

Jarosław BRODNY  
Politechnika Śląska, Gliwice  
Instytut Mechanizacji Górnictwa

## BADANIA MODELOWE ZŁĄCZA CIERNEGO OBCIĄŻONEGO UDAREM MASY

**Streszczenie.** Prowadzenie badań stanowiskowych złączy ciernych obciążonych dynamicznie jest kosztowne i wymaga posiadania odpowiednio wyposażonego, specjalistycznego stanowiska badawczego. Dlatego do analizy pracy złącza ciernego obciążonego udarem swobodnie spadającej masy wykorzystano symulacje numeryczne oparte na metodzie elementów skończonych. Model fizyczny złącza ciernego opracowano, opierając się na układzie stosowanym w czasie badań stanowiskowych. Do rozwiązania modelu matematycznego wykorzystano metodę całkowania jawnego (*explicite*). W wyniku przeprowadzonych analiz wyznaczono przebiegi czasowe siły przenoszonej przez złącze cierne oraz przemieszczenia zsuwającego się kształtownika. Na podstawie wyznaczonych przebiegów określono zależności pomiędzy maksymalną wartością siły przenoszonej przez złącze cierne a wysokością, z jakiej spada masa udarowa, oraz wartością współczynnika tarcia statycznego między współpracującymi kształtownikami. Wyznaczono także rozkłady naprężeń zredukowanych w elementach złącza ciernego oraz określono stan ich odkształcenia.

## MODEL STUDIES OF FRICTIONAL JOINT LOADED OF IMPACT MASS

**Summary.** Conduction of stand tests of the frictional joints loaded dynamically is expensive and requires possession of properly equipped specialized test stand. Therefore for analysis of operation of the frictional joint loaded with an impact of freely falling mass, numerical simulations based on the finite element method were used. Physical model of the frictional joint was developed on the basis of system applied during the stand tests. To solve mathematical model an explicit integration method was used. In result of analyses carried out, temporal courses of force transmitted through the frictional joint, and displacements of section sliding down were determined. On the basis of determined temporal courses, dependences between maximum value of force transmitted through the frictional joint, and the height from which the impact mass falls down, and the value of static friction coefficient between cooperating sections were determined. Distributions of reduced stresses in elements of frictional joint were also determined and the state of deformation was described.

## 1. Wstęp

Współczesny stan nauki i techniki, w tym także mechaniki, trudno jest dzisiaj wyobrazić sobie bez tego, co wniosło pojawienie się komputera, oraz bez metod i technik numerycznych. Można przyjąć, że podstawowe trzy filary współczesnej nauki to: teoria, eksperyment oraz modelowanie i symulacja komputerowa [1].

Z symulacją komputerową nierozzerwalnie jest związany proces modelowania. Przez pojęcie modelowania rozumiemy korzystanie z zależności i wnioskowań prowadzonych przy użyciu aparatu logicznego i formalizmu matematycznego, czego wynikiem są między innymi przewidywania co do pewnych cech i zachowań rozpatrywanego układu. Przez to pojęcie rozumiemy więc nie tylko otrzymanie konkretnego modelu, lecz cały cykl badawczy, od utworzenia modelu poczynając, poprzez jego weryfikację, interpretację, a kończąc na kolejnym przybliżeniu [1, 6].

Efektom procesu modelowania jest model, czyli bardziej lub mniej uproszczona reprezentacja realnego obiektu (procesu), który w swej złożoności sam w sobie, bez procedur jego idealizacji może być nie do opisania.

Można więc przyjąć, że modelowanie to zestaw czynności, którymi posługujemy się w naukowym opisie rzeczywistości, polegający na badaniu modeli, stanowiących jej przybliżenie. Zakładając, że model jest uproszczeniem istniejących systemów, procesów i zjawisk rzeczywistych, zasadne jest stwierdzenie, iż w wielu przypadkach badania modelowe są ekonomiczną, intelektualną i pragmatyczną koniecznością.

Taka konieczność zaistniała w zakresie analizy pracy złącza ciernego obciążonego dynamicznie, stosowanego w górniczej obudowie podatnej wyrobisk korytarzowych. Ze względu na coraz częstsze występowanie zjawisk dynamicznych w czasie eksploatacji górniczej oraz zakładając, że złącze cierne jest częścią obudowy podatnej, która decyduje o charakterze jej pracy, uzasadnione jest prowadzenie badań mających na celu określenie wpływu obciążenia dynamicznego na parametry jego pracy.

