

Ernest CZOGAŁA  
Józef DREWNIĄK  
Jerzy IHNATOWICZ  
Józef JAGIELSKI

ŁAŃCUCHOWE FUNKCJE KORELACJI W KOMPUTEROWEJ ANALIZIE OBRAZÓW  
O NIEREGULARNYCH KONTURACH

**Streszczenie.** W pracy omówione są trzy typy funkcji korelacyjnych związanych z komputerową analizą konturów obrazów. Przedstawiono własności tych funkcji dotyczące różnego rodzaju dowodności występujących przy kodowaniu konturów. Podano też przykładowe wykresy tych funkcji.

Wstęp

Analiza komputerowa obrazów o nieregularnych konturach (w szczególności obrazów biologicznych<sup>x)</sup> nabiera coraz większego znaczenia ze względu na szybki rozwój metod matematycznych prowadzących do efektywnych algorytmów rozpoznawania obrazów oraz ze względu na wzrastające wciąż możliwości samych maszyn cyfrowych (rozmiary pamięci, szybkość obliczeń, szybkość urządzeń zewnętrznych).

Wizualna analiza obrazów czy też ich konturów jest bardzo żmudna i najczęściej opiera się na niewielkiej ilości informacji o tych obrazach i konturach. Znaczna część informacji jest wówczas utracona, natomiast komputerowa analiza pozwala na pełniejsze wykorzystanie informacji o konturze.

Wiele dotychczasowych prac nad analizą obrazów o nieregularnych konturach (np. obrazów chromosomów) uwzględnia jedynie pewne cechy charakterystyczne tych konturów (zob. [4], [5]). Uwzględnienie informacji o całości konturów obrazów jest więc ważnym problemem w procesie analizy obrazów na podstawie ich konturów. W tym zakresie interesująca wydaje się być metoda wykorzystująca tzw. łańcuchowe funkcje korelacji [1], [3].

W niniejszej pracy podamy rozważania prowadzące do łańcuchowych funkcji korelacji, omówimy podstawowe własności tych funkcji oraz zaprezentu-

<sup>x)</sup> Praca niniejsza została częściowo wykonana w ramach problemu węzłowego nr 10.4.

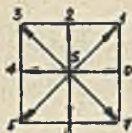


Jemy komputerowe porównanie różnych funkcji korelacyjnych na przykładzie konturu obrazu chromosomu.

Dokładniejsza analiza geometrycznych własności konturów przy pomocy funkcji korelacyjnych zostanie przedstawiona w oddzielnej publikacji [6].

### 1. Kodowanie linii konturowych obrazów

Kodowania cyfrowego linii konturu dokonujemy przy pomocy nałożonej na kontur siatki kwadratowej o zadanej długości "u" boku kwadratu (odpowiednio małej w stosunku do średniego konturu). Zakładamy przy tym, że krata wyznacza prawoskrętny układ współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie obrazu.



Rys. 1.1.  
Schemat  
kodu Free-  
mana

Obierając jeden węzeł siatki blisko linii konturu (w odległości mniejszej od połowy jednostki u), można osiem sąsiadujących węzłów oznaczyć kolejno cyframi od 0 do 7, licząc w kierunku odwrotnym do wskazówek zegara, počawszy od węzła w dodatnim kierunku osi x (rys. 1.1).

Jako kolejny węzeł wybieramy ten z ośmiu możliwych, który leży najbliżej linii konturu i wówczas numer tego węzła traktujemy jako kod cyfrowy odcinka skierowanego od poprzedniego węzła do następnego. Odcinki takie (lub ich kody cyfrowe) nazywamy ogniwami skwantowanej linii konturu, a ciąg kolejnych ogniw otrzymanych wzdłuż linii konturu nazywamy łańcuchem kodowym tego konturu.

Opisany wyżej sposób zapisu konturów nosi nazwę kodu Freemana [1]. W pewnych "teoretycznych" przypadkach kod ten nie jest określony jednoznacznie ze względu na niejednoznaczność punktu minimalizującego odległość od konturu. Przede wszystkim należy wybrać kierunek kodowania linii konturu i rozważać tylko te punkty kraty, które są blisko linii konturu po minimum poprzedniego węzła w kierunku kodowania. Zatem do poprzednio wybranych węzłów kraty możemy powrócić tylko w przypadku ostrego załamania linii konturu. Ponadto, jeżeli w kolejnym kroku kodowania kilka różnych węzłów kraty ma jednakową minimalną odległość od linii konturu, to stosujemy następujące zasady wyboru:

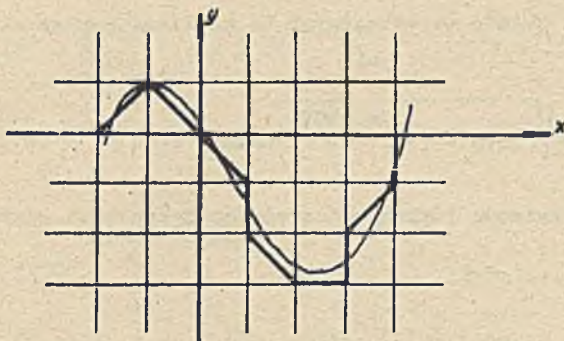
a) wszystkie z tak wybranych węzłów rozważamy tylko wtedy, gdy wszystkie leżą po jednej stronie linii konturu, w przeciwnym razie rozważamy tylko węzły leżące po tej samej stronie linii konturu co węzeł poprzednio wybrany,

b) z punktów na linii konturu, dla których zrealizowana jest minimalna odległość od odpowiednich węzłów, wybieramy najwcześniejszy w kierunku kodowania,

c) wybieramy ten węzeł kraty, który odpowiada ustalonomu punktowi linii konturu.



Na przykład kontur na rys. 1.2 ma następujący łańcuch kodowy: 177670212. Zauważmy, że węzeł o współrzędnych (3, -3) został wybrany zgodnie z dodatkową zasadą a). Natomiast przy przeciwnym kierunku kodowania ten punkt zostanie pominięty.



