

Witold PEDRYCZ

## O METODZIE PREDYKCJI OPARTEJ NA LOGICE WIELOWARTOŚCIOWEJ

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono metodę predykcji opartą na relacji rozmytej, gdzie proces został opisany w sposób następujący:

$$X_{k+1}^i = X_k^i \circ R$$

gdzie:

$X_{k+1}^i, X_k^i$  - zbiory rozmyte określające stan procesu w  $k$  i  $(k+1)$ -szej chwili czasu,

$R = \bigcup_{\substack{i=1,2,\dots,J \\ j=1,2,\dots,J}} R^{ij}$  - relacja rozmyta.

Metodę zilustrowano przykładem numerycznym. Dokonano również porównania tej metody z metodą filtracji statystycznie optymalnej, jak i rozważono możliwość i celowość implementacji komputerowej tego typu algorytmów.

1. Wstęp

Stan wielu złożonych procesów przemysłowych określony jest zarówno przez wielkości mierzalne (np. temperatura, ciśnienie) jak i wielkości niemierzalne (np. kolor, konsystencja). Wartości pierwsze uzyskiwane są przy użyciu przyrządów pomiarowych, natomiast drugie z nich, nie mniej ważne do scharakteryzowania stanu, w sposób subiektywny określone są przez doświadczonego człowieka - operatora danego procesu. Tak określony stan jest podstawą podejmowania decyzji, tzn. określenia sterowania dla uzyskania zadanego celu, przy założonych ograniczeniach na wielkości sterujące. W celu zastąpienia operatora lub zwiększenia efektywności podejmowanych przez niego decyzji wprowadza się maszyny cyfrowe pracujące w czasie rzeczywistym; stąd wynika konieczność matematycznej formalizacji opisu obiektu z uwzględnieniem wielkości niemierzalnych. Formalizacja ta jest możliwa przy wykorzystaniu aparatu pojęciowego teorii zbiorów rozmytych [1, 2, 4].

Niniejsza praca przedstawia koncepcję opisu obiektu opartą na relacji rozmytej i wykorzystanie tego sposobu dla celów predykcji stanu sterowanego procesu.

Została omówiona również możliwość zastosowania niniejszego podejścia do rozwiązywania specyficznych problemów pojawiających się przy tworzeniu algorytmów sterowania w rozważanych w informatyce systemach operator-maszyna cyfrowa-obiekt.

## 2. Sformułowanie problemu i jego rozwiązanie

Przyjmijmy, że stan rozważanego procesu określony jest przez wektor stanu, którego pewne współrzędne są wielkościami liczbowymi (wielkości mierzalne), pozostałe natomiast zmiennymi lingwistycznymi [2] (wielkości niemierzalne); przy czym można wyróżnić  $J$  stanów charakterystycznych, w jakich proces może się znajdować.

W kolejnych chwilach czasu (gdzie czas będziemy rozumieć jako czas obiektu (procesu) a nie jako czas astronomiczny) ewolucja procesu określona jest przez relację rozmytą  $R$  będącą podzbiorem kartezjańskim stanów  $X_k, X_{k+1}$  w kolejnych chwilach czasu  $k, k+1$ :

$$R = \bigcup_{\substack{i=1,2,\dots,J \\ j=1,2,\dots,J}} R^{i,j} \quad \text{gdzie } R^{i,j} \subset X_k^i \times X_{k+1}^j \quad (1)$$

$$X_k = \bigcup_{i=1,2,\dots,J} X_k^i \quad (2)$$

$$X_k, X_{k+1} \in F(X) \quad (3)$$

Relacja rozmyta  $R$ , kolejne stany procesu charakteryzowane są przez funkcje przynależności, odpowiednio:

$$X_k^i \mu_{X_k^i}(x) \quad i=1,2,\dots,J \quad (4)$$

$$X_{k+1}^j \mu_{X_{k+1}^j}(\xi) \quad j=1,2,\dots,J \quad x, \xi \in X \quad (5)$$

$$R^{i,j} \mu_{R^{i,j}}(x, \xi, u) \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,J \\ j=1,2,\dots,J \end{matrix} \quad (6)$$

gdzie:  $u \in U \subset R^m$  jest zdeterminowanym sterowaniem ze zbioru sterowań dopuszczalnych będących podzbiorem  $m$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej, natomiast w funkcji przynależności  $\mu_{R^{i,j}}(x, \xi, u)$  spełnia rolę parametru, tzn.



$$\mu_{R^{i,j}}(x, \xi, u_0) = \mu_{R^{i,j}}(x, \xi, u) \delta_{u, u_0} \quad u, u_0 \in U \quad (7)$$

gdzie:  $\delta_{u, u_0}$  jest symbolem delty Kroneckera.

