ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: AUTOMATYKA z. 47 Nr kol. 605

Jarosław KORZEŃ-CHMIELOWSKI

O NIEKTÓRYCH ZAGADNIENIACH PROBABILISTYKI I TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH

Streszczenie. Artykuł zawiera porównanie podstawowych pojęć probabilistyki i teorii zbiorów rozmytych, prezentując analogie i różnice występujące między nimi. Przedstawiono je głównie w aspekcie zastosowań tych teorii do rozwiązywania określonych typów problemów. W sposób szczegółowy rozpatrzono metody tworzenia funkcji przynależności - podstawowego zadania w zagadnieniach zbiorów rozmytych.

Wstęp

Próby rozwiązywania problemów praktycznych doprowadziły do wydzielenia grupy zagadnień, których rozwiązanie w oparciu o dotychczas stosowany aparat matematyczny okazało się niemożliwe. Problemy te sprowadzały się do pewnego typu nieokreśloności (niedeterminizmu). Była to jednak nieokreśloność innego typu niż probabilistyczna. Wynikała ona z braku wystarczającej informacji o obiekcie, by sprowadzić zgłaszane przez potrzeby praktyki problemy do któregoś z klasycznych już rozwiązań.

W celu rozszerzenia zakresu możliwości opisu matematycznego zjawisk o tę klasę L.A. Zadeh zaproponował wprowadzenie nowego aparatu - teorii zbiorów rozmytych [6]. Z założenia nie miał to być więc aparat konkurencyjny w stosunku do metod probabilistycznych, lecz zbiór środków możliwych do stosowania, gdy te ostatnie nie dają, ze względu na niespełnienie podstawowych warunków probabilistyki, zadowalającym rezultatów. Między obiema teoriami istnieją zarówno podobieństwa jak i różnice. Te ostatnie są podkreślane przez wielu autorów [2] [7].

W artykule tym dokonano porównania matematycznych podstaw obu teorii. Pewne wnioski wynikające z porównania zilustrowano przykładem. Zostały również podane pewne uwagi dotyczące zakresu stosowania obu modeli w przypadku problemu sterowania obiektami oraz praktycznych metod tworzenia funkcji przynależności.

Podstawowe pojęcia probabilistyki

Z uwagi na fakt, że celem naszym jest porównanie matematycznych podstaw dwóch teorii, przypomnimy obecnie potrzebne nam podstawowe pojęcia i aksjomatykę (wg Kołmogorowa) starszej z nich - probabilistyki.

Zasadniczym pojęciem teorii prawdopodobieństwa jest pojęcie przestrzeni zdarzeń elementarnych (oznaczanej przez Ω). Terminem tym określamy zbiór wszystkich możliwych najprostszych, nawzajem wykluczających się, wyników doświadczeń - ω (zdarzeń elementarnych). Każdemu zdarzeniu losowemu można przyporządkować odpowiedni podzbiór Ω, jednak nie każdy podzbiór Ω jest zdarzeniem losowym (uwaga ta dotyczy przestrzeni Ω o charakterze continuum). Zdarzeniami losowymi nazywamy tylko takie podzbiory Ω, które są elementami σ - ciała zdarzeń.

Definicja 1

Niech Ω będzie dowolnym zbiorem, a F pewną klasą podzbiorów zbioru Ω. Klasę F nazywamy σ-ciałem zdarzeń, jeżeli spełnione są następujące warunki

1. $\bigvee\limits_{A\subset\Omega} A\in F$

2. $A\in F \Longrightarrow \bar{A} = \Omega\setminus A\in F$

3. $A_n\in F,\ n=1,2,\ldots \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\in F$

Jeżeli dany jest zbiór Ω i dowolne σ-ciało F jego podzbiorów, to mówimy, że dana przestrzeń jest mierzalna.

W przestrzeni metrycznej σ-ciało generowane przez klasę F zbiorów otwartych - nazywamy σ-ciałem zbiorów borelowskich.

Wprowadzimy obecnie pojęcie prawdopodobieństwa, jako unormowanej miary na przestrzeni mierzalnej.