Rys. 1.2. Przykład kodowania linii konturowej

Łańcuchy kodowe będziemy zapisywali w postaci

$$a = a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \underset{i=1}{\overset{n}{C}} a_i,$$

gdzie:  $0 \leq a_i \leq 7$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , C jest symbolem uszeregowania, a n jest liczbą ogniw łańcucha. Zauważmy, że i-te ogniwo łańcucha a ma długość  $(\sqrt{2})^p$  i jest nachylone do osi x pod kątem  $\frac{\pi}{4} a_i$ , gdzie:

$$p = \begin{cases} 0 & \text{dla } a_i \text{ parzystych,} \\ 1 & \text{dla } a_i \text{ nieparzystych} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Zauważmy jeszcze, że każdy kontur ograniczony i spójny na płaszczyźnie można uważać za zamknięty, gdyż możemy w skończonej ilości kroków obejść całą konturę po węzłach kraty i powrócić do punktu wyjściowego. To pozwala przedłużać cyklicznie łańcuchy kodowe o wielokrotność liczby n, bez zmiany zakodowanej informacji o konturze.

## 2. Łańcuchowe funkcje korelacji

Opisany wyżej sposób kodowania konturów zawiera element losowy, związany z dowolnością położenia kraty na kodowanym konturze. Zatem uzyskany ciąg kodowy można traktować jako pojedynczą realizację pewnego ciągu zmian losowych.



W celu uproszczenia naszych rozważań przyjmiemy, że rzuty poszczególnych ogniw łańcucha

$$a = a_1 a_2 \dots a_n \quad (2.1)$$

na jedną z osi układu współrzędnych są realizacją ciągu niezależnych zmiennych losowych

$$X_i = \sqrt{0,5(3 - (-1)^{a_i + 4\phi/\pi})} \cos\left(\frac{\pi}{4} a_i + \phi\right) \quad i=1, \dots, n \quad (2.2)$$

gdzie  $\phi$  jest zmienną losową o następującej funkcji gęstości prawdopodobieństwa

$$g_\phi(\varphi) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \delta\left(\varphi - k \frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi \in (-\infty, +\infty) \quad (2.3)$$

a  $u$  jest zadaną długością boku siatki kwadratowej. W dalszych rozważaniach przyjmiemy  $u = 1$ .

Charakteryzując ciąg (2.1) (a równocześnie charakteryzując zakodowanego konturu) uzyskamy na podstawie cyklicznej korelacji seryjnej [2], gdzie korzysta się z ciągu (2.2) przedłużonego wzorem

$$X_{n+1} = X_1, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Ze względu na zerowanie się wartości średnich:

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{0,5(3 - (-1)^{a_i + 4\varphi/\pi})} \cos\left(\frac{\pi}{4} a_i + \varphi\right) g_\phi(\varphi) d\varphi = 0,$$

można rozważyć funkcję cyklicznej korelacji seryjnej w postaci

$$K_{aa}(j) = \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i X_{i+j})}{\sum_{k=1}^n E(X_k X_k)}, \quad j=0, 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Mamy wówczas



**Twierdzenie 2.1.** Niech lincuch (2.1) będzie kodem Freemana ustalonego konturu zamkniętego. Przy założeniach (2.2)-(2.4), funkcja korelacyjna (2.5) wyraża się wzorem:

$$K_{aa}(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_{ij} \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j}), \quad j=0,1,\dots,n \quad (2.6)$$

gdzie:

$$c_{ij} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{a_i + a_{i+j}}{2}} \quad i=1,\dots,n, \quad j=0,1,\dots,n. \quad (2.7)$$

**Dowód.** Obliczmy najpierw

$$E(X_1 X_{1+j}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{0,5(3-(-1)^{a_1+4\varphi/\pi})} \sqrt{0,5(3-(-1)^{a_{1+j}+4\varphi/\pi})} \cos\left(\frac{\pi}{4}a_1+\varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}a_{1+j}+\varphi\right) \mathcal{E}\phi(\varphi) d\varphi$$

dla  $i=1,\dots,n, \quad j=0,1,\dots,n.$

Mamy

$$E(X_1 X_{1+j}) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{4} (a_1 - a_{1+j}), & \text{gd } a_1 - a_{1+j} \text{ parzyste,} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4} (a_1 - a_{1+j}), & \text{gd } a_1 - a_{1+j} \text{ nieparzyste.} \end{cases}$$

W szczególności

$$E(X_k X_k) = \frac{3}{4} \quad \text{dla } k=1,2,\dots,n.$$

Stąd

$$\sum_{k=1}^n E(X_k X_k) = \frac{3}{4} n$$

oraz

$$\frac{E(X_i X_{i+j})}{\sum_{k=1}^n E(X_k X_k)} = \frac{1}{n} c_{ij} \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j})$$

przy oznaczeniach (2.7). Po podstawieniu do (2.5) otrzymujemy stąd (2.6), co kończy dowód.

Funkcję (2.6) będziemy dalej nazywać łańcuchową funkcją korelacyjną konturu. Podobną funkcję korelacyjną rozpatruje się w pracy [1], gdzie pomija się współczynniki (2.7):

$$K_{aa}^F(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j}), \quad j=0,1,\dots,n. \quad (2.8)$$

Odpowiada to ciągowi (2.2) z jednostkowymi amplitudami:

$$X_i = \cos\left(\frac{\pi}{4} a_i + \phi\right), \quad i=1,\dots,n.$$

Mimo tej różnicy modeli losowych, wartości funkcji (2.6) i (2.8) różnią się nieznacznie. Mamy mianowicie

Twierdzenie 2.2. Dla dowolnego łańcucha zamkniętego (2.1), funkcji korelacyjnej (2.6) i (2.8) spełniają oszacowanie

$$d(K_{aa}, K_{aa}^F) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| K_{aa}(j) - K_{aa}^F(j) \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3} \approx 0,02 \quad (2.9)$$

Ponadto oszacowanie to jest najlepsze (minimalne).