Dotychczas podstawowe parametry pracy złącza ciernego obciążonego dynamicznie wyznaczano na podstawie rzadko przeprowadzanych, kosztownych badań stanowiskowych. Badania te, do przeprowadzenia których konieczne jest specjalistyczne stanowisko badawcze, mimo wielu zalet mają także wiele ograniczeń. Ograniczenia te dotyczą głównie zakresu zmian parametrów opisujących złącze cierne oraz sposobu jego obciążenia. Uniemożliwiają one także wyznaczenie rozkładu naprężeń i odkształceń poszczególnych elementów złącza ciernego w trakcie pracy.

Możliwości takiej analizy stwarzają badania modelowe prowadzone na modelu strukturalnym złącza ciernego, które mogą w tym przypadku stanowić w pewnym zakresie alternatywę oraz uzupełnienie badań stanowiskowych i badań w warunkach rzeczywistych.

Taki sposób modelowania wykorzystał autor przy opracowaniu modelu złącza ciernego oraz prowadzeniu badań symulacyjnych na tym modelu, obciążonym udarem swobodnie spadającej masy. Proces modelowania przeprowadzono, opierając się na metodzie elementów skończonych. Podstawowym źródłem informacji niezbędnej do opracowania modeli fizycznego i matematycznego były badania stanowiskowe złączy ciernych obciążonych udarem swobodnie spadającej masy [2].

Model matematyczny ośrodka ciągłego, jakim jest model złącza ciernego po dyskretyzacji przestrzennej metodą elementów skończonych, stanowi zagadnienie początkowe, opisane przez układ równań różniczkowych zwyczajnych z odpowiednimi warunkami początkowymi. Do rozwiązania tych równań wykorzystano metodę całkowania jawnego.

W artykule omówiono sposób całkowania jawnego równań różniczkowych opisujących model matematyczny złącza ciernego oraz przedstawiono wyniki badań symulacyjnych złączy ciernych obciążonych udarem masy.

## 2. Metoda całkowania bezpośredniego (jawnego)

Stosując MES do analizy pracy złącza ciernego obciążonego udarem masy oprócz dyskretyzacji modelu ciągłego, tj. podziału kontinuum na skończoną liczbę elementów, które tworzą geometryczny model dyskretny złącza, określa się także równania ruchu poszczególnych elementów.

Równania ruchu wyznacza się na podstawie równania Lagrange'a drugiego rodzaju, wywodzącego się z II zasady dynamiki Newtona. Ogólne równanie ruchu, opisujące układ mechaniczny w postaci macierzowej, ma postać:

$$M \cdot \ddot{y} + C \cdot \dot{y} + K \cdot y = P(t), \quad (1)$$

gdzie:

$M$  – macierz bezwładności,

$C$  – macierz tłumienia,

$K$  – macierz sztywności,

$P(t)$  – wektor sił uogólnionych,

$\ddot{y}$  – wektor przyspieszeń uogólnionych,

$\dot{y}$  – wektor prędkości uogólnionych,

$y$  – wektor przemieszczeń uogólnionych.

Równanie (1) jest macierzową postacią równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych o stałych współczynnikach. Równanie to może zostać rozwiązane metodą całkowania jawnego (*explicite*) i niejawnego (*implicite*).

Zaletą metody całkowania jawnego jest stosunkowo szybki czas wyznaczania kolejnych szukanych wartości w kolejnych chwilach czasowych. Zastosowanie diagonalizacji macierzy mas powoduje, że nie występuje konieczność odwracania macierzy w celu rozwiązania układu równań algebraicznych. Czas obliczeń jest zależny tylko od liczby stopni swobody modelu. Wadą tej metody jest konieczność stosowania krótkiego kroku czasowego przy całkowaniu, gdyż zbyt duży krok czasowy powoduje wystąpienie niestabilności.

Zaletą metod niejawnych jest stabilność algorytmu rozwiązania. Metoda ta opiera się na procedurze iteracyjnej co, szczególnie w przypadku zagadnień kontaktowych oraz silnie nieliniowych, może powodować problemy z uzyskaniem zbieżności. W takich przypadkach istotnie rosną wymagania w stosunku do sprzętu obliczeniowego.

Ze względu na to, że zjawisko udaru swobodnie spadającą masą na złącze cierne jest krótkotrwałe oraz że w modelu złącza ciernego występuje wiele zagadnień kontaktowych, do rozwiązania równania (1) zastosowano metodę całkowania jawnego w postaci najbardziej efektywnej jej odmiany, jaką jest metoda różnic centralnych (szczególny przypadek metody różnic skończonych) [3, 5].

Metoda ta polega na tym, że równanie ruchu jest całkowane krok po kroku, co oznacza, że ma być ono spełnione tylko w wybranych chwilach, a nie w całym przedziale całkowania.

W metodzie tej przyjmuje się, że dla czasu  $t = 0$  znane są przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia modelu.

