe, die die einzelnen Scheiben dynamisch ersetzt<sup>1)</sup>.

Das Ergebnis einer solchen Reduktion soll nach Wydler kurz angegeben werden.

Ein System von acht Scheiben ist ersetzt durch ein System von zwei, drei, vier und fünf Massen. Für die einzelnen Fälle ergeben sich folgende minutlichen Eigenschwingungszahlen:

bei Ersatz durch	2	3	4	5	8 Scheiben
$n_{e_1} =$	1243	1304	1350	1361	1367
$n_{e_2} =$	—	2195	2210	2214	2219
$n_{e_3} =$	—	—	4050	4584	4935
$n_{e_4} =$	—	—	—	6253	7739
$n_{e_5} =$	—	—	—	—	10140
$n_{e_6} =$	—	—	—	—	11970
$n_{e_7} =$	—	—	—	—	13120

<sup>1)</sup> Vgl. Wydler S. 30.

Näher soll auf das Verfahren nicht eingegangen werden, da wir später ein Verfahren kennenlernen werden, das rascher zum Ziele führt.

## 2. Unmittelbare Verfahren nach:

### $\alpha$ ) Gümbel-Geiger.

Gümbel zeigt in seiner grundlegenden Veröffentlichung: „Verdrehungsschwingungen eines Stabes mit fester Drehachse und beliebiger zur Drehachse symmetrischer Massenverteilung unter dem Einfluß beliebiger harmonischer Kräfte“<sup>1)</sup>, wie man die Schwingungsausschläge eines Systems mit beliebig vielen Schwungscheiben mit Hilfe des Seilecks bestimmen kann.

Die Verdrehung zweier Wellenquerschnitte, die 1 cm voneinander entfernt sind, durch ein Moment  $M_d$  ist:

$$\varphi = \frac{M_d}{G \cdot J_p}. \quad (1)$$

In dieser Gleichung ist  $J_p$  das polare Flächenträgheitsmoment,  $G$  der Gleitmodul des Materials. Der Verdrehungswinkel  $\varphi$  wird gemessen als Bogen auf dem Einheitskreis. Beträgt die Entfernung der beiden Querschnitte  $l$ , so ergibt sich ein Verdrehungswinkel:

$$\phi = \varphi \cdot l = \frac{M_d}{G \cdot J_p} \cdot l. \quad (2)$$

Hat weiter die Welle den Radius  $r$ , so ist die Länge des Verdrehungsbogens gemessen auf der Mantelfläche:

$$\Delta a = \phi \cdot r = \varphi \cdot l \cdot r = \frac{M_d}{G \cdot J_p} \cdot l \cdot r. \quad (3)$$

Das Drehmoment  $M_d$  können wir ersetzen durch  $M_d = P \cdot r$ .

<sup>1)</sup> V. d. I. 1912, S. 1025 ff.

Damit wird:

$$\Delta a = \frac{P \cdot l \cdot r^2}{G \cdot J_p} \quad (4)$$

und die Verdrehung, bezogen auf die Längeneinheit:

$$\frac{\Delta a}{l} = \frac{P}{\frac{G \cdot J_p}{r^2}} \quad (5)$$

Denken wir uns auf der Welle im unbelasteten Zustand eine Mantellinie eingezeichnet, so entsteht durch Wirkung der Drehmomente eine Raumkurve, die an den Angriffsebenen der Momente Knicke aufweist. Beim Abwickeln der Zylinderfläche erhalten wir einen aus geraden Linien mit Knicken versehenen Linienzug.

An einer beliebigen Stelle  $i$  einer Welle (Abb. 2) betrage die Verdrehung gegenüber der Ruhelage  $a_i$ .

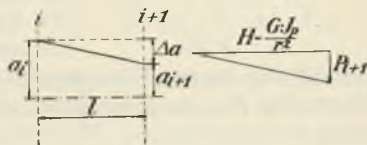


Abb. 2.

Im Punkte  $i+1$  wirke eine Kraft  $P_{i+1}$

am Hebelarm  $r$ . Die relative Verdrehung  $\Delta a$  ergibt sich aus Gl. (5):

$$\frac{\Delta a}{l} = \frac{P_{i+1}}{\frac{G \cdot J_p}{r^2}}$$

Tragen wir in einem Kräfteplan die Kraft  $P_{i+1}$  auf, so erhalten wir ein ähnliches Dreieck, wenn der Polabstand

$H = \frac{G \cdot J_p}{r^2}$  und der erste Polstrahl parallel der wagrechten

Nulllinie verläuft. Die Verdrehungskurve erhalten wir also aus der Seilkurve.

Diese Methode läßt sich auch anwenden, wenn statt der statischen Momente harmonische Momente auf das System wirken; diese erzeugen harmonische Schwingungen gleicher oder entgegengesetzter Phase, jedoch gleicher Periodenzahl. Vorausgesetzt ist dabei, daß keine Dämpfung vorhanden ist. Außer den harmonischen Kräften sind die Trägheitskräfte der Massen im Kräfteplan einzusetzen. Diese sind gegeben durch  $T = m\omega^2 a$ , setzen also die Kenntnis der Massenausschläge  $a$  voraus. Wir betrachten folgenden Fall (Abb. 3).

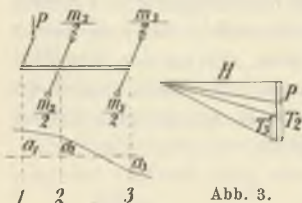


Abb. 3.

Im Punkt 1 wirke die harmonische Kraft  $P$ . Links von 1 sind keine äußeren Kräfte vorhanden, was sich im Seileck dadurch ausdrückt, daß die Schwingungskurve parallel der Stabachse ist. Wir tragen im Kräfteplan die Kraft  $P$  ein, wählen für eine bestimmte Kreisfrequenz  $\omega$  den Ausschlag der ersten Masse  $a_1$ . Wie oben gezeigt, ergibt sich hieraus, wenn man den Polabstand  $H = \frac{J_P \cdot G}{r^2}$  wählt, der Aus-

schlag  $a_2$ . Damit wird die Trägheitskraft  $T_2 = m_2 \omega^2 a_2$ , die als zweite Kraft im Plan einzutragen ist und die dann den Ausschlag  $a_3$  liefert. Mit  $T_3$  ergibt sich der letzte Polstrahl. Der Kräfteplan zeigt jedoch, daß kein Gleichgewicht vorhanden ist, wenn nicht im Punkt 3 noch eine äußere Kraft angebracht wird. Die Schwingungsform mit dem gewählten Ausschlag  $a_1$  ist also nur möglich bei Vorhandensein dieser Zusatzkraft. Der Anfangsausschlag muß nun solange verändert werden, bis die Zusatzkraft zu Null wird.



Geiger<sup>1)</sup> zeigte nun, daß es genügt, zwei Schwingungsbilder aufzuzeichnen, um die eindeutig bestimmte Schwingungsform für eine beliebige Kreisfrequenz zu finden (Abb. 4).

Es schneiden sich je zwei zugeordnete Seilstrahlen in einem Punkt, durch den auch der dritte hindurchgehen muß. Aus der weiteren Bedingung, daß der letzte Seilstrahl parallel der Achse werden muß, ergibt sich rückwärts die Schwingungsform mit dem zugeordneten Anfangsausschlag.

Eine der wichtigsten Aufgaben ist die Bestimmung der Eigenfrequenzen. Äußere Kräfte wirken nicht ein. Bei der freien Schwingung stehen

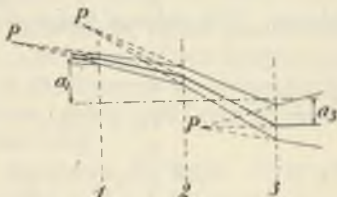


Abb. 4.

dann alle Momente im Gleichgewicht, und da alles auf den gleichen Hebelarm reduziert ist, sind auch alle Kräfte im Gleichgewicht.

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen wählen wir einen beliebigen Anfangsausschlag  $a_1$ . Für eine bestimmte Kreisfrequenz  $\omega$  ergibt sich die Trägheitskraft  $T_1$ , die im Kräfteplan einzutragen ist. Wir erhalten  $a_2$  und hieraus  $T_2$ , mit dieser wieder  $a_3$  usw. Um die Schwingungsform bei dem gewählten  $a_1$  möglich zu machen, ist eine Zusatzkraft  $R$  erforderlich.

Mit dem gleichen Anfangsausschlag  $a_1$  werden die Schwingungsformen für verschiedene  $\omega$  aufgezeichnet; für jedes  $\omega$  erhalten wir eine bestimmte Restkraft  $R$ . Tragen wir die Restkräfte  $R$  als Funktion von  $\omega$  auf, so ergeben die

<sup>1)</sup> Dissertation S. 7.

Schnittpunkte der  $R$ -Kurve mit der Abszissenachse die Eigenschwingungszahlen des Systems.

Bei praktischer Durchführung dieser Methode zeigt sich bei Wellenanordnungen mit mehreren Massen und großen Unterschieden der Größen  $l$  und  $m$ , daß der Maßstab oft geändert werden muß, um die Schwingungsform graphisch aufzeichnen zu können. In manchen Fällen muß an Stelle der Zeichnung die Rechnung treten. Aus diesem Grunde liegt es nahe, die ganze Durchführung rechnerisch vorzunehmen. Ein Schema hierzu ist <sup>1)</sup>:

$$\begin{array}{rcl}
 a_1 \cdot m_1 \cdot \omega^2 = & \frac{T_1}{T_1 \cdot (-l_{12}^*)} & = \frac{a_1}{a_2 = a_1 - \Delta a_1}, \\
 a_2 \cdot m_2 \cdot \omega^2 = & \frac{T_2}{(T_1 + T_2) \cdot (-l_{23}^*)} & = \frac{-\Delta a_2}{a_3 = a_2 - \Delta a_2}, \\
 a_3 \cdot m_3 \cdot \omega^2 = & \frac{T_3}{(T_1 + T_2 + T_3) \cdot (-l_{34}^*)} & = \frac{-\Delta a_3}{a_4 = a_3 - \Delta a_3}, \\
 \dots & \dots & \dots \\
 a_n \cdot m_n \cdot \omega^2 = & \frac{T_n}{R = \sum_1^n T} & a_n = a_{n-1} - \Delta a_{n-1}.
 \end{array}$$

$$\text{Hierin ist z. B. } l_{12}^* = \frac{l_{12}}{H} = \frac{l_{12}}{J \cdot G \cdot r^2}.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir ein rein rechnerisches Verfahren von Tolle kennenlernen, das, ebenfalls von einem bestimmten Anfangsaus Schlag ausgehend, die Schwingungsaus schläge zu berechnen gestattet.

Ein weiteres Schema gibt Holzer in seinem Buche an.

<sup>1)</sup> Vom Verfasser bei Durchrechnung für Luftfahrzeuganlagen angewandt, vor Kenntnis der Gutachten von Tolle, zeitlich nach deren Veröffentlichung.

$\beta$ ) Verfahren von Tolle.

Wir betrachten aus einem Wellensystem mit  $n$  Schwingsscheiben die  $i^{\text{te}}$  Scheibe.

Auf diese Scheibe sollen wirken:

1.  $M_i$ : das äußere, erregende Moment,
2.  $\Theta_i \omega^2 a_i$ : das Moment der Trägheitskraft der schwingenden Masse,
3.  $e_{i-1,i}$ : das elastische Moment des links anstoßenden Wellenstückes,
4.  $e_{i,i+1}$ : das elastische Moment des rechts anstoßenden Wellenstückes, das mit negativem Zeichen einzusetzen ist, da die Momente an beiden Enden des Wellenstückes gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind,
5.  $c_{i,i+1}$ : die elastische Konstante der Welle.

Die dynamische Grundgleichung für die  $i^{\text{te}}$  Scheibe lautet dann:

$$e_{i,i+1} - e_{i-1,i} + \Theta_i \omega^2 a_i + M_i = 0. \quad (1)$$

Das maximale elastische Moment erhalten wir aus den Wellenkonstanten und den relativen Ausschlägen zweier Massen. Damit erhalten wir die elastische Grundgleichung in der Form:

$$e_{i,i+1} = (a_{i+1} - a_i) c_{i,i+1}. \quad (2)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die positive Richtung der äußeren Momente mit dem positiven Ausschlag übereinstimmt.

Die beiden gewonnenen Grundgleichungen formen wir, wie folgt, um:

$$e_{i,i+1} = e_{i-1,i} - \Theta_i \omega^2 a_i - M_i, \quad (3)$$

$$a_{i+1} = a_i + \frac{e_{i,i+1}}{c_{i,i+1}}. \quad (4)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

„Jede Amplitude  $a$  und jedes elastische Moment  $e$  läßt sich mit jeder anderen Amplitude und jedem elastischen Moment linear ausdrücken.“

Zur Durchführung des Verfahrens für ein bestimmtes  $\omega$  gehen wir von einem gewählten Anfangsausschlag  $a'_1$  aus.

Nach Gl. (3) erhalten wir, da  $e'_{0,1} = 0$  ist,

$$e'_{1,2} = -\Theta_1 \omega^2 a'_1 - M_1, \quad (5)$$

$$a'_2 = a'_1 + \frac{e'_{1,2}}{c_{1,2}}. \quad (6)$$

Mit  $a'_2$  wieder:

$$\text{und} \quad e'_{2,3} = -\Theta_2 \omega^2 a'_2 - M_2 \quad (7)$$

$$a'_3 = a'_2 + \frac{e'_{2,3}}{c_{12}}. \quad (8)$$

$$\text{Schließlich:} \quad e'_{n,n+1} = R'. \quad (9)$$

Bei richtiger Wahl von  $a'_1$  würde  $R' = 0$  werden für die angenommene Kreisfrequenz.

Wir führen die Rechnung nochmals durch mit einem Anfangsausschlag  $a''_1$  und erhalten  $R''$ .

Es läßt sich nun zeigen<sup>1)</sup>, daß der wirkliche Ausschlag sich ergibt aus:

$$a_1 = \frac{R''}{R'' - R'} a'_1 - \frac{R'}{R'' - R'} a''_1. \quad (10)$$

Allgemein gilt für jede Amplitude und jedes elastische Moment:

$$a_k = \frac{R''}{R'' - R'} \cdot a'_k - \frac{R'}{R'' - R'} a''_k, \quad (11a)$$

$$e_k = \frac{R''}{R'' - R'} \cdot e'_k - \frac{R'}{R'' - R'} \cdot e''_k. \quad (11b)$$

<sup>1)</sup> Vgl. Tolle, Regelung S. 207.

Dies ist jedoch die analytische Form für die von Geiger gefundene und auf S. 20 angegebene graphische Lösung.

Für die weiteren Betrachtungen setzen wir die äußeren Momente  $M_1, M_2$  usw. gleich Null und erhalten:

$$e_{i,i+1} = e_{i-1,i} - \theta_i \omega^2 a_i, \quad (12)$$

$$a_{i+1} = a_i + \frac{e_{i,i+1}}{c_{i,i+1}}. \quad (13)$$

Für einen gewählten Anfangsausschlag  $a_1$  ergibt die Durchführung für ein bestimmtes  $\omega$  ein Restmoment  $e_{n,n+1} = R$ . Wir führen, wie beim oben beschriebenen graphischen Verfahren, für verschiedene  $\omega$  das Verfahren mit gleichem Anfangsausschlag  $a_1$  durch und erhalten für jedes  $\omega$  ein bestimmtes Restmoment  $R$ . Diese Restmomente als Funktion von  $\omega$  als Kurve aufgetragen, liefert die  $n - 1$  Eigenfrequenzen der  $n$  Scheiben. Um beim Auftragen der Kurve Maßstabsänderungen zu vermeiden, empfiehlt Tolle, statt  $R$  die Werte  $\frac{R}{\omega^2}$  als Funktion von  $\omega$  aufzutragen.

Bis hierher bedeutet das beschriebene Verfahren gegenüber dem graphischen nur insofern einen Fortschritt, als die rechnerische Durchführung bequemer ist.

Würde wegen Resonanzerscheinungen eine Verlegung der Eigenfrequenzen notwendig werden, so müßte das ganze Verfahren mit einem abgeänderten  $\theta$  oder  $c$  durchgeführt werden.

Tolle zeigt nun, daß dies nicht notwendig ist, sondern daß die Veränderung des Restmomentes durch eine Änderung des Massenträgheitsmomentes oder einer Wellenkonstanten aus den durchgeführten Rechnungen ohne weiteres möglich ist.

Zunächst führt Tolle die ganze Rechnung für ein bestimmtes  $\omega$  von rückwärts nochmals durch, d. h. mit einem

Ausschlag ( $a_n$ ) der Scheibe  $n$  beginnend. Für diese Rückwärtsrechnung lauten unsere Hauptgleichungen:

$$(e_{i-1,i}) = (e_{i,i+1}) - \theta_i \omega^2 (a_i), \quad (14)$$

$$(a_i) = (a_{i+1}) + \frac{(e_{i,i+1})}{c_{i,i+1}}. \quad (15)$$

Dabei soll die Klammer andeuten, daß es sich um die Rückwärtsrechnung handelt. Bei der Rückwärtsrechnung wird  $(e_{n,n+1}) = 0$  und  $(e_{0,1}) = (R)$ . Zweckmäßig beginnt man nun mit dem Anfangsausschlag  $a_1 = 1$  und  $(a_n) = 1$ .

Für die praktische Durchführung gibt Tolle nebenstehendes Rechenschema an.

Die Durchrechnung gestaltet sich danach wie folgt.

Nach den Grundgleichungen ist für die Vorwärtsrechnung:

$$e_{12} = e_{0,1} - \theta_1 \omega^2 \cdot a_1,$$

oder, da  $e_{0,1} = 0$  ist und  $a_1 = 1$  gewählt wird:

$$e_{12} = 0 - \theta_1 \cdot \omega^2.$$

Wir addieren also  $-\theta_1 \omega^2$  zu 0 und erhalten  $e_{12}$ .

Ferner wird:

$$a_2 = a_1 + \frac{e_{12}}{c_{12}}$$

bzw. mit  $a_1 = 1$ :

$$a_2 = 1 + \frac{e_{12}}{c_{12}}.$$

Den Wert  $e_{12}$  dividieren wir durch  $c_{12}$ , tragen in das Schema  $e_{12} : c_{12}$  ein und addieren den Wert des Quotienten zu  $a_1 = 1,000$ , um  $a_2$  zu erhalten. Dann wird  $a_2$  mit  $-\theta_2 \omega^2$  multipliziert und das Produkt  $-\theta_2 \omega^2 a_2$  zu  $e_{1,2}$  addiert, um  $e_{2,3}$  zu erhalten usw., bis wir zum Schluß  $e_{n,n+1} = R$  erhalten. In der gleichen Weise wird die Rück-

Rechenschema Tolle:

$(e_{0,1})$	$= (R)$	0,000	$\alpha$				$(\alpha)$
$-\theta_1 \omega^2 \cdot (a_1)$		$-\theta_1 \omega^2 \cdot a_1$	$= \leftarrow$	$-\theta_1 \omega^2$	$a_1 = +1,000$	1	$(a_1)$
$(e_{1,2})$	1,2	$e_{12}$	$: c_{12}$	$\rightarrow =$	$e_{12} : c_{12}$		$(e_{12}) : c_{12}$
$-\theta_2 \omega^2 \cdot (a_2)$		$-\theta_2 \omega^2 \cdot a_2$	$= \leftarrow$	$-\theta_2 \omega^2$	$a_2$	2	$(a_2)$
$(e_{23})$	2,3	$e_{23}$	$: c_{23}$	$\rightarrow =$	$e_{23} : c_{23}$		
		$-\theta_3 \omega^2 \cdot a_3$	$= \leftarrow$	$-\theta_3 \omega^2$	$a_3$	3	
	3,4	$e_{34}$	$: c_{34}$	$\rightarrow =$	$e_{34} : c_{34}$		
$(\uparrow)$			$\vdots$	$\vdots$	$a_4$	$\vdots$	$\uparrow$
$(e_{n-2,n-1})$	:		$\vdots$	$\vdots$	$\downarrow$		$(e_{n-2,n-1}) : c_{n-2,n-1}$
$-\theta_{n-1} \omega^2 \cdot (a_{n-1})$			$= \leftarrow$	$-\theta_{n-1} \omega^2$	$a_{n-1}$	$n-1$	$(a_{n-1})$
$(e_{n-1,n})$	$n-1, n$	$e_{n-1,n}$	$: c_{n-1,n}$	$\rightarrow =$	$e_{n-1,n} : c_{n-1,n}$		$(e_{n-1,n}) : c_{n-1,n}$
$-\theta_n \omega^2 \cdot (a_n)$		$-\theta_n \omega^2 \cdot a_n$	$= \leftarrow$	$-\theta_n \omega^2$	$a_n$	$n$	$(a_n) = 1,000$
	$R = r_{n,n+1}$		$\frac{R}{\omega^2} = \dots$				

wärtsrechnung mit  $(a_n) = 1,000$  durchgeführt, die  $(e_{0,1}) = (R)$  liefert.

Für eine Anzahl beliebiger  $\omega$  ist das Schema in der angegebenen Weise durchzuführen.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß  $R = (R)$  ist.

Wir gehen von den Gleichungen

$$\begin{aligned} e_{i,i+1} &= e_{i-1,i} - \Theta_i \cdot \omega^2 \cdot a_i \\ (e_{i-1,i}) &= (e_{i,i+1}) - \Theta_i \cdot \omega^2 \cdot (a_i) \end{aligned}$$

aus, eliminieren  $\Theta_i \cdot \omega^2$  und erhalten:

$$e_{i,i+1} \cdot (a_i) + (e_{i,i+1}) \cdot a_i = e_{i-1,i} (a_i) + (e_{i,i-1}) \cdot a_i. \quad (16)$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen:

$$a_{i+1} = a_i + \frac{e_{i,i+1}}{c_{i,i+1}}$$

und

$$(a_i) = (a_{i+1}) + \frac{(e_{i,i+1})}{c_{i,i+1}}$$

nach Elimination von  $c_{i,i+1}$ :

$$e_{i,i+1} (a_{i+1}) + (e_{i,i+1}) a_{i+1} = e_{i,i+1} (a_i) + (e_{i,i+1}) a_i \quad (17)$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} e_{i-1,i} (a_i) + (e_{i-1,i}) a_i &= e_{i,i+1} (a_i) + (e_{i,i+1}) a_i \\ &= e_{i,i+1} (a_{i+1}) + (e_{i,i+1}) a_{i+1} \\ &= e_i \cdot (a_i) + (e_i) \cdot a_i, \\ &= \text{konstant} = C, \end{aligned} \quad (18)$$

wobei wir  $C$  die Hauptkonstante des Systems nennen.

Aus der Vorwärtsrechnung mit  $a_1$  ergibt sich:

$$C = e_{0,1} (a_1) + (e_{0,1}) a_1 = (R) \cdot a_1, \quad (19)$$

da

$$e_{0,1} = 0 \text{ ist.}$$



Für die Rückwärtsrechnung mit  $(a_n)$  wird:

$$C = e_{n,n+1}(a_n) + (e_{n,n+1}) \cdot a_n = R(a_n), \quad (20)$$

da  $(c_{n,n+1}) = 0$  ist.

Damit wird die Hauptkonstante:

$$C = (R) \cdot a_1 = R(a_n) \quad (21)$$

und  $C = (R) = R, \quad (22)$

wenn wir als Anfangsausschlag  $a_1$  und  $(a_n)$  den Wert 1 wählen; d. h. Vor- und Rückwärtsrechnung ergeben das gleiche Restmoment für den Anfangsausschlag 1.

Wir erhalten durch die Rechnungsart von beiden Enden ausgehend eine Kontrolle unserer Rechnung. Um diese zu erhalten, wäre die doppelte Arbeit jedoch nicht notwendig, da sich Fehler in der Regel auch beim Aufzeichnen der  $R$  oder  $\frac{R}{\omega^2}$ -Kurve feststellen ließen. Den Hauptvorteil der Vor- und Rückwärtsrechnung werden wir weiter unten sehen.