Dowód. Zauważmy, że współczynniki  $c_{ij}$  określone przez (2.7) są różne od 1 tylko wtedy, gdy suma  $a_i + a_{i+j}$  jest nieparzysta. Wówczas

$$\left| \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j}) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.10)$$

Dla ustalonego łańcucha a niech  $m(a)$  oznacza ilość takich  $c_{ij} \neq 1$  w sumie (2.9) (jest tam  $n^2$  współczynników, zgodnie z (2.6)). Jeżeli w ciągu (2.1) jest  $k$  wyrazów nieparzystych i  $n-k$  wyrazów parzystych, to

$$m(a) = 2k(n-k)$$



Długość największa wartość  $m(a)$  wynosi:

$$m(a) = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{gdy } n \text{ parzyste, } k = \frac{n}{2} \\ \frac{n^2-1}{2}, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste, } k = \frac{n-1}{2} \text{ lub } k = \frac{n+1}{2} \end{cases}$$

Stąd dla dowolnego łańcucha (2.1) zachodzi oszacowanie

$$m(a) \leq \frac{n^2}{2} \quad (2.11)$$

Korzystając z (2.6), (2.8) i (2.10), oszacujemy teraz

$$\begin{aligned} \left| K_{aa}(j) - K_{aa}^F(j) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (c_{ij}-1) \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j}) \right| \leq \\ &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-c_{ij}) \left| \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j}) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2n} \sum_{i=1}^n (1-c_{ij}). \end{aligned}$$

Stąd zgodnie z (2.9) i (2.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(K_{aa}, K_{aa}^F) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{2}}{2n} \sum_{i=1}^n (1-c_{ij}) = \frac{\sqrt{2}}{2n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (1-c_{ij}) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2n^2} \frac{n^2}{2} \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3} \approx 0,02 \end{aligned}$$

co dowodzi oszacowania w (2.9). Oszacowanie to jest minimalne, bo na przykład dla łańcucha

$$a = 0035$$

mamy

$$d(K_{aa}, K_{aa}^F) = \frac{8}{16} \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \left| \frac{-\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}$$

czyli  $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}$  jest kresem górnym odległości  $d(K_{aa}, K_{aa}^F)$  dla zbioru wszystkich łańcuchów kodowych (2.1) (o ustalonej długości).



Oszacowanie (2.9) uzasadnia zastępowanie dokładnej funkcji korelacyjnej (2.6) przez jej przybliżenie (2.8), które jest łatwiejsze do obliczenia. Ponieważ odległość dwóch funkcji korelacyjnych rozumiana tak jak we wzorze (2.9) nie przekracza jedynki, więc błąd względny przybliżenia (2.8) jest rzędu 2%.

Zauważmy, że metoda funkcji korelacyjnych pozwala pomijać czynnik losowy kodowania konturu opisany założeniami (2.2) i (2.3). Na tej podstawie do charakteryzacji konturów można próbować zastosować podejście czysto statystyczne polegające na bezpośrednim wyznaczeniu współczynników korelacji seryjnej dla ogniw łańcucha kodowego (2.1).

Każde ogniwo łańcucha (2.1) wyznacza na płaszczyźnie zespolonej liczbę

$$x_k = \sqrt{0.5(3 - (-1)^{a_k})} e^{i \frac{\pi}{4} a_k} \quad k=1, \dots, n \quad (2.12)$$

gdzie  $i^2 = -1$ . Ze względu na to, że kontur jest zamknięty, suma tych liczb jest równa zero, czyli średnia arytmetyczna ciągu (2.12) jest równa zero. Przedłużając cyklicznie ciągi (2.1) i (2.12) wzorami

$$a_{n+k} = a_k, \quad x_{n+k} = x_k, \quad k=1, \dots, n \quad (2.13)$$

możemy stosować wzory na współczynniki cyklicznej korelacji seryjnej [2]:

$$r_j(a) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k (x_{k+j})^*}{\sum_{k=1}^n x_k (x_k)^*}, \quad j=0, 1, \dots, n \quad (2.14)$$

gdzie  $*$  oznacza sprzężenie liczby zespolonej.

Mamy więc

Twierdzenie 2.3. Jeżeli (2.1) jest łańcuchem konturu zamkniętego przy oznaczeniach (2.12)-(2.14), to funkcja korelacyjna

$$K_{aa}^s(j) = \text{rer}_j(a), \quad j=0, 1, \dots, n \quad (2.15)$$

wyraża się wzorem

$$K_{aa}^s(j) = \sum_{k=1}^n d_{kj} \cos \frac{\pi}{4} (a_k - a_{k+j}), \quad j=0, 1, \dots, n \quad (2.16)$$



gdzie:

$$d_{k,j} = \frac{\frac{2-(-1)^{a_k}}{4} - \frac{(-1)^{a_{k+j}}}{4}}{\sum_{l=1}^n 0,5(3 - (-1)^{a_l})} \quad k=1, \dots, n, \quad j=0, 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Dowód. Obliczmy

$$\begin{aligned} \chi_k(X_{k+j}) &= \sqrt{0,5(3 - (-1)^{a_k})} \sqrt{0,5(3 - (-1)^{a_{k+j}})} e^{i \frac{\pi}{4} a_k - i \frac{\pi}{4} a_{k+j}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(3-(-1)^{a_k})(3-(-1)^{a_{k+j}})} e^{i \frac{\pi}{4} (a_k - a_{k+j})} = \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4} (a_k - a_{k+j})}, \quad \text{gdy } a_k - a_{k+j} \text{ nieparzyste,}$$

$$= \begin{cases} e^{i \frac{\pi}{4} (a_k - a_{k+j})}, & \text{gdy } a_k, a_{k+j} \text{ parzyste,} \\ 2e^{i \frac{\pi}{4} (a_k - a_{k+j})}, & \text{gdy } a_k, a_{k+j} \text{ nieparzyste,} \end{cases}$$

dla  $k=1, \dots, n, \quad j=0, 1, \dots, n$ . Stąd w szczególności iloczyny

$$\chi_k(X_k)^* = 0,5(3-(-1)^{a_k}), \quad k=1, \dots, n$$

są liczbami rzeczywistymi oraz

$$\text{rer}_j(a) = \frac{\sum_{k=1}^n \text{re } \chi_k(X_{k+j})^*}{\sum_{k=1}^n \chi_k(X_k)^*} = \sum_{k=1}^n d_{k,j} \text{re } e^{i \frac{\pi}{4} (a_k - a_{k+j})}$$

przy oznaczeniach (2.17), co zgodnie z (2.15) dowodzi (2.16).

