

Iwona GOŁDA
Politechnika Śląska, Gliwice
Jerzy KORNOwSKI
Główny Instytut Górnictwa

ZASTOSOWANIE ROZKŁADU GUTENBERGA-RICHTERA DO PROGNOZY ZAGROŻENIA SEJSMICZNEGO, WRAZ Z OCENĄ JEGO NIEPEWNOŚCI

Streszczenie. Artykuł ma częściowo przeglądowy charakter i stanowi wprowadzenie do ilościowej prognozy jednoznacznie – jako prawdopodobieństwo wstrząsu o energii $E > E^*$ – zdefiniowanego zagrożenia sejsmicznego, wraz z ilościową oceną niepewności tej prognozy. Pokazano, że obliczenia są nieskomplikowane, a niepewność wynikowej prognozy zależy wprost od jakości i ilości informacji bazowej (na której prognoza ta jest oparta).

APPLICATION OF THE GUTENBERG-RICHTER RELATION TO ROCKBURST HAZARD PREDICTION TOGETHER WITH UNCERTAINTY STUDY

Summary. This paper has partly review character, of introducing to quantitative forecasting rockburst hazard, defined as probability of the tremor of energy $E > E^*$, together with quantitative estimation of prediction uncertainty. We show that calculations are very easy and uncertainty of forecasting directly depends on quality and quantity of basic information.

1. Wprowadzenie i cel pracy

Artykuł dotyczy oceny i prognozy zagrożenia sejsmicznego (Z^S) – czyli zagrożenia wstrząsami – określanych przy wykorzystaniu relacji Gutenberga-Richtera [8, 10], z parametrami wyznaczanymi na podstawie zbioru danych o zaistniałych wstrząsach z zagrożonego obszaru. **Zbiór ten nazywamy bazą (informacyjną) lub archiwum, natomiast N_T to liczebność bazy, a T to czas objęty rejestracjami zawartymi w bazie.** Baza, jej liczebność

i czas trwania mogą się zmieniać, lecz muszą być znane w chwili prognozowania. Należy podkreślić, że **jakość (niepewność) prognoz opartych na dowolnej bazie informacyjnej nie może być lepsza (a niepewność – mniejsza) od jakości (niepewności) informacji bazowej**. Zdanie to nie jest sloganem i musi być traktowane serio. Oprócz niepewności energii zawartych w bazie, na jakość prognoz może wpływać także liczebność bazy oraz – w przypadku zmiennych warunków – aktualność informacji bazowej. **Celem tej pracy jest analiza czynników wpływających na jakość prognoz.**

Należy dodać, że prognoza oparta na rozkładzie Gutenberga-Richtera (dalej: G-R) nie jest jedyną metodą prognozy Z^S , lecz jest bardzo prosta i ma małe wymagania względem informacji wejściowej, ograniczone do danych o wstrząsach tylko z tego obszaru, którego dotyczy prognoza (**zatem bardzo ważna jest rzetelna lokalizacja i rzetelna ocena energii**). Za tę prostotę płaci się jednak dużą niepewnością ocen zagrożenia.

Inną metodą prognozy, która co najmniej w teorii obiecuje lepsze wyniki, jest teoria szeregów czasowych, która wymaga znacznie więcej informacji o wejściu (m.in. zarówno o wstrząsach, jak i o emisji sejsmoakustycznej AE). **Artykuł ten dotyczy jednak wyłącznie prognozy opartej na rozkładzie G-R.**

Należy zwrócić uwagę, że w całej pracy słowo „ocena” dotyczy przeszłości (i być może chwili bieżącej), a słowo „prognoza” – przyszłości, nieznaney w chwili formułowania prognozy. W przypadku **procesów stacjonarnych** lub **stacjonarnych ciągów zdarzeń**, różnica między oceną a prognozą się zaciera. Ponadto, $\log x = \log_{10} x$, kreska nad zmienną (\bar{x}) oznacza jej wartość średnią, a symbol $x \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma_x^2)$ oznacza, że x jest zmienną losową o rozkładzie normalnym (\mathcal{N}) z wartością średnią \bar{x} i wariancją σ_x^2 .

2. Definicje i pojęcia: zagrożenie sejsmiczne oraz jego prognoza, niepewność prognoz i rozkłady

W wielu dziedzinach nauk znane i stosowane jest pojęcie ryzyka, definiowanego jako iloczyn prawdopodobieństwa i strat:

$$\text{ryzyko} = \left\{ \begin{array}{l} \text{prawdopodobieństwo} \\ \text{szkodliwego} \\ \text{zdarzenia} \end{array} \right\} \bullet \left\{ \begin{array}{l} \text{straty} \\ \text{spowodowane} \\ \text{zdarzeniem} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Akceptujemy tę ogólnie przyjętą definicję, lecz chcąc uniknąć dyskusji o cenie życia i zdrowia ludzi, pomijamy drugi czynnik tego iloczynu i – by nie wprowadzać zamieszania w terminologii – stosujemy dalej także ogólnie znane pojęcie **zagrożenia** zamiast **ryzyka**.
Zatem:

Definicja D1

Zagrożenie sejsmiczne Z^S lub $Z_{\Delta t}^*$ lub $Z^S[(t, t + \Delta t), E > E^*]$ **jest to prawdopodobieństwo, że** (w obszarze przestrzennym, z którego pochodzi baza informacyjna) **energia E co najmniej jednego wstrząsu przekroczy, w okresie** $(t, t + \Delta t)$, **zadaną wartość (krytyczną) E^* .**