### Reständerungsformeln.

Bei den bisher behandelten Verfahren mußte die Rechnung mehr oder weniger neu durchgeführt werden, um das Restmoment zu bestimmen, wenn irgendeine Scheibe oder ein Wellenstück geändert wurde. Tolle zeigt nun, daß die Änderung des Restmomentes mit Hilfe der Vor- und Rückwärtsrechnung in einfacher Weise möglich ist.

Das Massenträgheitsmoment  $\theta_i$  soll um  $\mathfrak{S}_i$  erhöht werden. Wie groß ist dann  $R'$ ?

Aus Gl. (18) folgt:

$$R = e_{i,i+1}(a_i) + (e_{i,i+1})a_i. \quad (23)$$

In dieser Gleichung ändert sich nur  $e_{i,i+1}$  in  $e'_{i,i+1}$ . Die Weiterrechnung ergibt nach Gl. 12:

$$e'_{i,i+1} = e_{i-1,i} - (\Theta_i + \mathcal{J}_i) \omega^2 a_i. \quad (24)$$

Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$R' = [e_{i-1,i} - (\Theta_i + \mathcal{J}_i) \omega^2 a_i] (a_i) + (e_{i,i+1}) a_i. \quad (25)$$

Der frühere Rest war:

$$R = [e_{i-1,i} - \Theta_i \omega^2 a_i] (a_i) + (e_{i,i+1}) a_i. \quad (26)$$

Hieraus ergibt sich die Reständerung zu:

$$R' - R = \varrho = - \mathcal{J}_i \cdot \omega^2 a_i (a_i). \quad (27)$$

Aus den Berechnungstafeln sind also für die entsprechenden  $\omega$  die  $a_i$  und  $(a_i)$ -Werte herauszunehmen und deren Produkt mit  $\mathcal{J}_i \cdot \omega^2$  zu multiplizieren. Die neue  $R'$ -Kurve ergibt sich dann aus:

$$R' = R + \varrho. \quad (28)$$

Wir können weiter fragen: um welchen Betrag muß  $\Theta_i$  verändert werden, damit ein bestimmtes  $\omega$  zur Eigenfrequenz wird?

In diesem Falle muß  $R' = 0$  werden. Aus

$$R' = R + \varrho = 0$$

folgt:

$$R = -\varrho = + \mathcal{J}_i \omega^2 a_i (a_i)$$

oder

$$\mathcal{J}_i = \frac{R}{\omega^2} \cdot \frac{1}{a_i (a_i)}. \quad (29)$$

In ähnlicher Weise findet man unter Anwendung der Gl. 23 die Reständerung, wenn  $e_{i,i+1}$  in  $e'_{i,i+1}$  geändert wird. Wird zur Abkürzung

$$\frac{1}{c'_{i,i+1}} - \frac{1}{c_{i,i+1}} = \gamma, \quad (30)$$

gesetzt, so erhält man:

$$\varrho = R' - R = \gamma \cdot e_{i,i+1} (e_{i,i+1}). \quad (31)$$

Auch hier kann die Frage gestellt werden: für welchen Wert von  $\gamma$  wird  $\omega$  zur Eigenfrequenz? Das Ergebnis der Ableitung ist:

$$\gamma = - \frac{R}{e_{i,i+1} (e_{i,i+1})}. \quad (32)$$

Für die gleichzeitige Änderung zweier Größen gibt Tolle folgende Formeln an:

Wenn sich  $\theta_i$  um  $\mathcal{I}_i$ ,  $\theta_k$  um  $\mathcal{I}_k$  ändert ( $k > i$ ), wird die Reständerung:

$$e_{i,k} = e_i + e_k + e_i \cdot e_k \left[ 1 - \frac{a_i}{(a_i)} \cdot \frac{(a_k)}{a_k} \right], \quad (33)$$

worin:

$$e_i = - \mathcal{I}_i \omega^2 a_i (a_i)$$

und

$$e_k = - \mathcal{I}_k \omega^2 a_k (a_k)$$

ist.

Ändert sich  $\theta_i$  um  $\mathcal{I}_i$  und  $c_{k,k+1}$  in  $c'_{k,k+1}$ , so erhält man:

$$e_{i,k} = e_i + e_k + e_i e_k \left[ 1 + \frac{a_i}{(a_i)} \cdot \frac{(e_{k,k+1})}{e_{k,k+1}} \right]. \quad (34)$$

Bei Änderung von  $c_{i,i+1}$  in  $c'_{i,i+1}$  und  $\theta_k$  um  $\mathcal{I}_k$  wird:

$$e_{i,k} = e_i + e_k + e_i e_k \left[ 1 + \frac{e_{i,i+1}}{(e_{i,i+1})} \cdot \frac{(a_k)}{a_k} \right]. \quad (35)$$

Schließlich ergibt sich die Reständerung:

$$e_{i,k} = e_i + e_k + e_i e_k \left[ 1 - \frac{e_{i,i+1}}{(e_{i,i+1})} \cdot \frac{(e_{k,k+1})}{e_{k,k+1}} \right], \quad (36)$$

für eine Änderung von  $c_{i,i+1}$  in  $c'_{i,i+1}$  und  $c_{k,k+1}$  in  $c'_{k,k+1}$ .

Für weitere Berechnungen benötigen wir noch die  $a$ - und  $e$ -Werte. Auch für diese gibt Tolle Änderungsformeln an, so daß eine Neuberechnung nicht notwendig wird.

1.  $\theta_i$  wird um  $\mathcal{I}_i$  erhöht:

$$a'_k = \frac{R'}{R} a_k + \frac{\mathcal{I}_i \omega^2 a_i^2}{R} (a_k), \quad (37)$$

$$e'_{k,k+1} = \frac{R'}{R} e_{k,k+1} - \frac{\mathcal{I}_i \omega^2 a_i^2}{R} (e_{k,k+1}). \quad (38)$$

Diese Formeln gelten für die Vorwärtsrechnung für die Stellen rechts von  $i$ , also  $k > i$ . Für die Rückwärtsrechnung erhält man analog:

$$(a_k)' = \frac{R'}{R} (a_k) + \frac{\mathcal{I}_i \omega^2 (a_i)^2}{R} a_k, \quad (39)$$

$$(e_{k,k+1})' = \frac{R'}{R} (e_{k,k+1}) - \frac{\mathcal{I}_i \omega^2 (a_i)^2}{R} e_{k,k+1}. \quad (40)$$

2.  $e_{i,i+1}$  in  $e'_{i,i+1}$  geändert:

für Vorwärtsrechnung über  $i, i+1$  hinaus:

$$a'_k = \frac{R'}{R} a_k + \frac{\gamma \cdot e_{i,i+1}^2}{R} (a_k), \quad (41)$$

$$e'_{k,k+1} = \frac{R'}{R} e_{k,k+1} - \frac{\gamma \cdot e_{i,i+1}^2}{R} (e_{k,k+1}), \quad (42)$$

für Rückwärtsrechnung über  $i, i-1$  hinaus:

$$(a_k)' = \frac{R'}{R} (a_k) + \frac{\gamma (e_{i,i+1})^2}{R} a_k, \quad (43)$$

$$(e'_{k,k+1})' = \frac{R'}{R} (e_{k,k+1}) - \frac{\gamma (e_{i,i+1})^2}{R} e_{k,k+1}. \quad (44)$$

## Nullstelle.

Für irgendeine Stelle  $k$  soll für ein bestimmtes  $\omega$  der Ausschlag zu Null werden. Aus Gl. 37 folgt für  $a'_k = 0$ :

$$\frac{R'}{R} a_k + \frac{\mathfrak{P}_i \omega^2 a_i^2}{R} (a_k) = 0, \quad (45)$$

und hieraus:

$$\mathfrak{P}_i = \frac{R}{\omega^2} \frac{a_k}{[(a_i) a_k - a_i (a_k)] a_i} \quad (k > i), \quad (46)$$

ferner:

$$\mathfrak{P}_i = \frac{R}{\omega^2} \frac{(a_k)}{[a_i (a_k) - (a_i) a_k] (a_i)} \quad (k < i). \quad (47)$$

Weiter erhalten wir eine Nullstelle in  $k$  durch Änderung von  $c_{k, k+1}$ :

$$\gamma = - R \frac{a_k}{[e_{i, i+1} (a_k) + (e_{i, i+1}) a_k] e_{i, i+1}}. \quad (48)$$

Die Anwendung dieser Formeln werden wir später kennenlernen.

## Winkelamplituden.

Das Tollesche Verfahren gestattet weiter die Berechnung der Winkelamplituden und der elastischen Momente unter Einwirkung von erregenden äußeren Momenten.

Die Ableitung würde in Anbetracht des zur Verfügung stehenden Raumes zu weit führen, es muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. Da die Ergebnisse jedoch sehr wertvoll sind, seien sie angeführt. In den folgenden Formeln bedeuten:

$M_k$ : das in  $k$  wirkende erregende Moment,

$A_{i, k}$ : die wirkliche Amplitude in  $i$  unter Einwirkung des Momentes  $M_k$  in  $k$ ,

$E_{i, i+1, k}$ : das elastische Moment in  $i$ , hervorgerufen durch  $M_k$ .



jektion einer gleichförmig mit der Winkelfrequenz  $\omega$  rotierenden Drehstrecke auffassen lassen. Bekommt eine Stelle  $i$  durch die Momente  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots$ , die durch Größe und Richtung gegeben sind (Vektoren), die Ausschläge  $\bar{A}_{i,1}, \bar{A}_{i,2}, \dots$ , so wird die resultierende Schwingung ebenfalls eine harmonische Schwingung mit der resultierenden Amplitude:

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i,1} + \bar{A}_{i,2} + \dots \quad (55)$$

Das  $+$  Zeichen gibt dabei an, daß die Addition geometrisch zu erfolgen hat.

Wirken die erregenden Momente  $\bar{M}_k, \bar{M}_l, \bar{M}_m, \dots$  in den Punkten  $k, l, m, \dots$ , so wird die jeweilige Winkelamplitude in  $i$ , wobei  $i < k, l, m, \dots$  ist:

$$\bar{A}_{i,k} = \bar{M}_k \frac{a_i(a_k)}{R}, \quad (56)$$

$$\bar{A}_{i,l} = \bar{M}_l \frac{a_i(a_l)}{R}, \quad (57)$$

$$\bar{A}_{i,m} = \bar{M}_m \frac{a_i(a_m)}{R}, \quad (58)$$

$$\dots \dots \dots$$

und die Gesamtwinkelamplitude wird:

$$\bar{A}_i = \frac{a_i}{R} \left[ \bar{M}_k(a_k) + \bar{M}_l(a_l) + \bar{M}_m(a_m) + \dots \right] \quad (59)$$

für  $i < k, l, m \dots$

und

$$\bar{A}_i = \frac{(a_i)}{R} \left[ \bar{M}_k a_k + \bar{M}_l a_l + \bar{M}_m a_m + \dots \right] \quad (60)$$

für  $i > k, l, m \dots$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$\bar{E}_{i-1,i} = \frac{e_{i-1,i}}{R} \left[ \bar{M}_k(a_k) + \bar{M}_l(a_l) + \bar{M}_m(a_m) + \dots \right] \quad (61)$$

für  $i < k, l, m, \dots$ ,

$$\bar{E}_{i-i,i} = \frac{(e_{i-i,i})}{R} \left[ \bar{M}_k a_k + \bar{M}_l(a_l) + \bar{M}_m(a_m) + \dots \right] \quad (62)$$

für  $i > k, l, m, \dots$ .

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, daß es nicht erlaubt ist, die Momente einfach geometrisch zu addieren und mit dem resultierenden Moment zu rechnen.

Berechnung bei gleichmäßig verteilter Masse<sup>1)</sup>.

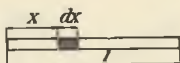


Abb. 6.

Das Massenträgheitsmoment der ganzen Welle (Abb. 6) sei  $\theta_l$ , die elastische Konstante  $c_l$ . Hieraus ergibt sich für:

$$\text{Länge } l: \quad \theta_0 = \frac{\theta_l}{l} \quad \text{und} \quad c_0 = c_l \cdot l,$$

$$\text{Länge } dx: \quad \theta_0 \cdot dx \quad \text{und} \quad c = \frac{c_0}{dx}.$$

Für das Massenelement lauten die Grundgleichungen (Gl. 1 und 2, S. 23):

$$\theta_0 dx \cdot \omega^2 a + de = 0$$

oder

$$\theta_0 \omega^2 a + \frac{de}{dx} = 0 \quad (63)$$

<sup>1)</sup> Aus Tolles Gutachten RMA und VPK.



und

$$e = \frac{c_0}{d} \frac{d a}{d x}$$

oder

$$e - c_0 \frac{d a}{d x} = 0. \quad (64)$$

Zur Lösung setzen wir:

$$a = A_1 \cos \frac{x}{\lambda} + A_2 \sin \frac{x}{\lambda}, \quad (65)$$

$$e = B_1 \cos \frac{x}{\lambda} - B_2 \sin \frac{x}{\lambda}, \quad (66)$$

worin  $A_1, A_2, B_1, B_2$  und  $\lambda$  noch zu bestimmende Konstanten sind.

Beide Gleichungen nach  $x$  differentiiert ergeben:

$$\frac{d a}{d x} = -\frac{A_1}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} + \frac{A_2}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda}, \quad (67)$$

$$\frac{d e}{d x} = -\frac{B_1}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} - \frac{B_2}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda}. \quad (68)$$

Setzt man diese Werte in Gl. (63) ein, so wird:

$$\begin{aligned} \theta_0 \omega^2 A_1 \cos \frac{x}{\lambda} + \theta_0 \omega^2 A_2 \sin \frac{x}{\lambda} - \frac{B_1}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} \\ - \frac{B_2}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

oder

$$\cos \frac{x}{\lambda} \left( \theta_0 \omega^2 A_1 - \frac{B_2}{\lambda} \right) + \sin \frac{x}{\lambda} \left( \theta_0 \omega^2 A_2 - \frac{B_1}{\lambda} \right) = 0. \quad (70)$$

Diese Gleichung kann für jedes  $x$  nur zu Null werden, wenn beide Klammerausdrücke verschwinden.

Aus

$$\theta_0 \omega^2 A_1 - \frac{B_2}{\lambda} = 0$$

folgt

$$\theta_0 \omega^2 \lambda = \frac{B_2}{A_1} \quad (71a)$$

und aus dem zweiten Klammerausdruck:

$$\theta_0 \omega^2 \lambda = \frac{B_1}{A_2}. \quad (71b)$$

Ferner erhalten wir aus Gl. (64) und (67/68):

$$B_1 \cos \frac{x}{\lambda} - B_2 \sin \frac{x}{\lambda} + c_0 \frac{A_1}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} - c_0 \frac{A_2}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda} = 0$$

oder

$$\cos \frac{x}{\lambda} \left( B_1 - c_0 \frac{A_2}{\lambda} \right) + \sin \frac{x}{\lambda} \left( c_0 \frac{A_1}{\lambda} - B_2 \right) = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{c_0}{\lambda} = \frac{B_1}{A_2} \quad (72a)$$

und

$$\frac{c_0}{\lambda} = \frac{B_2}{A_1}. \quad (72b)$$

Die Gleichungen (71) und (72) liefern:

$$\theta_0 \omega^2 \lambda = \frac{c_0}{\lambda}$$

und

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_0}{\theta_0} \cdot \frac{1}{\omega^2}} \quad \text{oder} \quad \lambda \omega = \sqrt{\frac{c_0}{\theta_0}}. \quad (73)$$

Es bleibt nun noch übrig, die Konstanten  $A$  und  $B$  zu bestimmen.

Wir nehmen an, das elastische Wellenstück mit gleichförmig verteilter Masse befinde sich zwischen der Stelle  $i$  und  $i + 1$ .

Es ist für die Stelle:

$$\begin{aligned} i &: x = 0, \\ i + 1 &: x = l. \end{aligned}$$

In Gl. (65/66) eingesetzt, wird:

$$a_i = A_1 \quad \text{und} \quad e_{i-1,i} = B_1.$$

Aus den Beziehungen Gl. (72) folgt:

$$A_2 = B_1 \cdot \frac{\lambda}{c_0} = e_{i-1,i} \cdot \frac{\lambda}{c_0}, \quad (74)$$

$$B_2 = A_1 \cdot \frac{c_0}{\lambda} = a_i \cdot \frac{c_0}{\lambda}. \quad (75)$$

Damit lautet für eine beliebige Zwischenstelle unsere Gl. (65/66):

$$a_{i+1} = a_i \cos \frac{x}{\lambda} + e_{i-1,i} \cdot \frac{\lambda}{c_0} \sin \frac{x}{\lambda}, \quad (76)$$

$$e_{i,i+1} = e_{i-1,i} \cos \frac{x}{\lambda} - \frac{c_0}{\lambda} \cdot a_i \sin \frac{x}{\lambda}. \quad (77)$$

Wollen wir die Werte für den Endquerschnitt berechnen, so ist  $x = l$  einzusetzen, womit wir erhalten:

$$a_{i+1} = a_i \cos \frac{l}{\lambda} + e_{i-1,i} \cdot \frac{\lambda}{c_0} \sin \frac{l}{\lambda}, \quad (78)$$

$$e_{i,i+1} = e_{i-1,i} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{c_0}{\lambda} \cdot a_i \sin \frac{l}{\lambda}. \quad (79)$$

Befindet sich das Wellenstück am Anfang, so ist für:

$$i - 1 = 0,$$

$$i = 1,$$

$$i + 1 = 2$$

zu setzen. Da  $e_{01} = 0$  ist, lauten die Gl. (78) und (79):

$$a_2 = a_1 \cos \frac{l}{\lambda}, \quad (80)$$

$$e_{12} = -\frac{c_0}{\lambda} a_1 \sin \frac{l}{\lambda}. \quad (81)$$

In einem Zahlenbeispiel werden wir die Anwendung dieser Formeln noch näher erläutern.

### Wellenverzweigung<sup>1)</sup>.

Dieser Fall der Wellenverzweigung kommt vor, wenn zwei Motore auf eine gemeinsame Arbeitswelle wirken. Dabei wollen wir zunächst zur Vereinfachung annehmen, daß keine Übersetzung zwischen den Wellensträngen vorhanden ist.

Bisher rechneten wir das Schema durch bis zur letzten Schwungscheibe und fanden ein Restmoment  $R$ , das zur Hervorrufung der berechneten Schwingungsamplituden für die Anfangsamplitude 1 erforderlich ist. Für  $R = 0$  ergeben sich die Eigenschwingungszahlen.

Wir wählen nun zunächst die in Abb. 7 wiedergegebene Anlage, in der 3 und 4 Zahnräder (1 : 1) sein sollen. Beginnt man bei 1 mit  $a = 1$ , so ergibt die Rechnung in 3 ein Restmoment  $R'$  und die Amplitude  $a_3$ . Wir rechnen nun weiter,

---

<sup>1)</sup> Diese Berechnungsart hatte Hofrat Prof. Dr.-Ing. Tolle dem Verfasser in dankenswerter Weise im Jahre 1917 zur Verfügung gestellt.

in 6 beginnend, mit  $a_6 = 1$  nach links zu und erhalten  $R''$  in 4 und  $a_4$ . Da in 3 und 4 Zahnräder 1 : 1 vorhanden sind,

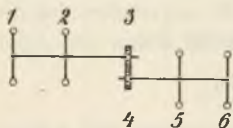


Abb. 7.

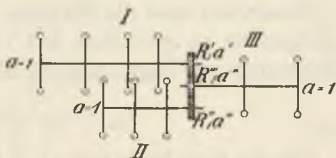


Abb. 8.

muß  $a_3 = a_4$  sein. Es ist also erforderlich, die Restmomente auf gleiche Amplitude umzurechnen. Zweckmäßig wählt man  $a_3 = a_4 = 1$  und erhält die Restmomente  $\frac{R'}{a_3}$  und  $\frac{R''}{a_4}$ .

Im Getriebe wirkt nun das resultierende Restmoment:

$$R = \frac{R'}{a_3} + \frac{R''}{a_4}.$$

Führen wir diese Berechnung für verschiedene  $\omega$  durch, so erhalten wir wieder die Eigenfrequenzen, wenn  $R = 0$  wird.

In gleicher Weise rechnen wir bei einer Verzweigung, wie sie Abb. 8 zeigt.

Für jeden Wellenstrang erhalten wir  $R'$ ,  $R''$  und  $R'''$ , ferner  $a'$ ,  $a''$  und  $a'''$ . Hieraus ergibt sich das Restmoment zu:

$$R = \frac{R'}{a'} + \frac{R''}{a''} + \frac{R'''}{a'''}, \quad (82)$$

das zu Null wird für  $\omega = \omega_e$ , wenn  $\omega_e$  die Eigenfrequenz ist.

Es ist jedoch noch folgende Rechnungsart möglich. Man berechnet, vom freien Ende aus beginnend, die Wellenstränge I und II durch bis zur Verzweigungsstelle und von hier aus weiter mit den auf den Einheitsausschlag umge-

rechneten Restmomenten den Strang III und erhält am freien Ende von III das Restmoment  $R$ .

Bezeichnet man die Scheiben von III, von der Verzweigungsstelle an gerechnet, mit 1 bis 3, so gestaltet sich die Rechnung wie folgt. Auf S. 25 fanden wir:

$$e_{12} = e_{01} - \theta_1 \omega^2 a_1.$$

Für das freie Ende war  $e_{01} = 0$ ; in unserem Fall müssen wir einsetzen:

$$e_{01} = \frac{R'}{a'} + \frac{R''}{a''}.$$

und erhalten, da  $a_1 = 1$  ist:

$$e_{12} = \frac{R'}{a'} + \frac{R''}{a''} - \theta_1 \omega^2 \cdot 1,$$

$$a_2 = 1 + \frac{e_{12}}{e_{12}},$$

usf. bis

$$e_{34} = R.$$

Ist das Übersetzungsverhältnis nicht 1:1, so ist zuerst die Reduktion nach S. 50 vorzunehmen, womit dieses wieder 1:1 wird.

Ein Beispiel wird die Anwendung beider Rechnungsarten noch zeigen.

### γ) Verfahren von Dreves.

In Abweichung von den bisher beschriebenen mittelbaren und unmittelbaren Verfahren bestimmt Dreves die Schwingungsknotenpunkte für die einzelnen Eigenfrequenzen und berechnet hieraus die Größe der Eigenschwingungszahl.

Aus der allgemeinen Schwingungsgleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (1)$$

folgt, wie auf S. 92, Bd. I, abgeleitet ist:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f}}, \quad (2)$$

worin  $f$  der Verdrehungsbogen unter Einwirkung der Eigenbelastung ist.

Auf ein Drehpendel übertragen wird nach Abb. 9:

$$f = \varphi \cdot r \cdot x = \frac{Q \cdot r}{G \cdot J_p} \cdot x \cdot r$$

und mit  $Q = m \cdot g$  und  $mr^2 = \theta$ :

$$f = \frac{m \cdot g \cdot r^2}{G \cdot J_p} \cdot x = \frac{\theta \cdot g}{G \cdot J_p} x, \quad (3)$$

schließlich:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f}} = \sqrt{\frac{G \cdot J_p}{\theta} \cdot \frac{1}{x}}. \quad (4)$$

Für ein System mit zwei Massen (Abb. 10) ist der Knotenpunkt dadurch bestimmt, daß  $f_1 = f_2$  ist. Hieraus folgt:

$$\theta_1 \cdot x_1 = \theta_2 \cdot x_2$$

und, da

$$x_1 + x_2 = l$$

ist,

$$x_1 = \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} l, \quad (5)$$

$$x_2 = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} l. \quad (6)$$

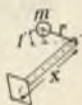


Abb. 9.