W dalszych rozważaniach stosować będziemy zapis  $\mu_{R^{i,j}}(x, \xi)$ . Podobnie jak relację rozmytą  $R$ , możemy wprowadzić relację rozmytą  $O$  obserwacji, przeprowadzającą zbiór rozmyty  $X_{k+1}$  w rozmyty podzbiór przestrzeni obserwacji  $Y$

$$O \subset X_{k+1} \rightarrow Y \quad (8)$$

gdzie relacja rozmyta  $O$  może zmniejszać lub zwiększać stopień rozmycia stanu  $X_{k+1}$ .

Warto zwrócić uwagę na analogię występującą pomiędzy powyższym opisem przy użyciu relacji rozmytej a opisem procesu wykorzystującym równania różniczkowe, przejawiającą się w strukturze obu opisów:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ RC \ X_k \rightarrow X_{k+1} & \text{ opis stanu} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y &= g(x) \\ O \subset X_{k+1} \rightarrow Y & \text{ opis obserwacji} \end{aligned} \quad (10)$$

Przyjmijmy założenie o identyczności relacji rozmytej  $O$ :

$$\forall_{x \in X, y \in Y} \mu_O(x, y) = \delta_{x, y} \quad (11)$$

Pojęciowy aparat zbiorów rozmytych pozwala, przy znajomości stanu obiektu w chwili  $k$ -tej i danej relacji rozmytej  $R$ , na predykcję stanu w chwili  $(k+1)$ -szej, tzn. na wyznaczenie następnego stanu charakterystycznego, w jakim znajdzie się proces w zależności od zastosowanego sterowania. Korzystając ze złożeniowej reguły wnioskowania [3], otrzymujemy

$$X_{k+1}^{i'} = X_k^{i'} \circ R \quad (12)$$

gdzie:  $X_k^{i'}$  - zaobserwowany stan obiektu w chwili  $k$ -tej,

$$X_k^{i'} \subset X_k^d \quad (13)$$

\* Zawieranie z dokładnością do zbioru miary zero.

a  $X_{k+1}^i$  jest zbiorem rozmytym o funkcji przynależności  $\mu_{X_{k+1}^i}(x)$ :

$$\mu_{X_{k+1}^i}(x) = \bigvee_{\xi \in X} \bigvee_{j=1,2,\dots,J} [\mu_{R^i j}(x, \xi) \wedge \mu_{X_k^i}(\xi)] \quad x, \xi \in X \quad (14)$$

W wielu przypadkach interesujące byłoby, przy zadanej relacji rozmytej  $R$  opisującej obiekt i określonym w chwili  $k$ -tej stanie charakterystycznym (traktowanym jako zbiór rozmyty), wiedzieć, jakim zbiorem rozmytym, w sensie zachowania się jego funkcji przynależności, będzie stan charakterystyczny w chwili  $(k+1)$ -szej. Użyteczne będzie wprowadzenie miary rozmytości zbioru rozmytego, tzn. stopnia rozmycia zbioru [4], który zdefiniujemy następująco:

dla dowolnego zbioru rozmytego  $A \subset \mathcal{F}$  stopień rozmycia wynosi:

$$\vartheta(A) = \sum_{\xi \in \mathcal{F}} \left| \mu_A(\xi) - \mu_{\sim A}(\xi) \right|; \quad \mu_{\sim A}(\xi) = \chi_{N_A(\frac{1}{2})}(\xi) \quad (15)$$

gdzie:

$N_A(\frac{1}{2})$  jest  $\frac{1}{2}$ -obcięciem zbioru rozmytego  $A$ .

