

Zbigniew BORTLICZEK

O WŁAŚCIWOŚCIACH STATYCZNYCH
JEDNOUZWOJENIOWYCH MECHANIZMÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH
PRĄDU STAŁEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę właściwości statycznych jednouzwojeniowych mechanizmów elektromagnetycznych prądu stałego metodą wielkości względnych. Wyprowadzono równania bezwymiarowych charakterystyk regulacyjnych przetwornika. Wyróżniono i opisano dwa rodzaje jego pracy: proporcjonalno-przełącznikową i przełącznikową. Podano przykłady bezwymiarowych charakterystyk regulacyjnych w obu przypadkach.

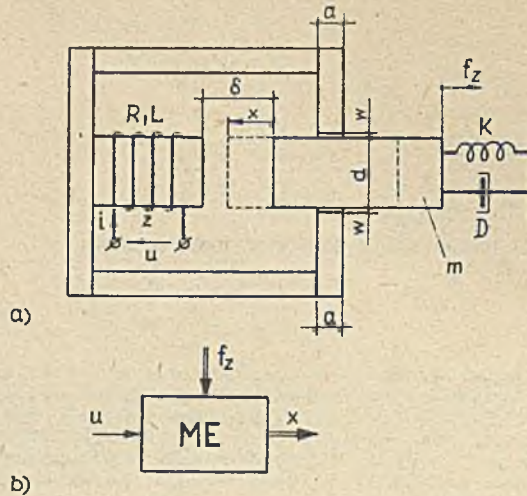
1. Wstęp

Obiektem, którego właściwości statyczne chcemy badać, jest przetwornik energii elektrycznej na mechaniczną, zwany w dalszym ciągu jednouzwojeniowym mechanizmem elektromagnetycznym prądu stałego (w skrócie - ME).

Nazwą "mechanizmy elektromagnetyczne" obejmuje się zwykle obszerną klasę przetworników, stosowanych w układach automatyki przede wszystkim jako elementy wykonawcze. Ich cechą charakterystyczną jest duża różnorodność rozwiązań konstrukcyjnych. Przyjęte wyżej ograniczenia (jedno uzwojenie zasilane prądem stałym) uzupełnimy więc następującym opisem wybranej konstrukcji badanego przetwornika (por. z rys. 1a):

1. Obwód magnetyczny ME składa się z części nieruchomej (jarzmo) i ruchomej (rdzeń), które rozdziela szczelina o zmiennej długości $\delta - x$.
2. Jarzmo i rdzeń wykonane są z materiału ferromagnetycznego.
3. Uzwojenie wzbudzające ME o liczbie zwojów z i rezystancji R zasilane jest ze źródła napięcia stałego.
4. Rdzeń o masie m , obciążony siłą zewnętrzną f_x , może się poruszać ruchem postępowym prostoliniowym. Długość szczelin w jest stała. Położenie początkowe rdzenia określa szczelina δ . Ruchowi rdzenia przeciwdziałają sprężyna o sztywności K oraz tarcie lepkie wyrażone przez rezystancję mechaniczną D .

Właściwości statyczne opisanego wyżej ME badać będziemy, przyjmując, że zmienną wejściową jest napięcie u doprowadzone do uzwojenia wzbudzającego, a zmienną wyjściową - położenie x rdzenia (rys. 1b). Analizę ograniczymy do wyprowadzenia zależności $x(u)$ w stanie ustalonym, którą nazywać będziemy charakterystyką regulacyjną ME. Zadanie takie rozwiązuje się zwykle



Rys. 1. Jednouzwojeniowy mechanizm elektromagnetyczny prądu stałego

sposobami graficznymi (por. np. w [3], rys. 5.2). Uzyskiwane tą drogą wyniki nie są jednak kompletne. Zastosowana w niniejszej pracy metoda wielkości względnych oraz wyniki analizy w postaci rodzin bezwymiarowych charakterystyk regulacyjnych pozwalają, jak się zdaje, na pełniejszą dyskusję podstawowych właściwości statycznych rozpatrywanego przetwornika.

2. Równania wyjściowe

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy model elementarny ME, wyprowadzony w pracy [1], przy założeniu, że w rzeczywistym ME pominąć można:

- 1) nieliniowości materiałowe,
- 2) zniekształcenia linii pola magnetycznego wokół szczelin,
- 3) rozproszenie linii pola magnetycznego,
- 4) reluktancję części ferromagnetycznych.