Definicja 2

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję liczbową P określoną na σ-ciele F przestrzeni mierzalnej $\langle\Omega, F\rangle$ spełniającą następujące aksjomaty:

1. $\bigwedge\limits_{A\in F} 0\le P(A)\le 1$

2. $P(\Omega) = 1$

3. Dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_n\in F$ spełniających warunek

$$\bigwedge_{\substack{j,k\in N\\ j\neq k}} A_j\cap A_k = \phi;\quad P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Funkcja P jest nazywana miarą probabilistyczną.

W pracy korzystać będziemy ponadto z pojęć niezależności zdarzeń i zmiennej losowej.

Definicja 3

Dwa zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Definicja 4

Zmienną losową X nazywamy mierzalną funkcję $X = X(\omega)$ przekształcającą Ω w zbiór liczb rzeczywistych.

Podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych

Pojęcie zbioru rozmytego zostało wprowadzone przez Zadeha w 1965 r. [6]. Proponowany przez niego sposób definiowania tego typu zbioru opierał się na uogólnieniu funkcji charakterystycznej zbioru, które to uogólnienie jest określane terminem funkcji przynależności (uczestnictwa), wyprowadzanym w następujący sposób:

Definicja 5

Niech będzie dana przestrzeń . Każdemu z elementów γ tej przestrzeni niech będzie przyporządkowana liczba z przedziału $[0;1]$.
Funkcję μ odwzorowującą w przedział $[0;1]$ nazywamy funkcją przynależności.

W ujęciu tym zbiór rozmyty jest zbiorem uporządkowanych par $(x, \mu(x))$. Takie zdefiniowanie zbioru rozmytego nasuwało pewną analogię z funkcją prawdopodobieństwa. Autorzy [2],[7] podkreślali jednak, że nie należy utożsamiać stopnia przynależności do zbioru z prawdopodobieństwem przynależności do jednego z ostro zarysowanych zbiorów.

S. Nahmias [4] zaproponował inny sposób aksjomatycznego definiowania zbioru rozmytego, który pozwala na uwypuklenie analogii i różnic między teorią zbiorów rozmytych a aksjomatycznym ujęciem probabilistyki.

Podamy obecnie podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych w ujęciu przez niego zaproponowanym [4].

Niech będzie przestrzenią abstrakcyjną generowaną przez elementy $\gamma\epsilon$. Załóżmy, że $\mathcal{G}$ jest dyskretną topologią na (tj. klasą wszystkich podzbiorów). Wprowadzamy teraz pojęcie skali σ :

Definicja 6

Skalą σ nazywamy specjalny rodzaj tzw. pojemności Choqueta [8] na $\mathcal{G}$, która posiada następujące własności:

(a) $\sigma(\phi) = 0, \quad \sigma(\Gamma) = 1$

(b) dla dowolnego układu zbiorów A_α z $\mathcal{G}$: $\sigma(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha) = \sup\limits_\alpha \sigma(A_\alpha)$.

Będziemy uważali, że skala σ określa stopień przynależności każdego punktu przestrzeni Γ. Skala związana z jakimkolwiek zbiorem $A \in \Gamma$ jest stopniem przynależności punktów zawartych w A.
Z własności (a) i (b) podanych w def. 6 wynikają następujące nierówności

1. $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{G}} \quad 0 \leqslant \sigma(A) \leqslant 1$

2. Jeżeli $A \subset B$, to $\sigma(A) \leqslant \sigma(B)$

W teorii zbiorów rozmytych wprowadzona jest również analogia niezależności zdarzeń (def. 3) - pojęcie braku relacji między zbiorami określone w następujący sposób:

Definicja 7

Między zbiorami rozmytymi $A, B \in \mathcal{G}$ nie ma relacji, gdy

$$\sigma(A \cap B) = \min(\sigma(A), \sigma(B))$$

Pojęcie braku relacji między zbiorami nie posiada tak wyczuwalnej intuicyjnie fizycznej interpretacji jak pojęcie niezależności zdarzeń w teorii prawdopodobieństwa, jednak wprowadzenie jego umożliwia otrzymanie interesujących wyników. Pojęcie to może być uważane za określenie stopnia separacji pary zbiorów. Można to zilustrować następującym prostym rozumowaniem:
Niech A i B będą zbiorami domkniętymi. Istnieją zatem punkty $\gamma_A \in A$ i $\gamma_B \in B$, które określają wartości $\sigma(A)$ i $\sigma(B)$, tak że $\sigma(A) = \sigma(\gamma_A)$ i $\sigma(B) = \sigma(\gamma_B)$ (def. 6). Jeżeli $\gamma_A \in A \ B$ lub $\gamma_B \in A \cap B$, wówczas zbiory A i B zgodnie z def. 7 pozostają w relacji między sobą.
Koncepcja relacji między zbiorami może być rozszerzona na więcej niż dwa zbiory przez przyjęcie następującej definicji [4]:

Definicja 8

Zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{G}$ nie pozostają we wzajemnej relacji, jeżeli dla dowolnej permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczonej przez $i_1, i_2, \ldots, i_k$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\sigma(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \min(\sigma(A_{i_1}), \ldots, \sigma(A_{i_k}))$$

Można zauważyć, że podobnie jak niezależność parami więcej niż dwóch zdarzeń nie pociąga za sobą ich niezależności, tak brak relacji między zbiorami parami nie implikuje braku relacji między nimi w sensie powyższej definicji.

Kolejnym wprowadzanym pojęciem jest pojęcie zmiennej rozmytej.

Definicja 9

Zmienna rozmyta X jest funkcją rzeczywistą określoną na Γ.

Wprowadzone w ten sposób pojęcie zmiennej rozmytej odgrywa tę samą rolę w niniejszej pracy co zmienna losowa w teorii prawdopodobieństwa.

Pierwszym podejściem w teorii zbiorów rozmytych było zdefiniowanie zbioru rozmytego przez jego funkcję przynależności [6]. W naszym przypadku funkcję przynależności będziemy otrzymywać jako rozszerzenie skali σ do prostej rzeczywistej przez zmienną rozmytą [4].
Wprowadzamy następujące określenie:

Definicja 10

Funkcją przynależności $_X$ zmiennej rozmytej X jest odwzorowanie prostej rzeczywistej R w jednostkowy przedział [0;1], które jest określone przez $\mu_X(x) = \sigma\{\gamma : X(\gamma) = x\}$ dla wszystkich $x \in R$.

Można zauważyć, że $\sup\limits_x \mu_X(x) = \sigma\{\bigcup\limits_x (\gamma : X(\gamma) = x)\} = \sigma(\Gamma) = 1$.

Zamiast określenia podzbioru z Γ $\{\gamma : X(\gamma) = x\}$ często stosowany jest krótszy zapis $\{X = x\}$.

Porównanie podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa i teorii zbiorów rozmytych

Obserwując wprowadzanie podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa i teorii zbiorów rozmytych, zauważyć można pewną analogię pomiędzy koncepcją przestrzeni μ a przestrzenią zdarzeń elementarnych Ω. Odpowiednie analogie podawane były na bieżąco przy wprowadzaniu pojęć teorii zbiorów rozmytych.

Istotną różnicą zasługującą na szczególne podkreślenie jest różnica w sposobie otrzymywania funkcji przynależności i w sposobie, w jaki otrzymuje się gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej, która jest analogiem funkcji przynależności. W teorii prawdopodobieństwa rozkład jest definiowany na pierścieniu zbiorów na prostej (tj. pierścieniu zbiorów postaci $[-\infty, x]$), który jednoznacznie określa prawdopodobieństwo na zbiorach borelowskich. Gęstość prawdopodobieństwa otrzymywana jest zgodnie z tw. Radona-Nikodyma jako pochodna funkcji rozkładu. W teorii zbiorów rozmytych, ze względu na naturę operacji supremum, skala σ nie jest określona jednoznacznie przez jej rozszerzenie dla zbiorów postaci $[-\infty, x]$. Stąd funkcja przynależności musi być otrzymana bezpośrednio przez rozszerzenie σ dla zbiorów pojedynczych punktów. Widać stąd, że nie jest możliwe definiowanie $\wp$ jako σ-ciała.