Można też w przypadku zbiorów normalnych  $X_{k+1}^i$  wprowadzić inny wskaźnik jakości predykcji

$$\vartheta(X_{k+1}^i) = \sum_{x \in X} \mu_{X_{k+1}^i}(x) \quad [6]. \quad (16)$$

Rozpatrując zatem stan  $X_{k+1}^i$  możemy napisać dla niego wzór na stopień rozmycia w postaci następującej:

$$\vartheta(X_{k+1}^i) = \sum_{\xi \in X} \left| \mu_{X_{k+1}^i}(\xi) - \mu_{\sim X_{k+1}^i}(\xi) \right| \quad (17)$$

$$\mu_{\sim X_{k+1}^i}(\xi) = \chi_{N_{X_{k+1}^i}(\frac{1}{2})}(\xi)$$

W obliczeniach stopnia rozmycia przydatny będzie poniższy:

#### Lemat

Jeżeli

$$\mu_{X_{k+1}^i}(\xi) = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{j=1,2,\dots,J} [\mu_{R^i j}(x, \xi) \wedge \mu_{X_k^i}(x)]$$



to:

$$\mu_{\sim X_{k+1}^{i'}}(\xi) = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{j=1,2,\dots,J} [\mu_{R^{i,j}}(x,\xi) \wedge \mu_{\sim X_k^{i'}}(x)] \quad (18)$$

Dowód:

$$\mu_{\sim X_{k+1}^{i'}}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \mu_{X_k^{i'}}(x) \leq \frac{1}{2} \text{ lub } \mu_{R^{i,j}}(x,\xi) \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{gdy } \mu_{X_k^{i'}}(x) > \frac{1}{2} \text{ i } \mu_{R^{i,j}}(x,\xi) > \frac{1}{2} \end{cases} =$$

$$\chi_{N_{X_k^{i'}}(\frac{1}{2})} \circ N_{R^{i,j}(\frac{1}{2})}(\xi)$$

W związku z tym stopień rozmycia wyraża się jak poniżej:

$$\begin{aligned} \vartheta(X_{k+1}^{i'}) &= \sum_{\xi \in X} \left| \bigvee_{x \in X} \bigvee_{j=1,2,\dots,J} [\mu_{R^{i,j}}(x,\xi) \wedge \mu_{X_k^{i'}}(x)] - \right. \\ &\quad \left. - \bigvee_{x \in X} \bigvee_{j=1,2,\dots,J} [\mu_{R^{i,j}}(x,\xi) \wedge \mu_{\sim X_k^{i'}}(x)] \right| \end{aligned}$$

Warunek narzucony na uzyskanie (nie przekroczenie) stopnia rozmycia stanu predykowanego można spełniać poprzez odpowiednie dokładne "pomiar" sytuacji danego procesu przez operatora ludzkiego lub (i) ustalenie precyzyjnej relacji rozmytej będącej formą matematycznego modelu rozważanego procesu.

A zatem, znając stopień rozmycia relacji R opisującej obiekt, można oszacować stopień rozmycia predykowanego stanu.

### 3. Przykład numeryczny

Ilustracją przeprowadzonych powyżej rozważań jest poniższy prosty przykład numeryczny, który przedstawia predykcję stanu charakterystycznego procesu, wykorzystującą relację rozmytą charakteryzującą obiekt.

Obiekt opisany jest stacjonarnym równaniem różniczkowym

$$\begin{aligned} \dot{x} + \Lambda x &= Bu + z \\ y &= x + w \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie:

$u = \text{const}$ ,

$z, w$  - są nieskorelowanymi szumami gaussowskimi o zerowych wartościach średnich i wariancjach

$$E(z^2) = \sigma_z^2 \quad (20)$$

$$E(w^2) = \sigma_w^2 \quad (21)$$

dotatkowo przy modelowaniu cyfrowym przyjęto  $\sigma_w^2 \ll \sigma_z^2$ .

Do obliczeń wykorzystamy równanie rozmyte

$$X_{k+1}^i = X_k^i \circ R \quad (22)$$

i przyjmiemy arbitralnie następujące funkcje przynależności

$$\mu_{R^i j}(x, \xi) = \varphi(i, j) \cdot e^{-\frac{(x - \frac{\Delta j}{2})^2}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{(\xi - \frac{\Delta i}{2})^2}{\alpha}}$$

$$\varphi(i, j) = e^{-|i-j|} \quad (23)$$

$$\mu_{X_k^i}(\xi) = e^{-\frac{(\xi - \frac{\Delta i}{2})^2}{\alpha}} \quad \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, J \\ j=1, 2, \dots, J \\ k=1, 2, \dots \end{array}$$

natomiast  $X_k^i$  i  $X_{k+1}^i$  są zdegenerowanymi zbiorami rozmytymi (zbiory jednopunktowe [3]);  $i, j$  są indeksami określającymi stan charakterystyczny; w tym przypadku jest to przedział liczbowy z zakresu zmian  $x$  przy  $u = \text{const}$ ,  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ , a  $\Delta$  jest określone równaniem