Funkcja korelacyjna (2.16) zawiera podstawową informację statystyczną o konturze zakodowaną w łańcuchu (2.1), ale jest bardziej kłopotliwa przy obliczaniu niż funkcje (2.6) i (2.8). Porównanie funkcji (2.16) z funkcją



(2.8) przy pomocy odległości wykresów nie wypada tak pomyślnie jak dla funkcji (2.6). Dlatego nie będziemy się nad tym zatrzymywać, a porównanie wykresów przeprowadzimy tylko dla konkretnego konturu (rys. 4.2).

### 3. Własności łańcuchowych funkcji korelacji

Przedstawimy teraz własności podanych funkcji korelacyjnych związane z najprostszymi operacjami na łańcuchach kodowych. Nadal zakładamy, że kontur jest zamknięty i przedłużamy łańcuch (2.1) cyklicznie do podwójnej długości  $a_1 a_2, \dots, a_{2n}$

$$a_{n+i} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Lemat 3.1. Niech  $h$  będzie funkcją typu  $h: R^2 \rightarrow R$ .

Jeżeli

$$K(a, j) = \sum_{i=1}^h h(a_i, a_{i+j}), \quad j=0, 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

to

$$K(a, n-j) = \sum_{i=1}^n h(a_{i+j}, a_i), \quad j=0, 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

gdzie  $n$  jest długością łańcucha  $a$ . Jeżeli ponadto funkcja  $h$  jest symetryczna, czyli

$$h(x, y) = h(y, x) \quad (3.4)$$

dla  $x, y \in R$ , to

$$K(a, j) = K(a, n-j), \quad j=0, 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Dowód. Ustalmy  $j$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Można napisać

$$K(a, n-j) = \sum_{i=1}^n h(a_i, a_{i+n-j}) = \sum_{i=1}^j h(a_i, a_{i+n-j}) + \sum_{i=j+1}^n h(a_i, a_{i+n-j}),$$



ale na podstawie (3.1) mamy  $a_i = a_{n+1}$  dla  $i=1, \dots, j$  oraz:

$$a_{i+n-j} = a_{i-j} \quad \text{dla } i=j+1, \dots, n,$$

skąd

$$K(a, n-j) = \sum_{i=1}^j h(a_{n+1}, a_{n-j+i}) + \sum_{i=j+1}^n h(a_i, a_{i-j}).$$

Przyjmując  $k = n-j+i$  w pierwszej sumie i  $k=i-j$  w drugiej sumie, otrzymujemy

$$K(a, n-j) = \sum_{h=n-j+1}^n h(a_{k+j}, a_k) + \sum_{k=1}^{n-j} h(a_{k+j}, a_k) = \sum_{k=1}^n h(a_{k+j}, a_k),$$

co dowodzi zależności (3.3). Natomiast zależność (3.5) wynika bezpośrednio z (3.2) i (3.3) po wykorzystaniu (3.4). To kończy dowód lematu.

**Twierdzenie 3.1.** Funkcje korelacyjne (2.6), (2.8) i (2.16) dla konturów zamkniętych mają wykresy symetryczne osiowo.

**Dowód.** Rozważmy funkcje

$$h_1(x, y) = \cos \frac{\pi}{4} (x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$h_2(x, y) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{0.5(1-(-1)^{x+y})}, \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad (3.6)$$

$$h_3(x, y) = 2^{0,25(2-(-1)^x-(-1)^y)}, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Funkcje te spełniają warunek

$$h_i(x, y) = h_i(y, x), \quad i=1, 2, 3$$

w swoich dziedzinach, czyli są symetryczne w sensie warunku (3.4). Ponadto funkcje korelacyjne (2.6), (2.8) i (2.16) można przy pomocy funkcji (3.6) zapisać następująco



$$K_{aa}(j) = \sum_{i=1}^{n-1} c_1(a) h_2(a_i, a_{i+j}) h_1(a_i, a_{i+j})$$

$$K_{aa}^F(j) = \sum_{i=1}^n c_1(a) h_1(a_i, a_{i+j}), \quad (3.7)$$

$$K_{aa}^S(j) = \sum_{i=1}^n c_2(a) h_1(a_i, a_{i+j}) h_2(a_i, a_{i+j})$$

dla  $j=0, 1, \dots, n$ , gdzie

$$c_1(a) = \frac{1}{n}, \quad c_2(a) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n 0.5(3-(-1)^{a_i})}$$

Dlatego rozważane funkcje korelacyjne są postaci (3.2) z odpowiednią funkcją  $h$  spełniającą warunek (3.4) i możemy skorzystać z lematu 3.1. Stąd

$$K_{aa}(j) = K_{aa}(n-j), \quad K_{aa}^F(j) = K_{aa}^F(n-j), \quad K_{aa}^S(j) = K_{aa}^S(n-j)$$

dla  $j=0, 1, \dots, n$ , co znaczy istnienie osi symetrii o równaniu  $x = \frac{n}{2}$ . To kończy dowód twierdzenia.

Lemat 3.2. Niech  $h: R^2 \rightarrow R$ , a  $m$  będzie liczbą całkowitą  $0 \leq m \leq n$ . Jeżeli

$$b = b_1 b_2 \dots b_n, \quad b_i = a_{i+m}, \quad b_{i+n} = b_i \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

to funkcja (3.2) spełnia warunek

$$K(b, j) = K(a, j), \quad j=0, 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Dowód. Ustalmy  $j$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Mamy

$$K(b, j) = \sum_{i=1}^n h(b_i, b_{i+j}) = \sum_{i=1}^n h(a_{m+i}, a_{m+i+j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} h(a_{m+i}, a_{m+i+j}) + \sum_{i=n-m+1}^n h(a_{m+i}, a_{m+i+j}).$$



Dokonując zamiany wskaźników sumowania na  $k=m+1$  w pierwszej sumie i  $k=n-(m+1)$  w drugiej sumie, możemy zgodnie z (3.1) napisać

$$K(b, j) = \sum_{k=m+1}^n h(a_k, a_{k+j}) + \sum_{k=1}^m h(a_{n+k}, a_{n+k+j}) = \sum_{k=1}^n h(a_k, a_{k+1}) = K(a, j),$$

co należało udowodnić.

