ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: AUTOMATYKA z. 47 Nr kol. 605

Andrzej BARGIEŁA

SUBOPTYMALNE STEROWANIE DUALNE OBIEKTÓW O NIEZNANYCH PARAMETRACH

Streszczenie. W pracy przedstawiono nowy rodzaj sterowania adaptacyjnego spełniającego zarówno funkcję identyfikacji jak i sterowania. Został on wyprowadzony w oparciu o minimalizację wartości oczekiwanej kwadratu wyjścia na jeden krok naprzód, uwzględniając ograniczenie na ślad jednokrokowej estymaty macierzy kowariancji błędu estymacji. Dla wyliczenia w czasie rzeczywistym estymat parametrów i macierzy informacyjnej wykorzystywanych przez algorytm sterowania posłużono się techniką filtru Kalmana. Dwa przykłady numeryczne pozwalają na porównanie tego sterowania ze sterowaniem niedualnym i perturbacyjnym.

1. Wstęp

Zagadnienie sterowania obiektem o nieznanych parametrach wymaga znalezienia takich sterowań, które spełniają podwójną rolę, minimalizują wskaźnik jakości i utrzymują dobrą identyfikację. W przypadku obiektu liniowego zadanie daje się sprowadzić do niezależnego zaprojektowania filtru Kalmana i macierzy sprzężenia zwrotnego. Uzyskane rozwiązanie, wprawdzie dokładne pod względem analitycznym, jest jednak nieprzydatne do sterowania obiektem w czasie rzeczywistym, ponieważ znalezienie macierzy sprzężenia zwrotnego wymaga wcześniejszej znajomości obiektu. Było to powodem poszukiwania suboptymalnych strategii sterowania pozwalających na analityczne wyznaczenie sterowań w czasie rzeczywistym. Przykładami takich rozwiązań są:

- "strategia wymuszonego rozdzielenia" zaproponowana przez Åströma i Wittenmarka [1] polegająca na wyliczaniu sterowania tak, jak gdyby system posiadał deterministyczne parametry oraz podstawieniu estymat w miejsce parametrów,
- "zasada minimalizacji i uśredniania" zaproponowana przez Gessinga [2,3] i polegająca na przeprowadzeniu w ściśle ustalonej kolejności operacji minimalizacji i uśredniania wskaźnika jakości,
- "sterowanie perturbacyjne" zaproponowane przez Wieslandera i Wittenmarka [4] będące w istocie sterowaniem adaptacyjnym z dodatkowym sygnałem zakłócającym mającym na celu poprawę identyfikacji.

2. Sformułowanie problemu

Zaproponowana tutaj strategia sterowania dotyczy obiektu opisanego równaniem różnicowym

$$y(t) = a_1(t)y(t-1) + \ldots + a_n(t)y(t-n) +$$

$$b_1(t)u(t-1) + \ldots + b_n(t)u(t-n) + e(t) \qquad (1)$$

gdzie:

$t = 1,2 \ldots$ - dyskretne wskaźniki czasu,

$y(t)$, $u(t)$ - odpowiednio wyjście i wejście,

$a_i(t)$, $b_i(t)$ - nieznane parametry,

$e(t)$ - szum niezależny o rozkładzie normalnym $e(t) \sim N\,[0,R]$.

Strategia ta pozwala na wyliczenie sterowań w czasie rzeczywistym.

Suboptymalna natura uzyskanego rozwiązania wynika z wyboru wskaźnika jakości w postaci

$$J = E\left[y^2(t)\right] \qquad (2)$$

a nie jako

$$J_N = E\left[\sum_{t=1}^{N} y^2(t)\right] \qquad (3)$$

Konsekwencją zastosowania jednokrokowego wskaźnika jakości jest z jednej strony krótkowzroczność strategii sterowania, z drugiej jednak wskaźnik taki umożliwia wyliczenie sterowania w czasie rzeczywistym, którego postać numeryczna jest prostsza od algorytmów opartych na pełnym rozwiązaniu dualnym. Niekorzystna cecha strategii sterowania wynikająca z zastosowania wskaźnika jakości (2) została znacznie zredukowana przez odpowiednie przyjęcie ograniczenia na błąd estymacji współczynników systemu.