Jeżeli przedział czasu $(t, t + \Delta t)$ leży w przyszłości względem chwili prognozowania (np. gdy prognozuje się w chwili t), to definicja ta określa też **prognozę zagrożenia sejsmicznego**. W zagadnieniach związanych z tąpnięciami często E^* jest to tzw. elementarna energia tąpnięcia [5, 11], czyli najmniejsza energia wstrząsu związanego z tąpnięciem. Definicja D1 może też dotyczyć zagrożenia wstrząsem o energii $E^\alpha < E < E^\beta$, wówczas zamiast $E > E^*$ piszemy $E^\alpha < E < E^\beta$. Powyższa definicja jest w sejsmologii od dawna znana i stosowana, ze względu na jej ilościowy i konstruktywny charakter, umożliwiający ilościowe obliczenie Z^S .

Ponieważ prawdopodobieństwo spełnia nierówność $0 \leq P \leq 1$, więc obszar (0,1) możliwych zagrożeń zawsze można podzielić na odcinki (np. $0-10^{-5}-10^{-4}-10^{-3}-1$), oznaczyć je literami (np. A, B, C, D) i nazwać „stanami zagrożenia sejsmicznego”, nawiązując w ten sposób do pojęć znanych inżynierom górnikom.

Analizując zagrożenie, w przypadku gdy wartości E^* i Δt nie budzą wątpliwości, piszemy skrótowo $Z_{\Delta t}^*$.

Należy powtórzyć, że prognoza dotyczy obszaru, z którego pochodzą informacje bazowe. Zaśmiecanie bazy wstrząsami „obcymi” odbiera prognozie sens, gdyż nie wiadomo wówczas, jakiego obszaru ona dotyczy. Zakłada się stacjonarność procesu emisji wstrząsów i przyjmuje, że intensywność emisji (czyli liczba zdarzeń w jednostce czasu), obserwowana w okresie (bazowym) T , pozostanie bez zmiany w okresie $(t, t + \Delta t)$, zwanym horyzontem prognozy.

Ponieważ dane tworzące bazę (w tym energie wstrząsów i współrzędne źródeł) zawsze obarczone są przypadkowymi błędami, również wyznaczone na ich podstawie wartości intensywności i zagrożenia zawsze obarczone są przypadkowymi błędami. **Takie wielkości**

nazywamy zmiennymi losowymi i opisujemy za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa.

Rozkład liczebności wstrząsów w zależności od ich energii często przedstawia się w formie histogramu $h(\Delta E_i)$ – rys. 2.1a – w którym przedziały (lub „pasma” czy „szerokości słupków”) ΔE_i mają stałą szerokość na (poziomej) osi energii, a wysokości $h_i = h(\Delta E_i)$ „słupków” są proporcjonalne do liczebności wstrząsów w ΔE_i . Taka postać rozkładu, choć popularna i ogólnie rozumiana, często jest przyczyną trudności. Nie powinna być więc stosowana, gdyż kształt wynikowego histogramu z obserwacji zależy od przyjętej szerokości ΔE_i i od położenia początku histogramu.

Gdy $\Delta E \rightarrow 0$, a zawartość przedziałów jest unormowana, czyli podzielona przez całkowitą liczebność bazy N_T tak, że suma unormowanych wartości $h_{norm}(\Delta E_i)$ równa się 1, histogram przekształca się w rozkład $p(E)$ gęstości prawdopodobieństwa z obserwacji – rys. 2.1b. W badaniach równie często spotykany jest rozkład skumulowany $H(\Delta E_K)$, określający liczbę wstrząsów o energii $E \leq E_K$, który także po unormowaniu i dla $\Delta E \rightarrow 0$ przekształca się w dystrybuantę, czyli w rozkład prawdopodobieństwa $P(E)$ z obserwacji – rys. 2.1c.

Dla potrzeb oceny i prognozy zagrożenia sejsmicznego najlepiej posługiwać się rozkładem przewyższeń $G(E) = 1 - P(E)$. W badaniach zagrożenia sejsmicznego rozkład ten informuje – dla dowolnej wartości E^* – o prawdopodobieństwie wystąpienia wstrząsu o energii większej od E^* , zatem bezpośrednio wiąże się z zagrożeniem (porównaj z D1). Warto więc pamiętać, że:

$$h(\Delta E_i) = H(E_i) - H(E_{i-1}); \quad H(E_K) = \sum_{i=1}^K h(\Delta E_i) \quad (2.2a, b)$$