Analogie pojęć probabilistyki i teorii zbiorów rozmytych, które zostały omówione dotychczas, zestawione są w tabeli 1.

Tabela 1

Zestawienie analogii
pomiędzy teorią prawdopodobieństwa a teorią zbiorów rozmytych

Rachunek prawdopodobieństwa	Teoria zbiorów rozmytych
Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω	Przestrzeń Γ
σ-ciało zdarzeń, F	Dyskretna topologia podzbiorów $\wp$
Prawdopodobieństwo P definiowane na F (specjalny typ miary)	Skala σ definiowana na $\wp$ (specjalny typ pojemności)
Niezależność zdarzeń $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$	Brak relacji między zbiorami $\sigma(A\cap B) = \min(\sigma(A), \sigma(B))$
Suma przeliczalnej rodziny zbiorów rozłącznych $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$	Suma arbitralnej rodziny zbiorów $\sigma(\bigcup_{\alpha} A_\alpha) = \sup_{\alpha} \sigma(A_\alpha)$
Zmienna losowa rzeczywista funkcja mierzalna na Ω	Zmienna rozmyta rzeczywista funkcja na Γ
Rozkład prawdopodobieństwa jest otrzymywany jako rozszerzenie P dla borelowskich zbiorów na prostej. Gęstość prawdopodobieństwa jest pochodną funkcji rozkładu (dystrybuanty).	Funkcja przynależności jest otrzymywana jako rozszerzenie dla każdego zbioru punktów na prostej.

Przykład różnicy między wynikami uzyskanymi w oparciu o teorię zbiorów rozmytych i teorię prawdopodobieństwa

W celu zilustrowania przykładem różnicy między wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu teorii zbiorów rozmytych a uzyskanymi w rachunku prawdopodobieństwa wprowadzimy parę nowych pojęć.

Przypuśćmy, że X i Y są zmiennymi rozmytymi zdefiniowanymi na $(\Gamma, \wp, \sigma)$. Przyjmujemy, że zmienne X i Y nie pozostają we wzajemnej relacji, gdy $\{X=x\}$ i $\{Y=y\}$ są zbiorami nie pozostającymi we wzajemnej relacji dla wszystkich $x,y \in R$. Tworzymy zmienną rozmytą $Z = X+Y$.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że koncepcja sumy zmiennych rozmytych jest całkowicie odmienna od sumy logicznej zbiorów rozmytych [7]. Otrzymujemy następujące twierdzenie [4]:

Twierdzenie 1

$$\mu_Z(z) = \sup_x \min(\mu_X(x), \mu_Y(z-x))$$

Dowód

$$\mu_Z(z) = G\left\{X+Y=z\right\} = G\left\{(X+Y=z)\cap\Gamma\right\} =$$
$$= G\left\{(X+Y=z)\cap(\bigcup_x X=x)\right\} =$$
$$= G\left\{\bigcup_x (X=x,\ X+Y=z)\right\} = \sup_x\left\{X=x,\ Y=z-x\right\} =$$
$$= \sup_x \min(G\left\{X=x\right\}, G\left\{Y=z-x\right\}) =$$
$$= \sup_x \min(\mu_X(x), \mu_Y(z-x))$$

Operacja opisana w twierdzeniu jest analogiczna do składania gęstości prawdopodobieństwa. Wprowadzimy kolejną definicję potrzebną dla naszego przykładu:

Definicja 11

Zmienna rozmyta X należy do klasy normalnej (jest normalna), jeżeli dla pewnych stałych a i b:

$$\mu_X(x) = \exp(-((x-a)/b)^2) \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty$$