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{J} \quad (24)$$

$J$  jest ilością wyróżnionych stanów charakterystycznych obiektu, a  $\alpha$  przyjmujemy równe  $\alpha = \frac{5}{J}$ .

Zbadajmy zależność stopnia rozmycia zbioru  $X_k^i$ ,  $i=1, 2, \dots, J$ ,  $k=1, 2, \dots$  od ilości wyodrębnionych stanów charakterystycznych - jest ona przedstawiona na rysunku 1.





Rys. 1. Stopień rozmycia ( $J$ ) zbioru  $X_k^1$  w funkcji ilości wyróżnionych stanów charakterystycznych  $J$

W celu pełniejszego scharakteryzowania wyboru ilości stanów charakterystycznych  $J$  wprowadzmy współczynnik rozdzielczości  $r$ , który zdefiniujemy następująco



Rys. 2. Zależność współczynnika rozdzielczości  $r$  od ilości wyróżnionych stanów charakterystycznych  $J$

$$r = \mu'_x(x_{gran})$$

gdzie:

$$l = \left[ \frac{J}{2} \right]$$

$$x_{gran} = x_{min}$$

Interpretacja fizykalna wprowadzonego współczynnika jest następująca: określa on, jaki jest stosunek wartości funkcji przynależności w punkcie dostatecznie odległym od punktu, w którym przyjmuje ona wartość maksymalną, a zatem określa wpływ funkcji przynależności jednego zbioru na funkcję przynależności związaną z innym wyróżnionym zbiorem.

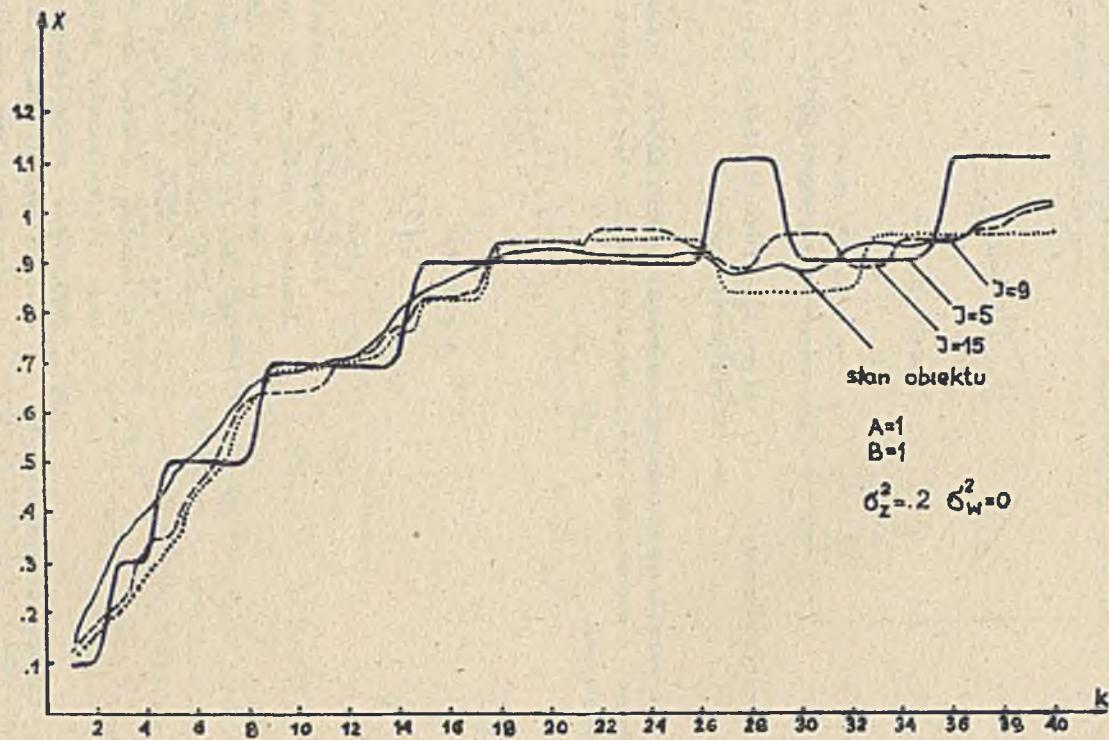
Dla przyjętych postaci funkcji przynależności jak powyżej zależność współczynnika rozdzielczości od ilości

stanów charakterystycznych ilustruje rysunek 2.