Abb. 10.

Einer dieser Werte in die Gl. (4) eingesetzt ergibt:

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot J_p}{l} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2}}. \quad (7)$$

Für ein System mit drei Massen gilt:

$$f_1 = f_2 = f_3. \quad (8)$$

Mit den Bezeichnungen der Abb. 11 wird:

$$f_1 = \frac{g}{G \cdot J_p} \cdot \theta_1 \cdot x_1, \quad (9)$$

$$f_3 = \frac{g}{G \cdot J_p} \cdot \theta_3 \cdot x_3, \quad (10)$$

$$f_2 = \frac{g}{G \cdot J_p} \cdot \theta_2 \cdot \frac{x_a \cdot x_b}{x_a + x_b}, \quad (11)$$

also:

$$\theta_1 x_1 = \theta_2 \frac{x_a \cdot x_b}{x_a + x_b} = \theta_3 x_3. \quad (12)$$

Mit den Scheibenabständen  $l_1$  und  $l_2$  erhalten wir:

$$x_3^2 + x_3 \frac{\theta_2(\theta_1 - \theta_3)l_2 - \theta_1(\theta_2 + \theta_3)l_1}{\theta_3(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} + \frac{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot l_2(l_1 - l_2)}{\theta_3(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} = 0 \quad (13)$$

und daraus

$$x_a = l_1 - l_2 - \frac{\theta_3}{\theta_1} x_3. \quad (14)$$

Die Auflösung beider Gleichungen nach  $x_3$  und  $x_a$  gibt die Lage der Knotenpunkte und gestattet die Berechnung der Eigenfrequenzen.



Zur Lösung gibt Dreves ein graphisches Verfahren, das für ein System mit zwei Massen sich in folgender Weise gestaltet (Abb. 12).

Im Abstand  $l$  werden die Werte  $\theta_1 l$  und  $\theta_2 l$  aufgetragen. Der Schnittpunkt  $S$  ergibt die Lage des Knotenpunktes.

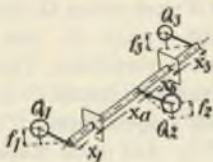


Abb. 11.

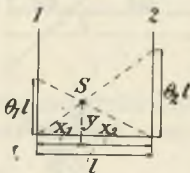


Abb. 12.

Bezeichnen wir die Entfernung des Schnittpunktes  $S$  von der Horizontalen mit  $y$ , so erhalten wir für diese nach Abb. 12:

$$\frac{\theta_1 \cdot l}{l} = \frac{y}{x_1},$$

also

$$y = \theta_1 \cdot x_1.$$

Damit ergibt sich die Eigenfrequenz zu

$$\omega = \sqrt{\frac{G \cdot J_p}{y}}. \quad (15)$$

Die graphische Lösung für ein System mit drei Scheiben zeigt Abb. 13a—d. Wir tragen in einem beliebigen Maßstab die Wellenlängen  $l_{12}$  und  $l_{23}$  auf, ziehen die erste und dritte Knotenpunktskurve  $y_1 = \theta_1 \cdot l$  und  $y_3 = \theta_3 \cdot l$ , ferner die Gerade  $y_2 = \theta_2 \cdot l$  im Punkte der Scheibe 2. Zu den Punkten der ersten Knotenpunktskurve sind nun die zugeordneten Punkte zu konstruieren. In Abb. 13a soll der zugeordnete Punkt zu  $P$  gezeichnet wer-

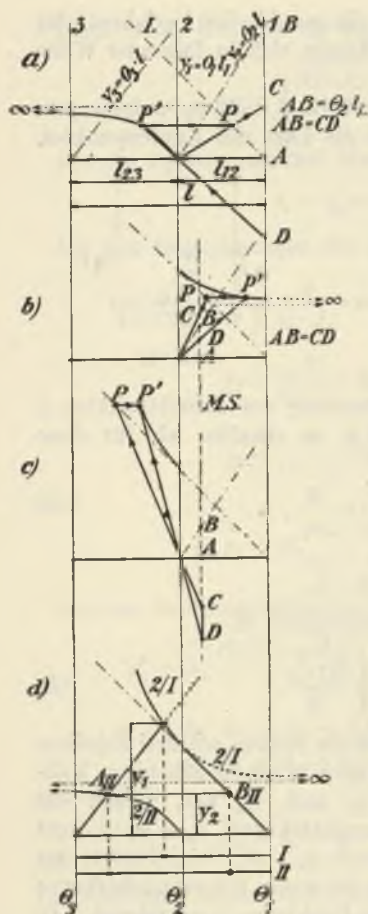


Abb. 13.

den. Rechts von  $\theta_2$  zeichnen wir zuerst eine Meßsenkrechte, vorteilhaft in  $\theta_1$ . Die Gerade  $\theta_2 P$  ergibt auf dieser den Punkt  $C$ . Von  $C$  aus trägt man  $AB$  nach unten ab und erhält Punkt  $D$ , den wir mit  $\theta_2$  verbinden. Die Horizontale durch  $P$  ergibt den zugeordneten Punkt  $P'^1$ ). Auf diese Weise erhalten wir die zugeordneten Punkte zur Strecke  $\theta_1 l$  und damit die zweite Knotenpunktkurve II. Grades (2/II), weil sie die Knotenpunkte für die zweite Eigenfrequenz liefert. Die Kurve nähert sich asymptotisch der durchgezeichneten Horizontalen. In Abb. 13b ist die Konstruktion angegeben für den Punkt  $P$ ; und Abb. 13c zeigt die Durchführung des Verfahrens für die links von der Senkrechten 2 liegenden Punkte.

Mit diesen Kurvenpunkten ergibt sich die zweite Knotenpunktkurve I. Grades (2/I).

<sup>1)</sup> S. Originalarbeit V. d. I. 1918, S. 588ff.

Die erhaltenen Knotenpunktkurven sind in Abb. 13d nochmals besonders herausgezeichnet. Kurve 3 und 2/II liefern den Schnittpunkt  $A_{II}$  und die Horizontale durch ihn mit 1 den Punkt  $B_{II}$ . Damit sind die Knotenpunkte für die zweite Eigenfrequenz bekannt, ferner der Wert  $y_2$ , aus dem sich die Eigenfrequenz ergibt zu:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{G \cdot J_p}{y_2}}.$$

Der Knotenpunkt der ersten Eigenfrequenz ergibt sich aus dem Schnittpunkt  $C_I$  der Kurven 1 und 2/I, und wir erhalten:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{G \cdot J_p}{y_1}}.$$

Das Verfahren ist für Systeme mit wenig Massen, die wenig voneinander verschieden sind, einfach. Trifft dies nicht zu, so wird es unübersichtlich, wie Dreves selbst erkannt und deshalb ein besonderes Schema für die Konstruktion der Kurven angegeben hat.

### 3. Berechnung der Wellenkonstanten.

#### a) Wellenkonstanten.

In den Ableitungen haben wir sowohl mit der Länge  $l$  der Welle, als auch mit dem Werte  $c$  gerechnet.

Besteht die Welle aus einzelnen Stücken mit den Abmessungen  $l_1, d_1; l_2, d_2; l_3, d_3$  usw., so geschieht die Durchrechnung wie folgt. Aus der Festigkeitslehre ist uns bekannt, daß die Verdrehung zweier um  $l$  entfernter Querschnitte durch ein Moment  $M$  bestimmt ist durch den Winkel

$$\phi = \frac{M}{G \cdot J_p} \cdot l \quad (1)$$

ist, worin:

$G$ : Gleitmodul,

$J_p$ : polares Trägheitsmoment

bedeuten.

Die Gesamtverdrehung der zusammengesetzten Welle wird:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots = M \left( \frac{l_1}{G \cdot J_1} + \frac{l_2}{G \cdot J_2} + \dots \right). \quad (2)$$

Diese muß nun gleich sein derjenigen einer Ersatzwelle mit  $l$ ,  $G$  und  $J$ , also

$$\phi = M \frac{l}{G \cdot J}. \quad (3)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{l}{G \cdot J} = \frac{l_1}{G \cdot J_1} + \frac{l_2}{G J_2} + \dots \quad (4)$$

oder, da nach S. 91, Bd. I  $\frac{l}{G \cdot J} = \frac{1}{c}$  ist,

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots \quad (5)$$

Die Länge der Ersatzwelle, die also durch ein gleich großes Moment die gleiche Verdrehung erleidet wie die zusammengesetzte, ergibt sich für  $G = \text{konstant}$  zu

$$l = l_1 \frac{J}{J_1} + l_2 \frac{J}{J_2} + \dots \quad (6)$$

Schwieriger ist die Frage der Reduktion einer gekröpften Welle. Die ersten Berechnungen stammen von Geiger<sup>1)</sup>, die jedoch später aufgegeben und durch neuere<sup>2)</sup> und zugleich einfachere Formeln ersetzt wurden. Weitere Formeln sind von Holzer<sup>3)</sup> und Seelmann<sup>4)</sup>. Die von Saß<sup>5)</sup> vor-

<sup>1)</sup> Dissertation.

<sup>2)</sup> V. d. I. 1921, S. 1242.

<sup>3)</sup> Holzer S. 5.

<sup>4)</sup> V. d. I. 1925, S. 601.

<sup>5)</sup> Maschinenbau 1925, S. 1223.

genommene Nachprüfung obiger Formeln durch Verdrehungsversuche zeigt, daß sie keine gute Übereinstimmung mit dem Versuch ergeben, und daher diese Frage einer weiteren Klärung bedarf. Die Ergebnisse dieser Versuche seien kurz angeführt:

Versuch:	100,0
Geiger (neue Formel) . . . . .	91,3
Holzer (abgekürzte Formel) . . .	62,5
Seelmann . . . . .	95,4

Aus diesen Werten, die sich mit der Art der Wellenkonstruktion ändern, ergibt sich, daß die Berechnung nach Seelmann noch die besten Werte liefert. Weiter ist bemerkenswert, daß die Lagerreaktionen die reduzierte Länge verkleinern. Hierauf hat Holzer zuerst hingewiesen. Der obige Wert 100 ergibt sich aus einer Versuchsreihe mit nicht abgenommenen oberen Lagerschalen. Nimmt man diese ab, so ergibt sich der Wert 104,3.

Die Betrachtung zeigt, daß die Reduktion vorläufig noch auf experimentellem Wege ermittelt werden muß. Man beansprucht die Kurbelwelle durch ein reines Drehmoment und ermittelt mittels Spiegelabmessung die Verdrehung einer oder mehrerer Kröpfungen.

#### b) Massenträgheitsmomente.

Bei geometrisch einfachen Scheiben führt die rechnerische Ermittlung rasch zum Ziel. Wo diese zu umständlich wird, muß die Bestimmung aus einem Schwingungsversuch erfolgen. Am einfachsten ist die Anordnung des Bifilarpendels, das wir im Bd. I, S. 75 kennengelernt haben. Die Berechnung folgt aus Gleichung:

$$\theta = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot Q \cdot \frac{e^2}{l}.$$

## Übersetzungen in Wellenleitungen.

In den meisten in der Technik vorkommenden Maschinenanlagen sind zwischen Kraft- und Arbeitsteil Übersetzungen eingeschaltet. Abb. 14 zeigt zwei Wellen mit einer Zahnradübersetzung. Nimmt man an, daß die Zähne starr, ferner, daß die Eingriffsverhältnisse gut sind, so daß keine Zusatzschwankungen in die Wellenleitung kommen, so kann man sich nach Bd. I, S. 82 das System durch folgende ersetzt denken:

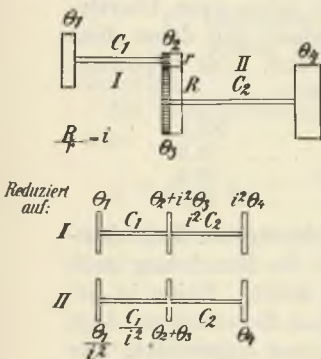


Abb. 14.

1. auf I reduziert:

$$\theta_1; c_1; \theta_2 + i^2 \theta_3; i^2 c_2; i^2 \theta_4,$$

2. auf II reduziert:

$$\frac{\theta_1}{i^2}; \frac{c_1}{i^2}; \frac{\theta_2}{i^2} + \theta_3; c_2; \theta_4,$$

wenn  $i$  das Übersetzungsverhältnis ist.

## 4. Berechnungsbeispiele.

## α) Welle mit drei Scheiben.

Die in dem vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Verfahren wollen wir nun an einem Beispiel näher kennenlernen. Wir wählen das in der Literatur schon behandelte, in Abb. 15 wiedergegebene System und berechnen deren Eigenfrequenzen nach allen bekannten Verfahren.

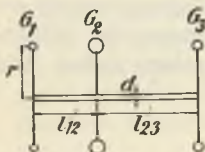


Abb. 15.

Mit den in der Abb. 15 angegebenen Daten erhalten wir:

$$G_1 = 200 \text{ kg}, \quad G_2 = 600 \text{ kg}, \quad G_3 = 300 \text{ kg}.$$

Hieraus ergeben sich die Massen zu:

$$m_1 = 0,2039 \text{ kgsek}^2\text{cm}^{-1}$$

$$m_2 = 0,6118 \text{ kgsek}^2\text{cm}^{-1}$$

$$m_3 = 0,3059 \text{ kgsek}^2\text{cm}^{-1}$$

und die Massenträgheitsmomente mit  $r = 100 \text{ cm}$  aus  $\theta = mr^2$  zu:

$$\theta_1 = 2039 \text{ kgcmsek}^2$$

$$\theta_2 = 6118 \text{ kgcmsek}^2$$

$$\theta_3 = 3059 \text{ kgcmsek}^2.$$

Aus den Wellenabmessungen ergeben sich folgende Werte:

$$J_p = 2 \cdot \frac{\pi d^4}{64} = 981,7 \text{ cm}^4,$$

$$l_{12} = 25 \text{ cm},$$

$$l_{23} = 40 \text{ cm},$$

und mit  $G = 828000 \text{ kg/cm}^2$  erhält man:

$$c_{12} = \frac{G \cdot J_p}{l_{12}} = 32,48 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

$$c_{23} = \frac{G \cdot J_p}{l_{23}} = 20,29 \cdot 10^6 \text{ cmkg}.$$

### Mittelbares Verfahren.

Aus der Determinante auf S. 12 ergibt sich für drei Massen die Gleichung:

$$\omega^4 - \left[ \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2} c_{12} + \frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \cdot \theta_3} c_{23} \right] \omega^2 + \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{\theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_3} c_{12} \cdot c_{23} = 0.$$

4\*



Setzt man die Zahlenwerte ein, so lautet die Gleichung:

$$\omega^4 - 3,129 \cdot 10^4 \omega^2 + 193,5 \cdot 10^6 = 0.$$

Zur Lösung führen wir  $\omega^2 = z$  ein und erhalten:

$$z^2 - 3,129 \cdot 10^4 z + 193,5 \cdot 10^6 = 0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

worin

$$p = -3,129 \cdot 10^4 \quad \text{und} \quad q = +193,5 \cdot 10^6$$

ist.

Die Ausrechnung ergibt:

$$z_1 = 2,276 \cdot 10^4$$

$$z_2 = 0,852 \cdot 10^4. \quad \cdot$$

Die gesuchten Eigenfrequenzen ergeben sich aus:

$$\omega = \pm \sqrt{z_{1,2}}$$

zu:

$$\omega_1 = 151,6,$$

$$\omega_2 = 92,4.$$

Bei Gleichungen höheren Grades ist die direkte Bestimmung der Wurzeln nicht möglich. In diesem Falle setzen wir:

$$y = \omega^4 - 3,129 \cdot 10^4 \cdot \omega^2 + 1,935 \cdot 10^8 = 0,$$

bestimmen den Wert  $y$  für verschiedene  $\omega$  und erhalten  $\omega_0$  als Schnittpunkt der Kurve mit der  $\omega$ -Achse.

Die Berechnung ergibt folgende Werte:

$\omega$	0	40	60	80	90	100	120	140	150	160
$10^{-8} \cdot y$	+1,935	+1,470	+0,940	+0,343	+0,049	-0,194	-0,496	-0,353	-0,043	+0,484

Aus der Tafel sieht man bereits, daß die Wurzeln zwischen 90 und 100, ferner zwischen 150 und 160 liegen. In



Abb. 16 ist die Gleichung  $y = f(\omega)$  graphisch aufgetragen; die Schnittpunkte mit der  $\omega$ -Achse liegen bei

$$\omega_1 = 92$$

und

$$\omega_2 = 152.$$

Die Werte stimmen mit den bereits gefundenen mit ganz kleinen Abweichungen überein, für praktische Fälle ge-

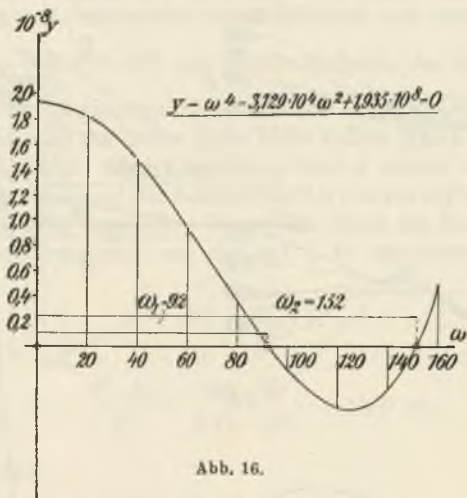


Abb. 16.

nügen sie vollständig, um so mehr, als die Ausgangswerte auch keine absolut genauen Werte sind und die Ausrechnungen mit dem Rechenschieber erfolgt sind.

Sollte der genauere Wert doch bestimmt werden, so kann man weitere Kurvenpunkte im Intervall  $90 \div 100$  berechnen, oder man wendet eine der bekannten Näherungsmethoden an.

## Verfahren Gümbel-Geiger.

Die Durchführung des Verfahrens ist in Abb. 17 wieder-  
gegeben.

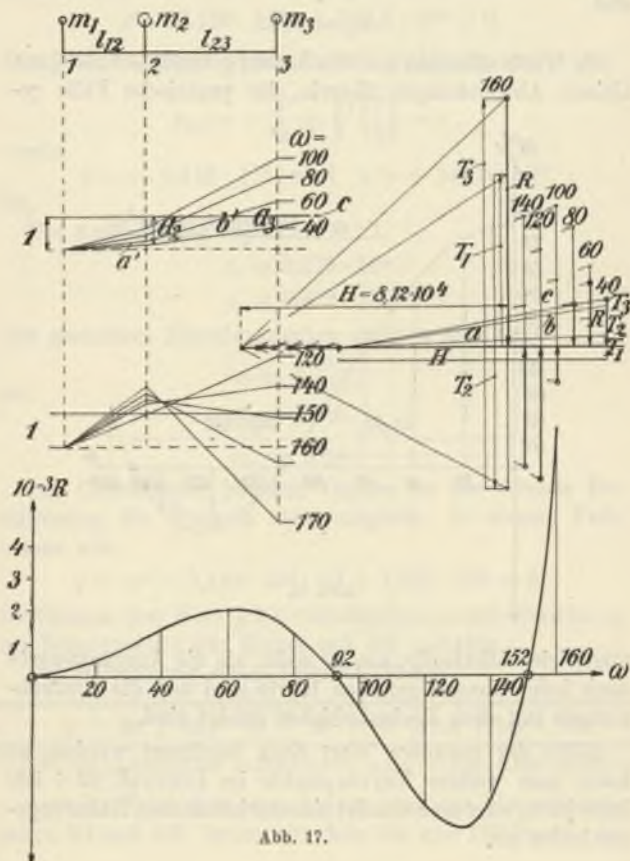


Abb. 17.

Wir tragen in einem beliebigen Maßstab die Strecken  $l_{12}$  und  $l_{23}$  ab und beginnen mit einem beliebigen Einheitsausschlag  $a = 1$  am linken Ende.

Mit diesem Ausschlag erhält man für die erste Masse und  $\omega = 40$  die Trägheitskraft:

$$T_1 = m_1 \cdot a \cdot \omega^2 = 0,2039 \cdot 1,0 \cdot 1600 = 326.$$

Diese Kraft tragen wir im Krafteck in einem beliebigen Maßstab auf, bestimmen den Polabstand mit dem Wert

$$H = \frac{G \cdot J_p}{r^2} = 8,12 \cdot 10^4 \text{ und dessen Maßstab, der sich aus}$$

den bereits gewählten errechnet. Der erste Polstrahl ist wagrecht, weil am linken Ende keine äußere Kraft auf die Masse 1 wirkt. Zur Verbindungslinie  $a$  ziehen wir die Parallele  $a'$ , die auf der Senkrechten im Punkte der Masse 2 den Ausschlag  $a_2$  ergibt. Wir wollen diesen zur Kontrolle analytisch berechnen aus der auf S. 19 abgeleiteten Beziehung:

$$\frac{\Delta a}{l_{12}} = \frac{T_1}{H}$$

oder

$$\Delta a = \frac{T_1 \cdot l_{12}}{H} = \frac{326 \cdot 25}{8,12 \cdot 10^4} = 0,1002 \text{ cm.}$$

Damit wird:

$$a_2 = 1,000 - 0,1002 = 0,8998 \text{ cm.}$$

Nachdem der Ausschlag  $a_2$  bekannt ist, ergibt sich:

$$T_2 = m_2 \cdot a_2 \cdot \omega^2 = 0,6118 \cdot 0,8998 \cdot 1600 = 880.$$

Diesen Wert tragen wir wieder im Krafteck ein, ziehen die Gerade  $b$  und die Parallele dazu  $b'$ , womit sich  $a_3$  zu 0,3078 ermittelt.

Die letzte Trägheitskraft wird:

$$T_3 = 0,3059 \cdot 0,3078 \cdot 1600 = 288.$$

Diese Kraft tragen wir im Krafteck auf und ziehen die Geraden  $c$  und  $c'$ .

Die ermittelte Schwingungsform ist nur möglich, wenn wir an der Masse 3 die Restkraft  $R$  anbringen, die gleich der Summe  $T_1 + T_2 + T_3 = 1494$  ist. Mit dieser Kraft wird das Krafteck geschlossen und damit die Endtangente im Punkte 3 wagrecht.

Sobald die Ausschläge dem Anfangsausschlag entgegengesetzt werden, also negativ, ändert sich auch die Richtung der aufzutragenden Trägheitskräfte. Wir wollen die Durchrechnung für  $\omega = 160$  nochmals näher verfolgen.

Es wird:

$$T_1 = + 1,000 \cdot 0,2039 \cdot 2,56 \cdot 10^4 = + 0,523 \cdot 10^4.$$

Die Geraden  $k$  und  $k'$  liefern:

$$a_2 = - 0,608 \text{ cm.}$$

Damit erhält man:

$$T_2 = - 0,955 \cdot 10^4,$$

die wir nach unten abtragen müssen. Mit den Verbindungslinien  $l$  und  $l'$  ergibt sich:

$$\text{und} \quad a_3 = + 1,517 \text{ cm}$$

$$T_3 = + 1,189 \cdot 10^4.$$

Diesen Punkt mit dem Anfangspunkt der Kraft  $T_1$  verbunden liefert wieder die Restkraft, unter deren Wirkung die aufgezeichnete Schwingung erst möglich wird. Ihre Größe ist:

$$10^{-4} \cdot R = + 0,523 - 0,955 + 1,189 = + 0,757.$$

In dieser Weise wird die Restkraft für verschiedene  $\omega$  ermittelt.

Trägt man die ermittelten  $R$ -Werte als Funktion von  $\omega$  auf, so erhält man die in der Abb. 17 wiedergegebene Restkraftkurve.