Postać wyrażenia jest podobna do funkcji gęstości rozkładu normalnego. W oparciu o tak wprowadzoną definicję można dla zbiorów rozmytych udowodnić następujące twierdzenie [4]:

Twierdzenie 2

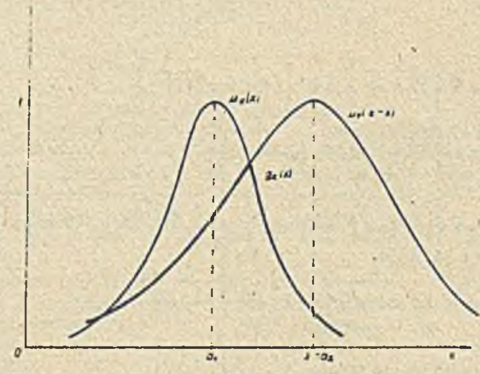
Niech X i Y będą normalnymi zmiennymi rozmytymi o parametrach odpowiednio (a_1,b_1), (a_2,b_2). Wówczas zmienna rozmyta Z = X+Y jest zmienną rozmytą normalną o parametrach $(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$.

Dowód

W celu przeprowadzenia dowodu przyjmiemy $a_2 > a_1$ i $b_2 > b_1$.
Na podstawie tw. 1 mamy

$$\mu_Z(z) = \sup_x \min(\mu_X(x), \mu_Y(z-x))$$

Przyjmiemy oznaczenie $g_Z(x) = \min(\mu_X(x), \mu_Y(z-x))$.
Funkcję $g_Z(x)$ przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Funkcja $g_Z(x)$

Ponieważ jako funkcja x $g_Z(x)$ jest unimodalna, osiąga ona maksimum w punkcie $\tilde{x}(z)$ spełniającym warunek

$$\mu_X(x(z)) = \mu_Y(z-\tilde{x}(z))$$

Korzystając z definicji 11, otrzymujemy warunek na $\tilde{x}(z)$:

$$\left[(\tilde{x}(z) - a_1)/b_2\right]^2 = \left[(z - \tilde{x}^2(z) - a_2)/b_2\right]^2$$

Rozwiązania uzyskanego równania kwadratowego są następujące:

$$x(z) = \frac{a_1 b_2^2 - (z-a_2)b_1^2 \pm b_1 b_2 (z-a_1-a_2)}{b_2^2 - b_1^2}$$

stąd $\mu_Z(z) = \mu_X(\tilde{x}(z)) = \exp\left\{-((\tilde{x}(z)-a_1)/b_1)^2\right\}$ można zastąpić przez dodatnie i ujemne pierwiastki $\tilde{x}(z)$. Wstawiając dodatni pierwiastek, otrzymujemy po przekształceniach:

$$\mu_X(\tilde{x}(z)) = \exp\left\{-\left(\frac{z-a_1-a_2}{b_2-b_1}\right)^2\right\}$$

Wstawiając ujemny pierwiastek, otrzymujemy natomiast

$$\mu_{\tilde{X}}(\tilde{x}(z) = \exp\left\{-\left(\frac{z-a_1-a_2}{b_2+b_1}\right)^2\right\}$$

Ponieważ $b_1 > 0$, $b_2 > b_1$ oraz $\mu_{\tilde{X}}(\tilde{x}(z)) > \mu_X(\tilde{x}(z))$, supremum jest osiągane dla pierwiastka ujemnego. Tak więc

$$\mu_Z(x) \exp\left\{-\left(\frac{z-(a_1+a_2)}{b_1+b_2}\right)^2\right\}$$

Otrzymany wynik jest bardzo interesujący. Stała b ma znaczenie podobne do odchylenia standardowego zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. Wiadomo, że dodając zmienne losowe o rozkładzie normalnym, uzyskuje się zmienną o rozkładzie normalnym i wariancji równej sumie wariancji rozkładów składowych w przypadku, jeżeli zmienne składowe były nieskorelowane. W naszym przypadku widzimy, że addytywne są odpowiedniki odchylenia standardowego. Wynik ten ma duże znaczenie. Pozwala na pokazanie możliwej do zweryfikowania fizycznego różnicy pomiędzy oboma rozważanymi modelami, co może również sugerować metodologię testowania, który z modeli jest bardziej odpowiedni do modelowania pewnego konkretnego problemu.