Sterowanie optymalne w sensie wskaźnika (2) wyliczono, wykorzystując podstawowy lemat sterowania stochastycznego Åströma. Minimalizacja (2) jest równoważna na mocy tego lematu

$$J_o = \min_{u(t)} E\left[y^2(t+1)/y_t\right] \qquad (4)$$

gdzie:

$$y_t = \left\{ y(t)y(t-1) \ldots u(t-1)u(t-2) \ldots \right\}$$

jest zbiorem poprzednich wyjść i sterowań.

$$J_o = \min_{u(t)} E\left[y^2(t+1) \middle| y_t \right] = \tag{5}$$

$$= \min_{u(t)} E\left[(a_1(t+1)y(t) + \ldots + a_n(t+1)y(t-n+1) + b_1(t+1)u(t) + \ldots \right.$$

$$\left. + b_n(t+1)u(t-n+1) + e(t))^2 \middle| y_t \right] =$$

$$= \min_{u(t)} E\left[b_1^2(t+1)u^2(t) + 2b_1(t+1)u(t)a_c^T(t+1)Y(t) + \right.$$

$$\left. 2b_1(t+1)u(t)e(t+1) \middle| y_t \right] + \text{składniki niezależne od } u(t)$$

$$a_c^T(t) = \left[a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t), 0, b_2(t), \ldots, b_n(t) \right]$$

$$Y^T(t) = \left[y(t), y(t-1), \ldots, y(t-n+1), 0, u(t-1), \ldots, u(t-n+1) \right]$$

Obliczając w (5) wartość oczekiwaną warunkową i różniczkując otrzymany wynik względem $u(t)$, otrzymujemy sterowanie optymalne minimalizujące J_o.

Sterowanie to przedstawia się wzorem:

$$u^o(t) = - \frac{\hat{b}_1(t+1|t)\hat{a}_c^T(t+1|t) + P_{n+1}^T(t+1|t)}{\hat{b}_1^2(t+1|t) + P_{b_1 b_1}(t+1|t)} Y(t) \tag{6}$$

gdzie:

$P_{n+1}(t+1|t)$ - jest $(n+1)$-szą kolumną macierzy kowariancji błędów estymacji parametrów $P(t+1|t)$ (równ. filtru Kalmana (11)),

$P_{b_1 b_1}(t+1|t)$ - jest $(n+1)x(n+1)$ elementem macierzy $P(t+1|t)$.

Przy wyliczaniu wartości sterowania $u^o(t)$ wykorzystuje się predykowane przy pomocy filtru Kalmana wartości parametrów obiektu i macierzy kowariancji błędu estymacji.

Zapisując równania obiektu w postaci:

$$y(t) = \phi^T(t)\Theta(t) + e(t) \tag{7}$$

$$\Theta(t) = \Theta(t-1) + v(t) \tag{8}$$

Równania filtru są:

$$\hat{\Theta}(t+1|t) = \hat{\Theta}(t|t-1) + K(t)\left[y(t) - \phi^T(t)\hat{\Theta}(t|t-1)\right] \tag{9}$$

$$K(t) = P(t|t-1)\phi(t)\left[\phi^T(t)P(t|t-1)\phi(t) + R\right]^{-1} \tag{10}$$

$$P(t+1|t) = \left[I-K(t)\phi^T(t)\right]P(t|t-1)\left[I-K(t)\phi^T(t)\right]^T + K(t)RK^T(t) + QA \tag{11}$$

Adaptacyjne prawo sterowania uzależnia sterowanie od estymat parametrów systemu i ich wariancji błędów. Jednakże estymacja i sterowanie są rozdzielone i sterowanie nie wpływa na poprawę identyfikacji. Jest to przyczyną występowania zjawiska "wygaszania" regulatora opisanego w pracy [4] przez Wieslandera. Zaproponowana tam metoda zapobiegania zjawisku wygaszania polegała na dodaniu do sterowania adaptacyjnego małego sygnału zakłócającego. Sterowanie to, nazwane sterowaniem perturbacyjnym, polepszało przekształcenie, nie pozwalając wygasnąć sterowaniu i podtrzymując śledzenie parametrów systemu. Natomiast w przypadku dobrej estymacji parametrów sygnał zakłócający jest szkodliwy, niepotrzebnie zwiększając sterowanie.