**Twierdzenie 3.2.** Wartość funkcji korelacyjnych (2.6), (2.8) i (2.16) nie zależy od wyboru ogniwa początkowego w zamkniętym łańcuchu kodowym (2.1).

**Dowód.** Dla konturu zamkniętego zmiana początku łańcucha kodowego (2.1) powoduje cykliczne przesunięcie opisane wzorami (3.9). To, zgodnie z lematem 3.2, nie zmienia wartości funkcji korelacyjnej (3.2), której szczególnymi przypadkami są funkcje (2.6), (2.8) i (2.16) zgodnie ze wzorami (3.6)-(3.8).

**Lemat 3.3.** Niech  $h: R^2 \rightarrow R$  spełnia warunek (3.4). Jeżeli

$$b = b_1 b_2 \dots b_n, \quad b_i = a_{n+1-i}, \quad b_{i+n} = b_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.11)$$

to funkcja (3.2) spełnia warunek (3.10).

**Dowód.** Ustalmy  $j$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Zgodnie z (3.2) i (3.11) mamy

$$K(b, j) = \sum_{i=1}^{n-j} h(b_i, b_{i+j}) + \sum_{i=n-j+1}^n h(b_i, b_{i+j}) = \sum_{i=1}^{n-j} h(a_{n+1-i}, a_{n+1-i-j}) + \\ + \sum_{i=n-j+1}^n h(a_{n+1-i}, a_{2n+1-i-j}),$$

a przyjmując  $k=n+1-i-j$  w pierwszej sumie i  $k=2n+1-i-j$  w drugiej sumie, otrzymujemy

$$K(b, j) = \sum_{k=1}^{n-j} h(a_{k+j}, a_k) + \sum_{k=n-j+1}^n h(a_{n+n+j}, a_k) = \sum_{k=1}^n h(a_{k+j}, a_k)$$

to dla funkcji symetrycznej  $h$  jest równoważne z (3.10), zgodnie z lematem 5.1.



Twierdzenie 3.3. Wartość funkcji korelacyjnych (2.6), (2.8) i (2.16) nie ulega zmianie, gdy zamknięty łańcuch kodowy (2.1) ponumerujemy w odwrotnej kolejności.

Dowód. Odwrócenie kolejności w łańcuchu kodowym (2.1) jest opisane wzorami (3.11), co na podstawie lematu 3.3 nie zmienia wartości funkcji (3.2), niezależnie od postaci funkcji symetrycznej  $h$ . Dlatego zgodnie z (3.2), (3.7) i (3.10) możemy napisać

$$K_{aa}(j) = K_{bb}(j), \quad K_{aa}^F(j) = K_{bb}^F(j), \quad K_{aa}^S(j) = K_{bb}^S(j), \quad j=0,1,\dots,n$$

czyli twierdzenie jest prawdziwe.

Lemat 3.4. Niech  $h: R^2 \rightarrow R$ , a  $m$  będzie liczbą naturalną. Jeżeli

$$b = b_1 b_2 \dots b_{mn}, \quad n_{kn+i} = a_i, \quad i=1,\dots,n, \quad k=0,1,\dots,(2m-1)n, \quad (3.12)$$

to funkcja (3.2) dla łańcucha  $b$ , czyli

$$K(b, j) = \sum_{i=1}^{mn} h(b_i, b_{i+j}), \quad j=0,1,\dots, mn \quad (3.13)$$

spełnia zależności

$$K(b, j+ln) = K(b, j) = mK(a, j) \quad (3.14)$$

dla  $j=0,1,\dots,n$ ,  $l=0,1,\dots,m-1$ .

Dowód. Ustalmy liczby  $l$  i  $j$ ,  $0 \leq l \leq m-1$ ,  $0 \leq j \leq n$ . Obliczmy

$$K(b, j) = \sum_{i=1}^{mn} h(b_i, b_{i+j}) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^n h(b_{k+1}, b_{kn+i+j}),$$

Zgodnie z określeniem (3.12) mamy

$$b_{kn+i} = a_i, \quad b_{kn+i+j} = a_{i+j}, \quad b_{(k+1)n+i+j} = a_{i+j}$$



dla odpowiednich wartości wskaźników, skąd

$$K(b, j) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^n h(a_i, a_{i+j}) = \sum_{k=0}^{m-1} K(a, j) = mK(a, j)$$

oraz

$$K(b, j+ln) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^n h(b_{kn+i}, b_{kn+i+j+ln}) = \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^n h(a_i, a_{i+j}) = mK(a, j).$$

To razem daje (3.14).

Twierdzenie 3.4. Jeżeli kontur zamknięty o łańcuchu kodowym (2.1) zostanie zakodowany wielokrotnie przez wielokrotne okrążenie konturu, to funkcje korelacyjne (2.6), (2.8) i (2.16) dla nowego łańcucha kodowego będą okresowe o okresie  $n$  i dla argumentów od 0 do  $n$  będą się pokrywały z odpowiednimi funkcjami korelacyjnymi dla łańcucha (2.1).

Dowód. Niech kontur zamknięty zostanie zakodowany wielokrotnie przez  $m$ -krotne okrążenie dla pewnej liczby naturalnej  $m$ . Wówczas otrzymany ciąg kodowy wyraża się wzorem (3.12) i na podstawie lematu 3.4 możemy napisać:

$$K_{bb}(j+ln) = K_{bb}(j), \quad K_{bb}^F(j+ln) = K_{bb}^F(j), \quad K_{bb}^S(j+ln) = K_{bb}^S(j)$$

dla  $j=0, 1, \dots, n$ ,  $l=0, 1, \dots, m-1$ , co oznacza okresowość funkcji korelacyjnych (2.6), (2.8) i (2.16).