Zakres zastosowań obu teorii

Wprowadzając pojęcie funkcji przynależności, często porównuje się je z prawdopodobieństwem. Problemy związane z określaniem funkcji przynależności dla celów praktycznych prowadzą czasami do zamiennego traktowania tych pojęć. Z dotychczasowych rozważań popartych przykładem wynika, że nie jest to prawidłowe. Aby zobrazować i jeszcze raz podkreślić różnice między porównywanymi przez nas teoriami w zastosowaniu do konkretnych rozwiązań, posłużono się zestawieniem charakteryzującym interesujące nas pojęcia.

Własność pierwsza podana w zestawieniu ściśle wiąże się z drugą. Opis przy użyciu aparatu teorii zbiorów rozmytych jest szczególnie przydatny w przypadku złożonych systemów, dla których określenie ścisłych związków ilościowych napotyka na duże trudności lub uzyskany opis ilościowy byłby zbyt skomplikowany, by go stosować w praktyce. Dotyczy to w szczególności złożonych systemów, w skład których jako jeden z elementów wchodzi człowiek. W tych przypadkach bardziej celowe wydaje się, jak to jest podawane przez szereg autorów [2] [7], posłużenie charakterystyką jakościową bazującą na teorii zbiorów rozmytych.

W przypadku, gdy działanie systemu nie jest dokładnie znane, jedyną podstawą, z której można korzystać przy jego opisie, są opinie ekspertów

- ludzi mających doświadczenie w prowadzeniu danego procesu. Jest to charakterystyka obiektu mająca charakter typowo subiektywny. Metoda sterowania takimi obiektami powinna na wstępnym etapie bazować na możliwie najdoskonalszym odtworzeniu modelu wnioskowania doświadczonego operatora.

Tabela 2

Cechy funkcji przynależności i prawdopodobieństwa ze względu na zastosowania

Funkcja przynależności	Prawdopodobieństwo
1. Jest charakterystyką subiektywną. 2. Zastosowanie: opis zjawisk niepowtarzalnych lub rzadko powtarzalnych.	1. Jest charakterystyką obiektywną. 2. Zastosowanie: opis zjawisk, dla których możliwe jest spełnienie powtarzalności warunków.

Praktyczne sposoby wyznaczania funkcji przynależności

Jeden z problemów przy zadaniu sformułowanym tak jak w poprzednim punkcie polega na opracowaniu metody wykorzystania pewnego zbioru opinii ekspertów, które na ogół nie pokrywają się w szczegółach.

Można zaproponować trzy sposoby określania pewnej przeciętnej funkcji przynależności na podstawie zbioru opinii ekspertów danych w postaci funkcji przynależności do pewnego zbioru o nieostro zarysowanych granicach. Zostaną one omówione kolejno.

1. Metoda polega na przyznaniu każdemu spośród ekspertów wagi, z którą uwzględniona zostanie jego opinia. Waga może być subiektywną oceną doświadczenia eksperta lub też regularną funkcją przyporządkowaną ekspertom dowolnie.

Funkcja przynależności byłaby tworzona w następujący sposób:

$$\mu(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \mu_k(x)}{n}$$

gdzie:

w_k - waga przywiązana do opinii k-tego eksperta, $w_k \in [0;1]$,

μ_k - funkcja przynależności wg k-tego eksperta,

n - liczba ekspertów.