Die Schnittpunkte mit der  $\omega$ -Achse ergeben die  $\omega$ -Werte, für die  $R = 0$  ist, also die Eigenfrequenzen:

$$\omega_1 = 92$$

$$\omega_2 = 152.$$

### Verfahren Tolle.

Aus den Ableitungen auf S. 23 erhalten wir für das Beispiel mit 3 Scheiben mit  $a_1 = 1$ :

$$e_{1,2} = -\theta_1 \cdot \omega^2 \cdot a_1,$$

da  $e_{0,1} = 0$  ist, und

$$a_2 = 1 + \frac{e_{1,2}}{c_{1,2}},$$

mit unseren Zahlenwerten für  $\omega = 40$ :

$$e_{1,2} = -2039 \cdot 1600 \cdot 1,000 = -3,26 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

$$a_2 = 1 - \frac{3,26 \cdot 10^6}{32,46 \cdot 10^6} = 1 - 0,1004 = +0,8996,$$

$$e_{23} = e_{12} - \theta_2 \omega^2 \cdot a_2 = -11,96 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

$$a_3 = a_2 + \frac{e_{2,3}}{c_{2,3}} = +0,3114,$$

$$e_{34} = e_{23} - \theta_3 \omega^2 \cdot a_3 = -13,486 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

$$R = e_{34} = -13,486 \cdot 10^6 \text{ cmkg}$$

und

$$\frac{R}{\omega^2} = -8430 \text{ cmkgsek}^2.$$

In der gleichen Weise beginnen wir die Rechnung von der Scheibe 3 ausgehend.

Diesen Rechnungsgang führen wir nun für verschiedene  $\omega$  unter Benutzung eines Schemas durch, das von dem auf S. 27 angegebenen nur dadurch abweicht, daß die Rückwärtsrechnung getrennt von der Vorwärtsrechnung ausgeführt ist.

In der mittleren Spalte sind die Werte  $\Theta \omega^2$  enthalten. Die Produkte werden daher zweckmäßig vorher zusammengestellt. Die untenstehende Tafel enthält sie.

$\Theta \omega^2$ -Werte in  $10^6$  cmkg.

$\omega$	$\Theta_1 \omega^2$	$\Theta_2 \omega^2$	$\Theta_3 \omega^2$
10	0,2039	0,6118	0,3059
20	0,8136	2,448	1,224
30	1,835	5,506	2,753
40	3,260	9,788	4,894
50	5,092	15,29	7,692
60	7,340	22,03	11,05
70	9,990	29,98	14,99
80	13,05	39,15	19,58
90	16,59	49,55	24,77
100	20,39	61,18	30,59
110	24,66	74,02	37,00
120	29,35	88,20	44,05
130	34,45	103,4	51,69
140	39,95	119,9	59,93
150	45,85	137,6	68,70
160	52,18	156,6	78,29
170	58,79	176,8	88,39

Die Durchrechnung des Verfahrens ist ausgeführt für  $\omega = 10, 20 \dots$  bis 170, sie ergibt:

# Beispiel nach Tolle.

$\omega = 10$		$\omega^* = 100$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\Theta \omega^2$	$a$
	-0,2039	-0,2039	+1,00000	$a_1$
$e_{12}$	-0,2039	:32,48	-0,00627	
	-0,6079	-0,6118	+0,99373	$a_2$
$e_{23}$	-0,8118	:20,29	-0,03400	
	-0,2935	-0,3059	+0,95973	$a_3$
$R$	-1,1053	$\frac{R}{\omega^2} = -11053$		
	-0,3059	-0,3059	+1,00000	$(a_2)$
$(e_{12})$	-0,3059	:20,29	-0,01508	
	-0,6022	-0,6118	+0,98492	$(a_2)$
$(e_{12})$	-0,9081	:32,48	-0,02797	
	-0,1950	-0,2039	+0,95695	$(a_1)$
$(R)$	-1,1031	$\frac{(R)}{\omega^2} = -11031$		

$\omega = 20$		$\omega^* = 400$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\Theta \omega^2$	$a$
	-0,8136	-0,8136	+1,0000	$a_1$
$e_{12}$	-0,8136	:32,48	-0,0257	
	-2,3840	-2,448	+0,9743	$a_2$
$e_{23}$	-3,1976	:20,29	-0,1576	
	-1,0000	-1,224	+0,8167	$a_3$
$R$	-4,1976	$\frac{R}{\omega^2} = -10494$		
	-1,224	-1,224	+1,0000	$(a_2)$
$(e_{12})$	-1,224	:20,29	-0,0602	
	-2,301	-2,448	+0,9398	$(a_2)$
$(e_{23})$	-3,525	:32,48	-0,1085	
	-0,678	-0,8136	+0,8313	$(a_1)$
$(R)$	-4,203	$\frac{(R)}{\omega^2} = -10500$		

# Beispiel nach Tolle.

$\omega = 30$		$\omega^2 = 900$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$a$	
	—1,835	—1,835	+1,00000	$a_1$
$(e_{12})$	—1,835	:32,48	—0,0565	
	—5,193	—5,506	+0,9435	$a_2$
$(e_{23})$	—7,028	:20,29	—0,3465	
	—1,643	—2,753	+0,5970	$a_3$
$R$	—8,671	$\frac{R}{\omega^2} = -9640$		
	—2,753	—2,753	+1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	—2,753	:20,29	—0,1356	
	—4,780	—5,506	+0,8644	$(a_2)$
$(e_{23})$	—7,533	:32,48	—0,2320	
	—1,160	—1,835	+0,6324	$(a_1)$
$(R)$	—8,693	$\frac{(R)}{\omega^2} = -9660$		

$\omega = 40$		$\omega^2 = 1600$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$a$	
	—3,260	—3,260	+1,00000	$a_1$
$(e_{12})$	—3,260	:32,48	—0,1004	
	—8,702	—9,788	+0,8996	$a_2$
$(e_{23})$	—11,962	:20,29	—0,5882	
	—1,524	—4,894	+0,3114	$a_3$
$R$	—13,486	$\frac{R}{\omega^2} = -8430$		
	—4,894	—4,894	+1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	—4,894	:20,29	—0,2412	
	—7,428	—9,788	+0,7588	$(a_2)$
$(e_{23})$	—12,322	:32,48	—0,3795	
	—1,238	—3,260	+0,3793	$(a_1)$
$(R)$	—13,560	$\frac{(R)}{\omega^2} = -8470$		



# Beispiel nach Tolle.

$\omega = 50$		$\omega^2 = 2500$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$a$	
	— 5,092	— 5,092	+ 1,00000	$a_1$
$e_{12}$	— 5,092	:32,48	— 0,1568	
	— 12,900	— 15,29	+ 0,8432	$a_2$
$e_{23}$	— 17,922	:20,29	— 0,8870	
	+ 0,337	— 7,692	— 0,0438	$a_3$
$R$	— 17,655	$\frac{R}{\omega^2} = -7060$		
	— 7,692	— 7,692	+ 1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 7,692	:20,29	— 0,3791	
	— 9,488	— 15,29	+ 0,6209	$(a_2)$
$(e_{23})$	— 17,180	:32,48	— 0,5290	
	— 0,468	— 5,092	+ 0,0919	$(a_1)$
$(R)$	— 17,648	$\frac{(R)}{\omega^2} = -7060$		

$\omega = 60$		$\omega^2 = 3600$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$a$	
	— 7,340	— 7,340	+ 0,00000	$a_1$
$e_{12}$	— 7,340	:32,48	— 0,2260	
	— 17,005	— 22,03	+ 0,7740	$a_2$
$e_{23}$	— 24,345	:20,29	— 1,2000	
	+ 4,750	— 11,15	— 0,4260	$a_3$
$R$	— 19,595	$\frac{R}{\omega^2} = -5440$		
	— 11,15	— 11,15	+ 1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 11,15	:20,29	— 0,5499	
	— 9,91	— 22,03	+ 0,4501	$(a_2)$
$(e_{23})$	— 21,060	:32,48	— 0,648	
	+ 1,454	— 7,34	— 0,198	$(a_1)$
$(R)$	— 19,606	$\frac{(R)}{\omega^2} = -5450$		

# Beispiel nach Tolle.

$\omega = 70$		$\omega^2 = 4900$		
$e$ in $10^4$ cmkg		$c$ in $10^4$ cmkg	$a$	
	— 9,990	— 9,990	+ 1,00000	$a_1$
$(e_{12})$	— 9,990	: 32,48	— 0,3032	
	— 20,89	— 29,98	+ 0,6968	$a_2$
$(e_{22})$	— 30,88	: 20,29	— 1,5230	
	+ 12,38	— 14,99	— 0,8262	$a_3$
$R$	— 18,50	$\frac{R}{\omega^2} = -3780$		
	— 14,99	— 14,99	+ 1,00000	$(a_4)$
$(e_{13})$	— 14,99	: 20,29	— 0,7380	
	— 7,85	— 29,98	+ 0,2620	$(a_5)$
$(e_{23})$	— 22,84	: 32,48	— 0,706	
	+ 4,43	— 9,99	— 0,444	$(a_1)$
$(R)$	— 18,41	$\frac{(R)}{\omega^2} = -3760$		

$\omega = 80$		$\omega^2 = 6400$		
$e$ in $10^4$ cmkg		$c$ in $10^4$ cmkg	$a$	
	— 13,22	— 13,22	+ 1,00000	$a_1$
$e_{12}$	— 13,22	: 32,48	— 0,4080	
	— 23,19	— 39,15	+ 0,5920	$a_2$
$e_{22}$	— 36,41	: 20,29	— 1,7960	
	+ 23,56	— 19,58	— 1,2040	$a_3$
$R$	— 12,85	$\frac{R}{\omega^2} = -2010$		
	— 19,58	— 19,58	+ 1,00000	$(a_4)$
$(e_{13})$	— 19,58	: 20,29	— 0,9645	
	— 1,39	— 39,15	+ 0,0355	$(a_5)$
$(e_{23})$	— 20,97	: 32,48	— 0,6452	
	+ 8,03	— 13,22	— 0,6067	$(a_1)$
$(R)$	— 12,94	$\frac{(R)}{\omega^2} = -2020$		

# Beispiel nach Tolle.

$\omega = 90$		$\omega^2 = 8100$		
$e$ in $10^4$ cmkg		$c$ in $10^4$ cmkg	$\frac{c}{\omega^2}$	$a$
	—16,59	—16,59	+1,00000	$a_1$
$e_{12}$	—16,59	:32,48	—0,5106	
	—24,25	—49,55	+0,4894	$a_2$
$e_{22}$	—40,84	:20,29	—2,0140	
	+37,76	—24,77	—1,5246	$a_3$
$R$	—3,08	$\frac{R}{\omega^2} = -381$		
	—24,77	—24,77	+1,00000	$(a_4)$
$(e_{12})$	—24,77	:20,29	—1,221	
	+10,96	—49,55	—0,221	$(a_5)$
$(e_{22})$	—13,81	:32,48	—0,425	
	+10,72	—16,59	—0,646	$(a_1)$
$(R)$	—3,09	$\frac{(R)}{\omega^2} = -381$		

$\omega = 100$		$\omega^2 = 10000$		
$e$ in $10^4$ cmkg		$c$ in $10^4$ cmkg	$\frac{c}{\omega^2}$	$a$
	—20,39	—20,39	+1,00000	$a_1$
$e_{12}$	—20,39	:32,48	—0,628	
	—22,77	—61,18	+0,372	$a_2$
$e_{22}$	—43,16	:20,29	—2,127	
	+53,68	—30,59	—1,755	$a_3$
$R$	+10,52	$\frac{R}{\omega^2} = -1052$		
	—30,59	—30,59	+1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	—30,59	:20,29	—1,5080	
	+31,07	—61,18	—0,5080	$(a_2)$
$(e_{22})$	+0,48	:32,48	+0,0148	
	+9,85	—20,39	—0,4832	$(a_1)$
$(R)$	+10,33	$\frac{(R)}{\omega^2} = -10,33$		

# Beispiel nach Tolle.

$\omega = 110$		$\omega^2 = 12100$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\frac{\Theta \omega^2}{\omega^2}$	
	— 24,66	— 24,66	+ 1,00000	$a_1$
$e_{12}$	— 24,66	: 32,48	— 0,759	
	— 17,83	— 74,02	+ 0,241	$a_2$
$e_{23}$	— 42,49	: 20,29	— 2,094	
	+ 68,61	— 37,00	— 1,855	$a_3$
$R$	+ 26,12	$\frac{R}{\omega^2} = + 2160$		
	— 37,00	— 37,00	+ 1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 37,00	: 20,29	— 1,826	
	+ 61,12	— 74,02	— 0,826	$(a_2)$
$(e_{23})$	+ 24,12	: 32,48	+ 0,742	
	+ 2,06	— 24,66	— 0,084	$(a_1)$
$(R)$	+ 26,18	$\frac{(R)}{\omega^2} = + 2160$		

$\omega = 120$		$\omega^2 = 14400$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\frac{\Theta \omega^2}{\omega^2}$	
	— 29,35	— 29,35	+ 1,00000	$a_1$
$e_{12}$	— 29,35	: 32,48	— 0,904	
	— 8,47	— 88,20	+ 0,096	$a_2$
$e_{23}$	— 37,82	: 20,29	— 1,864	
	+ 77,85	— 44,05	— 1,768	$a_3$
$R$	+ 40,03	$\frac{R}{\omega^2} = + 27,80$		
	— 44,05	— 44,05	+ 1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 44,05	: 20,29	— 2,171	
	+ 103,29	— 88,20	— 1,171	$(a_2)$
$(e_{23})$	+ 59,24	: 32,48	+ 1,824	
	— 19,07	— 29,35	+ 0,653	$(a_1)$
$(R)$	+ 40,17	$\frac{(R)}{\omega^2} = + 2790$		

# Beispiel nach Tolle.

Zi p p e r e r , Technische Schwingungslehre. II.

$\omega = 130$		$\omega^2 = 16900$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\theta \omega^2$	$a$
	— 34,45	— 34,45	$\div 1,00000$	$a_1$
$e_{12}$	— 34,45	:32,48	—1,0608	
	+ 6,28	—103,40	—0,0608	$a_2$
$e_{23}$	— 28,17	:20,29	—1,3885	
	+ 74,88	— 51,69	—1,4493	$a_3$
$R$	+ 46,71	$\frac{R}{\omega^2} = + 27,60$		
	— 51,69	— 51,69	$\div 1,00000$	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 51,69	:20,29	—2,5460	
	+ 159,00	—103,4	—1,5460	$(a_2)$
$(e_{23})$	+ 107,31	:32,48	+ 3,301	
	— 60,48	— 34,45	+ 1,755	$(a_1)$
$(R)$	+ 46,83	$\frac{(R)}{\omega^2} = + 2770$		

$\omega = 140$		$\omega^2 = 19600$		
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\theta \omega^2$	$a$
	— 39,95	— 39,95	$\div 1,00000$	$a_1$
$e_{12}$	— 39,95	:32,48	—1,2295	
	+ 27,51	—119,9	—0,2295	$a_2$
$e_{23}$	— 12,44	:20,29	—0,6130	
	+ 49,90	— 59,93	—0,8325	$a_3$
$R$	+ 37,46	$\frac{R}{\omega^2} = + 1910$		
	— 59,93	— 59,93	$\div 1,00000$	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 59,93	:20,29	—2,955	
	+ 234,49	—119,9	—1,955	$(a_2)$
$(e_{23})$	+ 174,56	:32,48	+ 5,371	
	—136,65	— 39,95	+ 3,416	$(a_1)$
$(R)$	+ 37,91	$\frac{(R)}{\omega^2} = + 1930$		

Torsionsschwingungen.

65

# Beispiel nach Tolle.

$\omega = 150$		$\omega^2 = 22500$			
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\frac{\omega^2}{\omega^2}$	$a$	
	— 45,85	— 45,85		+ 1,00000	$a_1$
$(e_{11})$	— 45,85	:32,48		— 1,4115	
	+ 56,61	— 137,6		— 0,4115	$a_2$
$(e_{22})$	+ 10,76	:20,29		+ 0,5302	
	— 8,15	— 68,70		+ 0,1187	$a_3$
$R$	+ 2,61	$\frac{R}{\omega^2} = + 116$			
	— 68,70	— 68,70		+ 1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 68,70	:20,29		— 3,386	
	+ 328,30	— 137,6		— 2,386	$(a_2)$
$(e_{21})$	+ 259,60	:32,48		+ 7,990	
	— 257,00	— 45,85		+ 5,604	$(a_1)$
$(R)$	+ 2,61	$\frac{(R)}{\omega^2} = + 116$			

$\omega = 160$		$\omega^2 = 25600$			
$e$ in $10^6$ cmkg		$c$ in $10^6$ cmkg	$\frac{\omega^2}{\omega^2}$	$a$	
	— 52,18	— 52,18		+ 1,00000	$a_1$
$(e_{11})$	— 52,18	:32,48		— 1,607	
	+ 95,07	— 156,6		— 0,607	$a_2$
$(e_{22})$	+ 42,84	:20,29		+ 2,112	
	— 117,80	— 78,29		+ 1,505	$a_3$
$R$	— 74,96	$\frac{R}{\omega^2} = - 2925$			
	— 78,29	— 78,29		+ 1,00000	$(a_3)$
$(e_{12})$	— 78,29	:20,29		— 3,858	
	+ 474,30	— 156,6		— 2,858	$(a_2)$
$(e_{21})$	+ 369,01	:32,48		+ 11,361	
	— 443,8	— 52,18		+ 18,503	$(a_1)$
$(R)$	— 74,8	$\frac{(R)}{\omega^2} = - 2920$			



Aus den Berechnungen ergeben sich demnach folgende  $R$  und  $R/\omega^2$ -Werte:

$\omega$	$\frac{R}{10^5}$ (cmkg)	$\frac{R}{\omega^2}$ (cmkgsek <sup>2</sup> )
10	— 1,105	— 11 053
20	— 4,100	— 10 250
30	— 8,671	— 9 640
40	— 13,49	— 8 430
50	— 17,65	— 7 060
60	— 19,60	— 5 440
70	— 18,50	— 3 780
80	— 12,85	— 2 010
90	— 3,08	— 381
100	+ 10,52	+ 1 052
110	+ 26,12	+ 2 160
120	+ 40,03	+ 2 780
130	+ 46,71	+ 2 760
140	+ 37,46	+ 1 910
150	+ 2,61	+ 116
160	— 74,96	— 2 925
170	— 211,49	— 7 320

Für  $\omega = 0$  gilt  $\frac{R}{\omega^2} = - \sum \theta = - 11\,216^1)$ .

Die  $R/\omega^2$ -Kurve ist in Abb. 18 aufgetragen, sie liefert als Schnittpunkte mit der  $\omega$ -Achse die Eigenschwingungszahlen:

$$\omega_1 = 92,$$

$$\omega_2 = 152.$$

Bis hierher bringt das behandelte Verfahren von Tolle nichts Neues. Die Rückwärtsrechnung, die als Kontrolle dient, ist zur Bestimmung der  $R$ -Werte nicht notwendig, denn Rechenfehler würden sich beim Auftragen der Werte zeigen.

<sup>1)</sup> Siehe Tolle, Regelung, S. 222.



Im folgenden werden wir nun sehen, weshalb die Rückwärtsrechnung ausgeführt wird.

$$R/\omega^2; Q/\omega^2$$

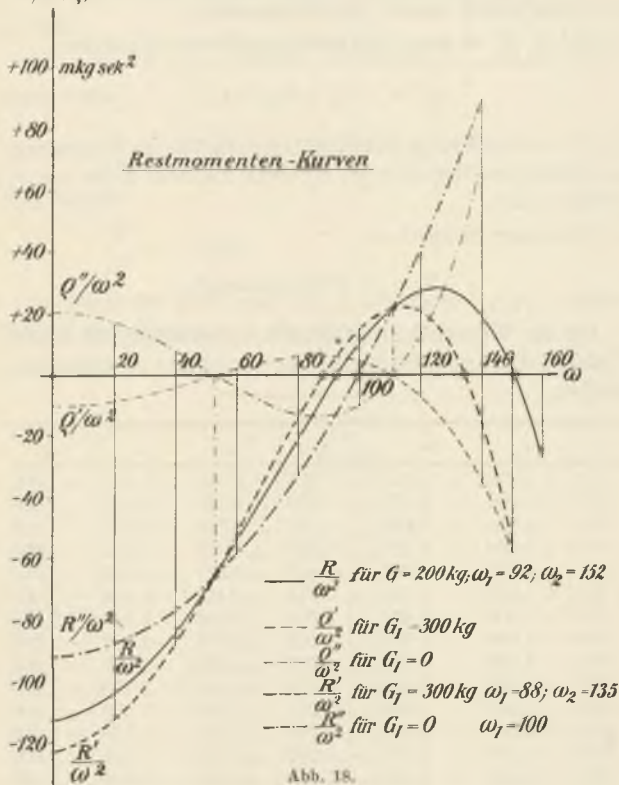


Abb. 18.

Wir stellen uns die Aufgabe: Welches sind die Eigenschwingungszahlen, wenn  $G_1 = 200 \text{ kg}$  um  $100 \text{ kg}$  auf  $300 \text{ kg}$  erhöht wird.

Bei der Anwendung der früheren Verfahren müßten wir zur Aufzeichnung der neuen  $R$ -Kurve die ganze Rechnung nochmals durchführen, mindestens jedoch in der Nähe der zu erwartenden neuen Eigenfrequenzen.

Auf S. 30 ist eine Reständerungsformel abgeleitet:

$$\rho'_1 = -\mathcal{J}'_1 \omega^2 a_1 \cdot (a_1),$$

d. h. um den Wert  $\rho'_1$  verändert sich das für ein bestimmtes  $\omega$  gefundenes Restmoment  $R$ , wenn die erste Masse um  $\mathcal{J}'_1$  erhöht wird.

Für unser Beispiel ist:

$$\mathcal{J}'_1 = + 1019 \text{ kgcmsek}^2.$$

Für die Weiterbehandlung ist es zweckmäßig, die in den Tafeln gefundenen Werte für die Ausschläge zusammenzustellen.

$\omega$	$a_1$	$(a_1)$	$a_2$	$(a_2)$	$a_3$	$(a_3)$
10	+ 1,000	+ 0,957	+ 0,994	+ 0,985	+ 0,960	+ 1,000
20	+ 1,000	+ 0,879	+ 0,979	+ 0,981	+ 0,826	+ 1,000
30	+ 1,000	+ 0,632	+ 0,943	+ 0,864	+ 0,597	+ 1,000
40	+ 1,000	+ 0,379	+ 0,899	+ 0,759	+ 0,311	+ 1,000
50	+ 1,000	+ 0,092	+ 0,843	+ 0,621	— 0,044	+ 1,000
60	+ 1,000	— 0,198	+ 0,774	+ 0,450	— 0,426	+ 1,000
70	+ 1,000	— 0,444	+ 0,697	+ 0,262	— 0,826	+ 1,000
80	+ 1,000	— 0,607	+ 0,592	+ 0,036	— 1,204	+ 1,000
90	+ 1,000	— 0,646	+ 0,489	— 0,221	— 1,525	+ 1,000
100	+ 1,000	— 0,483	+ 0,372	— 0,508	— 1,755	+ 1,000
110	+ 1,000	— 0,084	+ 0,241	— 0,826	— 1,855	+ 1,000
120	+ 1,000	+ 0,653	+ 0,096	— 1,171	— 1,768	+ 1,000
130	+ 1,000	+ 1,755	+ 0,061	— 1,546	— 1,449	+ 1,000
140	+ 1,000	+ 3,416	— 0,229	— 1,955	— 0,833	+ 1,000
150	+ 1,000	+ 5,604	— 0,412	— 2,386	+ 0,119	+ 1,000
160	+ 1,000	+ 18,503	— 0,607	— 2,858	+ 1,505	+ 1,000
170	+ 1,000	+ 12,185	— 0,809	— 3,355	+ 3,346	+ 1,000

Mit diesen Werten berechnet sich z. B. für  $\omega = 60$  die Reständerung zu:

$$\varrho' = -1019 \cdot 3600 \cdot 1,000 \cdot 0,198 = -0,726 \cdot 10^6,$$

so daß

$$R' = R - \varrho' = (-19,595 - 0,726)10^6 = -20,321 \cdot 10^6.$$

Ferner wird:

$$\frac{\varrho'}{\omega^2} = -1019 \cdot 1,000 \cdot 0,198 = -202$$

und damit:

$$\frac{R'}{\omega^2} = -5642.$$

In folgender Tafel sind die  $\varrho'/\omega^2$ -Werte für  $\mathcal{J}'_1 = 1019$  für die verschiedenen  $\omega$  eingetragen.