Na przykład dla  $t = 0 \Rightarrow y, \dot{y}, \ddot{y} = 0$ .

Następnie, przyjmując czas analizy ( $T$ ) oraz krok czasowy całkowania ( $\Delta t$ ), dzieli się czas ( $T$ ) na  $n$  przedziałów czasowych ( $0; \Delta t, 2\Delta t, \dots, (n-1)\Delta t, T$ ), dla których oblicza się szukane wielkości.

Jednocześnie zakłada się zmienność wektora przyśpieszenia i prędkości w postaci operatorów różnicowych:

$$\ddot{y} = \frac{1}{\Delta t^2} (y_{t-\Delta t} - 2y_t + y_{t+\Delta t}), \quad (2)$$

$$\dot{y} = \frac{I}{2\Delta t}(-y_{t-\Delta t} + y_{t+\Delta t}). \quad (3)$$

W celu wyznaczenia szukanych przemieszczeń dla chwili  $(t+\Delta t)$  korzystamy z równania dla chwili  $t$  w postaci:

$$M \cdot \ddot{y}_t + C \cdot \dot{y}_t + K \cdot y_t = P(t)_t \quad (4)$$

Podstawiając równania (2) i (3) do zależności (4), wyznaczamy poszukiwany stan przemieszczenia w chwili  $(t+\Delta t)$ :

$$M \cdot \frac{I}{\Delta t^2}(y_{t+\Delta t} - 2y_t + y_{t-\Delta t}) + C \cdot \frac{I}{2\Delta t}(y_{t+\Delta t} - y_{t-\Delta t}) + K \cdot y_t = P(t)_t. \quad (5)$$

Analizując otrzymaną zależność, można stwierdzić, że obliczenie przemieszczenia w chwili  $(t+\Delta t)$  nie wymaga odwracania macierzy sztywności  $K$ , co stanowi dużą zaletę tej metody. Konieczne jest natomiast obliczenie wektora przemieszczenia w chwilach  $(t - \Delta t)$  i  $t$ .

Jako że w celu wyznaczenia wektora przemieszczenia w kolejnej chwili konieczna jest znajomość jego wartości w dwóch poprzedzających go chwilach czasu oraz zakładając, że znamy wektory przemieszczenia prędkości i przyśpieszenia w chwili zerowej (dla  $t_0 = 0$ ), pozostaje problem wyznaczenia ich dla chwili  $(t_0 + \Delta t)$ . W tym celu, korzystając z równań (2) i (3), wyznaczamy przemieszczenie w chwili  $(t_0 - \Delta t)$  w postaci:

$$y_{t-\Delta t} = \frac{\ddot{y}\Delta t^2}{2} - \dot{y}_0\Delta t + y_0. \quad (6)$$

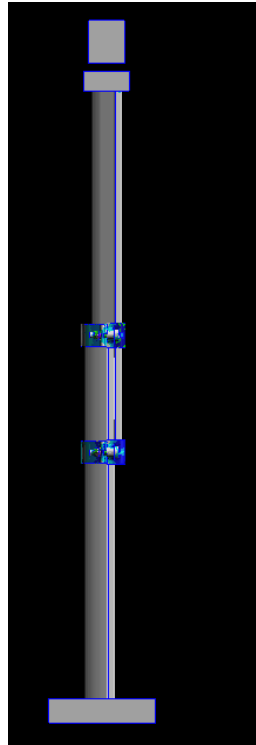
Omówiona metoda rozwiązania równań różniczkowych ruchu została wykorzystana przy analizie numerycznej pracy złącza ciernego obciążonego udarem masy.

### 3. Analiza numeryczna i jej rezultaty

Podstawą opracowania modelu złącza ciernego wykorzystanego w prezentowanej pracy był układ stosowany w czasie badań stanowiskowych złączy ciernych obciążonych udarem swobodnie spadającej masy [2].

Przestrzenny model dyskretny złącza ciernego, na którym spoczywa trawersa o masie 1600 kg, obciążonego swobodnie spadającą masą udarową o wartości 4000 kg, przedstawiono na rys. 1. Model ten jest wykonany z 10 niezależnych części, dla których zdefiniowano 36

możliwych płaszczyzn kontaktu. Dla wszystkich materiałów, z jakich są wykonane części złącza, przyjęto nieliniowe charakterystyki naprężeniowo-odkształceniowe.