3. Sterowanie dualne

Analiza zjawiska wygaszania pozwoliła na zaproponowanie sterowania dualnego odgrywającego w przeciwieństwie do sterowania perturbacyjnego aktywną rolę w procesie identyfikacji. Zasadniczym krokiem było znalezienie funkcjonału od wartości błędu identyfikacji, który byłby miarą jakości estymat. Ponadto w celu analitycznego wyznaczenia ograniczenia na sterowanie wymaga się, aby funkcjonał ten zależał również od sygnałów sterujących. Wymagania powyższe spełnia ślad odwrotności macierzy kowariancji błędu estymacji parametrów. Żąda się, aby $trP^{-1}(t+1|t+1)$ był większy od ustalonej arbitralnie wartości granicznej; pozwala to na analityczne określenie sterowań bez konieczności rozdzielenia sterowania i identyfikacji. Sterowanie dualne wylicza się więc z minimalizacji (2) przy ograniczeniu

$$trP^{-1}(t+1|t+1) \geqslant m(t+1) \tag{12}$$

uwzględniając, że:

$$P^{-1}(t+1|t+1) = P^{-1}(t+1|t) + \Theta(t+1)R^{-1}\Theta(t+1) \tag{13}$$

gdzie:

$$\Theta^T(t+1) = \left[a_1(t+1)\ldots a_n(t+1)b_1(t+1)\ldots b_n(t+1)\right]$$

otrzymuje się

$$trP^{-1}(t+1|t+1) = trP^{-1}(t+1|t) + R^{-2}\Theta^T(t+1)\Theta(t+1) =$$

$$= trP^{-1}(t+1|t) + R^{-1}\left[u^2(t) + Y^T(t)Y(t)\right] \tag{14}$$

Z (12) i (14) można wyliczyć minimalne dopuszczalne ze względu na jakość estymacji parametrów sterowanie

$$u_m(t) = \begin{cases} \sqrt{n(t)} & n(t) \geq 0 \\ 0 & n(t) < 0 \end{cases} \tag{15}$$

gdzie:

$$n(t) = R\left[m(t+1) - trP^{-1}(t+1|t)\right] - Y^T(t)Y(t)$$

Dla sterowania adaptacyjnego wyliczonego z minimalizacji wskaźnika jakości (2) słuszne więc będzie ograniczenie

$$|u(t)| \geq u_m(t) \tag{16}$$

W celu określenia znaku sterowania dualnego rozpatrzono część funkcji strat J_o zależną od u(t). Ponieważ jeden składnik jest liniowy a drugi kwadratowy względem u(t), najmniejszą wartość funkcji strat uzyskujemy dla sterowania

$$u_D(t) = \begin{cases} u_m(t)\,\mathrm{sign}(u^o(t)) & |u^o(t)| < u_m(t) \\ u^o(t) & |u^o(t)| \geq u_m(t) \end{cases} \tag{17}$$

Można zauważyć, że pomijając ograniczenie (12) - ($u_m(t) = 0$) - sterowanie dualne (17) jest równoważne niedualnemu (6). Bezpośrednia kontrola wielkości macierzy kowariancji błędu estymacji parametrów pozwala na wykorzystanie zaproponowanego sterowania dualnego w przypadku obiektów niestacjonarnych, bowiem błąd identyfikacji zostaje szybko wykryty i skorygowany. Jest to również przyczyną, dla której możliwe było przyjęcie w rozpatrywanych przykładach stałych wartości wariancji parametrów do filtru Kalmana i identyfikacja wyłącznie wariancji szumu pomiarowego, co znacznie upraszcza numeryczną stronę zagadnienia.