Przyjęcie określonego współczynnika rozdzielczości i stopnia rozmycia zbioru pozwala na określenie ilości stanów charakterystycznych.

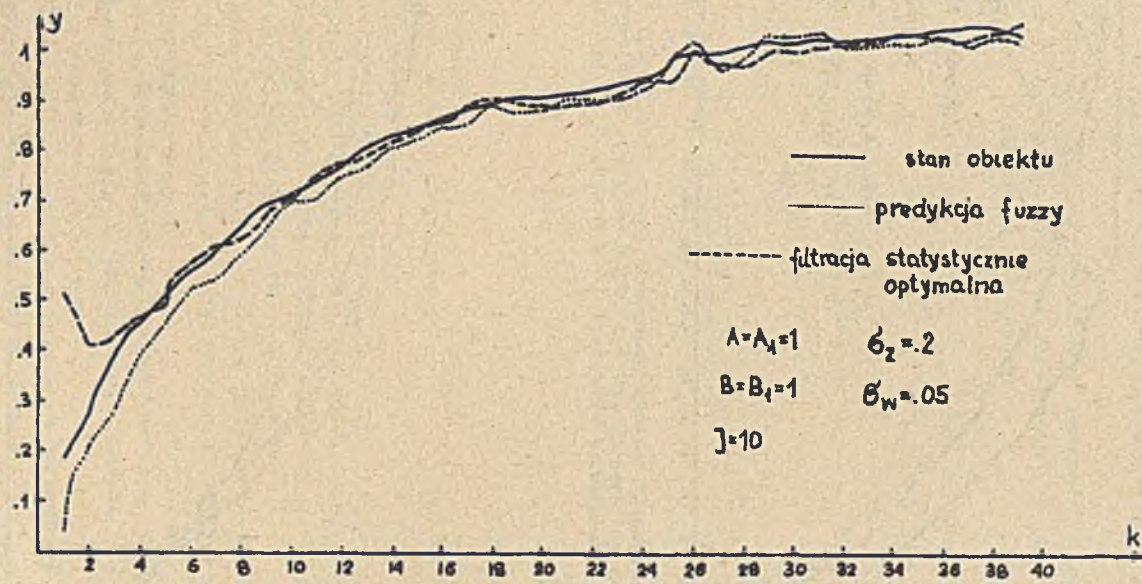
Z punktu widzenia zastosowań sytuacja zazwyczaj jest odwrotna, tzn. ustalona jest ilość stanów, możliwych do rozróżnienia przez operatora i





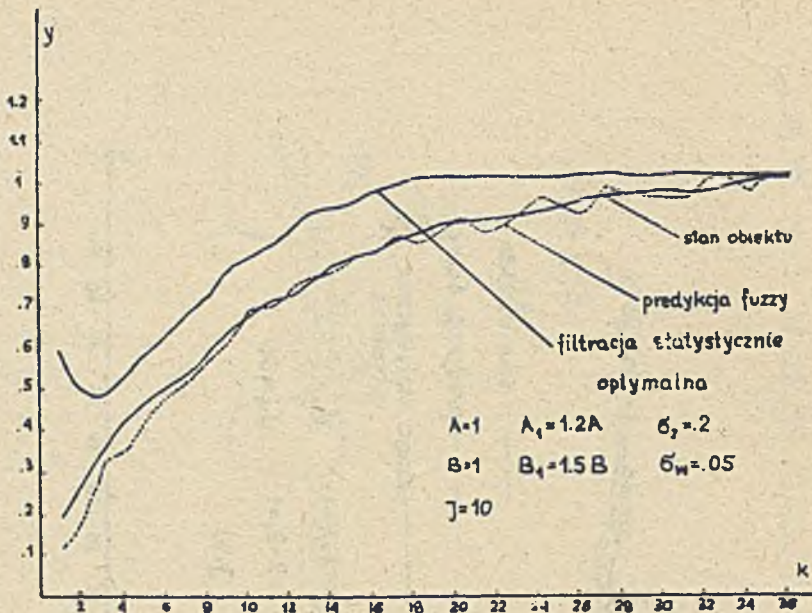
Rys. 3. Predykcja stanu obiektu dla różnej ilości wyróżnionych stanów charakterystycznych J