Rys. 1. Model złącza ciernego obciążonego udarem masy  
Fig. 1. Model of frictional joint loading of impact mass

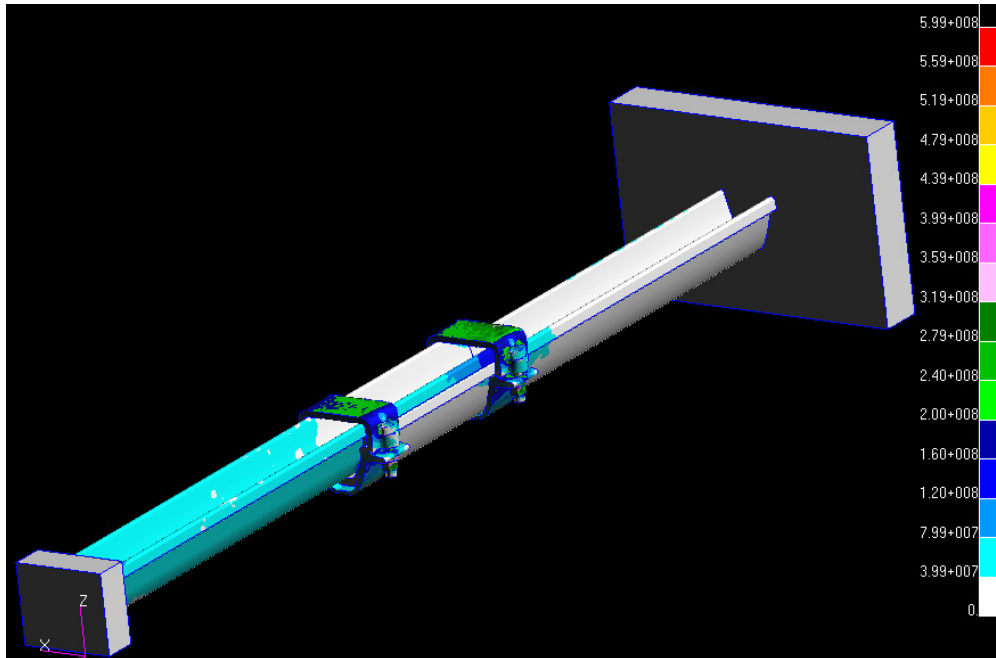
Opracowany model stwarza duże możliwości symulacyjne w zakresie zmiany obciążenia złącza ciernego (przez zmianę wysokości, z jakiej spada masa uderowa) oraz zmiany jego parametrów technicznych. Oprócz charakterystyk naprężeniowo-odkształceniowych materiałów, z jakich wykonano poszczególne części złącza ciernego, możliwa jest zmiana wartości wstępnych sił osiowych w śrubach strzemion oraz wartości współczynników tarc statycznego i kinetycznego między stykającymi się powierzchniami.

Na podstawie przeprowadzonych symulacji można dokonać analizy stanów naprężenia i odkształcenia poszczególnych części złącza ciernego w dowolnej chwili czasowej. Można także wyznaczyć przebiegi czasowe siły przenoszonej przez złącze cierne, przemieszczenia dowolnej części złącza wraz z jego prędkością i przyspieszeniem oraz wiele innych wielkości.

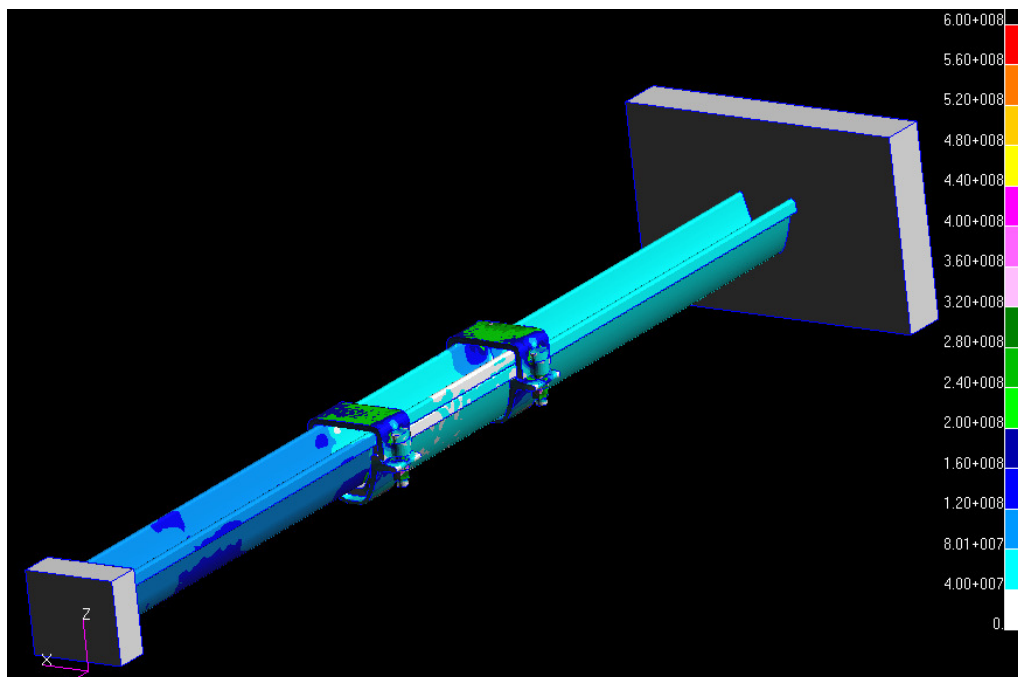
Z punktu widzenia analizy pracy złącza ciernego istotne znaczenie ma prześledzenie zmian rozkładu wartości naprężenia w poszczególnych elementach złącza ciernego w czasie obciążania go masą uderową.