Efektywność proponowanego algorytmu sterowania badano poprzez symulację na maszynie cyfrowej dla różnych modeli obiektów i porównano wyniki z wynikami uzyskiwanymi dla sterowania niedualnego i perturbacyjnego.

Za miarę jakości sterowania przyjęto jak w [4] akumulowaną funkcję strat

$$W(n) = \sum_{t=1}^{n} y^2(t) \tag{18}$$

W celu uproszczenia obliczeń w przykładach rozpatrzono obiekty o dwóch zmiennych parametrach, a więc:

$$\Theta^T(t) = \left[a_1(t) b_1(t)\right] \tag{19}$$

4. Przykłady

Przykład 1

Przykład ten dotyczy sterowania obiektem o nieznanych stochastycznych parametrach. Dla sterowania niedualnego, dualnego i perturbacyjnego uśredniono akumulowaną funkcję strat dla trzydziestu i pięćdziesięciu niezależnych symulacji. Względny błąd wyliczenia akumulowanej funkcji strat nie przekraczał 5%, co jest wystarczające do badań porównawczych i świadczy o reprezentatywności uśrednionych przebiegów.

Założona wartość wariancji szumu parametrów jest - w pierwszym z rozpatrywanych przypadków - dokładna, a w drugim różni się dziesięciokrotnie od wartości rzeczywistej.

Symulacje pozwalają więc ocenić znaczenie dokładnej znajomości tej wariancji.

Wartości początkowe parametrów symulowanego obiektu generowane były losowo, natomiast wariancje szumu pomiarowego i macierz kowariancji szumu parametrów wynoszą odpowiednio:

$$R = 4 \cdot 10^{-2}$$

$$Q = \mathrm{diag}\left[6 \cdot 10^{-5},\ 2 \cdot 10^{-3}\right]$$

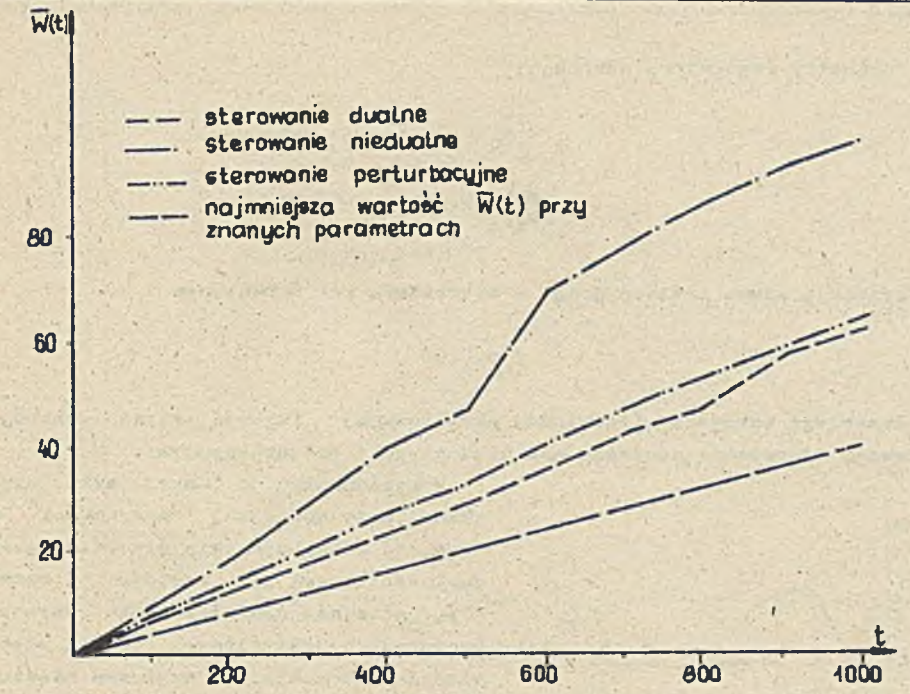
Założona wartość macierzy kowariancji szumu parametrów wykorzystana w równaniach filtru Kalmana:

- dla przypadku pierwszego

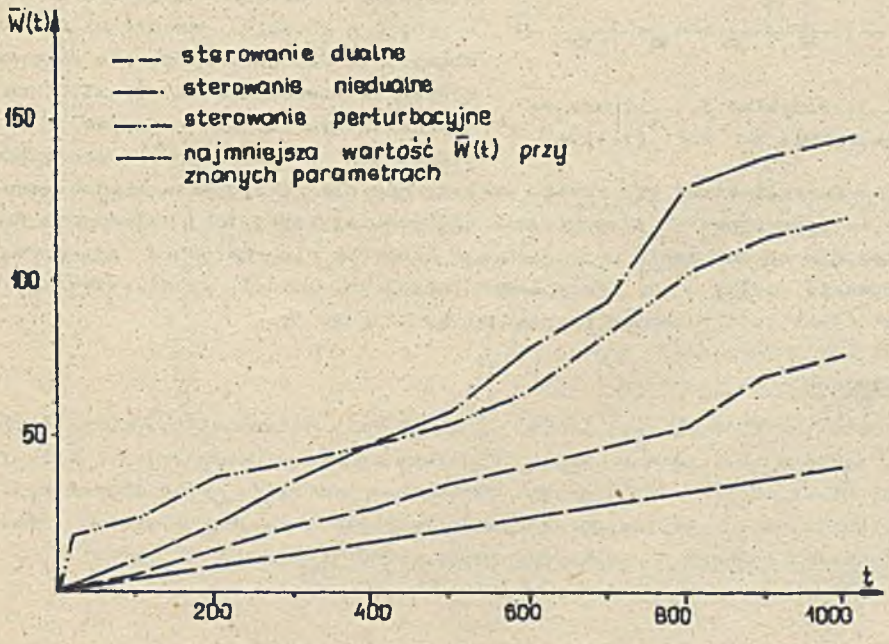
$$QA = Q$$

- dla przypadku drugiego

$$QA = 10Q$$



Rys. 1. Przykład 1. Uśredniona akumulowana funkcja strat. Znane Q



Rys. 2. Przykład 1. Uśredniona akumulowana funkcja strat. Nieznane Q

Parametry regulatora dualnego:

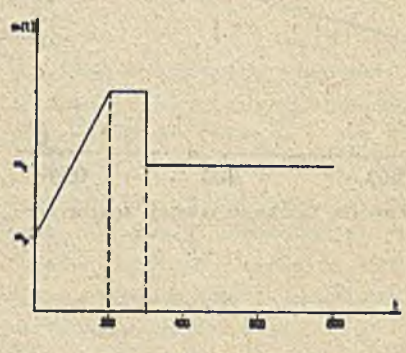
$$m_c = 20$$

$$P^{max}_{b_1 b_1} = 0.25$$

a wariancja szumu zakłócającego w sterowaniu perturbacyjnym

$$z = 0.08$$

Przebiegi wartości uśrednionej akumulowanej funkcji strat wykazują przewagę sterowania dualnego nad niedualnym i perturbacyjnym.