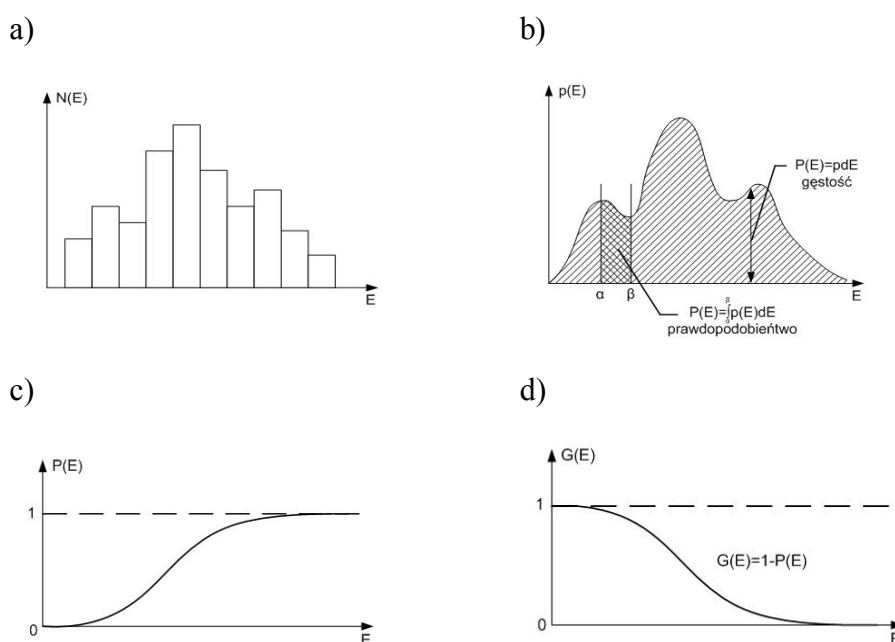
$$p(E) = d[P(E)]/dE \quad ; \quad P(E) = \int_{-\infty}^E p(E)dE \quad (2.3a, b)$$

$$G(E) = 1 - P(E). \quad (2.4)$$

Rozkłady te – wyłącznie dla ilustracji i ułatwienia zrozumienia – pokazano na rys. 2.1.

Ponieważ rozkład przewyższeń $G(E)$ jest zazwyczaj najslabiej rozumiany przez inżynierów, a jest on najważniejszy i bardzo łatwy do zrozumienia, należy powtórzyć, że:

Empiryczny, czyli określony na podstawie zbioru (bazy) obserwacji, rozkład $G(E)$ lub $N(E)$ przewyższeń energii E aproksymuje liczbę wstrząsów – lub po unormowaniu empiryczne prawdopodobieństwo wystąpienia wstrząsu – o energii przewyższającej E , zatem bezpośrednio aproksymuje warunkowe (pod warunkiem, że wstrząs wystąpi) zagrożenie sejsmiczne Z^S . Jakość tej aproksymacji zależy od liczebności bazy obserwacji N_T , od poprawności ocen energii poszczególnych wstrząsów i od tego, czy wstrząsy rzeczywiście pochodzą z rejonu zainteresowania.



Rys. 2.1. Przykład ilustrujący pojęcia: a) histogramu $h(\Delta E_i)$, b) rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $p(E)$, c) dystrybuanty, czyli rozkładu prawdopodobieństwa $P(E)$, d) rozkładu przewyższeń $G(E)=1-P(E)$, czyli funkcji przeżycia lub niezawodności

Fig. 2.1. Example illustrating notions of: a) histogram $h(\Delta E_i)$, b) probability density $p(E)$, c) cumulative distribution function $P(E)$, d) survival function $G(E)=1-P(E)$

Należy zauważyć, że w praktyce, gdy rozkład przewyższeń stosowany jest do prognozy, (a nie do oceny minionego) zagrożenia, to jakość prognozy zależy może od aktualności informacji bazowej.

3. Magnituda i energia wstrząsów oraz rozkład G-R

Trzęsienia ziemi są obserwowane i katalogowane przez sejsmologów od stuleci wraz z analizą rozkładów ich wielkości. W sejsmologii miarą wielkości trzęsienia ziemi jest

magnituda (m), której definicję podaje m.in. [1]. Ponieważ w górnictwie wielkość wstrząsów kwantyfikuje się, określając ich energię (a nie magnitudę), wystarczy pamiętać, że:

$$\log E = c + dm, \quad (3.1)$$

gdzie: E – energia [J]; m – magnituda; c, d – stałe lokalne.

Dla GZW Dubiński [4] podał, że:

$$\log E = 1,8 + 1,9 m, \quad (3.2)$$

i zależność ta wiąże magnitudy określone przez Stacje Geofizyki PAN z energiami określanymi przez GIG; warto zapoznać się również z pracą [2].

Badania sejsmologów [10] prowadzą do wniosku, że rozkład liczebności $n(m)$ trzęsień ziemi może być, w dużym przedziale magnitud, aproksymowany równaniem:

$$\log n(m) = A' - bm; \quad \ln n(m) = A'' - \beta m \quad (3.3a, b)$$

$$n(m) = \beta \cdot 10^{-bm} \quad ; \quad n(m) = \beta \cdot e^{-\beta m}, \quad (3.4a, b)$$

gdzie: $A' = \log \beta$; $A'' = \ln \beta$; $b = \beta \log e = 0,4343\beta$.

Formy logarytmiczne (3.3a,b) zwane są równaniem Gutenberga-Richtera od nazwisk sejsmologów, którzy je wprowadzili [8, 9].

Równania te mają charakter empiryczny i statystyczny, a ich parametry są estymowane na lokalnej bazie obserwacyjnej. Po wyznaczeniu m z równania (3.1) i podstawieniu do (3.3a) otrzymuje się:

$$\log n(E) = A_0 - B_0 \log E, \quad (3.5)$$

gdzie: $A_0 = A' - bc/d$; $B_0 = b/d$.