Na rys. 2 przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych w złączu ciernym w początkowej fazie obciążenia, a na rys. 3 – bezpośrednio przed zsuwem. Analizowane

złącze jest wykonane z kształtownika V29 z dwoma strzemiomami SDO29. Wstępne wartości sił osiowych w śrubach strzemiom w tym złączu wynosiły po 100 kN. Złącze było obciążone masą uderową, spadającą z wysokości 1 m.



Rys. 2. Rozkład naprężeń zredukowanych w złączu ciernym we wstępnej fazie obciążenia  
Fig. 2. Distribution of reduced stresses in the frictional joint in the initial phase of loading

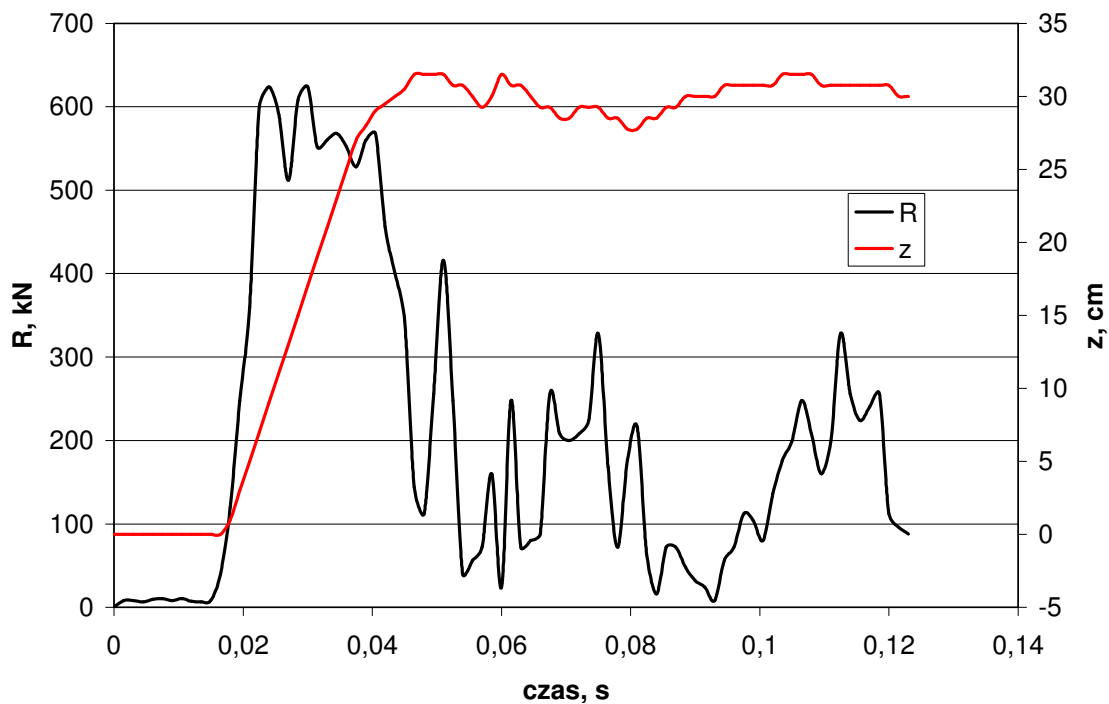


Rys. 3. Rozkład naprężeń zredukowanych w złączu ciernym bezpośrednio przed zsuwem  
Fig. 3. Distribution of reduced stresses in the frictional joint directly before the yield

Analizując uzyskane wyniki, można stwierdzić, że w początkowej fazie pracy złącza ciernego następuje obciążenie górnego kształtownika, a następnie, przez strzemiona, obciążenie przenosi się na dolny kształtownik. Przedstawiony rozkład naprężeń zredukowanych w złączu bezpośrednio przez zsuwem (rys. 3) wskazuje, że górny kształtownik jest bardziej obciążony niż dolny. Można więc przyjąć, że w przypadku dynamicznego obciążenia złącza ciernego stan naprężenia w kształtownikach jest różny.