Ponadto dla łańcucha (3.12), zgodnie z (3.8), otrzymujemy

$$c_1(b) = \frac{c_1(a)}{m}, \quad c_2(b) = \frac{c_2(a)}{m}$$

co po uwzględnieniu (3.2), (3.7), (3.13) i (3.14) daje

$$K_{bb}(j) = K_{bb}(j); \quad K_{bb}^F(j) = K_{aa}^F(j), \quad K_{bb}^S(j) = K_{aa}^S(j)$$

dla  $j=0, 1, \dots, n$ , czyli cykliczne przedłużanie łańcucha kodowego powoduje cykliczne przedłużanie jego funkcji korelacyjnej, niezależnie od wyboru wzoru (2.6), (2.8) czy (2.16).

To kończy dowód twierdzenia.

Z podanych twierdzeń wynika, że informacja o konturze zawarta w rozważanych funkcjach korelacyjnych nie zmienia się przy cyklicznych operacjach



na łańcuchach kodowych. Ponadto, ze względu na symetrię wykresów funkcji korelacyjnych informacje tę możemy odczytać już z połowy wykresu, co może skrócić o połowę czas obliczeń potrzebnych do wyznaczenia wykresów.

W związku z twierdzeniem 3.4 może pojawić się pytanie, czy z okresowości funkcji korelacyjnej można wnioskować o okresowości łańcucha korelacyjnego. Dla funkcji korelacyjnych rozważanych w tej pracy przypuszczenie takie jest prawdziwe, jednakże dowód tego faktu wymaga dokładniejszego wykorzystania postaci tych funkcji niż w poprzednich rozważaniach.

Twierdzenie 3.5. Dla ustalonych liczb naturalnych  $m$  i  $n$  niech

$$b = b_1 b_2 \dots b_{mn}, \quad b_{mn+i} = b_i, \quad i=1, 2, \dots, mn. \quad (3.15)$$

Jeżeli funkcja korelacyjna (2.6), (2.8) lub (2.16) dla łańcucha  $b$  ma okres  $n$ , to także łańcuch  $b$  ma okres  $n$ , czyli

$$b_{i+n} = b_i, \quad i=1, 2, \dots, (m-1)n. \quad (3.16)$$

Dowód. Rozważmy najpierw funkcję (3.13) dla łańcucha (3.15). Jeżeli funkcja ta ma okres  $n$ , to

$$K(b, j+n) = K(b, j),$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{mn} (h(b_i, b_{i+j}) - h(b_i, b_{i+j+n})) = 0$$

dla  $j=0, 1, \dots, (m-1)n$  i dla odpowiedniej funkcji  $h$ . W szczególności dla  $j=0$  otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{mn} (h(b_i, b_i) - h(b_i, b_{i+n})) = 0 \quad (3.17)$$

Zgodnie z zależnościami (3.6)-(3.8) zapiszemy teraz odpowiednie sumy (3.17) dla każdej z funkcji (2.6), (2.8) i (2.16) i wykażemy, że wszystkie składniki tej sumy są nieujemne. Mamy kolejno

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{1}{mn} \left( 1 - \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{0,5(1-(-1)^{b_i+b_{i+n}})} \right) \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n}) = 0 \quad (3.18)$$



$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{1}{mn} (1 - \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n})) = 0 \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{2 - \frac{(-1)^{b_i}}{4}}{mn} \cdot \frac{-\frac{(-1)^{b_i}}{4}}{2} \cdot \frac{-\frac{(-1)^{b_{i+n}}}{4}}{-2} \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n}) = 0 \quad (3.20)$$

$$\sum_{k=1}^{mn} 0,5(1 - (-1)^{b_k})$$

Ponieważ

$$\cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n}) \leq 1, \quad \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) 0,5(1 - (-1)^{b_i + b_{i+n}}) \leq 1$$

dla  $i=1, 2, \dots, mn$ , więc wszystkie składniki sum (3.18) i (3.19) są nieujemne, skąd

$$\cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n}) = 1, \quad i=1, 2, \dots, mn \quad (3.21)$$

bo suma liczb nieujemnych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są równe zero.

Dla sumy (3.20) rozważymy wyrażenie

$$s_i = 2 \frac{-\frac{(-1)^{b_i}}{4}}{4} - 2 \frac{-\frac{(-1)^{b_{i+n}}}{4}}{4} \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n}), \quad i=1, 2, \dots, mn \quad (3.22)$$

w czterech następujących przypadkach:

a) gdy  $b_i$  i  $b_{i+n}$  są parzyste, to

$$s_i = 2^{-1/4} (1 - \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n})) \geq 0,$$

b) gdy  $b_i$  i  $b_{i+n}$  są nieparzyste, to

$$s_i = 2^{1/4} (1 - \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n})) \geq 0,$$

c) gdy  $b_i$  jest parzyste, a  $b_{i+n}$  jest nieparzyste, to

$$s_i = 2^{-1/4} - 2^{1/4} \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n}) \geq 2^{-1/4} - 2^{1/4} \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$$



d) gdy  $b_i$  jest nieparzyste, a  $b_{i+n}$  jest parzyste, to podobnie

$$s_i = 2^{1/4} - 2^{-1/4} \cos \frac{\pi}{4} (b_i - b_{i+n}) \geq 2^{1/4} - 2^{-3/4} > 0 \quad (3.23)$$

Rozważane przypadki wyczerpują wszystkie możliwości, więc wszystkie składniki sumy (3.20) są nieujemne, a zatem wszystkie wyrażenia (3.22) są równe zero. To jednak jest sprzeczne z oszacowaniem (3.23) w przypadku d), więc przy założeniach tego twierdzenia przypadek d) nie może się zdarzyć. Podobnie nie może wystąpić przypadek c), bo wówczas w ciągu

$$b_i, b_{i+n}, b_{i+2n}, \dots, b_{i+mn} = b_i$$

pojawlaby się para  $b_i, b_{i+n}$  spełniająca przypadek d) i zgodnie z (3.15) para taka wystąpiłaby w sumie (3.20), co wyżej uznaliśmy za niemożliwe. Dlatego pozostaje rozważyć zerowanie się (3.22) w przypadkach a) i b), skąd otrzymujemy (3.21).