Antylogarytmując równanie (3.5) i całkując wynik w przedziale (E_-, ∞) – gdzie E_- to minimalna, poprawnie obserwowana energia (np. $E_- = 1 \cdot 10^4 J$) – otrzymuje się potrzebny do oceny i prognozy Z^S rozkład przewyższeń (jest to tzw. rozkład Pareto):

$$N(E_\bullet) = N_T E_\bullet^{-B}, \quad (3.6a)$$

który można przedstawić w postaci logarytmicznej:

$$\log N(E_\bullet) = a - B \log E_\bullet, \quad (3.6b)$$

gdzie: $E_\bullet = E/E_-$; $a = \log N_T$; N_T – liczebność lokalnej bazy.

Dla stacjonarnych procesów emisji wstrząsów ich liczebność w okresie $(t, t + \Delta t)$ jest proporcjonalna do Δt :

$$N_{\Delta t}(E_\bullet) = (\Delta t/T) N_T E_\bullet^{-B}, \quad (3.6c)$$

skąd wynikają intensywność emisji w jednostce czasu oraz liczba przewyższeń:

$$\lambda \equiv \lambda_1 = T^{-1} N_T E_{\bullet}^{-B} \quad (3.6d)$$

oraz zlogarytmowana liczba przewyższeń w przedziale czasu $(t, t + \Delta t)$:

$$\log N_{\Delta t}(E_{\bullet}) = a - B \log E_{\bullet} + \log(\Delta t / T). \quad (3.6e)$$

Równania te są znane [13], a równanie (3.6b) – po obliczeniu lokalnych parametrów (a, B) – ma podstawowe znaczenie dla oceny i prognozy Z^S . Tak jak w przypadku stosowania magnitudy, także dla oceny energii ma ono charakter empiryczny, statystyczny i stosuje się w określonym przedziale (energii), a parametry (a, B) dotyczą tego samego rejonu co baza użyta do ich estymacji. Parametr B w równaniu (3.6b) musi być dodatni, tak by (3.6b) przedstawiała liczbę wstrząsów malejącą ze wzrostem energii. **Im bardziej wykres $\log N$ jest nachylony („w dół”), tym mniej jest (w ustalonym przedziale czasu) silnych wstrząsów i tym mniejsze zagrożenie Z^S .**

Jeżeli więc, na podstawie np. trzydziestodniowych ($T=30$) obserwacji wstrząsów o energiach $E > E_- = 1 \cdot 10^4 J$, zgromadzono bazę $N_T = 100$ wstrząsów i obliczono $\bar{B} = 0,6$, to, zakładając stacjonarność, można wyliczyć oczekiwaną dla najbliższych np. trzech dni ($\Delta t = 3, \Delta t / T = 0,1$) liczbę wstrząsów $N_{\Delta t}^*$ o energiach $E > E^* = 5 \cdot 10^5 J$:

$$\log N_T^* = \log 100 - 0,6 \log(E^* / E_-) = 2 - 0,6 \log 50 \approx 0,9806$$

$$N_T^* = 10^{0,9806} \approx 9,563 \approx 10,$$

$$N_{\Delta t}^* = (\Delta t / T) \cdot N_T^* \approx 1.$$

W ten sposób można oszacować oczekiwaną liczbę wstrząsów w dowolnym przedziale czasu $(t, t + \Delta t)$ i energii (E^{α}, E^{β}) . Wynik $N_{\Delta t}^*$ jest **wartością średnią zmiennej losowej $N_{\Delta t}^*$** .

4. Estymacja parametru B i prognoza zagrożenia Z^S

Znany estymator parametru b , występujący w równaniu (3.3a), ma postać [7]:

$$b = (\bar{m} - m_-)^{-1}, \quad (4.1)$$

gdzie: \bar{m} – średnia (a m_- – minimalna) magnituda wstrząsów bazowych.

Ponieważ z równania (3.1) wynika, że:

$$\bar{m} - m_- = (1/d) \overline{\log E_{\bullet}}, \quad (4.2)$$

to

$$b(E_{\bullet}) = d / \overline{\log E_{\bullet}}, \quad (4.3)$$

i wykazać można, że dla bazy zawierającej energii (a nie magnitudy):

$$\bar{B} = \frac{\log_{10} e}{\log_{10} \bar{E} - \log_{10} E_-} \approx \frac{0,4343}{\log_{10} E_-}. \quad (4.4a, b)$$

Jest to ważny, łatwo obliczalny estymator (dysponując bazowym zbiorem $E_{inz}(i) = p_i \cdot 10^{q_i}$ oraz znając E_- i liczebność bazy N_T , należy energię $E_{inz}(i)$ przekształcić do postaci logarytmicznej $\log E_i = q_i + \log p_i$, obliczyć wartość średnią $\overline{\log E}$, odjąć $\log E_-$ oraz wykonać dzielenie zgodnie z (4.4 a, b). Parametr zawiera dokładnie tę samą informację co średnia (logarytmowana) energia bazowa. Ponieważ wartość \bar{B} zawsze szacowana jest na niezbyt wielkich bazach, zawierających niezbyt dokładne oceny energii wstrząsów, to wyliczona wg (4.4 a, b) wartość \bar{B} jest zawsze realizacją zmiennej losowej (B) o rozkładzie normalnym (\mathfrak{N}) z parametrami (\bar{B}, σ_B^2) :

$$B \sim \mathfrak{N}(\bar{B}, \sigma_B^2). \quad (4.5)$$

Odchylenie standardowe σ_B parametru B określone jest przybliżonym równaniem [7]:

$$\sigma_B = \bar{B} / \sqrt{N_T} \quad (4.6a)$$

lub dokładniejszym i stosowalnym również w przypadku, gdy nie jest zachowana ścisła stacjonarność ciągu wstrząsów [15]:

$$\sigma_B = 2,3026B^2 \left\{ \sum_{i=1}^{N_T} [\overline{\log E} - \log E(i)]^2 / [N_T(N_T - 1)] \right\}^{1/2}. \quad (4.6b)$$