Na rys. 4 przedstawiono przebiegi czasowe siły ( $R$ ) przenoszonej przez złącze cierne oraz przemieszczenia ( $z$ ) zsuwającego się kształtownika w czasie badania.

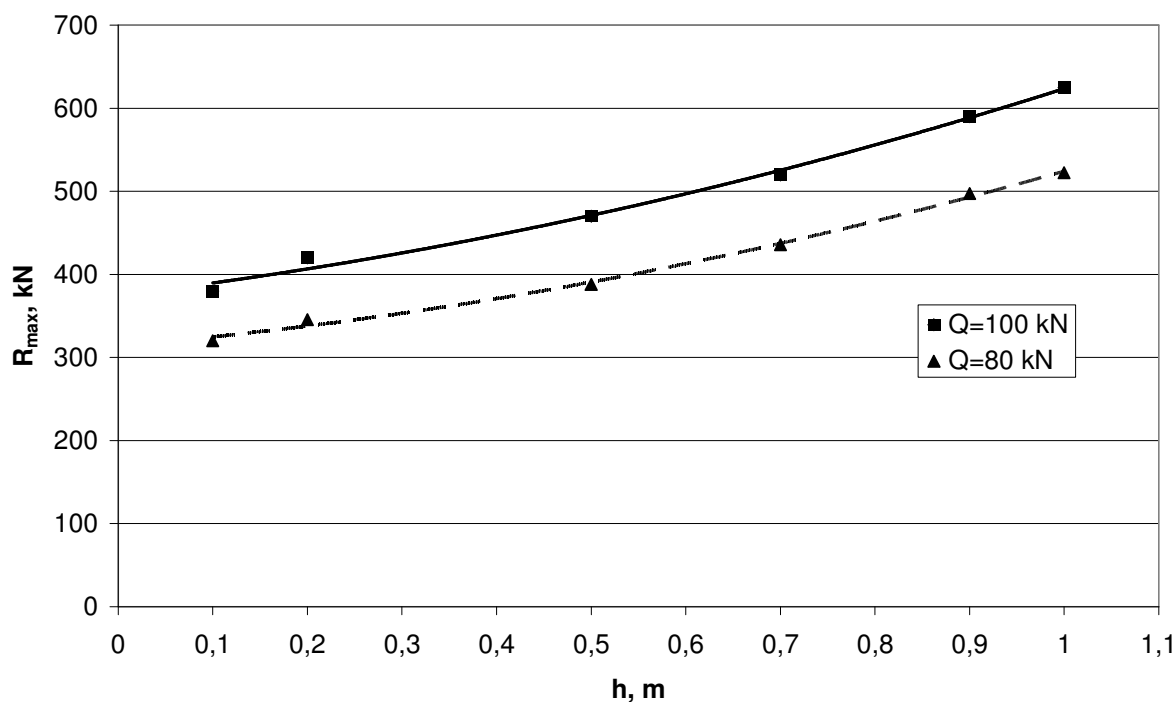
Na podstawie przeprowadzonych badań wyznaczono zależności (rys. 5) pomiędzy maksymalną wartością siły ( $R_{max}$ ) przenoszonej przez złącze cierne, a wysokością ( $h$ ), z której dochodziło do spadku masy uderowej (o stałej wartości wynoszącej 4000 kg) dla różnych wartości wstępnych sił osiowych ( $Q$ ) w śrubach strzemion.



Rys. 4. Przebiegi czasowe siły przenoszonej przez złącze cierne i przemieszczenia zsuwającego się kształtownika

Fig. 4. Time courses of the force transmitted through the frictional joint and displacement of the yielding shaped section