$\varrho'/\omega^2$	
$\omega$	(cmkgsek <sup>2</sup> ) für $\mathcal{J}'_1 = + 1019$
10	— 975
20	— 896
30	— 643
40	— 386
50	— 94
60	+ 202
70	+ 453
80	+ 619
90	+ 658
100	+ 492
110	+ 85
120	— 666
130	— 1785
140	— 3480
150	— 5720
160	— 18830
170	— 12400

Die Kurve  $q'/\omega^2$  für  $\mathfrak{P}'_1 = + 1019$ , entsprechend  $G'_1 = 200 + 100 = 300$  kg, ferner eine neue Kurve für  $\mathfrak{P}''_1 = -2038$ , entsprechend  $G''_1 = 0$ , ist in Abb. 18 aufgetragen.

Wir erhalten damit folgende Ergebnisse:

$$G'_1 = 300 \text{ kg:} \quad \omega'_1 = 88,$$

$$\omega'_2 = 135,$$

$$G''_1 = 0: \quad \omega''_1 = 100,$$

also nur eine Eigenfrequenz, entsprechend einem System mit nur zwei Scheiben.

Die Berechnung nach der analytischen Formel, S. 9, liefert:

$$\omega = \sqrt{\frac{\theta_2 + \theta_3}{\theta_2 \cdot \theta_3}} \cdot c_{22} = 99.$$

Die Abb. 19 enthält die Kurven  $q'''/\omega^2$  für  $\mathfrak{P}'''_1 = 10 \mathfrak{P}_1$ , entsprechend  $G'''_1 = 1200$  kg, und für  $\mathfrak{P}''''_1 = 100 \mathfrak{P}_1$ , entsprechend  $G''''_1 = 10200$  kg. Aus der Addition der  $R/\omega^2$  und  $q/\omega^2$  Ordinaten erhalten wir folgende Eigenfrequenzen:

$$G'''_1 = 1200 \text{ kg:} \quad \omega'''_1 = 68,$$

$$\omega'''_2 = 115,$$

$$G''''_1 = 10200 \text{ kg:} \quad \omega''''_1 = 55,$$

$$\omega''''_2 = 112.$$

Mit weiter zunehmender Größe von  $G_1$  verschwindet  $R/\omega^2$  immer mehr gegenüber  $q/\omega^2$ , so daß für unendlich großes Gewicht der Scheibe die Schnittpunkte der  $q/\omega^2$ -Kurve mit der  $\omega$ -Achse selbst die Eigenfrequenzen ergeben. Wir haben früher schon gesehen, daß eine unendlich große Masse gleichbedeutend mit Einspannung ist. Aus der Kurve ergeben sich für diesen Fall die Eigenfrequenzen zu:

$$G_1 = \infty: \quad (\omega_1) = 53,$$

$$(\omega_2) = 111.$$

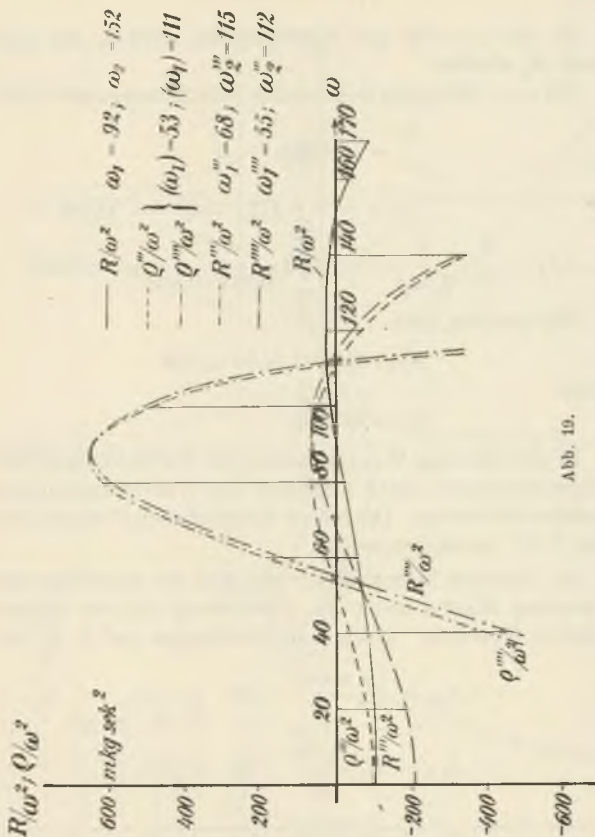


Abb. 19.

Auf S. 30 ist abgeleitet, um welchen Betrag  $\theta_i$  verändert werden muß, damit  $\omega$  zur Eigenfrequenz wird. Die Formel lautet:

$$\vartheta_i = \frac{R}{\omega^2} \frac{1}{a_i (a_i)}.$$

Es soll  $\omega = 100$  zur Eigenfrequenz werden, wie groß muß  $\theta_2$  werden?

Für  $\omega = 100$  ergibt sich aus den Berechnungen auf S. 63:

$$\frac{R}{\omega^2} = +1052,$$

$$a_2 = + + 0,372, \quad (a_2) = -0,508$$

$$\theta_2 = \frac{R}{\omega^2} \cdot \frac{1}{a_2(a_2)} = -1052 \frac{1}{0,372 \cdot 0,508} = -5580.$$

Wir erhalten also

$$\theta_2' = 6118 - 5580 = 538$$

oder

$$G_2' = 52,6 \text{ kg.}$$

In der gleichen Weise könnten die Veränderungen der Eigenfrequenzen durch Abändern der Wellenabmessungen untersucht werden. Die hierzu erforderlichen Formeln sind auf S. 31 zusammengestellt.

Im folgenden berechnen wir nun noch die Ausschläge der einzelnen Massen unter der Einwirkung äußerer harmonischer Momente. Nach den Ableitungen auf S. 34 ist:

$$A_{i,k} = M_k \frac{a_i(a_k)}{R} \quad \text{für } i < k,$$

$$A_{i,k} = M_k \frac{a_k(a_i)}{R} \quad \text{für } i > k.$$

$$A_{k,k} = M_k \frac{a_k(a_k)}{R} \quad \text{für } i = k.$$

Wirkt das äußere Moment im Punkte  $i = 1$ , so ergeben die obigen Gleichungen für die Scheiben 1, 2, 3 folgende Ausschläge:

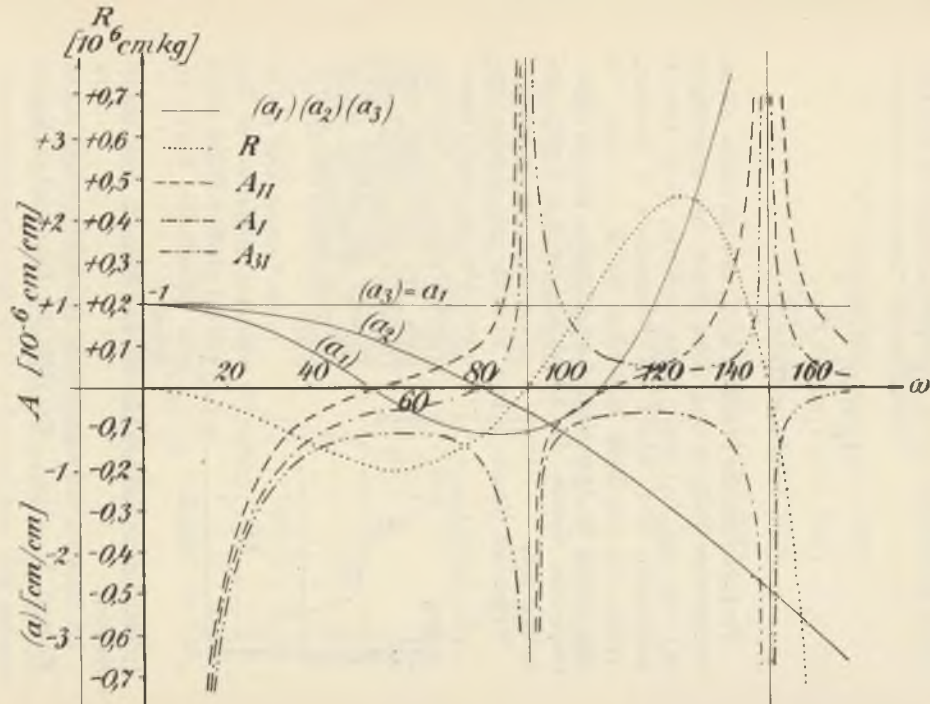


Abb. 20.

$$A_{11} = M_1 \frac{a_1(a_1)}{R},$$

$$A_{21} = M_1 \frac{a_1(a_2)}{R},$$

$$A_{31} = M_1 \frac{a_1(a_3)}{R}.$$

Wir haben also die Produkte  $a_1(a_1)$  usw. zu bilden, die im vorliegenden Fall, da  $a_1 = 1$  ist, gleich den Ausschlägen  $(a_1)$ ,  $(a_2)$  und  $(a_3)$  sind. Diese  $(a)$ -Werte, die in Abb. 20 aufgetragen sind, durch das Restmoment  $R$  dividiert, ergeben die jeweiligen Ausschläge für  $M_1 = 1$  mkg. In Abb. 20 sind die Ausschläge  $A$  aufgetragen. Für die Eigenfrequenzen werden die Ausschläge, da  $R = 0$  wird, unendlich groß.

Wirken im Punkte 1 zwei Momente mit gleicher Fre-

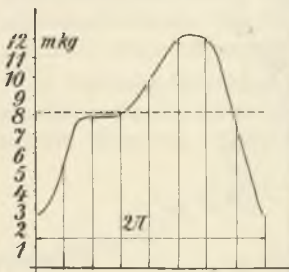


Abb. 21.

quenz, aber mit einer Phasenverschiebung, so berechnet man die Ausschläge nach Größe und Richtung für jedes Moment und addiert die erhaltenen Ausschläge geometrisch.

In der Technik sind die erregenden Momente in den weitaus größten Fällen durch eine periodische Kurve gegeben.

Für diesen Fall wollen wir das Beispiel noch durchrechnen.

Im Punkte 1 wirke das in Abb. 21 wiedergegebene äußere Moment  $M = f(\omega)$ . Mit Hilfe der Fourierschen Reihe<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Vgl. Bd. I, S. 58.



läßt sich die gegebene Funktion in eine Summe von Sinusfunktionen zerlegen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 M = & 8,22 + 3,59 \sin(1 \omega t + 278^\circ), \\
 & + 1,91 \sin(2 \omega t + 285^\circ), \\
 & + 0,586 \sin(3 \omega t + 265^\circ), \\
 & + 0,088 \sin(4 \omega t + 234^\circ), \\
 & + 0,075 \sin(5 \omega t + 89^\circ), \\
 & + 0,028 \sin(6 \omega t + 303^\circ), \\
 & + \dots \text{ usw. mkg.}
 \end{aligned}$$

Die Abb. 22 zeigt die ersten drei sin-Kurven; die Summierung ergibt bereits eine gute Übereinstimmung mit der gegebenen Funktion.

Wir beschränken uns dar auf, die Ausschläge der dritten Scheibe zu berechnen unter Einwirkung der Momente auf Scheibe 1, also  $A_{31}$ , für die Grundschiwingung mit  $\omega = 50$ .

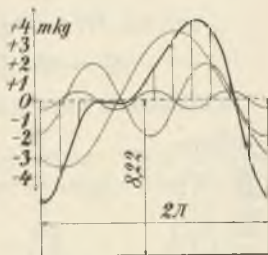


Abb. 22.

$$1. \omega = 50: R = -17,65 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

$$A_{31} = M_1 \cdot \frac{1,0 \cdot 1,0}{-17,65 \cdot 10^6} = 0,0566 \cdot 10^{-6} M_1.$$

Nun ist  $M_1 = 359 \cdot \sin(1 \cdot \omega t + 278^\circ)$  cmkg, folglich wird:

$$A_{31} = -20,4 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(\omega t + 278^\circ) \text{ cm/cm.}$$

Außer dieser Grundschiwingung führt die Masse nun noch Oberschwingungen aus für  $\omega = 2 \omega$  und  $3 \omega$ . Wir müssen

also die Restmomente aus den Berechnungstafeln für 100 und 150 entnehmen und erhalten:

$$2. \quad \omega = 100: \quad R = + 10,52 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

$$A'_{31} = M'_1 \cdot \frac{1,0 \cdot 1,0}{+ 10,52 \cdot 10^6} = 0,095 \cdot 10^{-6} M'_1$$

oder mit  $M'_1 = 191 \sin(2 \omega t + 285^\circ) \text{ cmkg}$ :

$$A'_{31} = 18,1 \cdot 10^{-6} \sin(2 \omega t + 285^\circ) \text{ cm/cm},$$

schließlich für:

$$3. \quad \omega = 150: \quad R = + 2,61 \cdot 10^{-6} \text{ cmkg},$$

$$A''_{31} = 0,383 \cdot 10^{-6} M''_1,$$

und da  $M''_1 = 58,6 \cdot \sin(3 \omega t + 265^\circ)$ ,

$$A''_{31} = 22,5 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(3 \omega t + 265^\circ) \text{ cm/cm},$$

Die erhaltenen Kurven sind in Abb. 23 aufgetragen. Wir

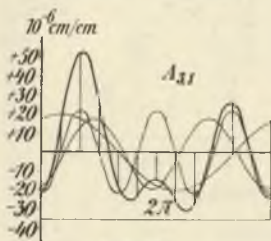


Abb. 23.

sehen, daß die dritte Harmonische trotz der kleineren Amplitude noch große Ausschläge hervorruft, was damit zusammenhängt, daß sie nicht weit von der zweiten Eigenfrequenz entfernt ist. Addiert man die erhaltenen drei Sinuskurven, so ergibt sich das Schwingungsbild für die

dritte Scheibe unter Einwirkung der in Abb. 21 gegebenen periodischen Funktion.

Damit wollen wir diese Betrachtungen schließen. Ein weiteres ausführliches Beispiel findet sich in der Literatur<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Tolle, Regelung, 3. Aufl., S. 227.

β) Durchrechnung einer Maschinenanlage  
nach dem Verfahren von Tolle.

Die Maschinenanlage<sup>1)</sup> besteht aus zwei 6-Zylinder-  
motoren mit Schwungrad und elastischer Kupplung, die

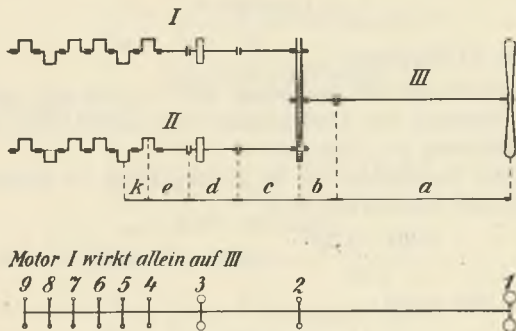


Abb. 24.

mittels Zahnradgetriebe auf eine einzige Welle arbeiten,  
an deren Ende sich der Propeller befindet. Abb. 24 zeigt  
die Anlage schematisch.

Elastische Konstanten  $c$ .

Nach Gl. 2 ist  $c = \frac{J \cdot G}{l}$ .

Wir erhalten für Welle  $a$ :

$$c_a = 1,4 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

$$\frac{1}{c_a} = 0,715 \cdot 10^{-6}.$$

<sup>1)</sup> Maschinenanlage eines Schütte-Lanz-Luftschiffes.

Welle *b*:

$$\frac{1}{c_b} = 0,0296 \cdot 10^{-6}.$$

Welle *c*:

$$\frac{1}{c_c} = 1,58 \cdot 10^{-6}.$$

Welle *d* (Kupplung):

Im Federkreis der Kupplung mit  $r = 132$  mm ergibt (nach Versuch) ein Drehmoment von 12800 cmkg eine Durchfederung  $f = 3,86$  mm.

Für die Verdrehung um den Einheitsbogen ist demnach ein Moment erforderlich von:

$$\frac{12800 \cdot 0,386}{13,2} = 0,439 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{1}{c_d} = 2,27 \cdot 10^{-6}.$$

Welle *e*:

Dieser Wellenteil setzt sich zusammen aus einem Wellenstück und einer halben Kröpfung der Kurbelwelle.

Aus dem Verdrehungsversuch der Kurbelwelle nach S. 48 ergibt sich für eine Kröpfung, also von Mitte zu Mitte Kurbelzapfen:

$$c = 6,15 \cdot 10^6 \text{ cmkg}.$$

Für das Wellenstück allein wird:

$$\frac{1}{c} = 0,0644 \cdot 10^{-6}.$$

ferner für die halbe Kröpfung:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2 \cdot 6,15 \cdot 10^6} = 0,081 \cdot 10^{-6}.$$

Mit diesen Werten ergeben sich die elastischen Konstanten zwischen den einzelnen Scheiben, wenn die Übersetzung 1:1 wäre, zu:

Strecke 1 ÷ 2:

$$\frac{1}{c_{12}} = \frac{1}{c_a} + \frac{1}{c_b} = 0,7446 \cdot 10^{-6},$$

$$c_{12} = 1,34 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

Strecke 2 ÷ 3:

$$\frac{1}{c_{23}} = \frac{1}{c_c} + \frac{1}{c_d} = 3,85 \cdot 10^{-6},$$

$$c_{23} = 0,26 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

Strecke 3 ÷ 4:

$$\frac{1}{c_{34}} = \frac{1}{c_e} + \frac{1}{c_f} = 0,1457 \cdot 10^{-6},$$

$$c_{34} = 6,86 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$$

Strecke 4 ÷ 5 bis 8 ÷ 9:

$$c_{45} \text{ bis } c_{89} = 6,15 \cdot 10^6 \text{ cmkg}.$$

### Trägheitsmomente.

Propeller. Das Trägheitsmoment des Propellers wurde durch Schwingungsversuch bestimmt. Dazu wurde der Propeller an drei Fäden im Abstände  $e$  von der Propellerachse aufgehängt. Aus der Schwingungsdauer  $T$  ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$\Theta = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot Q \frac{e^2}{l}, \quad (\text{Bd. I, S. 77}),$$

ausgerechnet zu 650 kgcmsek<sup>2</sup>.

## Getriebe.

## a) Großes Zahnrad:

$$\Theta = 4.18 \text{ kgcmsek}^2,$$

## b) kleines Zahnrad:

$$\Theta = 0.33 \text{ kgcmsek}^2.$$

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes gelingt in den meisten Fällen rechnerisch durch Zerlegung in geometrisch einfache Teile oder aber durch Schwingungsversuch.

## Kupplung.

a) Mit Schwungrad:  $\Theta = 7.02 \text{ kgcmsek}^2$ ,b) ohne Schwungrad:  $\Theta = 6.50 \text{ kgcmsek}^2$ .

## Kurbelwelle.

Die experimentelle Bestimmung des Massenträgheitsmomentes ergab für eine Kröpfung den Wert:

$$\Theta = 0.635 \text{ kgcmsek}^2.$$

Zu diesem Wert kommt nun noch ein Betrag der hin- und hergehenden Massen des Kolbens und der Schubstange.

Die Masse der Schubstange kann ersetzt werden durch eine Masse

$$m'_1 = \frac{\Theta}{l^2} \text{ im Kurbelzapfen}$$

und eine Masse

$m_2 = M - m_1$  im Kreuzkopfbolzen bzw. Zylinderbolzen, wenn  $M$  die Schubstangenmasse und  $\Theta$  das auf die Kreuzkopfbolzenmitte bezogene Trägheitsmoment der Schubstange ist. Diese Reduktion ist für unendliche Stangenlänge vollkommen, für endliche Länge noch hinreichend genau. Mit  $\Theta = 3.55$ ,  $G = 4.08 \text{ kg}$  und  $l = 36 \text{ cm}$  wird:

$$m_1 = \frac{3,55}{1296} = 0,00274 \text{ kgsek}^2\text{cm}^{-1},$$

$$m_2 = \frac{4,08}{981} - 0,00274 = 0,00143.$$

Ist der Kurbelradius  $r = 100 \text{ mm}$ , so ergibt sich ein Trägheitsmoment des Schubstangenanteils  $m_1$  zu:

$$\Theta = m_1 \cdot r^2 = 0,274 \text{ kgcmsek}^2.$$

Zu den hin- und hergehenden Teilen gehören:

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| 1. Kolbenmasse:                    | 0,00348 kgsek <sup>2</sup> cm <sup>-1</sup> ,               |
| 2. Zylinderbolzenanteil der Schub- |   |
| stangenmasse:                      | 0,00143   |
|                                    | <u>insgesamt: 0,00491 kgsek<sup>2</sup>cm<sup>-1</sup>.</u> |

Hiervon ist als Mittelwert<sup>1)</sup> der halbe Betrag einzusetzen, und zwar wirkend im Kurbelzapfen. Damit wird das für die Schwingungsberechnung einzusetzende Trägheitsmoment:

$$\Theta = m \cdot r^2 = 0,245 \text{ kgcmsek}^2.$$

In der Kröpfungsmitte wirken nun:

a) Rotierende Massen:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. Kurbelkröpfung:     | $\Theta = 0,635$                                      |
| 2. Schubstangenanteil: | $\Theta = 0,274$                                      |
|                        | <u><math>\Theta = 0,909 \text{ kgcmsek}^2.</math></u> |

b) Hin- und hergehende Massen:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. Schubstangenanteil: | $\Theta = 0,143$                                      |
| 2. Kolbenmasse:        | $\Theta = 0,348$                                      |
|                        | <u><math>\Theta = 0,491 \text{ kgcmsek}^2,</math></u> |

hiervon  $\frac{1}{2}$ :

$$\Theta = 0,245.$$

<sup>1)</sup> Siehe Geiger, Mech. Schwingungen (Springer) 1927.

Für eine Kröpfung ist also für die Schwingungsberechnung einzusetzen:

$$\theta = 0,909 + 0,245 = 1,154 \text{ kgcmsek}^2.$$

Da zwischen Motorwelle und Propellerwelle eine Übersetzung 32/68 eingeschaltet ist, sind die  $c$ - und  $\theta$ -Werte bei Reduktion auf die Propellerwelle mit  $\left(\frac{68}{32}\right)^2 = 4,52$  zu multiplizieren.

Nach diesen Berechnungen ergibt sich folgende Zusammenstellung:

### 1. Wellenkonstanten.

Wirkliche Werte:	Auf Propellerwelle bezogene Werte:
$c_{12} = 1,34 \cdot 10^6 \text{ cmkg},$	$1,34 \cdot 10^6 \text{ cmkg}$
$c_{23} = 0,26$	1,75
$c_{34} = 6,86$	31,0
$c_{45} = 6,15$	27,8
$c_{56} = 6,15$	27,8
$c_{67} = 6,15$	27,8
$c_{78} = 6,15$	27,8
$c_{89} = 6,15$	27,8

### 2. Massenträgheitsmomente.

Wirkliche Werte:	Auf Propellerwelle bezogene Werte:
Propeller $\theta_1 = 650$	$= 650 \text{ kgcmsek}^2$
großes Zahnrad $\theta = 4,05$	$= 4,05$
kleines Zahnrad $\theta = 0,33$	$= 1,49$
$\theta_2 = \rightarrow$	$= 5,54$
$\theta_3 = 6,50$	$= 29,40$
$\theta_4 \div \theta_9 = 1,15$	$= 5,22$



Zur Vereinfachung der Rechnungen soll die Kurbelwelle als Wellenstück mit gleichförmig verteilter Masse betrachtet werden. Hierzu werden die sechs Kröpfungen auf fünf Felder verteilt. Für ein Feld wird dann:

$$\theta' = 5,22 \cdot \frac{6}{5} = 6,27.$$

Damit wird mit  $c = 27,8 \cdot 10^6$  nach Gl. 73, S. 38:

$$\lambda \omega = \sqrt{\frac{27,8 \cdot 10^6}{6,27}} = 2106.$$

Bestimmung der Eigenfrequenzen.