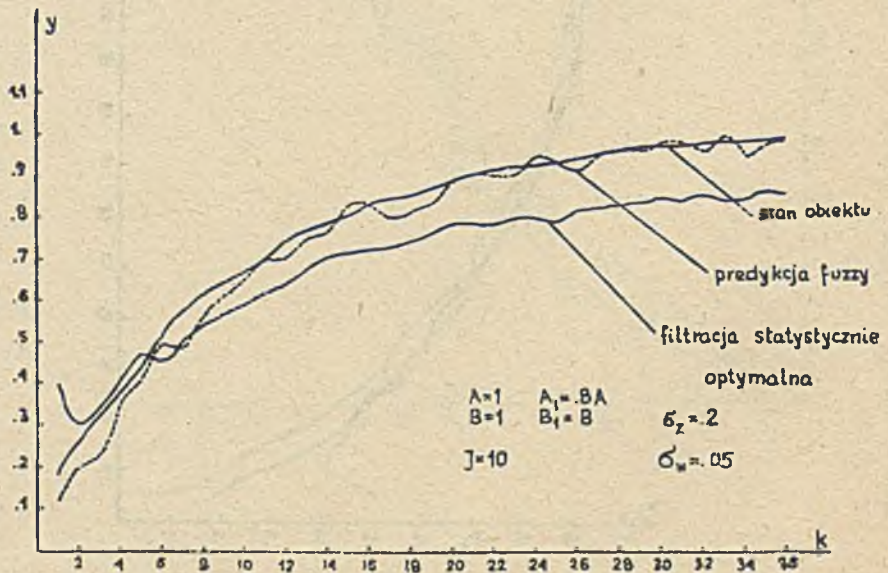


Rys. 4. Porównanie metody predykcji fuzyj i filtracji statystycznie optymalnej przy znajomości dokładnych wartości współczynników obiektu - wyniki modelowania cyfrowego





Rys. 5. Porównanie metody predykcji fuzzy i filtracji statystycznie optymalnej przy znajomości przybliżonych wartości współczynników obiektu - wyniki modelowania cyfrowego ( $\lambda = B = 1$ ,  $A_1 = 1.2 A$ ,  $B_1 = 1.5 B$ )



Rys. 6. Porównanie metody predykcji fuzzy i filtracji statystycznie optymalnej przy znajomości przybliżonych wartości współczynników obiektu - wyniki modelowania cyfrowego ( $\lambda = B = 1$ ,  $A_1 = 0.8 A$ ,  $B_1 = B$ )



wtedy wprowadzone współczynniki mogą charakteryzować własności określonych uprzednio zbiorów rozmytych.

Ilustracją zależności predykcji stanu obiektu od ilości wyróżnionych stanów charakterystycznych jest rysunek 3. Można zauważyć, że przy pownoy ilości stanów ( $J = 9$ ) dalszo zwiększanie ich ilości nie powoduje wyraźnego polepszenia predykcji.

Obecnie dokonujemy porównania powyższej metody predykcji z metodą filtracji statystycznie optymalnej [5]. Dla zdyskretyzowanych równań obiektu (19) równania filtru mają następującą postać:

$$\hat{x}_{k+1} = A_1 \hat{x}_k + B_1 u_k + K_{k+1} (y_{k+1} - A_1 \hat{x}_k - B_1 u_k)$$

$$K_{k+1} = \frac{A_1^2 P_{k,k} + \sigma_z^2}{A_1^2 P_{k,k} + \sigma_z^2 + \sigma_w^2}$$

$$P_{k+1} = \frac{\sigma_w^2 (A_1^2 P_{k,k} + \sigma_z^2)}{A_1^2 P_{k,k} + \sigma_z^2 + \sigma_w^2}$$

gdzie:

$$A_1 = 1 - \lambda \delta$$

$$B_1 = B \delta$$

$$\sigma_{1z}^2 = \delta^2 \sigma_z^2$$

$\delta$  - krok dyskretyzacji.