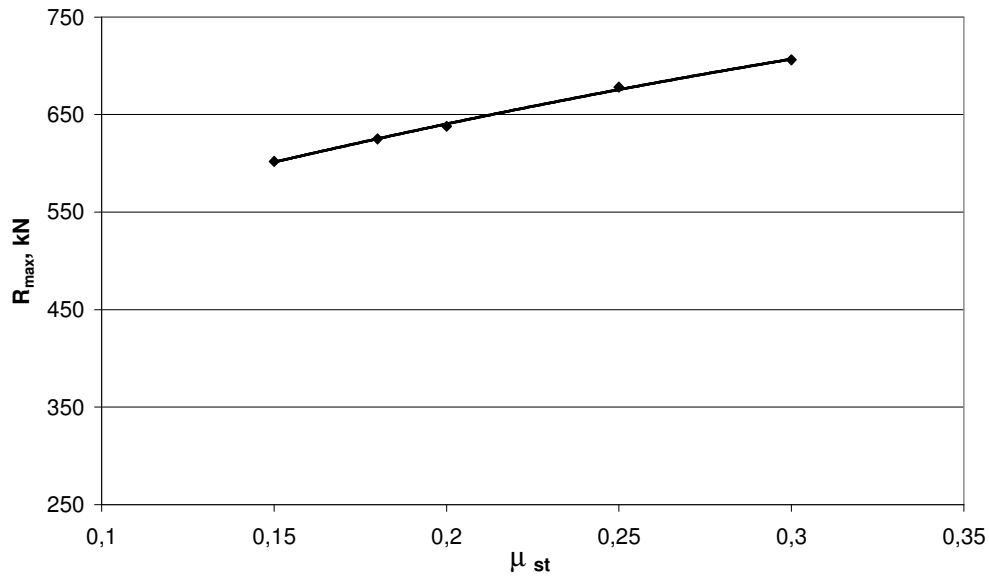


Rys. 5. Zależność między maksymalną wartością siły przenoszonej przez złącze cierne a wysokością, z jakiej dochodziło do spadku masy uderowej (4000 kg)

Fig. 5. Relationships between the maximum values of the force transmitted through the frictional joint and the high from the impact mass falling (400 kg)

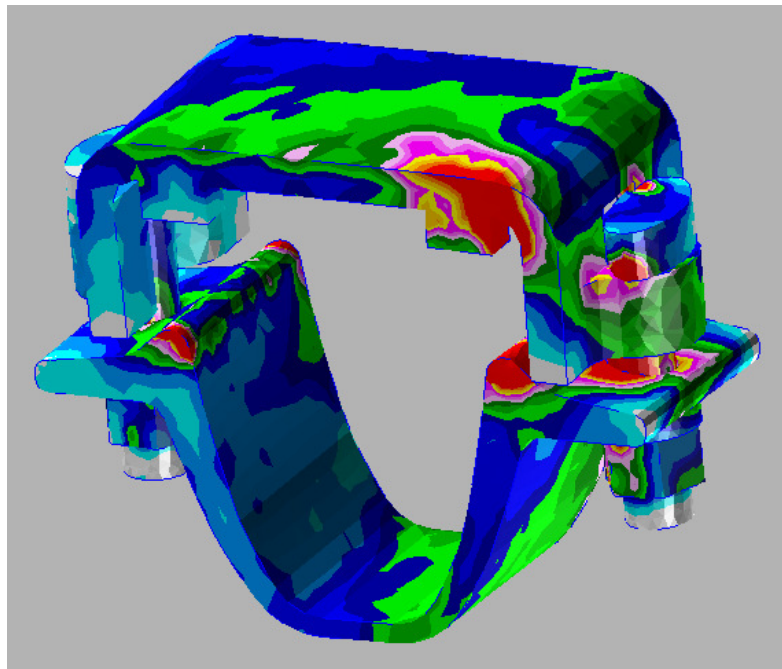
Uzyskane wyniki jednoznacznie wskazują, że wraz ze wzrostem wysokości, z jakiej dochodzi do spadku masy uderowej, wartość siły przenoszonej przez złącze cierne rośnie. Wyniki te w dużym stopniu odpowiadają wynikom uzyskanym z badań stanowiskowych [4].

Opracowany model umożliwił także wyznaczenie zależności między maksymalną wartością siły przenoszonej przez złącze cierne a wartością współczynnika tarcia statycznego między współpracującymi kształtownikami (rys. 6). Zależność tę wyznaczono dla złącza ciernego, dla którego wartości wstępnych sił osiowych w śrubach strzemion wynosiły po 100 kN, a masa uderowa spadała z wysokości 1 m.



Rys. 6. Zależność między maksymalną wartością siły przenoszonej przez złącze cierne a wartością współczynnika tarcia statycznego między współpracującymi kształtownikami  
 Fig. 6. Relationships between the maximum values of the force transmitted through the frictional joint and the values of the static friction coefficient between the cooperating sections

Uzyskana zależność wskazuje, że wzrost wartości współczynnika tarcia statycznego między współpracującymi kształtownikami powoduje wzrost maksymalnej wartości siły przenoszonej przez złącze cierne. Dla powierzchni stalowych wartość tego współczynnika jest zależna od wielu czynników i waha się w granicach od 0,15 do 0,18 [4].



Rys. 7. Rozkład naprężeń zredukowanych oraz stan odkształcenia strzemienia dolnego złącza ciernego  
 Fig. 7. Distribution of reduced stresses and a strain state in bottom stirrup of frictional joint

Bardzo istotną zaletą symulacji numerycznych, prowadzonych z wykorzystaniem metody elementów skończonych, jest możliwość analizy stanów naprężenia i odkształcenia poszczególnych elementów modelu.