Für die Durchführung des Verfahrens berechnen wir zu verschiedenen  $\omega$  die  $\theta \omega^2$ -Werte und erhalten:

$$10^{-6} \cdot \theta \omega^2.$$

$\omega$	$\theta_{1,10^3}$ ( $\theta_1 = 650$ )	$\theta_{2,10^3}$ ( $\theta_2 = 5,54$ )	$\theta_{3,10^3}$ ( $\theta_3 = 29,4$ )
20	0,26	0,0022	0,013
40	1,04	0,0089	0,051
60	2,34	0,020	0,106
80	4,15	0,035	0,187
90	5,26	0,045	0,238
100	6,50	0,055	0,294
110	7,88	0,067	0,356
120	9,35	0,080	0,426
160	16,6	0,142	0,75
200	26,0	0,222	1,18
300	58,5	0,499	2,64
400	104	0,89	4,70
500	162	1,38	7,35
600	234	1,99	10,6
700	318	2,71	14,4
800	416	3,54	18,8
900	526	4,48	23,8
1000	650	5,58	29,4

Die Durchrechnung des Verfahrens auszuführen würde zu weit führen, es sollen daher nur die Werte für  $\omega = 60$  berechnet werden, um die Anwendung der vereinfachten Formeln für die gleichmäßig verteilte Masse kennenzulernen.

$\omega =$	60	$\omega^2 =$	3600
------------	----	--------------	------

( <i>e</i> )		<i>e</i>	<i>c</i> $\Theta \omega^2$	<i>a</i>		( <i>a</i> )
—1,7038	( <i>R</i> )					
—1,4712		—2,340	—2,34	+ 1,000	1	+ 0,6287
—0,2326	1,2	—2,340	:1,34	—1,745		—0,1734
—0,0160		+ 0,015	—0,020	—0,745	2	+ 0,8021
—0,2166	2,3	—2,325	:1,175	—1,978		—0,1842
—0,1044		+ 0,290	—0,106	—2,723	3	+ 0,9863
—0,1122	3,4	—2,035	:31,0	—0,066		—0,0036
				—2,789	4	+ 0,9899
						
				—3,121	9	+ 1,000
	<i>R</i>	—1,703	$\frac{R}{\omega^2} = -4,79$	mkgsek <sup>2</sup>		

( $\Theta \omega^2$ , c, e-Werte in  $10^6$  cmkg).

Vorwärtsrechnung.

Aus  $\lambda \omega = 2106$  folgt:  $\lambda = \frac{2106}{60} = 35,18$ .

Zur Weiterrechnung benötigen wir:

$$\cos \frac{l}{\lambda} \quad \text{und} \quad \sin \frac{l}{\lambda}.$$

Da  $l = 5$  ist, weil die Länge der Kröpfung als Einheit angenommen war, wird:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{5}{35,18} = 0,1422 = 8^{\circ}9'$$

und damit:

$$\cos \frac{l}{\lambda} = 0,9899, \quad \sin \frac{l}{\lambda} = 0,1420.$$

Unter Anwendung der Gl. 78/79, S. 39, erhält man:

$$\begin{aligned} \text{a) } e_{45} = R &= e_{34} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{c_0}{\lambda} \cdot a_4 \cdot \sin \frac{l}{\lambda} \\ &= -2,035 \cdot 0,9899 - \left[ \frac{27,8}{35,18} \cdot (-2,789) \cdot 0,1420 \right], \\ R &= -1,703, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a_9 &= a_4 \cos \frac{l}{\lambda} + e_{34} \cdot \frac{\lambda}{c_0} \sin \frac{l}{\lambda} \\ &= -2,789 \cdot 0,9899 + (-2,035) \frac{35,18}{27,8} \cdot 0,142, \\ a_9 &= -3,121. \end{aligned}$$

Die Werte  $R$  und  $a_9$  werden in das Schema eingetragen.

#### Rückwärtsrechnung.

Nach Gl. 80 ist:

$$(a_4) = (a_9) \cos \frac{l}{\lambda} = +1,000 \cdot 0,9899 = +0,9899.$$

Ferner:

$$(e_{34}) = -\frac{c_0}{\lambda} (a_9) \sin \frac{l}{\lambda} = -\frac{27,8}{35,18} \cdot 1,000 \cdot 0,1420 = 0,1122.$$

Diese errechneten Werte trägt man ins obige Schema ein und rechnet in der bekannten Weise weiter.

Für die praktische Durchführung benutzt man zweckmäßig folgendes Schema:

$$\begin{array}{rcl}
 \lambda \omega = \dots\dots & \lambda = \frac{\dots\dots}{\omega} = \dots\dots & \\
 \frac{l}{\lambda} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots = \dots\dots\dots & & \\
 \frac{e_0}{\lambda} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots & \frac{\lambda}{e_0} = \dots\dots & \\
 \cos \frac{l}{\lambda} = \dots\dots & \sin \frac{l}{\lambda} = \dots\dots & \\
 (e_{34}) = -\frac{e_0}{\lambda} \sin \frac{l}{\lambda} = \dots\dots\dots & & \\
 (a_4) = \cos \frac{l}{\lambda} & = \dots\dots\dots & \\
 e_{34} \cos \frac{l}{\lambda} & = \dots\dots\dots & \\
 -a_4 \frac{e_0}{\lambda} \sin \frac{l}{\lambda} & = \dots\dots\dots & \\
 \text{Summe} = R = \dots\dots\dots & & \\
 a_4 \cos \frac{l}{\lambda} & = \dots\dots\dots & \\
 e_{34} \frac{\lambda}{e_0} \sin \frac{l}{\lambda} & = \dots\dots\dots & \\
 \text{Summe} = a_9 = \dots\dots\dots & &
 \end{array}$$

Die Durchrechnung des Verfahrens für den Fall, daß die Teilanlage I oder II allein auf die Propellerwelle arbeitet ergibt folgende Restmomentenwerte:

$\omega$	$10^{-6} \cdot R$ (cmkg)	$R/\omega^2$ (mkgsek <sup>2</sup> )
40	— 0,97	— 6,06
60	— 1,70	— 4,73
80	— 1,84	— 2,89
90	— 3,39	— 1,80
100	— 0,59	— 0,59
110	+ 0,88	+ 0,73
120	+ 3,07	+ 2,13
160	+ 21,6	+ 8,43
200	+ 63	+ 15,75
300	+ 290	+ 33,2
400	+ 666	+ 41,0
500	+ 874	+ 34,7
600	+ 511	+ 14,2
700	— 262	— 5,3
800	+ 108	+ 1,7
900	+ 5828	+ 71,8
1000	+ 23586	+ 235,9

Für  $\omega = 0$  ist  $\frac{R}{\omega^2} = - \sum \Theta = - 7,16$ .

Aus der Tafel ersehen wir bereits, daß Eigenfrequenzen liegen zwischen

1. 100 und 110
2. 600 und 700
3. 700 und 800 usw.

Die Kurven  $R$  und  $R/\omega^2$  sind in Abb. 25 wiedergegeben.

Wir berechnen nun im folgenden die Eigenfrequenzen für die ganze Anlage, d. h. wenn beide Motoren zusammen auf die gemeinsame Propellerwelle arbeiten.

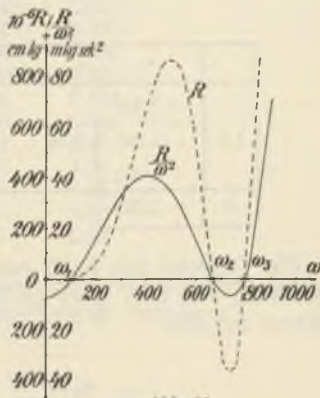


Abb. 25.

Nach den Betrachtungen auf S. 40 beginnen wir mit der Durchrechnung jeweils an den drei freien Enden und erhalten dann für jeden Wellenstrang an Stelle 2 ein Restmoment  $R$  und einen Ausschlag  $a$ . Beim reduzierten System müssen wir jedoch an der Stelle 2 die gleichen Ausschläge bekommen, deshalb sind die erhaltenen Restmomente umzurechnen, am einfachsten auf den Einheitsausschlag.

Es liegt Resonanz vor, wenn die Summe der jeweiligen Restmomente zu Null wird.

Zu beachten ist, daß die Trägheitsmomente der beiden Zahnräder einzeln einzusetzen sind.

Im vorliegenden Fall kann, da die Anlage symmetrisch ist, das Restmoment einer der Teilzweige I oder II verdoppelt werden.

Wir berechnen zuerst den Zweig III, ( $\theta_1$ ,  $e_{12}$  und  $\theta_2$ ), nach dem Schema, das für  $\omega = 60$  durchgeführt ergibt:

$$\omega = 60.$$

	$e$	$c$	$\theta \omega^2$	$a$	
	— 2,340		— 2,34	+ 1,000	1
1,2	— 2,340	: 1,34		— 1,745	
	+ 0,001		— 0,0146	— 0,745	2
$R$	— 2,339				

Ein Vergleich mit S. 86 zeigt, daß nur die letzte Ausrechnung mit dem Wert des großen Zahnrades durchzuführen ist, also:

$$\begin{array}{r}
 e_{12} \\
 a_2 \cdot \theta_2 \omega^2 = \dots\dots\dots \\
 \hline
 \text{Summe} = \dots\dots\dots = R,
 \end{array}$$

mit den Werten für  $\omega = 60$  also:

$$\begin{aligned} & -2,340 \\ -0,745 \cdot (-0,0146) &= +0,001 \\ \hline R &= -2,399. \end{aligned}$$

Auf den Einheitsausschlag umgerechnet, wird:

$$R' = \frac{R}{a_2} = \frac{-2,399}{-0,745} = +3,16 \cdot 10^6 \text{ cmkg.}$$

Der Vollständigkeit halber sollen die Produkte  $\theta \omega^2$  für das große und kleine Zahnrad noch zusammengestellt werden:

$\omega$	kleines Zahnrad	großes Zahnrad
60	0,0054	0,0146
80	0,0073	0,0198
100	0,0149	0,0405
120	0,0215	0,0584
160	0,0382	0,104
200	0,0596	0,132
300	0,134	0,162
400	0,238	0,364
500	0,372	0,65
600	0,536	1,01
700	0,73	1,46
800	0,95	1,99
900	1,21	2,59

Hierbei ist das Massenträgheitsmoment des kleinen Zahnrades natürlich auf die Propellerwelle reduziert.

Führt man die Rechnungen durch, so erhält man:

$\omega$	$10^{-6} R$ (cmkg)	$a_2$ (cm/cm)	$10^{-6} \cdot R/a^2$ (cmkg)
60	— 2,34	— 0,75	+ 3,16
80	— 4,11	— 2,09	+ 1,96
100	— 6,34	— 3,86	+ 1,64
120	— 9,00	— 5,97	+ 1,51
200	— 23,0	— 18,4	+ 1,25
300	— 43,0	— 42,7	+ 1,01
400	— 54,0	— 76,8	+ 0,705
500	— 41,4	— 120,0	+ 0,345
600	+ 19,0	— 173,4	— 0,110
700	+ 152	— 236,0	— 0,645
800	+ 388	— 310	— 1,25
900	+ 759	— 392	— 1,93

In Abb. 26 sind als Kurve *B* die Werte  $R/a_2$  aufgetragen; die Kurve ergibt die Eigenfrequenz der Propellerwelle mit Propeller und großem Zahnrad, es ist:

$$\omega = 575.$$

Die Restmomente des Zweiges I oder II ergeben sich in ähnlicher Weise aus der Rückwärtsrechnung. Es ändert sich nur der Wert für die Zweigstelle. An Stelle des Trägheitsmomentes des ganzen Getriebes tritt das des kleinen Zahnrades.

Zu berechnen ist also nur:

$$\begin{array}{rcl}
 & \frac{(a_3)}{\dots\dots\dots} & \leftarrow \\
 & \dots\dots\dots & = c_{23} : (e_{23}) \\
 \text{Summe} = (a_2) \cdot \dots\dots\dots \cdot \Theta_2 \omega^2 & = & \dots\dots\dots \\
 & \text{Summe} = \dots\dots\dots = R.
 \end{array}$$



Für  $\omega = 60$  ergibt dies:

$$- 0,2245 \\ + 0,8021 \cdot (- 0,0054) = - 0,0043$$

$$R = - 0,2288 \cdot 10^6 \text{ cmkg}$$

und  $\frac{R}{(a)_2} = - 0,276 \cdot 10^6 \text{ cmkg.}$

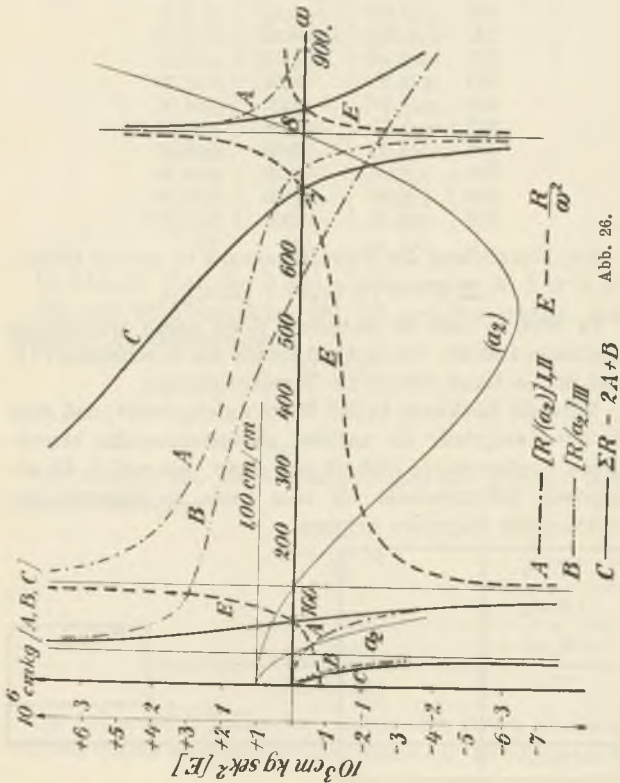


Abb. 26.

Die erhaltenen Werte zusammengestellt ergibt folgende Tafel und Kurve *A* in Abb. 24.

$\omega$	$10^{-6} \cdot R$ (cmkg)	$(a_2)$ (cm/cm)	$10^{-6} \cdot R/(a_2)$ (cmkg)
60	— 0,229	+ 0,802	— 0,276
80	— 0,386	+ 0,651	— 0,593
100	— 0,600	+ 0,457	— 1,31
120	— 0,853	+ 0,225	— 3,79
200	— 2,145	— 1,022	+ 2,10
300	— 3,95	— 3,04	+ 1,30
400	— 5,19	— 4,97	+ 1,04
500	— 5,17	— 6,18	+ 0,84
600	— 3,60	— 5,83	+ 0,61
700	— 1,06	— 3,59	+ 0,30
800	+ 0,99	+ 1,06	+ 0,93
900	+ 0,70	+ 8,04	+ 0,087

Zur Feststellung der Eigenfrequenzen ist nun zu bilden:

$$\Sigma R = 2 [R/(a_2)]_I + [R/a_2]_{III}.$$

In Abb. 26 sind die einzelnen Werte allein aufgetragen und dann addiert. Die Schnittpunkte der Summenkurve *C* mit der  $\omega$ -Achse liefern die Eigenfrequenzen.

Wird die Rechnung in der Weise durchgeführt, daß man in der Zweigstelle die auf den Einheitsausschlag errechneten Restmomente addiert und dann, wie auf S. 42 angegeben, weiterrechnet bis zum Ende, so benutzt man zweckmäßig folgendes Schema:

$[R/a]_1$			
$[R/a]_2$			
$— \theta_2 \omega^2 \cdot 1$			1,000
$\Sigma =$		$:(c_{12})$	$=$
		$— \theta_1 \omega^2 \cdot$	
$R =$			

Die auf diese Weise errechneten Restmomentenwerte sind in folgender Tafel eingetragen.

$\omega$	$10^{-6} R$ (cmkg)	$\frac{R}{\omega^2}$ (cmkgsek <sup>2</sup> )
60	— 1,91	— 531
80	— 1,59	— 248
100	+ 3,74	+ 374
120	+ 36,8	+ 2560
200	— 101	— 2530
300	— 144	— 1600
400	— 236	— 1470
500	— 277	— 1110
600	— 271	— 751
700	— 115	— 234
800	— 384	— 610
900	+ 414	+ 510

In Abb. 26 sind die Werte wiedergegeben in Kurve *E*. Aus den Schnittpunkten mit der  $\omega$ -Achse ergeben sich folgende Eigenfrequenzen:

$$\omega_1 = 99,$$

$$\omega_2 = 705,$$

$$\omega_3 = 815.$$

Die minutlichen Eigenschwingungszahlen ergeben sich aus der Beziehung:

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega$$

zu:

$$n_1 = 945,$$

$$n_2 = 6740,$$

$$n_3 = 7780.$$

Die kritischen Drehzahlen ergeben sich durch Division mit den Ordnungszahlen der Harmonischen der erregenden

*Momente.* Diese sind beim vorliegenden Verbrennungsmotor:  $1\frac{1}{2}$ , 2, 3,  $4\frac{1}{2}$ , 6,  $7\frac{1}{2}$ , 9, ...

Die folgende Tafel erhält die auf diese Weise errechneten kritischen Drehzahlen.

Harmonische Ordnung	$n_1 =$ 945	$n_2 =$ 6740	$n_3 =$ 7780
$1\frac{1}{2}$	630	4490	5195
2	472	3370	3890
3	315	2245	2592
$4\frac{1}{2}$	210	1496	1729
6	157	1124	1296
$7\frac{1}{2}$	126	890	1036
9	105	750	865

Im Bereich der Motordrehzahlen mit normal 1400 Umdrehungen liegen die umränderten Zahlen. Diese müssen gemieden werden, beim Anfahren ist möglichst rasch darüber wegzukommen. Welche von den kritischen Drehzahlen besonders in Erscheinung treten, ist ohne harmonische Analyse des Tangentialkraftdiagramms und ohne Berechnung der Produkte nach S. 34

$$A = M \frac{a(a)}{R},$$

nicht möglich. Dabei sind die Kurbelversatzwinkel und die Reihenfolge der Zündungen natürlich zu beachten.

Beim vorliegenden Beispiel war deutlich nur die kritische Drehzahl 1060 wahrnehmbar, herrührend von der zweiten Eigenfrequenz und von der sechsten Harmonischen. Man bezeichnet sie als kritische Drehzahl zweiten Grades sechster Ordnung und schreibt dies:

$$n_2^{\text{VI}} = 1060 \text{ min}^{-1}.$$

## 2. Biegungsschwingungen.

### α) Welle mit einer Masse.

Eine elastische Welle trage eine Scheibe mit dem Gewicht  $G$ , deren Schwerpunkt um  $e$  von der Wellenachse entfernt sei (Abb. 27). Die durch die Rotation hervorgerufene Fliehkraft sucht den Ausschlag zu vergrößern. Auf die Scheibe wirken folgende Kräfte:



Abb. 27.

$c y$ : Rückwirkende Kraft,

$(y + e)m \omega^2$ : Zentrifugalkraft.

Im Gleichgewichtszustand sind beide einander gleich, also:

$$m(y + e)\omega^2 = c y \quad (1)$$

oder

$$y = \frac{m e \omega^2}{c - m \omega^2}. \quad (2)$$

Wir erhalten unendlich große Ausschläge, wenn der Nenner Null wird. Daraus folgt:

$$c - m \omega^2 = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (3)$$

Dies ist jedoch der Ausdruck für die Eigenfrequenz des Systems. Die durch die Zentrifugalkraft hervorgerufenen Durchbiegungen werden also unendlich groß, wenn die Winkelgeschwindigkeit mit der Eigenfrequenz zusammen-

fällt, wenn Resonanz eintritt. Für den Wert  $\sqrt{\frac{c}{m}}$  führte

Stodola den Ausdruck „kritische“ Winkelgeschwindigkeit ein. Bringt man die statische Durchfederung durch das Eigengewicht ein, so erhalten wir die kritische Drehzahl:

$$n_k = 300 \sqrt{\frac{1}{f}} \text{ min}^{-1}.$$

Aus der Betrachtung folgt weiter, daß alle ähnlichen Fälle auf die Aufgabe zurückgeführt werden können, die Biegeeigenfrequenzen zu bestimmen.

Zur weiteren Untersuchung formen wir die Gl. (2) um, indem wir für  $\frac{e}{m} = \omega_0^2$  setzen und erhalten:

$$y = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} e. \quad (4)$$

oder nach Addition von  $e$  auf beiden Seiten der Gleichung:

$$y + e = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} e. \quad (5)$$

Berechnet man für verschiedene Verhältnisse von  $\frac{\omega}{\omega_0}$  die

Werte  $y + e$ , so erhält man die in Abb. 28 aufgezeichnete

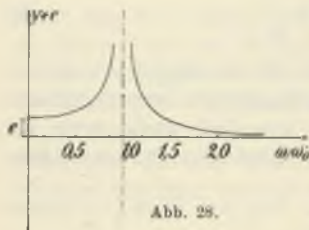


Abb. 28.

Kurve. Aus dieser geht hervor, daß für äußerst langsame Schwingungen,  $\omega \sim 0$ , der Gesamtausschlag  $e$  ist. Für  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  (Resonanz), würden die Durchbiegungen unendlich groß, falls durch die

großen Biegungsbeanspruchungen kein Bruch der Welle stattfinden würde. Mit weiterem Wachsen der Drehzahl nimmt der Ausschlag ab, die Welle läuft ruhiger als vor dem Resonanzgebiet. Diese Erscheinung spielt besonders im Turbinenbau eine große Rolle. Die Größe von  $e$  beeinflusst die Eigenschwingungszahl nicht, selbst der kleinste Wert kann Ausschläge hervorrufen, die die Welle gefährden.

Wir kehren nochmals zum einfachsten Fall (Abb. 27) zurück. Die in einer Ebene stattfindende Biegungsschwingung können wir auffassen als die Projektion einer Kreisbewegung der Masse  $m$  mit dem Halbmesser  $y$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Auf die Masse wirkt die rückwirkende Kraft  $c y$ , wenn  $c$  wieder die Kraft ist, die den Einheitsausschlag hervorruft; ferner die Zentrifugalkraft  $m y \omega^2$ . Gleichgewicht ist vorhanden, wenn

$$c y = m y \omega^2. \quad (6)$$

Setzen wir für  $\frac{c}{m} = \omega_0^2$ , so erhält man:

$$y (\omega^2 - \omega_0^2) = 0. \quad (7)$$

Für  $\omega = \omega_0$  wird  $\omega^2 - \omega_0^2 = 0$  und für  $y$  erhalten wir den unbestimmten Ausdruck  $\frac{0}{0}$ , d. h. im Falle der Resonanz

kann der Ausschlag jeden beliebigen Wert annehmen.

Im folgenden werden wir nun Verfahren kennenlernen zur Ermittlung der Eigenfrequenzen.

### $\beta$ ) Welle mit mehreren Massen.

Die obige Betrachtung gibt uns die Möglichkeit, den Fall einer mit mehreren Massen belasteten Welle zu untersuchen<sup>1)</sup>. Wir wollen den Fall für drei Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  behandeln (Abb. 29).