Stan równowagi dynamicznej tak uproszczonego przetwornika opisują następujące równania:

$$\left. \begin{aligned} u &= Ri + e \\ f_0 - f_z &= Kx + D \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie:

$$e = L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

- napięcie wyindukowane w uzwojeniu wzbudzającym,

$$f_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \quad (3)$$

- siła pochodzenia elektrycznego działająca na rdzeń oraz

$$L(x) = x^2 \frac{\mu_0^2}{\Delta - x} \quad (4)$$

- indukcyjność własna uzwojenia wzbudzającego, przy czym

$$\Delta = \delta + w \quad (5)$$

oraz

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \pi (d + w)a \quad (6)$$

Oznaczenia w powyższych równaniach przyjęto jak na rys. 1; t oznacza czas, μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.

W stanie ustalonym $u = u_0 = \text{const}$, $f_z = f_{z0} = \text{const}$ oraz $x = x_0 = \text{const}$ (rdzeń jest nieruchomy), w związku z czym $e = 0$ oraz $i = i_0 = \text{const}$. Na tej podstawie równania (1) i (3) przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= Ri_0 \\ f_{e0} - f_{z0} &= Kx_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

oraz

$$f_{e0} = \left\{ f_e \right\}_{i=i_0, x=x_0} = \frac{1}{2} \cdot (i_0)^2 \frac{\mu_0^2}{(\Delta - x_0)^2} \quad (8)$$

stąd zaś wynika następująca postać końcowa równania opisującego stan ustalony ME:

$$\lambda \frac{u_0^2}{(\Delta - x_0)^2} = f_{z0} + Kx_0 \quad (9)$$

gdzie:

$$A = \frac{1}{2} \frac{x_0^2 u_0^2}{R^2} \quad (10)$$

Oznaczmy,

$$u_0 = \gamma u_{\text{dop}} \quad (11)$$

gdzie:

u_{dop} - największa dopuszczalna wartość napięcia u ,
oraz

$$x_0 = \xi \Delta \quad (12)$$

Podstawiając (11) i (12) do (9), otrzymujemy:

$$\frac{\gamma^2}{(1 - \xi)^2} = \chi \xi + \varphi_z \quad (13)$$

gdzie:

$$\varphi_z = \frac{f_{z0}}{f_{e0}^*} \quad (14)$$

$$\chi = K \frac{\Delta}{f_{e0}^*} \quad (15)$$

oraz

$$f_{e0}^* = \left\{ f_{e0} \right\}_{u=u_{\text{dop}}, x_0=0} = \frac{\Lambda u_{\text{dop}}^2}{\Delta^2} \quad (16)$$

Wyrażenie (13) jest równaniem stanu ustalonego ME w postaci bezwymiarowej. Zmienne γ oraz ξ przedstawiają względne wartości zmiennych u oraz x , χ jest względną sztywnością sprężyny, φ_z - względną siłą zewnętrzną. W dalszym ciągu, opisując powyższe wielkości, słowo "względny" będziemy pomijać.

3. Charakterystyki regulacyjne ME

A. Zgodnie z podanym już określeniem charakterystyka regulacyjna ME jest to zależność $x_0(u_0)$ dla $-u_{dop} \leq u_0 \leq u_{dop}$. Parametrami rodziny charakterystyk regulacyjnych są: obciążenie $f_{z0} = \text{const}$ i sztywność sprężyny $K = \text{const}$. Rodzinę bezwymiarowych charakterystyk regulacyjnych przedstawia zatem zależność $\vartheta(\xi)$ przy $-1 \leq \vartheta \leq 1$ oraz $\varphi_z = \text{const}$ i $\chi = \text{const}$. Oczywiście, w obu przypadkach zmienna zależna (x_0 lub ξ) powinna określać rzeczywiste, fizycznie możliwe położenie rdzenia.

Zdefiniowaną wyżej rodzinę charakterystyk można wyznaczyć bezpośrednio z równania (13), przy czym pierwszy etap obliczeń wygodnie będzie przeprowadzić, wychodząc z postaci $\vartheta(\xi)$. W tym celu równanie (13) przeźpiżemy następująco:

$$\vartheta = \pm(1 - \xi) \sqrt{\chi\xi + \varphi_z} \quad (17)$$

Badając teraz na podstawie (17) funkcję $\vartheta(\xi)$, określimy jej punkty charakterystyczne:

1) punkty przecięcia z osią ξ

$$\xi_{01} = \left\{ \xi \right\}_{\vartheta=0} = -\frac{\varphi_z}{\chi} \quad (18)$$

$$\xi_{02,3} = \left\{ \xi \right\}_{\vartheta=0} = 1 \quad (19)$$

gdzie $\xi_{02,3}$ jest punktem podwójnym, w którym krzywa przecina samą siebie;

2) punkty przecięcia z osią ϑ

$$\vartheta_0 = \left\{ \vartheta \right\}_{\xi=0} = \pm \sqrt{\varphi_z} \quad (20)$$

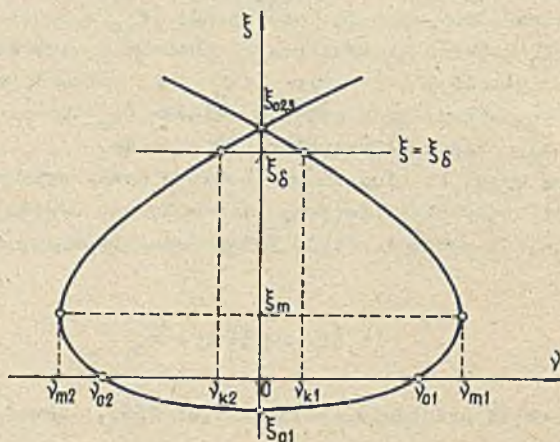
3) punkty maksimów i minimów

$$\xi_m = \left\{ \xi \right\}_{\frac{d\vartheta}{d\xi}=0} = \frac{\chi - 2\varphi_z}{3\chi} \quad (21)$$

$$\vartheta_m = \left\{ \vartheta \right\}_{\xi=\xi_m} = \pm \sqrt{\frac{4}{27} \frac{(\chi + \varphi_z)^3}{\chi^2}} \quad (22)$$

Dane powyższe pozwalają przewidzieć przebieg funkcji $\vartheta(\xi)$ i naszkicować jej wykres. Tym samym można narysować wykres poszukiwanej zależności

$\xi(\vartheta)$. Wykres takiej zależności dla zadanego obciążenia $\varphi_z = \text{const}$ i pewnego $\kappa = \text{const}$ przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Wykres zależności $\xi(\vartheta)$

B. Wyniki uzyskane w p. A należy zweryfikować, łatwo bowiem zauważyć, że tylko niektórym punktom wyprowadzonej wyżej charakterystyki $\xi(\vartheta)$ mogą odpowiadać rzeczywiste położenia rdzenia ME.

Zauważmy najpierw, że w rzeczywistym ME zmienna x_o może przyjmować tylko wartości z przedziału $\langle 0, \delta \rangle$. Tym samym zmienna ξ może przyjmować tylko wartości z przedziału $\langle 0, \xi_\delta \rangle$, gdzie:

$$\xi_\delta = \left\{ \xi \right\}_{x_o = \delta} = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{\delta}{\delta + w} < \xi_{o2,3} \quad (23)$$

przy czym, zgodnie z (17), prosta $\xi = \xi_\delta$ przecina krzywą $\xi(\vartheta)$ w punktach o odciętych:

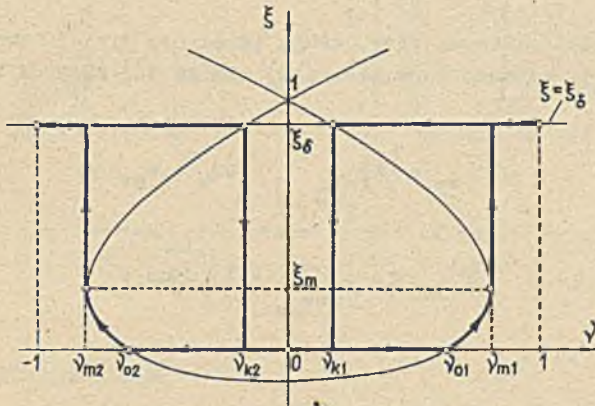
$$\vartheta_k = \pm(1 - \xi_\delta) \sqrt{\kappa \xi_\delta + \varphi_z} \quad (24)$$

Wszystkie wartości ξ spoza przedziału $\langle 0, \xi_\delta \rangle$ należy zatem odrzucić.