Założenie o okresowości funkcji korelacyjnej (2.6), (2.8) lub (2.16) doprowadziło nas w każdym przypadku do zależności (3.21), gdzie

$$-7 \leq b_i - b_{i+n} \leq 7, \quad i=1, 2, \dots, mn.$$

Ponieważ funkcja  $1 - \cos x$  ma tylko jedno miejsce zerowe  $x=0$  w przedziale  $[-\frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]$ , więc bezpośrednio z (3.21) otrzymujemy (3.16), co kończy dowód twierdzenia.

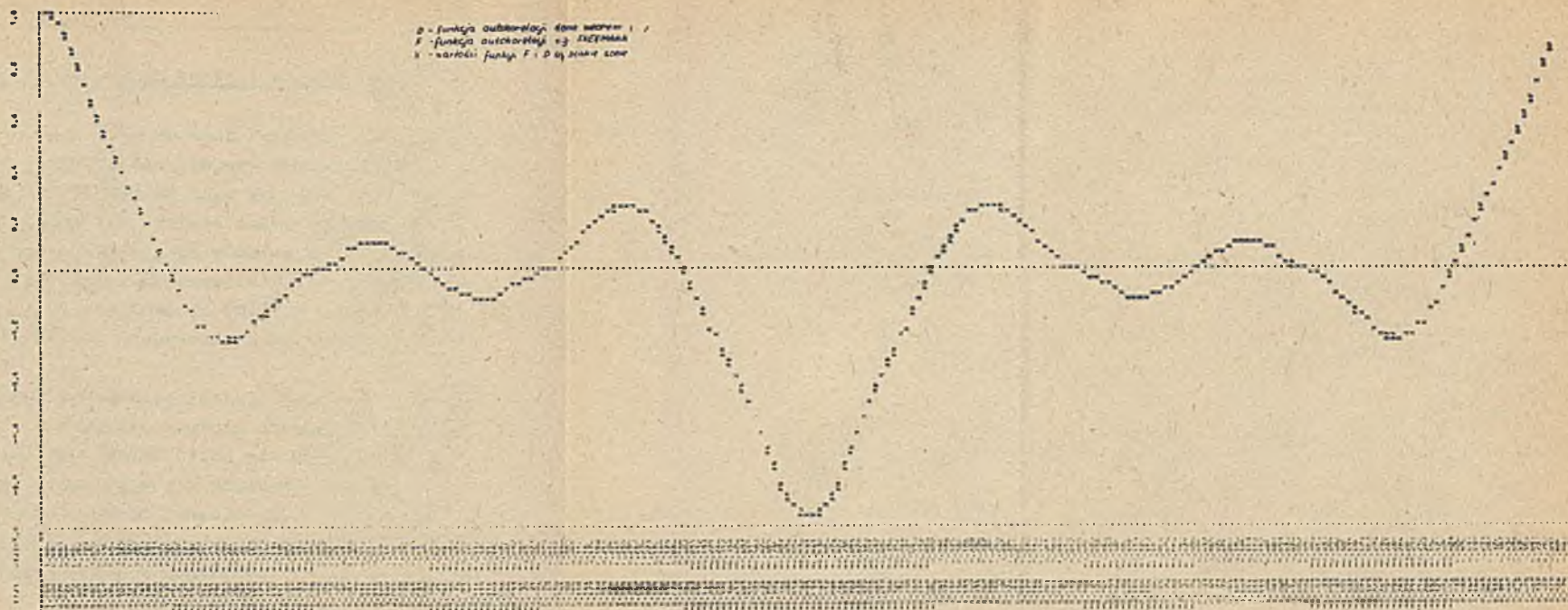
Bezpośrednio z twierdzenia 3.4 i 3.5 otrzymujemy następującą charakteryzację okresowości funkcji korelacyjnych:

**Twierdzenie 3.6.** Niech  $a$  będzie łańcuchem kodowym konturu zamkniętego. Funkcje korelacyjne (2.6), (2.8) i (2.16) są okresowe wtedy i tylko wtedy, gdy łańcuch kodowy  $a$  jest okresowy jako funkcja określona w zbiorze liczb naturalnych. Ponadto okresy funkcji korelacyjnej i łańcucha kodowego są równe.

Może się wydawać, po porównaniu twierdzeń 3.4-3.6, że wypowiedź twierdzenia 3.6 pomija pewne założenie istotne w dowodach poprzednich twierdzeń, mianowicie założenie, że wartość okresu jest dzielnikiem długości łańcucha kodowego. Jednakże przypuszczenie, że tak nie jest, przeczyłoby założeniu o zamkniętości konturu, bo - w przypadku okresowości - jeden cykl łańcucha kodowego oznacza jedno pełne okrążenie konturu przy kodowaniu. Zatem twierdzenie 3.6 jest pełnym podsumowaniem twierdzeń 3.4 i 3.5.