Porównania dokonujemy w dwóch przypadkach:

- $A_1, B_1$  znane są dokładnie,
- $A_1, B_1$  znane są w przybliżeniu.

Wyniki modelowania cyfrowego w przypadku dokładnej znajomości współczynników obiektu przedstawione są na rysunku 4. Wskazują one na podobną jakość obu metod, zatem można stosować dowolną z nich.

Rysunki 5 i 6 przedstawiają wyniki otrzymane przy zastosowaniu predykcji opartej o relację rozmytą i filtr statystycznie optymalny, gdy  $A_1$  oraz  $B_1$  znane są w przybliżeniu.

Można zauważyć, że wprowadzenie przybliżonych wartości współczynników filtru w sposób wyraźny odbiło się na zmniejszeniu jakości filtracji i w tym przypadku druga z tych metod jest lepsza.

Przy stosowaniu tego typu algorytmów w systemach informatyki czasu rzeczywistego nasuwa się kilka uwag o charakterze ogólnym:

- metody wykorzystujące aparat pojęciowy zbiorów rozmytych są wskazane przy rozwiązywaniu zagadnień słabo poznanych, sformułowanych niedokładnie, gdzie niemożliwy jest inny sposób formalizacji słownego opisu obiektu dostarczonego przez operatora,



- metody te, ze względu na niski nakład obliczeń jak i wymagany obszar pamięci operacyjnej, uwzględniają możliwości stosowanego sprzętu informatycznego i mogą być wskazane nawet tam, gdzie klasyczny model matematyczny procesu jest dokładny, lecz z powodu swej złożoności trudny do komputerowej implementacji.

#### 4. Zakończenie

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda predykcji bazująca na relacji rozmytej pozwala na formalizację lingwistycznego danego przez operatora opisu obiektu (procesu). Otrzymany w wyniku zastosowanej metody algorytm może być podstawą sterowania procesem przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej.

#### LITERATURA

- [1] Zadeh L.A.: Fuzzy sets. Inform. Control, vol. 8, pp 338-353, 1965.
- [2] Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. Syst. Man Cybern vol SMC3, 1973.
- [3] Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Sterowanie rozmyte jako matematyczna formalizacja heurystycznego sposobu sterowania złożonymi procesami. Podstawy Sterowania 1978 (w druku).
- [4] Kaufman A.: Exercices avec solutions sur la theorie des sous ensembles flous, Masson 1975.
- [5] Meditch: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych. WNT, Warszawa 1975.
- [6] Pedrycz W.: Predykcja w systemach rozmytych. Praca nie publikowana.

#### МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОСНОВАННИЙ НА РАСПЛИВЧАТОЙ ЛОГИКЕ

##### Резюме

В работе представлен метод прогнозирования, основан на соотношении расплывчатости, где процесс описан следующим образом:

$$X_{k+1}^{i'} = X_k^{i'} \circ R$$

где  $X_k^{i'}$ ,  $X_{k+1}^{i'}$  - расплывчатые множества определяющие состояние процесса в моментах  $k$  и  $(k+1)$ .

$R = \bigcup_{\substack{i=1,2,\dots,J \\ j=1,2,\dots,J}} R^{ij}$  - соотношение расплывчатости.

Метод проиллюстрирован числовым примером. Проведено также сравнение этого метода с методом статистически оптимальной фильтрации, как и рассмотрены возможность и целесообразность применения того типа алгоритмов для ЭВМ.



## ON THE PREDICTION METHOD BASED ON MULTIVALUED LOGIC

## Summary

The prediction method based on fuzzy relation has been discussed, where the process has been described in the following form:

$$X_{k+1}^{1'} = X_k^{1'} \circ R$$

where  $X_k^{1'}$ ,  $X_{j+1}^{1'}$  fuzzy sets which characterize state of process in  $k$  and  $(k+1)$  moment of time

$$R = \bigcup_{\substack{i=1,2,\dots,J \\ j=1,2,\dots,J}} R^{ij} \quad \text{fuzzy relation}$$

The comparison of this method with the method of statistically optimal filtration has been made. There has also been considered the possibility and usefulness of computer implementation of such algorithms.