Zauważmy dalej, że zgodnie z rys. 2 położenia rdzenia $\xi_m < \xi < \xi_\delta$ są położeniami niestabilnymi. Istotnie, gdy ϑ przyjmuje wartości z przedziału $\langle \vartheta_o, \vartheta_m \rangle$, to położenie rdzenia zmienia się w sposób ciągły w granicach $\langle 0, \xi_m \rangle$, natomiast dla wszystkich innych wartości ϑ rdzeń przyjmuje jedno z położen skrajnych (ξ_δ lub 0), przy czym zmiana położenia w przypadku $\vartheta > \vartheta_{m1}$ (lub $\vartheta < \vartheta_{m2}$) oraz $\vartheta < \vartheta_{k1}$ (lub $\vartheta > \vartheta_{k2}$) następuje skokowo. Rzeczywisty przebieg charakterystyki $\xi(\vartheta)$ będzie zatem nieciągły w pun-

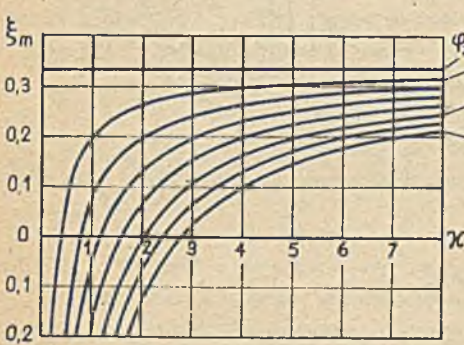
ktach $\gamma = \gamma_m$ oraz $\gamma = \gamma_k$, należy go ponadto uzupełnić o nowe punkty leżące na prostych $\xi = 0$ oraz $\xi = \xi_\delta$.

Wykres bezwymiarowej charakterystyki regulacyjnej ME, uzyskany na podstawie rys. 2 po uwzględnieniu powyższych poprawek, przedstawia rys. 3.

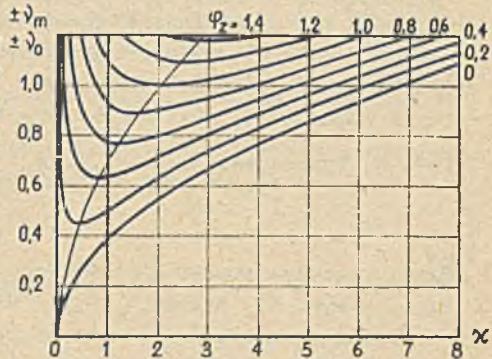


Rys. 3. Bezwymiarowa charakterystyka regulacyjna ME $\xi(\gamma)$

C. Zbadamy wpływ obciążenia φ_z i sztywności sprężyny κ na przebieg charakterystyki regulacyjnej ME. Założymy w tym celu, że obciążenie $\varphi_z = \text{const}$ jest zadane, natomiast $\kappa = \text{var}$.



Rys. 4. Wykres zależności $\xi_m(\kappa, \varphi_z)$



Rys. 5. Wykresy zależności $\gamma_m(\kappa, \varphi_z)$ oraz $\gamma_o(\varphi_z)$

Przebieg charakterystyki regulacyjnej określają punkty charakterystyczne o współrzędnych $(\gamma_o, 0)$, (γ_m, ξ_m) oraz (γ_k, ξ_δ) . Zależności γ_o , γ_m , ξ_m oraz γ_k od φ_z i κ podają wzory (20), (21), (22) oraz (24). Zależności te można przedstawić w postaci graficznej. I tak, wykres $\xi_m(\kappa, \varphi_z)$ przedsta-

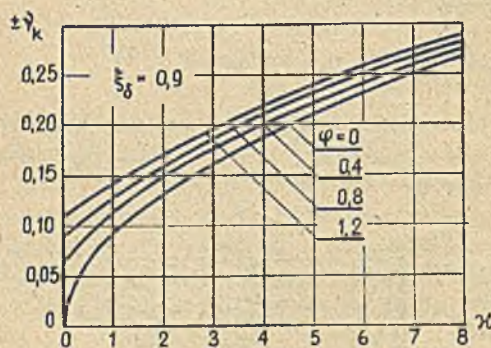
wia rys. 4. Odcięta punktu przecięcia odpowiedniej krzywej z osią κ o wartości:

$$\left\{ \kappa \right\}_{\xi_m=0} = 2\varphi_z = \kappa_{gr} \quad (25)$$

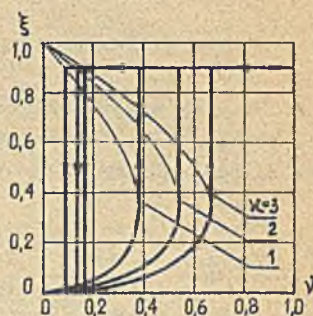
nazywać będziemy graniczną sztywnością sprężyny. Rys. 5 przedstawia wykres $\vartheta_m(\kappa, \varphi_z)$. Zgodnie ze wzorem (22) minima tej funkcji określają współrzędne:

$$\kappa_{\min} = \left\{ \kappa \right\}_{\frac{d\vartheta_m}{d\kappa} = 0} = 2\varphi_z = \kappa_{gr} \quad (26)$$

$$\vartheta_{\min} = \left\{ \vartheta_m \right\}_{\kappa=\kappa_{\min}} = \pm \sqrt{\varphi_z} = \vartheta_0 \quad (27)$$