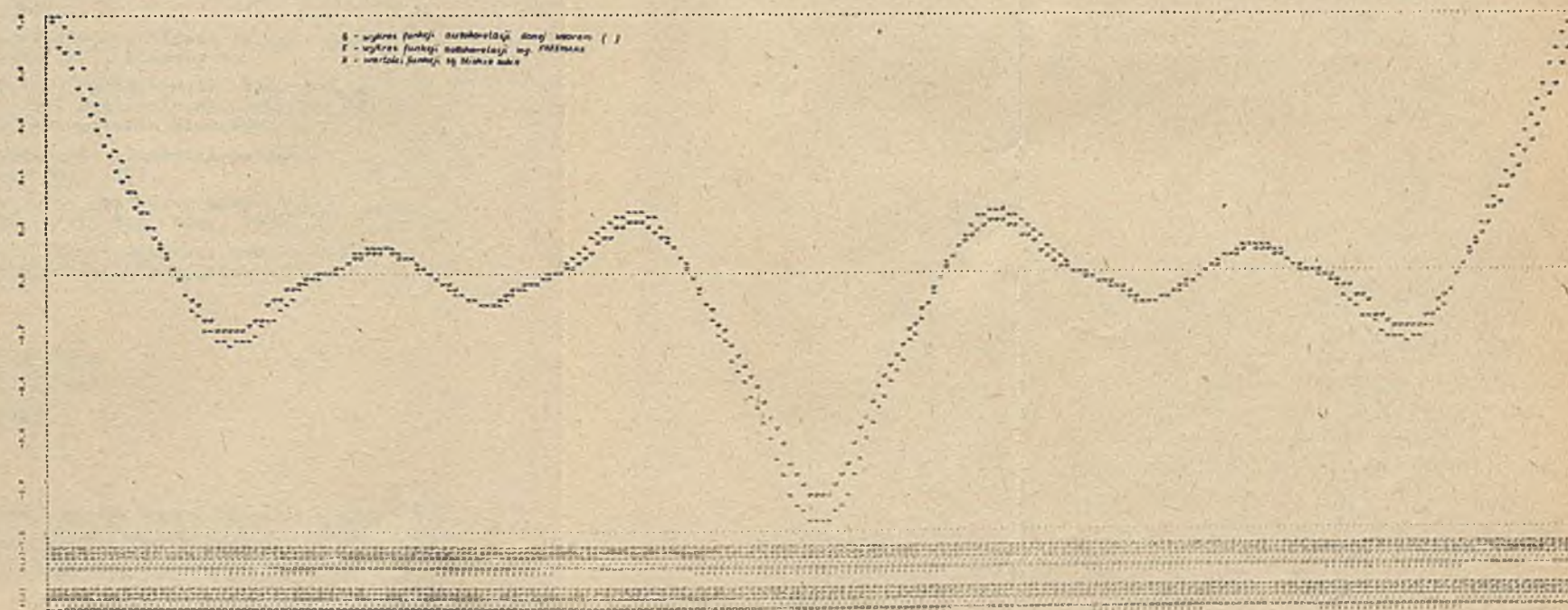
PACIENIE SĄCZONY, OBLICZENIE LITER "P" - STANOWI WYKRESY I ILLUSTRACJE WYKRESY



Rys. 4.1. Wykres omawianych funkcji korelacyjnych

PACIENIE SĄCZONY, OBLICZENIE LITER "P" - STANOWI WYKRESY I ILLUSTRACJE WYKRESY

PACIENIE SĄCZONY, OBLICZENIE LITER "P" - STANOWI WYKRESY I ILLUSTRACJE WYKRESY



Rys. 4.2. Wykres omawianych funkcji korelacyjnych



#### 4. Przykład numeryczny łańcuchowych funkcji korelacyjnych

W celu zilustrowania postaci łańcuchowych funkcji korelacji dokonano obliczeń numerycznych tych funkcji dla konturu obrazu chromosomu zakodowanego kodem Freemana. Komputerowy wydruk tego konturu przedstawiono w lewej części rysunku 4.1. Rysunek ten zawiera także wykresy funkcji korelacyjnych (2.6) i (2.8). Można zauważyć, że różnice w ich przebiegu są bardzo małe, co jest także ilustracją twierdzenia 2.2. Jednakże czas obliczeń na maszynie cyfrowej jest dla funkcji (2.8) 2,5 raza mniejszy niż dla funkcji (2.6). Zatem dla obliczeń numerycznych korzystniejsze jest stosowanie funkcji (2.8).

Interesujące jest również porównanie funkcji (2.8) z funkcją (2.16) przedstawione na rysunku 4.2 (też dla konturu chromosomu). Funkcja (2.16) wykazuje większe odchylenia od funkcji (2.8) niż funkcja (2.6). Warto jednak zauważyć, że przejścia przez zero jak również ekstrema obu funkcji są w tym samych miejscach. Czas obliczeń funkcji (2.16) jest około 10 razy dłuższy niż dla funkcji (2.8), co zmniejsza jej praktyczną przydatność w analizie komputerowej większej ilości konturów.

#### LITERATURA

- [1] Freeman H.: Computer Processing of line-Drawing Images, Computing Surveys, 6 (1974), pp. 57-97.
- [2] Anderson T.W.: The Statistical Analysis of Time Series, John Wiley and Sons, Inc., New York 1971, Chapter 6.
- [3] Czogała A., Ihnatowicz J.: Zastosowanie łańcuchowych funkcji korelacji do analizy aberracji strukturalnych chromosomów, Mat. III Kraj. Konf. "Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna, Wrocław, 12-14.02.1979.
- [4] Gallus G.: An Introduction to pictorial pattern recognition, CERN - Data Handling Division, July 1972.
- [5] Jagielski J., Skawiński W.: Analiza i klasyfikacja chromosomów przy użyciu maszyn cyfrowych. Pol. Tyg. Lek., 1974, 29, 1243.
- [6] Czogała E., Drewniak J., Ihnatowicz J.: Geometryczne własności łańcuchowych funkcji korelacyjnych (w przygotowaniu).

ЦЕПНЫЕ ЛИНИИКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ  
В КОМПЬЮТЕРНОМ АНАЛИЗЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ  
С НЕРЕГУЛИРОВАННЫМИ КОНТУРАМИ

#### Резюме

В статье описаны три типа корреляционной функции, связанные с компьютерным анализом контуров изображений. Представлены их свойства, касающиеся разнообразия выступающих при кодировании контуров. Даны также диаграммы.



CHAIN CORRELATION FUNCTION IN COMPUTER ANALYSIS  
OF PATTERN WITH IRREGULAR CONTOURS

S u m m a r y

In the paper three types of correlation functions are described. Each of these functions may be used for computer analysis of image contours. The properties and the diagrams of these function are presented too.