<sup>1)</sup> Nach Tolle, Gutachten und Vorlesung an der T. H. Karlsruhe.

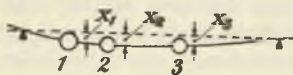


Abb. 29.

Nach den Formeln der Festigkeitslehre können wir die Einflußzahlen  $\alpha$  und damit die Durchfederungen berechnen. Es bedeutet  $\alpha_{1,2}$  die Einflußzahl, die Durchfederung an der Stelle 1 bei Wirkung

der Kraft  $P=1$  an der Stelle 2.

Wir erhalten insgesamt folgende Einflußzahlen:

$$\left. \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Würden die Kräfte  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  wirken, so erhielten wir z. B. an der Stelle 1 die Durchfederung:

$$x_1 = \alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 + \alpha_{13} Q_3. \quad (9)$$

An den einzelnen Stellen sollen nur die Zentrifugalkräfte:

$$m_1 x_1 \cdot \omega^2; \quad m_2 x_2 \cdot \omega^2; \quad m_3 x_3 \cdot \omega^2 \quad (10)$$

wirken, worin  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  die noch unbekannten Durchbiegungen sind.

Die Durchbiegungen können ausgedrückt werden durch:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11} m_1 x_1 \omega^2 + \alpha_{12} m_2 x_2 \omega^2 + \alpha_{13} m_3 x_3 \omega^2 \\ x_2 = \alpha_{21} m_1 x_1 \omega^2 + \alpha_{22} m_2 x_2 \omega^2 + \alpha_{23} m_3 x_3 \omega^2 \\ x_3 = \alpha_{31} m_1 x_1 \omega^2 + \alpha_{32} m_2 x_2 \omega^2 + \alpha_{33} m_3 x_3 \omega^2 \end{array} \right\} \quad (11)$$

oder nach Division mit  $\omega^2$  durch:

$$\left. \begin{array}{l} \left( x_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) x_1 + \alpha_{12} m_2 x_2 + \alpha_{13} m_3 x_3 = 0 \\ \alpha_{21} m_1 x_1 + \left( \alpha_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) x_2 + \alpha_{23} m_3 x_3 = 0 \\ \alpha_{31} m_1 x_1 + \alpha_{32} m_2 x_2 + \left( \alpha_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2} \right) x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad (12)$$



also durch drei Gleichungen mit den drei Unbekannten  $x_1, x_2, x_3$ .

Die drei Wurzeln ergeben sich aus der Bedingung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} & \alpha_{12} m_2 & \alpha_{13} m_3 \\ \alpha_{21} m_1 & \alpha_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} & \alpha_{23} m_3 \\ \alpha_{31} m_1 & \alpha_{32} m_2 & \alpha_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Durch Umformung erhalten wir weiter:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \frac{1}{m_1 \omega^2} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \frac{1}{m_2 \omega^2} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \frac{1}{m_3 \omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Führen wir in Gl. 13 an Stelle der Einflußzahlen die statischen Durchfederungen  $f$  ein, die gegeben wird durch:

$$f_{11} = \alpha_{11} \cdot m_1 g,$$

$$f_{12} = \alpha_{12} \cdot m_2 g,$$

so können wir die Determinante schreiben in der Form:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \frac{g}{\omega^2} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} - \frac{g}{\omega^2} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} - \frac{g}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Mit  $\frac{g}{\omega^2} = h$ , nach Tolle Frequenzhöhe, erhalten wir ganz allgemein für eine Welle mit  $n$  Massen:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - h & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - h & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} - h & \dots & f_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \dots & f_{nn} - h \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Die Lösung dieser Determinante gibt eine Gleichung von der Form:

$$h^n + a_1 h^{n-1} + a_2 h^{n-2} + \dots + a_{n-1} h + a_n = 0. \quad (17)$$

Die Koeffizienten  $a_{n-1}$  usw. sind Ausdrücke mit den Durchfederungen  $f_{11} \dots f_{nn}$ . Die charakteristische Gleichung besitzt  $n$  Wurzeln, deren Ermittlung am einfachsten auf graphischem Wege geschieht.

Wir wollen die Anwendung für den bereits betrachteten Fall mit zwei Massen durchführen.

Die charakteristische Gleichung ergibt sich aus:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - h & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - h \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

zu

$$(f_{11} - h)(f_{22} - h) - f_{12}f_{21} = 0 \quad (19)$$

oder weiter ausgerechnet und geordnet durch:

$$h^2 - (f_{11} + f_{22})h - f_{12}f_{21} + f_{11}f_{22} = 0. \quad (20)$$

Die Wurzeln sind:

$$h_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad (21)$$

mit den Abkürzungen:

$$p = -(f_{11} + f_{22})$$

und

$$q = -f_{12}f_{21} + f_{11}f_{22}.$$

### γ) Näherungsverfahren.

Die Lösung der Determinante erfordert für mehrere Massen langwierige Ausrechnungen. Es lag deshalb nahe, Näherungsgleichungen aufzustellen, die im folgenden betrachtet werden sollen.

Die charakteristische Gleichung hat für  $n$  Massen die Form:

$$h^n + a_1 h^{n-1} + \dots + a_n = 0; \quad (22)$$

hierin ist:

$$a_1 = -(f_{11} + f_{22} + \dots + f_{nn}), \quad (23)$$

wie sich leicht ausrechnen läßt.

Für die  $n$  Wurzeln  $h_1, h_2, \dots, h_n$  einer Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades besteht die Beziehung:

$$(h - h_1)(h - h_2)(h - h_3) \dots (h - h_n) = 0. \quad (24)$$

Die Klammern ausgerechnet ergibt wieder Gl. 22, also:

$$h^n + a_1 h^{n-1} + a_2 h^{n-2} + \dots + a_{n-1} h + a_n = 0. \quad (25)$$

Nach dem Koeffizientengesetz ist nun:

$$-a_1 = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n \quad (26)$$

$$(-1)^n \cdot a_n = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \dots \cdot h_n. \quad (26a)$$

Führen wir die Betrachtung für  $n = 3$  durch, so erhalten wir:

$$(h - h_1)(h - h_2)(h - h_3) = 0 \quad (27)$$

oder ausgerechnet:

$$h^3 - (h_1 + h_2 + h_3) h^2 + (h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3) h - h_1 h_2 h_3 = 0. \quad (28)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der aus der Determinante gewonnenen:

$$h^3 - (f_{11} + f_{22} + f_{33}) h^2 + \dots + = 0, \quad (29)$$

so erhalten wir die Beziehung:

$$h_1 + h_2 + h_3 = f_{11} + f_{22} + f_{33}, \quad (30)$$

also

$$\sum h = f_{11} + f_{22} + f_{33} \dots \quad (31)$$

Die Näherung besteht nun darin, daß man die Wurzeln  $h_2, h_3, \dots$  gegenüber  $h_1$  vernachlässigt, man also  $h_1 = h_{\max} \cong \sum f$  setzt. So erhält man:

$$h_{\max} \cong f_{11} + f_{22} + f_{33} \quad (32)$$

oder mit  $h = \frac{g}{\omega^2}$  die niedrigste Eigenfrequenz:

$$\omega_{\min} \cong \sqrt{\frac{g}{h_{\max}}} \cong \sqrt{\frac{g}{f_{11} + f_{22} + f_{33}}} \quad (33)$$

oder allgemein:

$$\omega_{\min} \cong \sqrt{\frac{g}{\sum f}}, \quad (34)$$

eine von Krause<sup>1)</sup> aufgestellte Formel.

Aus Gl. (34) folgt:

$$\frac{1}{\omega_{\min}^2} \cong \frac{f_{11}}{g} + \frac{f_{22}}{g} + \frac{f_{33}}{g}. \quad (35)$$

Für  $\frac{f_{11}}{g}$  können wir jedoch setzen  $\frac{1}{\omega_1^2}$ , worin  $\omega_1$  die Eigenfrequenz ist, wenn die Masse 1 allein wirken würde.

<sup>1)</sup> V. d. I. 1914, S. 878 und 1276.

Wir erhalten damit schließlich die Formel:

$$\frac{1}{\omega_{\min}^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2}, \quad (36)$$

die von Dunkerley im Jahre 1895 experimentell aufgestellte Formel. In der Literatur findet man diese Formel meistens in der weniger übersichtlichen Form:

$$\omega_{\min} = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_3^2 \omega_1^2}}. \quad (37)$$

Kull<sup>1)</sup> gibt 1918 ein weiteres Verfahren an. Er berechnet:

$$f^* = \frac{G_1 f_1^2 + G_2 \cdot f_2^2 + \dots + G_n \cdot f_n^2}{G_1 f_1 + G_2 f_2 + \dots + G_n \cdot f_n} \quad (38)$$

und erhält:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f^*}}. \quad (39)$$

Im folgenden soll nun an einigen Beispielen noch gezeigt werden, welche Fehler durch Anwendung der angegebenen Näherungsformeln entstehen können. Abb. 30 enthält die von Kull<sup>2)</sup> berechneten Fehler für verschiedene Belastungsfälle. Diese sind angegeben für den Wert  $f$ , und zwar sind die Methoden Kull ( $K/F$ ) und Dunkerley ( $D/F$ ) mit den genauen Werten von Föppl verglichen. In der dritten Spalte ist für einige Fälle der Fehler berechnet, wenn man die kleinere Kraft  $P$  vernachlässigen würde und für  $Q$  allein die statische Durchfederung berechnen würde. Es zeigt sich, daß dieses Verfahren in den meisten Fällen noch genauer ist als das Dunkerleysche. Die Werte nach Kull geben gute Übereinstimmung mit den genauen Werten.

<sup>1)</sup> Vgl. Föppl, Z. a. M. M. 1, 1927.

<sup>2)</sup> V. d. I. 1918, S. 249.

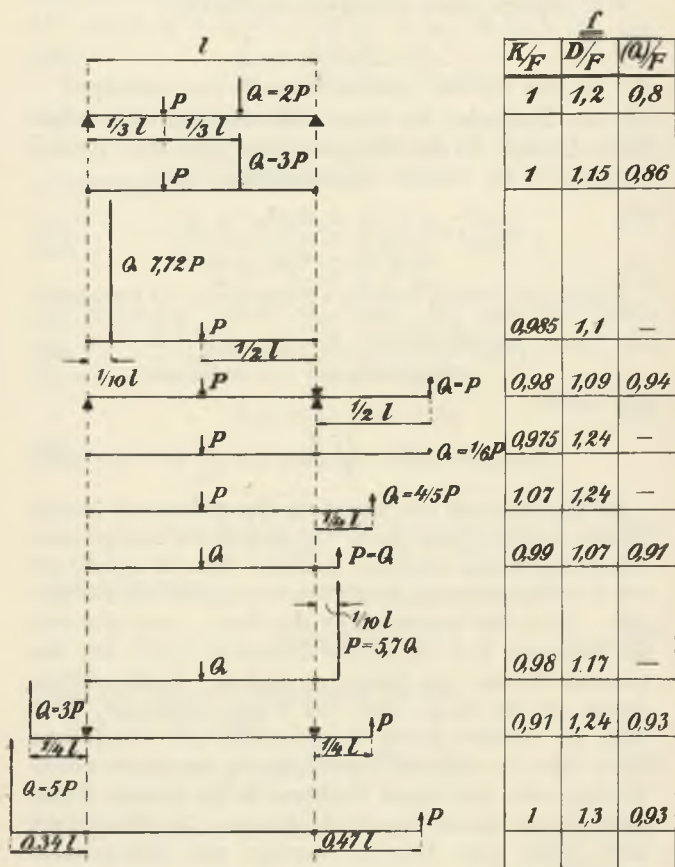


Abb. 30.

## δ) Graphisches Verfahren nach Stodola.

Nach den Betrachtungen auf S. 97, die zur Gleichung:

$$c y = m y \omega^2,$$

führen, ist das unten angegebene Verfahren von Stodola ohne weiteres verständlich.

In Abb. 31 ist die Welle mit ihren Lasten schematisch dargestellt.

Man zeichnet nun für eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , die in der Nähe der zu erwartenden Eigenfrequenz  $\omega_0$  liegt, die vermutliche elastische Linie  $y_1$  der rotierenden Welle ein. Im Kräfteplan werden die Zentrifugalkräfte  $m_1 \omega^2 y_1$

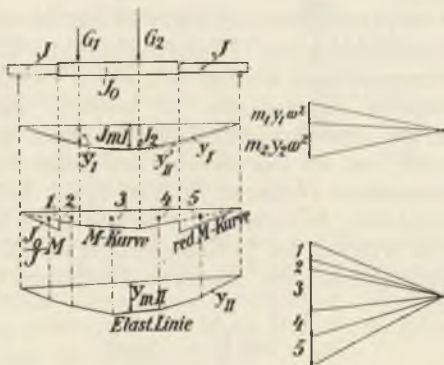


Abb. 31.

und  $m_2 \omega^2 y_2$  aufgetragen und nach dem Mohrschen<sup>1)</sup> Verfahren die Momentenkurve konstruiert. Sind die Wellenabmessungen verschieden, so ist durch Multiplikation mit  $J_0/J$  die reduzierte Momentenfläche zu zeichnen. Mit der

<sup>1)</sup> Götschen Bd. Nr. 603.

Momentenfläche als Belastungskurve ergibt sich die elastische Linie  $y_{II}$ . Ist diese ähnlich der angenommenen elastischen Linie  $y_I$ , so ergibt sich die gesuchte Eigenfrequenz zu

$$\omega_0 = \omega \sqrt{\frac{y_I}{y_{II}}}.$$

Trifft dies nicht zu, so ist mit der erhaltenen elastischen Linie das Verfahren nochmals durchzuführen, bis die Forderung der Ähnlichkeit erfüllt ist. In Abb. 31 ist

$y'_{II} = \frac{y_{mI}}{y_{mII}} y_{II}$  eingetragen als punktierte Kurve. Man sieht,

daß die Ähnlichkeitsforderung erfüllt ist, daß sich eine nochmalige Durchführung des Verfahrens erübrigt. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß bei der Durchführung des Verfahrens die Maßstäbe zu beachten sind. Die Durchführung eines größeren Beispiels findet der Leser bei Stodola<sup>1)</sup> und im Taschenbuch von Dubbel<sup>2)</sup>.

Das angegebene Verfahren ist trotz seiner Einfachheit ziemlich mühsam. In vielen Fällen genügt es, die elastische Linie unter Wirkung der Gewichte  $G$  zu ermitteln und die Schwingungszahl aus der bekannten Gleichung

$$n_0 = 300 \sqrt{\frac{1}{f_{\max}}} \text{ min}^{-1}$$

zu bestimmen. Es ist klar, daß diese Methode nur die Schwingungszahl für die Grundschiwingung liefert.

<sup>1)</sup> Stodola, Dampfturbinen.

<sup>2)</sup> Dubbel, Taschenbuch.



## II. Experimentelle Verfahren.

### 1. Torsionsschwingungen.

(Torsiographen nach Geiger und Frahm.)

Die experimentelle Feststellung von Schwingungen in Wellenleitungen hat Frahm<sup>1)</sup> bereits im Jahre 1902 ausgeführt. Das verwendete Instrument bestand, wie in Abb. 32 schematisch angegeben ist, aus einer schweren Schwungscheibe  $\theta_s$  und einer leichten Riemenscheibe  $\theta_r$ . Beide sind durch ein elastisches Zwischenglied  $c$  miteinander verbunden. Die Riemenscheibe wird durch ein um die zu untersuchende Welle gelegtes Band angetrieben. Durch das elastische Zwischenglied wird auch die schwere Schwungscheibe in Drehung versetzt. Während die Riemenscheibe die Schwingungen der Welle mit ausführt, dreht sich die Schwungscheibe bei richtiger Wahl der Größen  $\theta_s$ ,  $\theta_r$  und  $c$  mit großer Annäherung gleichförmig. Die relative Verdrehung beider Scheiben ist ein Maß für die Schwingungsausschläge der Welle.

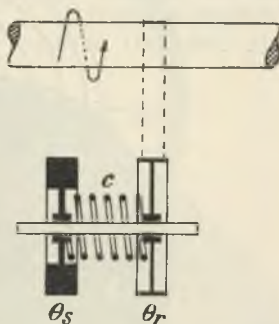


Abb. 32.

Den mathematischen Nachweis der gleichförmigen Rotation der Schwungscheibe führt Tolle<sup>2)</sup> und kommt zu folgender Beziehung:

$$\alpha_s = \alpha_r \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \frac{\theta_r}{\theta_s},$$

worin  $\alpha$  die Winkelamplituden,  $\theta$  die Massenträgheits-

<sup>1)</sup> V. d. I. 1902, S. 797

<sup>2)</sup> Regelung S. 173.

momente,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit beider Scheiben und  $\omega_0$  deren Eigenfrequenz ist.

Mit  $\theta_s = 10 \theta_r$  und  $\omega = 10 \omega_0$  ergibt obige Gleichung

$$\alpha_s = \frac{1}{1000} \alpha_r.$$

Nach diesem Prinzip ist der von Geiger<sup>1)</sup> erfundene und von Lehmann und Michels in Hamburg hergestellte Torsiograph gebaut.

In Abb. 33<sup>2)</sup> ist der Torsiograph in Ansicht wieder-

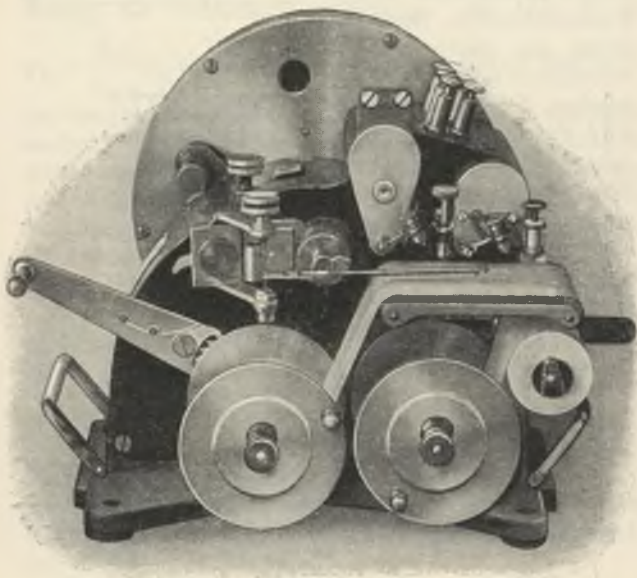


Abb. 33.

<sup>1)</sup> V. d. I. 1916, S. 811.

<sup>2)</sup> Die Abb. 33—39 sind von der Firma Lehmann u. Michels in Hamburg-Schnelsen zur Verfügung gestellt.

gegeben; seine innere Bauart zeigt Abb. 34. Wir sehen rechts die Riemenscheibe *R*, in dieser eingebaut die

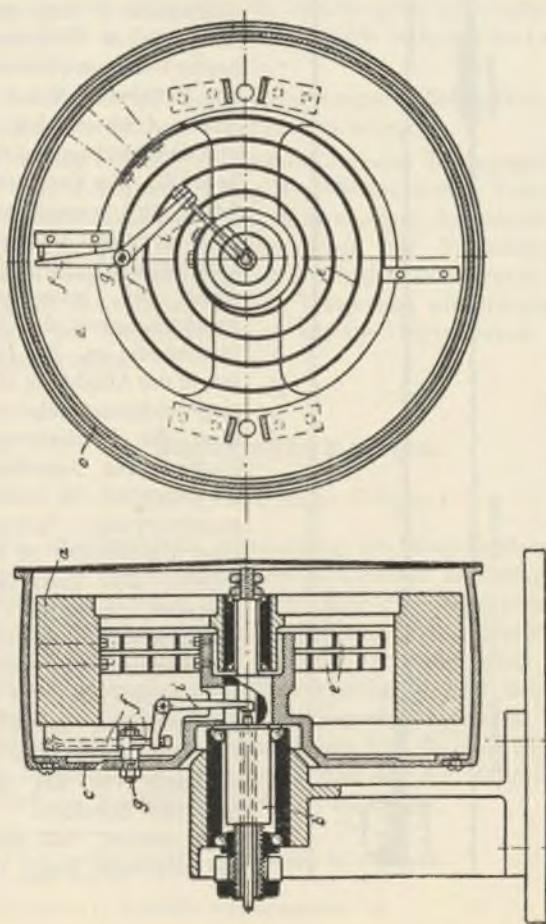


Abb. 34.

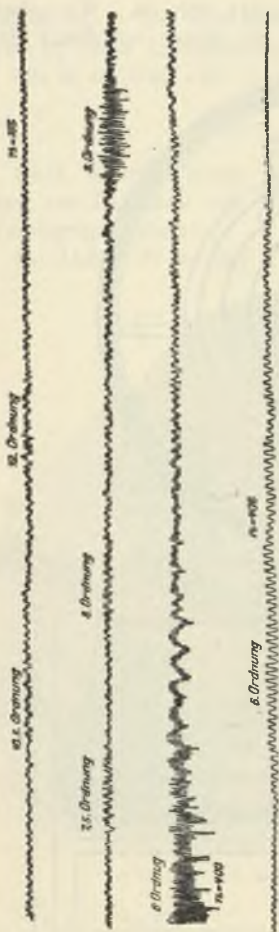


Abb. 35.

schwere Schwungscheibe  $S$ , beide sind durch die Spiralfeder  $F$  verbunden. Die relative Verdrehung beider Scheiben wird durch das Hebelwerk  $H$  auf die Achse  $A$  übertragen und von dieser auf den Schreibhebel  $R$ . Der Papierstreifen  $P$  wird normalerweise so fortbewegt, daß seine Geschwindigkeit proportional der Umdrehungsgeschwindigkeit der Riemenscheibe ist. Ein zweiter, in der Abbildung nicht eingezeichneter Hebel markiert die Umdrehungen. Durch diese Anordnung ist es möglich, die Schwingungsvorgänge während einer Umdrehung zu verfolgen. Das Instrument gestattet weiterhin die Beobachtung zeitlicher Drehzahlschwankungen. In diesem Falle wird der Papierstreifen durch ein Uhrwerk bewegt, also unabhängig von der Drehung der Scheiben.

Es scheint, daß durch das elastische Band Ver-

zerrungen bei der Aufnahme der Schwingungen eintreten. Versuche haben jedoch gezeigt, daß durch Anwendung eines Spezialbandes mit dem Torsiographen Schwingungen bis zu 8000 in der Minute zerrungsfrei aufgezeichnet werden können.

In Abb. 35 sind einige Torsiogramme wiedergegeben, die deutlich die kritischen Drehzahlen zeigen.

Der von Frahm<sup>1)</sup> entwickelte optische Torsiograph ist als eine Weiterentwicklung des Föttingerschen Torsionsindikators<sup>2)</sup> anzusehen. Durch Anwendung des masselosen Lichtstrahles zum Sichtbarmachen der Verdrehungen zweier Wellenquerschnitte ist es möglich, selbst rasch verlaufende Schwingungen ohne Verzerrung wiederzugeben. Wegen der Einzelheiten muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

## 2. Biegungsschwingungen.

(Vibrograph nach Geiger.)

Die experimentelle Bestimmung der Biegungseigenfrequenzen ist möglich mittels des Geigerschen Vibrographen. Dieser unterscheidet sich vom Torsiographen grundsätzlich nur dadurch, daß an Stelle der Schwungscheibe ein exzentrisch angeordnetes Gewicht verwendet wird. Er diente ursprünglich zur Aufzeichnung linearer Schwingungen, ist jedoch für weitere Verwendungszwecke ausgebaut worden. Seine Bauart geben Abb. 36 u. 37 wieder; die theoretischen Grundlagen sind in der Zeitschrift: „Werft — Reederei — Hafen“<sup>3)</sup> zu finden.