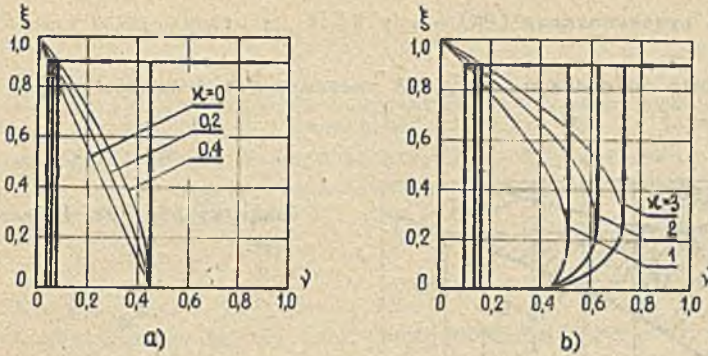
Rys. 6. Wykres zależności $\vartheta_k(\kappa, \varphi_z)$



Rys. 7. Bezwymiarowe charakterystyki regulacyjne ME w przypadku $\varphi_z = 0$, $\xi_\delta = 0,9$

Krzywa łącząca punkty minimów przedstawia zatem wykres zależności $\vartheta_0(\kappa, \varphi_z)$ (por. z rys. 5). Wykres $\vartheta_k(\kappa, \varphi_z)$ dla zadanego ξ_δ przedstawia rys. 6.

Omówione zależności i wykresy pozwalają przewidzieć przebieg funkcji $\xi(\nu)$ dla konkretnych wartości κ i φ_z . Można więc na tej podstawie wykreślać poszukiwane rodziny bezwymiarowych charakterystyk regulacyjnych ME. Przykłady takich rodzin dla zadanego φ_z i różnych κ oraz dla ν zmiennego w granicach $0 \dots +1 \dots 0$ przedstawiają rys. 7 i 8.



Rys. 8. Bezwymiarowe charakterystyki regulacyjne ME

a) $\varphi_z = 0,2$; $0 \leq \kappa < \kappa_{gr}$; $\xi_5 = 0,9$, b) $\varphi_z = 0,2$; $\kappa > \kappa_{gr}$; $\xi_5 = 0,9$

4. Dwa rodzaje pracy ME

A. Zwróćmy uwagę na przebieg charakterystyki regulacyjnej ME przedstawionej na rys. 3. Zakres pracy ME, w którym położenie rdzenia ξ zmienia się w sposób ciągły ($\vartheta_0 \leq \vartheta < \vartheta_k$), będziemy nazywać - nie bacząc na nieliniowość zależności $\xi(\vartheta)$ - zakresem pracy proporcjonalnej. Zmiany położenia ξ dla wszystkich innych wartości ϑ następują skokowo, co oczywiście jest typowe dla pracy przekaźnikowej. Stąd proponowana dla powyższego przypadku nazwa: praca proporcjonalno-przekaźnikowa ME (w skrócie - praca PP). Inne ilustracje pracy PP przedstawiają rys. 7 i 8b.

Istnieje możliwość uzyskania pracy przekaźnikowej ME w całym zakresie zmiany ϑ (w skrócie - praca PK). Jak wynika z rys. 8 (por. także z rys. 4), będzie tak, gdy przez odpowiedni dobór sztywności sprężyny κ spowodujemy, iż $\xi_m \leq 0$. Zgodnie z (21) warunek pracy PK przyjmuje zatem postać następującą:

$$\kappa \leq \kappa_{gr} \tag{28}$$

Przypadek pracy PK ilustruje rys. 8a.