Losowość parametru B powoduje, że oszacowana (na podstawie informacji bazowej i równania G-R, np. z (3.6 e)) liczba przewyższeń $N_{\Delta t}$ dowolnej energii E w okresie $(t, t + \Delta t)$, a także – jak zobaczymy – oszacowane na tej podstawie zagrożenie Z^S , też jest zmienną losową obarczoną (nieraz dużą) niepewnością. Ilustruje to rys. 4.1.

Wartości \bar{B} i σ_B obliczane są zawsze na podstawie bazy wstrząsów N_T o energiach $E > E_-$. Symbole $N^* \equiv N_T^*$ i $N_{\Delta t}^*$ oznaczają liczbę wstrząsów o energiach $E > E^*$ w okresach odpowiednio T i Δt . Ponieważ funkcja liniowa (np. $y=a+Bx$) zmiennej losowej (np. B) o rozkładzie normalnym – np. równanie (4.5) – jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, więc $\log N_{\Delta t}^*$ – będąc, zgodnie z równaniem G-R (np. (3.6 e)), liniową funkcją zmiennej B – jest zmienną losową o rozkładzie normalnym:

$$\log N_{\Delta t}^* \sim \mathfrak{N}(\overline{\log N_{\Delta t}^*}, \sigma_{\log N^*}^2) \quad (4.7a)$$

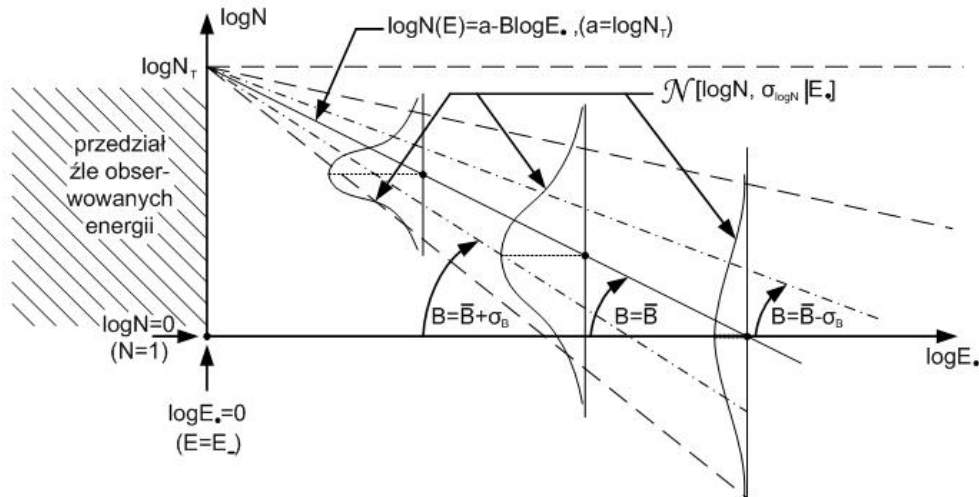
$$\overline{\log N^*} = a - \bar{B} \log E^*; \quad \overline{\log N_{\Delta t}^*} = \overline{\log N^*} + \log(\Delta t / T) \quad (4.7b, c)$$

$$\sigma_{\log N^*} = \sigma_B \cdot \log E_*^* \quad (4.7d)$$

i p-procentowy (lub rzędu p) kwantyl, $\log N_{\Delta t, P\%}^*$, tej zmiennej ma postać:

$$\log N_{\Delta t, P\%}^* = \overline{\log N_{\Delta t}^*} + X_P \cdot \sigma_{\log N^*}, \quad (4.7e)$$

gdzie: $X_{50\%} = 0$; $X_{90\%} = 1,28$; $X_{95\%} = 1,645$; $X_{99\%} = 2,326$.



Rys. 4.1. Wykres relacji G-R ilustrujący interpretację: - parametru B (w równaniu $\log N = a - \bar{B} \log E_*$) jako zmiennej losowej $B \sim \mathcal{N}(\bar{B}, \sigma_B)$ - rozkładu warunkowego $\mathcal{N}(\overline{\log N}, \sigma_{\log N} | E_*)$ zmiennej losowej $\log N$. Trzeba zauważyć, że chociaż $\bar{B} = const$ oraz $\sigma_B = const$, to rozproszenie ($\sigma_{\log N}$) zmiennej $\log N$ rośnie ze wzrostem $\log E_*$. Symbol \mathcal{N} oznacza rozkład normalny o parametrach podanych w nawiasie. $\log N$ to logarytm liczby przewyższeń

Fig. 4.1. Diagram of G-R relationship illustrating interpretation of: - B parameter (in equation $\log N = a - \bar{B} \log E_*$) as the random variable $B \sim \mathcal{N}(\bar{B}, \sigma_B)$ - conditional distribution $\mathcal{N}(\overline{\log N}, \sigma_{\log N} | E_*)$ of the random variable $\log N$. We have to notice that, though $\bar{B} = const$ and $\sigma_B = const$, the dispersion ($\sigma_{\log N}$) of random variable $\log N$ increases with the increase of $\log E_*$. Symbol \mathcal{N} denotes Gaussian distribution, $\log N$ is the logarithm of exceedances number

Niepewność oszacowania $N_{\Delta t}^*$, określona różnicą między kwantylem rzędu $p > 50\%$ i kwantylem rzędu 50% , jest skutkiem niepewności oszacowania \bar{B} , zatem, na podstawie (4.6 a), zależy od liczebności bazy N_T .