Na rys. 7 przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych oraz stan odkształcenia strzemienia dolnego w czasie jego pracy w złączu ciernym.

Na podstawie uzyskanego rozkładu można stwierdzić, że pomimo bardzo dokładnego odwzorowania kształtu złącza nastąpiło niesymetryczne obciążenie strzemienia. W prawej stronie jarzma dolnego oraz w okolicy zabieraka prawego widać wyraźne strefy uplastycznienia. Również prawa śruba jest znacznie bardziej wyjężona niż lewa. Analiza uzyskanego stanu naprężenia umożliwia zlokalizowanie najbardziej wyjężonych miejsc w złączu ciernym w czasie jego pracy.

#### 4. Podsumowanie

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że wykorzystanie do analizy pracy złącza ciernego obciążonego udarem masy metody elementów skończonych umożliwiło, oprócz wyznaczenia przebiegu zmiany wartości siły przenoszonej przez złącze (jego charakterystyki dynamicznej pracy), także określenie stanów naprężenia i odkształcenia poszczególnych elementów złącza. Ma to bardzo istotne, praktyczne znaczenie przy wyznaczaniu części złącza ciernego oraz miejsc najbardziej wyjężonych w czasie jego pracy, które mogą stanowić przyczynę jego uszkodzeń.

Wyznaczone na podstawie symulacji numerycznej przebiegi czasowe zmiany wartości siły przenoszonej przez złącze jednoznacznie wskazują, że wraz ze wzrostem wysokości, z jakiej dochodzi do spadku masy udarowej (wzrostu energii udaru), następuje wzrost maksymalnej wartości tej siły.

Wzrost wstępnych wartości sił osiowych w śrubach strzemion oraz wartości współczynnika tarcia statycznego między współpracującymi kształtownikami także powoduje wzrost wartości siły przenoszonej przez złącze cierne, czyli wzrost jego nośności.

Analiza stanu naprężenia złącza ciernego w czasie badania pozwala stwierdzić, że jego najbardziej wyjężonymi elementami są strzemiona. Jednocześnie w czasie udaru zaobserwowano różne stany obciążenia współpracujących kształtowników oraz strzemion.

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że opracowany model złącza ciernego, uwzględniający podatność zsuwną, w sposób prawidłowy odwzorowuje jego pracę

pod obciążeniem udarowym. Ponadto model ten stwarza duże możliwości badania wpływu poszczególnych wielkości fizycznych opisujących złącze cierne na parametry jego pracy. Wielkościami, których wpływ na parametry pracy złącza ciernego można analizować z wykorzystaniem opracowanego modelu, są: wstępne wartości sił osiowych w śrubach strzemion, współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego między współpracującymi kształtownikami oraz parametry wytrzymałościowe materiałów, z jakich są wykonane poszczególne części złącza.

Zasadne jest zatem stwierdzenie, że badania symulacyjne mogą stanowić uzupełnienie oraz alternatywę dla kosztownych badań stanowiskowych oraz badań prowadzonych w warunkach rzeczywistych.

Przedstawiona metoda badania złączy ciernych oraz uzyskane wyniki powinny, zdaniem autora, poszerzyć wiedzę na temat pracy obudowy podatnej i zostać wykorzystane przy projektowaniu nowych rozwiązań obudów górniczych i tunelowych, stosowanych w warunkach zagrożenia obciążeniem dynamicznym.

## BIBLIOGRAFIA

1. Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych w mechanice. WNT, Warszawa 1995.
2. Brodny J.: Tests of friction joints in mining yielding supports under dynamic load. Archives of Mining Sciences, Vol. 56, No. 2, 2011.
3. Crisfield M.A.: Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. John Wiley & Sons, 1998.
4. Skoć A., Spałek J.: Podstawy konstrukcji maszyn. Tom 2. WNT, Warszawa 2008.
5. Szmelter J.: Metody komputerowe w mechanice. PWN, Warszawa 1980.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.C.: The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, London 2000.

## Abstract

In the article there are presented results of model studies of straight frictional joints loaded with an impact of the freely falling mass. To develop the physical model of the frictional joint, a system applied in the stand tests was used. Based on the finite element method (FEM) a spatial discrete model of the joint was developed. To solve the mathematical model an explicit integration method was used.

As a result of analysis carried out, courses of change in value of force transmitted through the frictional joint loaded with an impact of the mass and displacement of the yielding shaped section were determined. On the basis of these courses, a dependence between the maximum value of the force transmitted through the frictional joint and the high from the impact mass falling was determined. Distributions of reduced stresses in elements of frictional joint were also determined and the state of deformation was described.