B. Wprowadźmy do powyższego opisu znane określenia: napięcie zadziałania ME jako przekaźnika (ϑ_d) oraz napięcie zwalniania (ϑ_z). Korzystając z nich, sformułujemy następującą konkluzję:

1. Możliwe są dwa rodzaje pracy ME obciążonego zadana siłą zewnętrzną φ_z :
 - a) praca proporcjonalno-przekaźnikowa (PP) - gdy $\kappa > \kappa_{gr}$; wtedy $\xi_m > 0$ oraz $\vartheta_d = \vartheta_m$ i $\vartheta_z = \vartheta_k$;

b) praca przekaźnikowa (PK) - gdy $\kappa \leq \kappa_{gr}$; wtedy $\xi_m \leq 0$ oraz $\vartheta_d = \vartheta_0$ i $\vartheta_z = \vartheta_k$.

2. Niezależnie od rodzaju pracy, ME zadziała jak przekaźnik, gdy

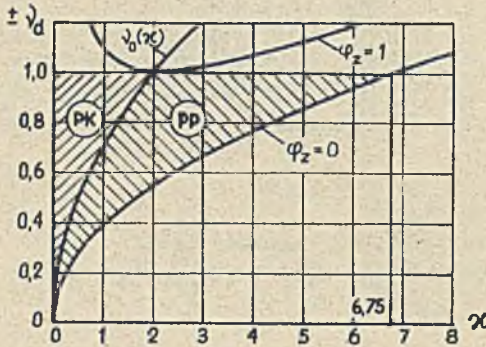
$$\vartheta_d \leq \vartheta \leq 1 \quad (29)$$

skąd wynika, że zawsze powinno być

$$\vartheta_d < 1 \quad (30)$$

Warunek (30) pozwala określić przy pomocy rys. 5 największe dopuszczalne wartości parametrów ϑ_z i κ :

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{zdop} &= 1 \\ \kappa_{dop} &= 6,75 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$



Rys. 9. Obszary pracy PP i PK

$$\kappa_{dop} = 6,75$$

Zgodny z powyższym podział płaszczyzny ϑ_d, κ na dozwolone obszary pracy PP i PK przedstawia rys. 9.

C. Zauważmy na zakończenie, że istnieje również możliwość uzyskania pracy proporcjonalnej ME w całym zakresie zmian ϑ . Byłby to szczególny przypadek pracy PP uzyskany nie przez dobór κ (zgodnie z rys. 4 $\xi_m \leq 0,33$), ale przez takie sztuczne zmniejszenie sztywności roboczej (np. przy pomocy wkładki niemagnetycznej), by dla zadanej sztywności κ zachodziło $\xi_5 \leq \xi_m$. Szczegółowa analiza właściwości ME w tym przypadku posiada duże znaczenie praktyczne, wykracza jednak poza ramy niniejszej publikacji.

5. Uwagi końcowe

Przeprowadzona analiza pozwoliła wyróżnić i opisać dwa rodzaje pracy ME: proporcjonalno-przekaźnikową (PP) i przekaźnikową (PK). Podział ten nie jest rozpowszechniony w literaturze przedmiotu. Wzmianki na temat możliwości pracy proporcjonalnej ME znajdują się w niektórych monografiach z dziedziny elektromechanicznego przetwarzania energii. Autora niniejszej publikacji w znacznym stopniu inspirowały fragmenty prac [2] (s. 428-433) oraz [3] (s. 225-231).

LITERATURA

- [1] Bortliczek Z.: O właściwościach dynamicznych prostego mechanizmu elektromagnetycznego. ZNPS1 "Automatyka", 1974, z. 25, s. 3-18.
- [2] Kowalowski H.: Maszyny i napęd elektryczny. PWN, Warszawa 1975.
- [3] Meisoi J.: Zasady elektromechanicznego przetwarzania energii (tłum. z j. ang.). WNT, Warszawa 1970.

O СТАТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ
ОДНООБОМОТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Р е з ю м е

В работе представлен анализ статических свойств однообмоточных электромагнитных устройств постоянного тока при использовании метода относительных величин. Выведены уравнения безразмерных регулировочных характеристик преобразователя. Выделены и описаны два типа его работы: пропорционально-релейный и релейный. Даны примеры безразмерных регулировочных характеристик в этих случаях.

ON THE STATIC PROPERTIES
OF A D-C 1-WINDING ELECTROMAGNETIC DEVICES

S u m m a r y

In this paper the static properties analysis in per-unit system of a d-c 1-winding electromagnetic devices has been presented. The equations for the control characteristics of converter in per-unit form have been derived. Two kinds of its work - proportional-relay and relay - have been distinguished and described. The examples of per-unit control characteristics in both cases have been given.