<sup>1)</sup> V. d. I. 1918, S. 177.

<sup>2)</sup> Göschen Bd. 880, S. 55.

<sup>3)</sup> 1924, Heft 11.

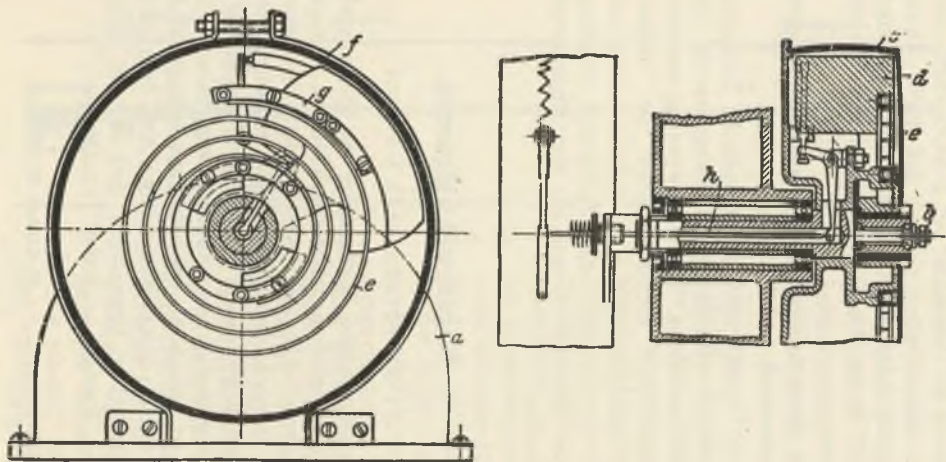


Abb. 36.

Die Anwendung des Vibrographen zur Ermittlung der Biegungsschwingungszahlen ist in Abb. 38 schematisch angegeben. Wir sehen hieraus schon, daß die Feststellung

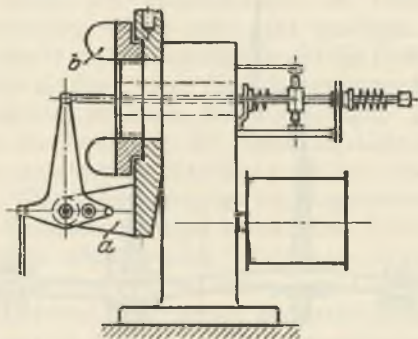


Abb. 37.

nicht wie bei den Torsionsschwingungen im Betriebe vorgenommen werden kann, daß sogar das Gehäuseoberteil der Turbine abzunehmen ist. Die Welle wird nun durch An-

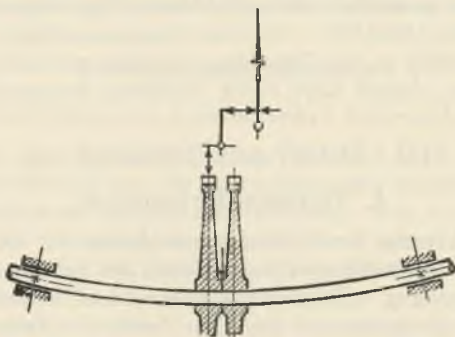


Abb. 38.



schlagen in Schwingung versetzt. Infolge der großen Empfindlichkeit des Instrumentes genügen bereits schwache Anschlagskräfte. Wird der Diagrammstreifen gleichförmig

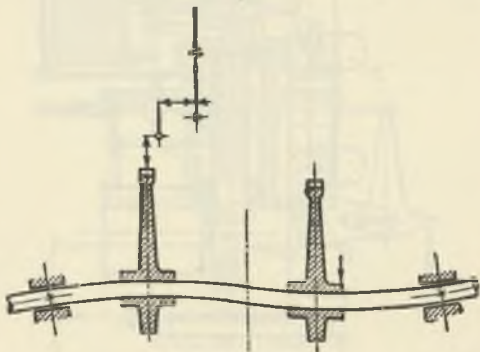


Abb. 39.

bewegt und nach jeder Sekunde mit einer Zeitmarke versehen, so gestaltet sich die Bestimmung der sekundlichen Schwingungen sehr einfach. Durch die Wahl der Anschlagstelle ist es möglich, auch die höheren Eigenfrequenzen zu ermitteln (Abb. 39). Die Schwingungsausschläge werden zweckmäßig in der Nähe des Schwingungsbauches abgenommen, dessen Lage durch Probieren festzustellen ist.

### III. Mittel zur Beseitigung.

#### 1. Torsionsschwingungen.

Als Ursache der Schwingungen haben wir die periodischen Schwankungen in der Kraft- und Arbeitsmaschine kennengelernt. Die Schwankungen des Drehmomentes in der Kraftmaschine entstehen durch die Kolben- und Massenkräfte.



Durch Anwendung mehrerer Zylinder bei zweckmäßiger Wahl des Kurbelversatzes und der Zündfolge bei Verbrennungsmaschinen, ferner durch Anwendung von Schwungrädern, lassen sich Schwankungen des Drehmomentes stark verringern, jedoch nicht ganz beseitigen.

Trotz relativ großer Gleichförmigkeit des Drehmomentes der Kraftmaschine können die Schwingungsausschläge im Resonanzgebiet erhebliche Werte annehmen. Hieraus ergibt sich die Forderung, die Resonanzgebiete zu meiden und beim Anfahren der Maschine rasch über diese hinwegzugehen. Durch Änderung der Schwungmassenverteilung und der Wellenabmessungen können diese Forderungen in vielen Fällen erfüllt werden. Wir finden in der Patentliteratur Anordnungen, bei denen beim Durchfahren des Resonanzgebietes Zusatzmassen automatisch eingeschaltet werden, und die dadurch das Resonanzgebiet verschieben.

Ein weiteres Mittel zur Verkleinerung der Schwingungsausschläge haben wir durch die Anwendung starker Dämpfung.

Die Entscheidung, welche der angegebenen Mittel anwendbar sind, muß von Fall zu Fall getroffen werden.

## 2. Biegungsschwingungen.

(Statisches und dynamisches Auswuchten.)

Nach den Betrachtungen auf S. 97 ist auch hier die Hauptforderung die, die Betriebsdrehzahl möglichst von den kritischen Drehzahlen zu entfernen. Aber auch außerhalb der Resonanzgebiete ruft die Exzentrizität des Schwerpunktes des rotierenden Teiles Schwingungen hervor, die mit zunehmender Exzentrizität größer werden. Dies liefert die zweite Forderung: Beseitigung der Schwerpunktsexzentrizität.

Das Verfahren, dies zu erreichen, kennen wir unter dem Namen Auswuchten. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen dem statischen und dem dynamischen Auswuchten.

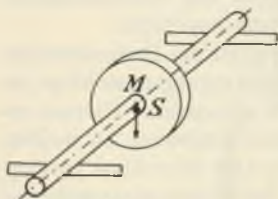


Abb. 40.

Legen wir die in Abb. 40 gezeichnete Welle mit flacher Scheibe auf die zwei horizontal gerichteten Schneiden, so pendelt die Scheibe so lange um ihre Achse, bis sich der Schwerpunkt  $S$  senkrecht unter der Achse befindet. Durch Anbringen von Gegengewichten

kann erreicht werden, daß der Schwerpunkt in die geometrische Achse fällt. Dies ist erreicht, wenn die Welle in jeder Lage in Ruhe bleibt. Die Scheibe ist statisch ausgewuchtet.

Denken wir uns einen langgestreckten Zylinder (Abb. 41) statisch ausgewuchtet und bringen wir in einer Ebene in

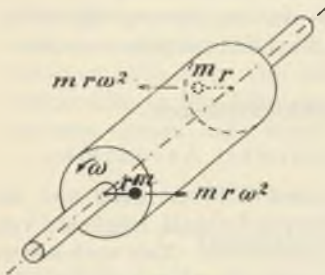


Abb. 41.

gleicher Entfernung von der Achse zwei Zusatzgewichte  $m$  an, so verschiebt sich der Schwerpunkt dadurch nicht. Der Zylinder ist statisch einwandfrei ausgewuchtet. Versetzen wir den Zylinder in Rotation, so stellen wir dennoch starke Erschütterungen in der Lagerung fest. Dies ist klar, denn

die Zusatzmassen verursachen durch die Fliehkraftwirkung ein Moment. Dieses wieder erzeugt Zusatzkräfte im Lager, die mit der Welle rotieren, weil die Momenten-

ebene durch die Wellenachse hindurch geht. Wir sehen hieraus, daß dieses Moment zu Null werden muß, soll der Gang der Maschine erschütterungsfrei sein. Ist dies durch Zusatzgewichte erreicht, so nennen wir den Zylinder dynamisch ausgewuchtet.

In Abb. 42 ist eine dynamische Auswuchtmaschine schematisch wiedergegeben. Der zu untersuchende Rotor ist in

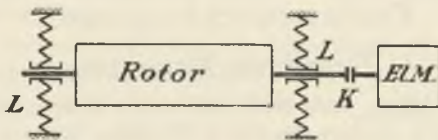


Abb. 42.

schwingungsfähigen Lagern  $L$  leicht drehbar gelagert. Eine ausrückbare Kupplung  $K$  verbindet den Rotor mit dem Elektromotor  $El. M.$

Durch den Motor wird der zu untersuchende Rotor auf eine Drehzahl gebracht, die über der Eigenschwingungszahl des aus dem Rotor und den Federn bestehenden Systems liegt. Die sonst beweglichen Lager sind festgeklemmt. Nun wird die Kupplung ausgerückt und die Feststellvorrichtung eines Lagers gelöst. Die Drehzahl des Rotors nimmt langsam ab, das freie Lager führt Schwingungen aus, die bei einer bestimmten Drehzahl besonders stark sind. Aus den aufgenommenen Diagrammen ergibt sich die Lage und Größe der das Moment hervorrufenden Zusatzmasse. Durch Anbringen von weiteren Zusatzgewichten kann das Moment zum Verschwinden gebracht werden, was sich dadurch zeigt, daß das schwingungsfähige Lager während der Auslaufperiode praktisch in Ruhe bleibt.

Auswuchtmaschinen der beschriebenen Art stellt Carl Schenk in Darmstadt nach dem System Lawaczeck-Hey-

mann<sup>1)</sup> her. Von den Kruppwerken wurde eine vereinigte statisch-dynamische Auswuchtmaschine<sup>2)</sup> entwickelt, die von der Düsseldorfer Maschinenbau A.-G., vorm. Losenhausen, bezogen werden kann.

## Anhang.

### Fundamentalschwingungen.

#### 1. Theoretische Betrachtungen.

Die Kolben- und Massenkräfte in Kolbenmaschinen, exzentrisch sitzende Massen in Turbinen, rufen nicht nur Schwingungen in den Wellen und der Maschine selbst hervor, sondern sie bringen auch die Fundamente und Maschinengebäude, selbst entfernt liegende Häuser, in einen mehr oder weniger starken schwingenden Zustand.

Neben der unangenehmen Wirkung der Erschütterungen auf die Menschen, dem frühzeitigen Verfall der Gebäude durch Ermüdungserscheinungen im Baustoff, bedingen die Erschütterungen eine Verschlechterung des Wirkungsgrades der Maschinenanlage. Die Entnahme der zur Hervorrufung der Fundamentalschwingungen notwendigen Energie aus der der Antriebsmaschine zugeführten Energie zeigte Sommerfeld<sup>3)</sup>.

Die Versuchsanordnung bestand aus einem kleinen Elektromotor, auf dessen Welle eine kleine Masse exzentrisch angebracht war. Der Motor war auf einer Tischplatte befestigt. Die Drehzahl des Elektromotors wurde durch Änderung der Klemmenspannung variiert. Bei

---

<sup>1)</sup> Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1924.

<sup>2)</sup> ETZ. 1925, Heft 9. Maschinenbau 1923, Heft 25/26, Krupp, M.-H. April 1922.

<sup>3)</sup> V. d. I. 1902, S. 391. Hort S. 193.

$n = 310$  konnte man starke horizontale Schwingungen der Tischplatte beobachten. Trotz Erhöhung der Klemmen-  
spannung und damit Steigerung der Energieaufnahme blieb  
die Motordrehzahl die gleiche. Erst bei starker Steigerung  
stieg die Drehzahl bei gleichzeitiger Abnahme der horizon-  
talen Schwingungen. Bei  $n = 750$  fing die Tischplatte  
selbst an vertikal auszuschlagen, auch hier zeigte sich  
ein längeres Verweilen bei dieser Drehzahl trotz größerer  
Energiezuführung.

Die Versuchsanordnung ist schematisch in Abb. 43  
wiedergegeben. Die analytische Be-  
stimmung der beiden minutlichen  
Eigenfrequenzen 310 und 750 er-  
fordert verschiedene Annahmen, wie  
Einfluß der Massen der elastischen  
Teile und Art der Einspannung.  
Schließlich kann der den Tisch tra-  
gende Boden nicht als starr aufgefaßt  
werden; das Haus selbst steht auf  
einem elastischen Grund, dem Boden.

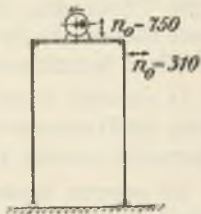


Abb. 43.

Selbst der einfachste Fall, die Schwingungen einer auf  
einem im Boden befindlichen Funda-  
ment errichteten Maschine (Abb. 44),  
ist noch nicht vollständig gelöst. Für  
die Eigenfrequenz der mit dem  
Fundament verbundenen Maschine  
gibt Hort folgende Beziehung an:

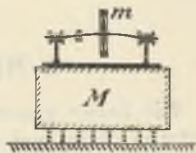


Abb. 44.

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \left( 1 + \frac{m}{2M} \right).$$

Hierin ist  $m$  die Masse der rotierenden Scheibe,  $M$  die Fun-  
damentmasse,  $c$  die Wellenkonstante und  $\sqrt{\frac{c}{m}}$  die Eigen-

frequenz der Maschine. Ausführlichere Arbeiten sind veröffentlicht von Sommerfeld<sup>1)</sup>, Stodola<sup>2)</sup>, Mintrop<sup>3)</sup>, Sauer<sup>4)</sup>.

## 2. Experimentelle Untersuchungen.

Zur Untersuchung von Vibrationerscheinungen auf Dampfschiffen hat Schlick<sup>5)</sup> einen dem Seismographen nachgebildeten Pallographen gebaut.

Für Schwingungen höherer Frequenz leistet der Geigersche Vibrograph, den wir bereits kennengelernt haben, gute Dienste. Es ist nur notwendig, die Riemenscheibe am Gehäuse festzuklemmen.

In manchen Fällen genügt zur Frequenzbestimmung bereits der Frahmische Vibrationstachometer, der als bekannt betrachtet werden kann.

An neueren Apparaten ist zu erwähnen der Vibrometer der Firma C. Schenk, Darmstadt, und der mechanische Schwingungsanzeiger Patent Thyssen (Regelein u. Glau-bitz), der durch Lehmann & Michels in Hamburg hergestellt wird.

## 3. Mittel zur Beseitigung.

Wir haben gesehen, daß das Gebiet der Fundamentalschwingungen noch ausführlicher Erforschung bedarf. Aus diesem Grunde ist es auch nicht möglich, allgemein Mittel zu ihrer Beseitigung oder Abschwächung anzugeben.

---

<sup>1)</sup> V. d. I. 1912.

<sup>2)</sup> Stodola, Dampfturbinen.

<sup>3)</sup> Dissertation Göttingen.

<sup>4)</sup> Dissertation Darmstadt, vgl. Literaturverzeichnis in Hort, Technische Schwingungslehre.

<sup>5)</sup> Hort S. 80, hergestellt von Maihak, Hamburg.

Durch geschickte Änderung der Fundamentmasse oder der allgemeinen Massenverteilung durch Versteifung des Fachwerkes, also Veränderung der Federungskonstanten des Baues, kann manches im gewünschten Sinne erreicht werden. In einigen Fällen kann eine elastische Verbindung zwischen Maschine und Fundament nützlich sein.

---



## Sachverzeichnis.

	Seite		Seite		Seite
Auswuchten . . . . .	117	Krause, Formel von . . .	104	Schwingungsmesser	
Biegungsschwin-		Krupp, Auswucht-		(Thyssen) . . . . .	122
gungen . . . . .	97	maschine von . . . . .	120	statisches Auswuchten	117
Dreves, Verfahren von	42	Kull, Formel von . . .	105	Stodola, Verfahren	
Dunkerley, Formel von	105	Lawaczek, Auswucht-		von . . . . .	107
dynamisches Aus-		maschine nach . . . . .	119	Tolle, Verfahren von	23
wuchten . . . . .	118	Massenträgheitsmo-		Torsiograph nach	
elastische Konstanten	47	mente . . . . .	49	Frahm . . . . .	113
Fundamentalschwin-		Masse, verteilte . . . .	36	Torsiograph nach	
gungen . . . . .	120	Näherungsverfahren		Geiger . . . . .	109
Geiger, Torsiograph		Biegungsschwin-		Torsionsschwingungen	7
nach . . . . .	109	gungen . . . . .	103	Übersetzungen in der	
Geiger, Verfahren von	19	Näherungsverfahren		Welle . . . . .	50
„ , Vibrograph		Torsionsschwin-		Vibrograph nach	
nach . . . . .	113	gungen . . . . .	17	Geiger . . . . .	113
Gümbel, Verfahren		Nullstelle (Tolle) . . .	33	Vibrometer (Schenk)	122
von . . . . .	19	Rechenschema nach		Wellenverzweigung	
Heymann, Auswucht-		Tolle . . . . .	27	(Tolle) . . . . .	40
maschine nach . . . . .	119	Reständerungsfor-		Winkelamplituden	
Holzer, Verfahren von	13	meln (Tolle) . . . . .	29	(Tolle) . . . . .	33





**Walter de Gruyter & Co.**  
Postscheckkonto:



**Berlin W 10 und Leipzig**  
Berlin NW 7 Nr. 59533

## **Statik**

Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Hauber**. 2 Bände. Mit 143 Figuren.  
(Sammlung Göschen Band 178 u. 179.) Jeder Band geb. M. 1.50

## **Graphische Statik**

**mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien.**  
Von Dipl.-Ing. **Otto Henkel**. 2 Bände. Mit 207 Figuren.  
(Sammlung Göschen Band 603 u. 695.) Jeder Band geb. M. 1.50

## **Die Statische Berechnung des Bautechnikers**

Von Dipl.-Ing. **Walter Selckmann**. 2 Bände. Mit 296 Abb.  
(Sammlung Göschen Band 784 u. 785.) Jeder Band geb. M. 1.50

## **Hydraulik**

Von Prof. Dipl.-Ing. **W. Hauber**. Mit 45 Figuren.  
(Sammlung Göschen Band 397.) Gebunden M. 1.50

## **Kinematik**

Von Dr.-Ing. **Hans Polster**. Mit 76 Abbildungen.  
(Sammlung Göschen Band 584.) Gebunden M. 1.50

## **Dynamik**

Von Dr. **Wilhelm Müller**. 2 Bände. Mit 121 Figuren.  
(Sammlung Göschen Band 902 u. 903.) Jeder Band geb. M. 1.50

## **Elastizitätslehre für Ingenieure**

Von Prof Dr.-Ing. **Max Enßlin**. 2 Bände. Mit 104 Figuren.  
(Sammlung Göschen Band 519 u. 957.) Jeder Band geb. M. 1.50

Walter de Gruyter & Co.

Postscheckkonto:



Berlin W 10 und Leipzig

Berlin NW 7 Nr. 59533

## Einführung in die theoretische Physik

Von **Clemens Schaefer**, o. Professor a. d. Universität Marburg.

I. BAND: Mechanik materieller Punkte. Mechanik starrer Körper und Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydrodynamik). Mit 249 Figuren im Text. Zweite, unveränderte Auflage. Groß-Oktav. XII, 926 Seiten 1922. M. 23.—, geb. 25.—

II. BAND, I. Teil: Theorie der Wärme. Molekularkinetische Theorie der Materie. Mit 71 Figuren im Text. Groß-Oktav. X, 562 Seiten. 1921. M. 15.—, geb. 16.20

II. BAND, II. Teil.

In Vorbereitung

## Einführung in die theoretische Physik

mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme.

Von **Arthur Haas**, a. o. Professor an der Universität Wien. Dritte u. vierte, völlig umgearbeitete u. vermehrte Auflage

I. BAND: Mit 58 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 307 Seiten. 1923. M. 7.50, geb. 9.—

II. BAND: Mit 72 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 379 Seiten. 1924. M. 8.50, geb. 10.—

## Lehrbuch der Mathematik

für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. **Georg Scheffers**, Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg. Sechste, verbesserte Auflage. Mit 438 Figuren. Groß-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1925.

M. 30.—, geb. 33.—

Walter de Gruyter & Co.  
Postscheckkonto:



Berlin W 10 und Leipzig  
Berlin NW 7 Nr. 59533

## Siemens-Handbücher

Herausgegeben von der Siemens & Halske A.-G. und  
den Siemens-Schuckertwerken G. m. b. H.

Bisher erschienen:

I. BAND: Allgemeine Grundlagen der Elektrotechnik. 1925.  
Oktav. 167 Seiten. Mit 153 Abbildungen. Geb. M. 5.—

V. BAND: Das Kraftwerk Fortuna II. Monographie eines  
Dampfkraftwerkes in systematischer Darstellung. 1925.  
Oktav. XVI, 175 Seiten. Mit 141 Abbildungen im Text und  
auf 7 Tafeln. Geb. M. 6.50

VIII. BAND: Elektrisches Schaltzeug. 1926. Oktav. XII,  
192 Seiten. Mit 314 Abbildungen. Geb. M. 5.40

XIII. BAND: Elektrizität im Bergbau. 1926. Oktav. XII,  
390 Seiten. Mit 335 Abbildungen und 3 Tafeln. Geb. M. 11.50

Weitere Bände in Vorbereitung.

## Elektrische Installation für Licht und Kraft

(Siemens Handbuch)

Bearbeitet von Dipl.-Ing. **P. Stern**, Oberingenieur der  
Siemens-Schuckertwerke. 1922. Oktav. XII, 224 Seiten.  
Mit 365 Abbildungen und 50 Zahlentafeln. Geb. M. 4.—

*Ausführlicher Prospekt durch jede Buchhandlung oder  
direkt vom Verlage kostenlos.*

Walter de Gruyter & Co.  
Postscheckkonto:



Berlin W 10 und Leipzig  
Berlin NW 7 Nr. 59533

## Elektrische Stromerzeugungsmaschinen und Motoren

Kurzer Abriss ihres Aufbaues und ihrer Wirkungsweise. Leichtfaßlich dargestellt von **Richard Vater**, Geh. Bergrat, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Herausgegeben von Dr. **Fritz Schmidt**, Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 116 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VIII, 128 Seiten. 1920. M. 3.—, steif karton. 3.60

## Lehrbuch der Elektrotechnik

Von Professor **E. Stöckhardt**, Diplomingenieur und Studienrat. Dritte, umgearbeitete Auflage. Mit mehreren hundert Abbildungen. Oktav. VIII, 327 Seiten. 1925. Geh. M. 13.—

## Einführung in die Elektrotechnik

Hochschulvorlesungen von Dr. **C. Heinke**, o. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule München, Geh. Reg.-Rat. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 560 Abbildungen. Oktav. 490 Seiten. 1924. In Leinen geb. M. 18.—

## Die Kommutatormaschinen

für einphasigen und mehrphasigen Wechselstrom. Von Dr.-Ing. e. h. **M. Schenkel**, Oberingenieur der Siemens-Schuckert-Werke. Mit 124 Abbildungen. Oktav. VII, 259 Seiten. 1924. M. 10.50, in Ganzleinen geb. 12.—





no. 62

I/II 30,-

£ 12,80 50,68

BG Politechniki Śląskiej

nr inw.: 102 - 130361



**Dyr.1 130361**