2. Metoda polega na wyróżnieniu pewnego podzbioru k-ekspertów, których opinie zostaną uwzględnione z wagą 1. (Można ją traktować jako szczególny przypadek metody poprzedniej). Opinia pozostałych ekspertów jest uwzględniana z malejącymi wagami. Celem takiego postępowania byłoby wygładzenie wyniku uśredniania opinii ekspertów z pierwszej grupy. Liczebność wyróż-

nionej grupy i wagi przyznane w grupie drugiej powinny być zależne od subiektywnej oceny modelującego. Funkcja przynależności byłaby więc tworzona w sposób następujący

$$\mu(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mu_i(x) + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \mu_i(x)}{n}$$

3. Metoda polega na określeniu zbioru wypadkowego w oparciu o zbiory określone przez podanie funkcji przynależności przez poszczególnych ekspertów jako iloczynu albo iloczynu algebraicznego tych zbiorów. Różnica między pojęciami iloczyn i iloczyn algebraiczny polega na sposobie określenia funkcji przynależności dla zbioru wynikowego. Dla dwóch zbiorów A i B funkcja przynależności określana jest następująco:

w przypadku iloczynu zbiorów A i B

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\right\}, \quad x \in \Gamma$$

w przypadku iloczynu algebraicznego

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\ \mu_B(x), \quad x \in \Gamma$$

Z tych dwóch interpretacji iloczynu zbiorów bardziej sensowne wydaje się stosowanie iloczynu algebraicznego, jako że iloczyn $(A\cap B)$ nie uwzględnia różnicy wartości $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$ dla konkretnego x.

Przykłady zastosowań opisu opartego na zbiorach rozmytych

Przykładem zastosowania zbiorów rozmytych jako modelu pewnego zjawiska jest model opinii ekspertów o przewidywanym czasie trwania czynności składających się na realizację złożonego zadania w systemie, w skład którego wchodzą ludzie, przedstawiony przez St. Chanasa w [2]. Ze względu na niepowtarzalność warunków realizacji dużej liczby zadań wynikających z praktyki najbardziej adekwatnym sposobem opisu czasu trwania tych czynności jest opis oparty na zbiorach rozmytych (własność 2). Jedyną podstawą jest w takich sytuacjach ocena ekspertów, która z natury jest subiektywna.

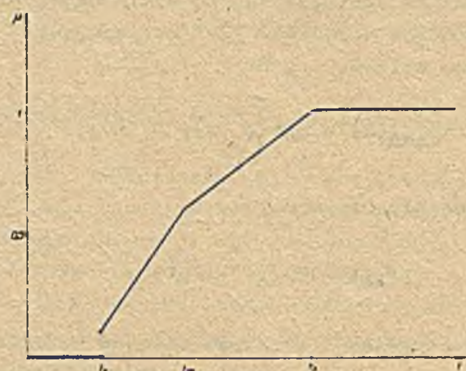
St. Chanas podał niektóre propozycje systematycznego wyznaczania funkcji przynależności μ czasu T trwania czynności. Zaproponowane sposoby określania funkcji μ są zależne od sposobu organizacji procesu oceny czasu przez ekspertów.

Propozycja 1

Funkcję przynależności można określić w następujący sposób:

- dla $t=t_o$, gdzie t_o najkrótszy (optymistyczny) możliwy czas trwania czynności, przyjąć $\mu(t_o) = 0.1$,
- dla $t < t_o$ przyjąć $\mu(t) = 0$,
- dla $t=t_m$, gdzie t_m najbardziej "oczekiwany" czas trwania, przyjąć $\mu(t_m) = 0.6$,
- dla $t \geqslant t_p$, gdzie t_p najdłuższy możliwy (pesymistyczny) czas trwania czynności, przyjąć $\mu(t) = 1$,
- dla pozostałych czasów wartości $\mu(t)$ interpolować funkcją liniową.

Otrzymaną funkcję $\mu(t)$ przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Funkcja μ wg propozycji 1

Propozycja 2

Propozycja polega na subiektywnej ocenie opinii ekspertów. Sposób tworzenia funkcji przynależności sprowadza się do metody 1 podanej w poprzednim punkcie.