Na podstawie powyższego można więc łatwo rozwiązać następujące zagadnienia:

1. Dla danych wartości $(T, N_T, E_-, \bar{B}, \sigma_B)$, zakładając użyteczne w praktyce wartości: Δt – horyzontu prognozy, E^* – energii „zagrożającej” oraz P – prawdopodobieństwa, obliczyć

$N_{\Delta t, P\%}^*$, liczbę wstrząsów $E > E^*$, która w okresie, $(t, t + \Delta t)$, z prawdopodobieństwem P, nie będzie przewyższona.

2. Zakładając, że liczebność bazy może być zmieniana (i pamiętając o (4.6 a)), obliczyć minimalną liczebność N_T^{\min} potrzebną, by P-procentowa niepewność oszacowania $\overline{\log N_{\Delta t}^*}$ (czyli różnica $\log N_{\Delta t, P\%}^* - \overline{\log N_{\Delta t}^*}$) nie przewyższała dopuszczalnej (np. uzgodnionej z użytkownikiem) wartości $\Delta_{tol}^{\log N}$. Ponieważ $\log Z_{\Delta t}^* \sim \log N_{\Delta t}^*$, zagadnienie to ma duże znaczenie praktyczne.

Badania trzęsień ziemi doprowadziły do wniosku, że ciągi trzęsień ziemi stanowią stacjonarne procesy Poissona. W przybliżeniu to samo obserwuje się w przypadku wstrząsów górniczych dla $E > E_-$ [12, 13], przy czym im większa jest wartość E_- , tym lepsza jest aproksymacja modelem Poissona [12, s. 139].

Dalej więc przyjmuje się, że dla $E > E^* > E_-$ ciągi wstrząsów górniczych mogą być aproksymowane stacjonarnym procesem Poissona o intensywności $\lambda^* \equiv N^*(\Delta t = 1)$, określonej równaniami (4.7a, b, c, d, e).

Zgodnie z definicją D1, zagrożenie Z^* jest to prawdopodobieństwo wystąpienia wstrząsu o energii $E > E^*$, zatem ze znanych twierdzeń matematycznych [3, 6], dotyczących procesu Poissona, wynika, że **dla ustalonego, związanego z bazą informacyjną, obszaru predyktorem zagrożenia sejsmicznego $Z_{\Delta t}^* \equiv Z^S[(t, t + \Delta t), E > E^*]$, wstrząsem $E > E^*$ w horyzoncie $(t, t + \Delta t)$, jest wyrażenie:**

$$0 \leq Z_{\Delta t}^* = 1 - \exp[-\lambda^* \cdot \Delta t] \leq 1, \quad (4.8a)$$

gdzie: λ^* – intensywność wstrząsów $E > E^*$, gdy $\Delta t = 1$.

To samo równanie (w przypadku stacjonarnym) zapisywane bywa [7, 14] w równoważnej postaci:

$$Z_{\Delta t}^* = 1 - \exp\{-\lambda \cdot \Delta t \cdot [1 - F(E^*)]\}, \quad (4.8b)$$

gdzie: $1 - F(E^*) = G(E^*)$ – prawdopodobieństwo przewyższenia energii E^* .

Predyktor (4.8a) umożliwia ilościową ocenę zagrożenia. Ponieważ $0 \leq Z_{\Delta t}^* \leq 1$, przedział możliwych zagrożeń zawsze można podzielić na „stany”, jak opisano w rozdziale drugim.

Rozwijając funkcję $z = 1 - e^{-x}$ w szereg Taylora, można otrzymać np. dla $x=0,01$ $z=0,01$, zatem $z \approx x$ z błędem względnym $\Delta < 0,005$ ($\approx 0,5\%$) czy $x=0,1$ $z=0,095$, zatem $z \approx x$ z błędem względnym $\Delta < 0,051$ ($\approx 5,1\%$) itd.

Zatem dla małych wartości x , $1 - e^{-x} \approx x$. Jeżeli podstawimy się $x = \lambda_{\Delta t}^*$ i $Z_{\Delta t}^* = 1 - e^{-x}$, to dla małych wartości $\lambda_{\Delta t}^* \equiv N_{\Delta t}^*$ można stosować przybliżoną ocenę zagrożenia:

$$Z_{\Delta t}^* \approx \lambda_{\Delta t}^* (\equiv N_{\Delta t}^*), \quad (4.9)$$

co znakomicie ułatwia obliczenie – szczególnie kwantyli (zgodnie z równaniem (4.7e)) – zagrożenia. Na pytanie, jak małe mają być wartości $N_{\Delta t}^*$, by błąd aproksymacji (gdy stosujemy równanie 4.9)) był tolerowalny – można odpowiedzieć dwojako:

1. Przyjmując arbitralnie, że np. błąd $\Delta_{tol} \approx 20\%$ jest maksymalnym błędem tolerowalnym.

Wówczas równanie (4.9) można stosować dla $N_{\Delta t}^* < 0,4$.