Propozycja 3

Propozycja ta opiera się na przedstawionej w pracy [7] koncepcji modelowania wartości tzw. zmiennych językowych w postaci zbiorów rozmytych w odpowiednio dobranej przestrzeni. W naszym przypadku zmienną językową jest stopień przynależności czasu t w zbiorze rozmytym T - określającym czas realny realizacji czynności. Wartościami zmiennej językowej x, używanymi przez ekspertów do wyrażania swoich ocen, są wyrażenia budowane z trzech terminów podstawowych "wysoki", "średni" i "niski" - z możliwościami użycia negacji "nie", spójników "i" i "lub" oraz elementów dodatkowych, tzw. modyfikatorów, jak "bardzo", "nieco mniej" itp.

Wartości powyższe mogą być przedstawione formalnie w postaci zbiorów rozmytych w przestrzeni $\Gamma = \{0.1, 0.2, ..., 0.9, 1\}$. Jeżeli utożsami się terminy podstawowe ze zbiorami rozmytymi w Γ, to wartości wyrażeń można obliczać, wychodząc z tych zbiorów, przez wykorzystanie operacji dopełnienia, iloczynu i sumy, jako odpowiedników kolejno negacji, spójnika "i", spójnika "lub" oraz następująco zdefiniowane operacje [2]:

"bardzo" $x=x^2$

"nieco więcej niż" $x=x^{1.25}$

"nieco mniej niż" $x=x^{0.75}$

W powyższym zapisie wyrażenia utożsamiane są ze zbiorami rozmytymi reprezentującymi ich znaczenie.

W omawianym sposobie określania funkcji $\mu(t)$ dla ustalonego czasu t proponuje się:

a) obliczyć wg powyższych reguł wartość wyrażenia użytego przez oceniającego eksperta,

b) z otrzymanego zbioru rozmytego w przestrzeni wybrać element o największym stopniu przynależności i przyjąć go za wartość $\mu(t)$.

Z tym ostatnim sposobem określania funkcji przynależności spotkać się można w wielu pracach.

Wnioski i uwagi końcowe

Dokonane porównanie podstawowych pojęć probabilistyki i teorii zbiorów rozmytych pozwala na pokazanie analogii i różnic między tymi teoriami, co ma znaczenie zasadnicze dla zastosowań praktycznych. Zarówno opis działania obiektu przy pomocy zbiorów rozmytych jak i opis funkcji prawdopodobieństwa wiążą się z występowaniem zjawisk niedeterministycznych, względnie o determinizmie trudnym do wykrycia. O wyborze stosowanego aparatu, jak to zostało podkreślone, powinien decydować charakter konkretnego obiektu.

LITERATURA

[1] Боровков А.А.: Теория вероятностей. Изд. Наука, Москва 1976.

[2] Chanas St.: Metody budowy i analizy modelu sieciowego przedsięwzięcia z nieostro określonymi czasami trwania czynności. Pr. dokt., Wrocław 1977.

[3] Czogała E.: Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki matematycznej. Skrypt Pol. Śl., Gliwice 1976.

[4] Nahmias S.: Fuzzy Variables. Fuzzy Sets Systems, 1, 97-110, 1978.

[5] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.

[6] Zadeh L.A.: Fuzzy sets. Inf. Control, 8, 338-353, 1965.

[7] Заде Л.: Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений. Изд. "Мир", Москва 1976.
[8] Choquet G.: Lectures on Analysis, Vol. 1, Benjamin, New York 1969.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ
И ТЕОРИИ РАСПЛЫВЧАТЫХ МНОЖЕСТВ

Р е з ю м е

В работе сравнены основные понятия теории вероятности и теории расплывчатых множеств. Подчеркнуты сходства и разница этих теорий. Они рассматриваются, в основном, в аспекте применения к решению определенных типов проблем. Подробно рассмотрены методы составления функции принадлежности - основной задачи расплывчатых множеств.

ON SOME PROBLEMS OF PROBABILITY THEORY
AND THEORY OF FUZZY SETS

S u m m a r y

This paper deals with the basic notions of the theory of probability and the theory of fuzzy sets. Analogies and differences between these two theories are presented mainly in the aspect of bringing them into practice. The methods of creation of membership function - the basic problem in the applications of the fuzzy set theory are discussed here in detail