2. Ustalając Δ_{tol} dowolną (racjonalną) granicę błędu względnego:

$$\Delta_{tol} = [\lambda - (1 - e^{-\lambda})] / [1 - e^{-\lambda}]. \quad (4.10)$$

Wówczas, dla rozsądnie wybranej wartości początkowej λ_0 , kilkukrotne powtórzenie iteracji $\lambda_{i+1} = (1 + \Delta_{tol}) \cdot (1 - e^{-\lambda_i})$ daje poszukiwaną maksymalną wartość λ_{max} , dla której równanie (4.9) może być stosowane z błędem $\Delta < \Delta_{tol}$. Na przykład, niech $\Delta_{tol} = 0,25 (= 25\%)$. Dla $\lambda_0 = 0,5$ otrzymuje się $\lambda_1 = 0,4918, \dots, \lambda_{12} = 0,466$ i dla tej wartości $\lambda_{\Delta t}^* \equiv N_{\Delta t}^*$ równanie (4.9) stosuje się z błędem mniejszym niż 25%.

Dla uproszczenia analiz zakłada się dalej, że błąd 20% (przy ocenie zagrożenia) jest maksymalnym błędem tolerowanym i równanie (4.9) można stosować dla $\lambda_{\Delta t}^* \equiv N_{\Delta t}^* < 0,4$. Zwracamy uwagę, że dla wartości $\Delta t \ll T$ i $E^* \gg E_-$, zazwyczaj $N_{\Delta t}^* < 0,4$ i przedstawiona tu zatem uproszczona metoda jest użyteczna.

Jeżeli $N_{\Delta t}^* < 0,4$ (co zawsze należy sprawdzać), równania (4.7a, b, c, d, e) określają również zagrożenie sejsmiczne Z^S :

$$\log Z_{\Delta t}^* \sim \mathcal{N}[(a - \bar{B} \log E_{\bullet}^* + \log \Delta t / T), \sigma_B \log E_{\bullet}^*] \quad (4.11)$$

$$\log Z_{\Delta t, P}^* = \overline{\log Z_{\Delta t}^*} + X_P \sigma_B \log E_{\bullet}^*, \quad (4.12)$$

przy czym równanie (4.12) określa P-procentowy kwantyl zagrożenia, czyli wartość zagrożenia, która – w świetle informacji bazowej – z P-procentowym prawdopodobieństwem nie będzie przewyższona w okresie $(t, t + \Delta t)$.

Na przykład dla bazy $\{T = 60, N_T = 100, E_- = 1 \cdot 10^4 J, \bar{B} = 0,9, \sigma_B = 0,08\}$ należy obliczyć $Z_{4,95\%}^*$ dla $E^* = 5 \cdot 10^5 J$, czyli zagrożenie wstrząsem o energii $E > 5 \cdot 10^5 J$, które

w ciągu 4 dób, z prawdopodobieństwem 95%, nie zostanie przekroczone. Co oblicza się w sposób następujący:

$$\overline{\log Z_{60}^*} = \log 100 - 0,9 \log 50 = 0,471; \quad \overline{\log Z_4^*} = \overline{\log Z_{60}^*} + \log(4/60) = -0,705$$

$$\log Z_{4,95\%}^* = -0,705 + 1,645 \cdot 0,08 \cdot \log 50 = -0,481; \quad Z_{4,95\%}^* \approx 0,33.$$

Należy dodać, że nie istnieje taka wartość zagrożenia, która „na 100%” nie zostanie przewyższona. Celowe za to jest liczenie rozsądnej, górnej granicy zagrożenia – na przykład $Z_{\Delta,95\%}^*$ – czyli granicy 95-procentowej, i informowanie użytkownika o jej wartości. Najłatwiejsze do obliczenia, stąd popularne, zagrożenie średnie $Z_{\Delta,50\%}^* \equiv \overline{Z_{\Delta}^*}$, może być przewyższone z prawdopodobieństwem 50%, co może stać się przyczyną pretensji i konfliktów, lepiej więc informować użytkownika o wartości $Z_{\Delta,95\%}^*$, która niemal na pewno nie zostanie przekroczona w okresie $(t, t + \Delta t)$.

Jeżeli przyjmuje się, że miarą niepewności $\Delta(\log Z_{\Delta,P}^*)$ P-procentowej oceny/prognozy zagrożenia ($\log Z_{\Delta}^* -$ wstrząsem $E > E^*$ w okresie $(t, t + \Delta t)$) jest różnica (lub odległość) między P%-kwantylem a wartością średnią tego zagrożenia, to z (4.12) wynika, że:

$$\Delta(\log Z_{\Delta,P}^*) = \log Z_{\Delta,P}^* - \overline{\log Z_{\Delta}^*} = X_p \sigma_B \log E_{\bullet}^*, \quad (4.13)$$

gdzie: X_p – odpowiedni kwantyl rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

Podstawiając (4.6a), otrzymujemy:

$$\Delta(\log Z_{\Delta,P}^*) = X_p (\overline{B} / \sqrt{N_T}) \log E_{\bullet}^*. \quad (4.14)$$

Jeżeli więc użytkownik określi wartość $\Delta_{tol}(\log Z_{\Delta,P}^*)$, maksymalną tolerowaną niepewność (dopuszczalny błąd $\log Z$) oceny/prognozy zagrożenia, to można wyznaczyć N_{min} , czyli minimalną wartość N_T potrzebną by zapewnić, że $\Delta(\log Z_{\Delta,P}^*) < \Delta_{tol}(\log Z_{\Delta,P}^*)$:

$$\sqrt{N_{min}} > X_p [\overline{B} / \Delta_{tol}(\log Z_{\Delta,P}^*)] \log E_{\bullet}^*. \quad (4.15)$$

Równanie to powinno być traktowane jako podstawowe w zagadnieniu prognozy zagrożenia (stosując metodę G-R), tymczasem jest nieznane w literaturze przedmiotu i w praktyce nie jest stosowane – co jest jedną z przyczyn nietrafnych prognoz.

5. Podstawowe wnioski z pracy

Celem artykułu była m.in. analiza czynników wpływających na jakość prognozy opartej na rozkładzie G-R. Można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Niewątpliwą zaletą stosowania rozkładu G-R do prognozy Z^S jest prostota metody, która wymaga tylko elementarnych i nielicznych obliczeń.
2. Ze względu na małe wymagania dotyczące informacji wejściowej może i powinna być znacznie szerzej stosowana jako najprostsza, przybliżona metoda prognozy zagrożenia sejsmicznego.
3. Podstawowym założeniem w tej metodzie jest rzetelna baza informacyjna energii wstrząsów, dotycząca konkretnego obszaru – nieznieskształcona przez przypadkowe wstrząsy pochodzące z innych rejonów – dla którego oceniana/prognozowana jest wartość Z^S . Należy więc pamiętać o rzetelnej lokalizacji i ocenie energii, gdyż ich niepewność zawsze zwiększa niepewność samej metody.
4. Niepewność oceny zagrożenia jest m.in. skutkiem niepewności oszacowania \bar{B} , zatem zależy ona od liczebności bazy N_T i równanie (4.15) powinno być systematycznie stosowane do oceny liczebności bazy niezbędnej dla ograniczenia niepewności ocen.

BIBLIOGRAFIA

1. Aki K., Richards P.G.: Quantitative Seismology (2^{ed}). Sausalito California University Science Book, 2002.
2. Bańka P., Jaworski A.: Problemy związane z prognozowaniem wielkości drgań gruntu spowodowanych wysokoenergetycznymi wstrząsami górotworu. „Górnictwo i Geologia” t. 1, Gliwice 2006.
3. Benjamin J.R., Cornell C.A.: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. WNT, Warszawa 1977.
4. Dubiński J.: Obliczanie energii sejsmicznej, [w:] Poradnik geofizyka górniczego, t. 2, Biblioteka Szkoły Eksploatacji Podziemnej, Wyd. CPPGSMiE PAN, Kraków 1995, s. 93-103.
5. Dubiński J., Konopko W.: Tąpnięcia: ocena, prognoza, zwalczanie. Wyd. GIG, Katowice 2000.
6. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1969.
7. Gibowicz S.J., Kijko A.: An Introduction to Mining Seismology. Academic Press, New York 1994.
8. Gutenberg B., Richter C.F.: Frequency of earthquakes in California. Bull. Seism. Soc. Am., No. 34, 1944, p. 185-188.

9. Gutenberg B., Richter C.F.: *Seismicity of the Earth and Associated Phenomene*, 2nd ed. Princeton University Press, Nowy Jork 1954.
10. Gutenberg B., Richter C.F.: Magnitude and Energy of Earthquakes. „*Science*”, Vol. 83, 1956, p. 183-185.
11. Konopko W.: Doświadczalne podstawy kwalifikowania wyrobisk górniczych w kopalniach węgla kamiennego do stopni zagrożenia tąpnięciami. *Prace Naukowe GIG*, nr 795, Katowice 1994.
12. Kornowski J., Kurzeja J.: Krótkookresowa prognoza zagrożenia sejsmicznego w górnictwie. Wyd. GIG, Katowice 2008.
13. Lasocki S.: Predykcja silnych wstrząsów górniczych. *Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej*, z. 7, Kraków 1990.
14. Lasocki S.: Statystyczna analiza zagrożenia sejsmicznego, [w:] Dubiński J., Pilecki Z., Zuberek W. (red.): *Badania Geofizyczne w Kopalniach*. Wyd. IGSMiE PAN, Kraków 2001.
15. Shi Y., Bolt B.A.: The Standard Error of the Magnitude – Frequency b Value. *Bull Seismol. Soc. Amer.*, Vol.72, No. 5, 1982, p. 1677-1687.

Recenzent: Dr hab. inż. Zenon Pilecki, prof. IGSMiE PAN

Abstract

In this paper the estimation method of seismic (tremors) hazard, ZS and its uncertainty – with the known Gutenberg-Richter (G-R) distribution and assuming Poisson process of events – have been described, applying only elementary methods and with simple numerical examples. To estimate numerical uncertainty of the ZS, the probabilistic interpretation of the G-R equation has been stressed and graphically illustrated, assuming that uncertainty emerges from insufficient number and insufficient quality of events energy data in a data archive. We conclude that both ZS and its uncertainty can be estimated with simple equations, (4.8a) or (4.8b) and (for not to large ZS) (4.12) – and that hazard estimation results should always be equipped with its uncertainty measure.