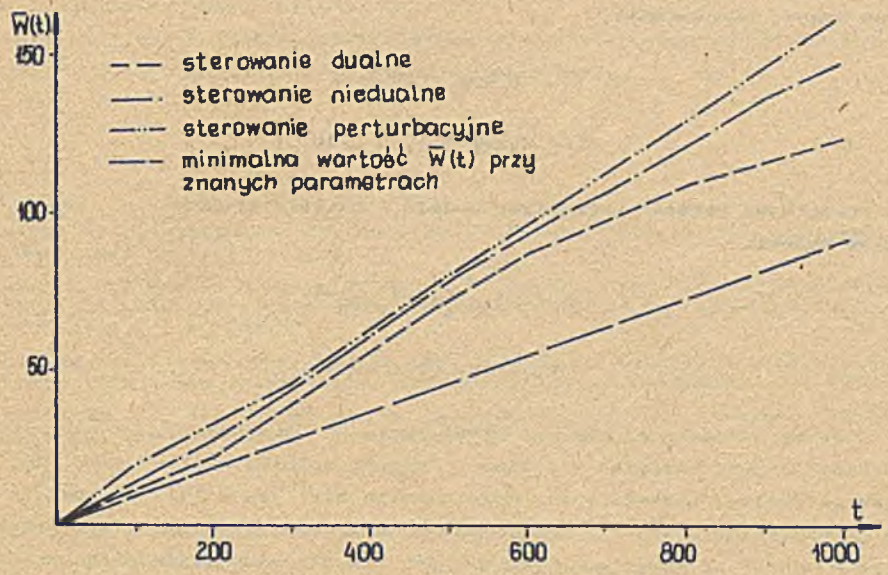


Rys. 3. Przykład 1. Zmienne ograniczenie na $trP^{-1}(t+1|t+1)$

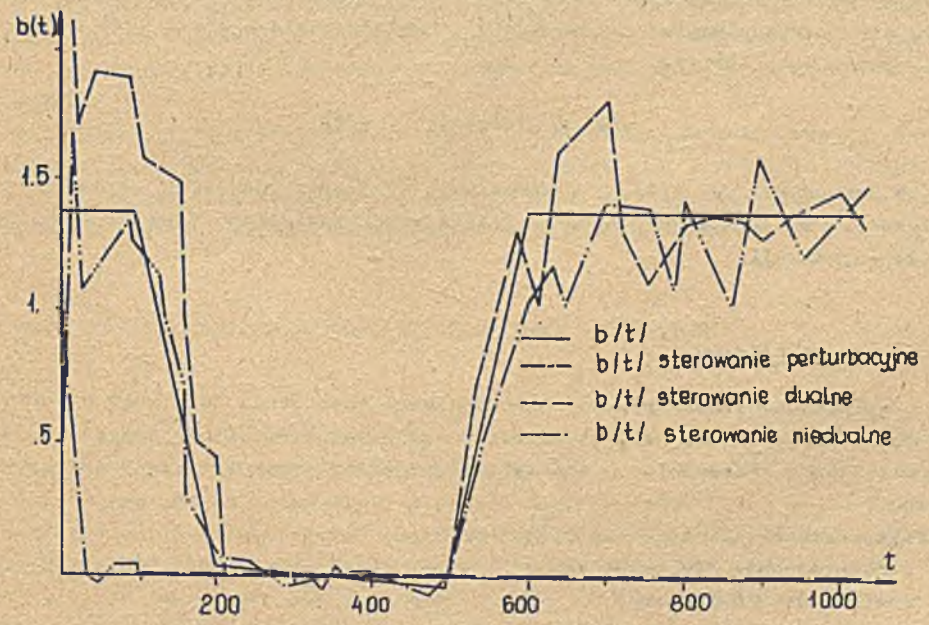
W porównaniu do funkcji strat uzyskanej przy dokładnej znajomości Q (rys. 1) obserwuje się dla sterowania dualnego wzrost jej wartości o około 17%, natomiast dla sterowania perturbacyjnego i niedualnego wynosi odpowiednio 32% i 45%. Ta względna nieczułość sterowania dualnego na błąd określenia QA motywowana była przy opisie sterowania. Analiza nachylenia $\bar{V}(t)$ - rys. 2 - pozwala ponadto na stwierdzenie, że nie jest korzystne ukierunkowywanie sterowania na identyfikację w początkowym okresie symulacji (dla sterowania perturbacyjnego początkowy wzrost funkcji strat był zawsze większy niż dla sterowania niedualnego). Było to przesłanką do poszukiwania najbardziej korzystnej zależności funkcyjnej dla ograniczenia m(t), takiej, która by dla małych t preferowała sterowanie według $u^o(t)$. Przykładem takiej zależności wykorzystywanej w symulacjach jest przebieg przedstawiony na rys. 3.

Przykład 2

System, w których a(t) i b(t) są funkcjami deterministycznymi - a(t) jest stałe a b(t) zmienia się w określony sposób - rozpatrywany był już przez Wieslandera i Wittenmarka. Celem tego przykładu było zbadanie, czy sterowanie perturbacyjne pozwala na osiągnięcie dobrych efektów również dla systemu różnego od zaproponowanego w [4].



Rys. 4. Przykład 2. Uśredniona akumulowana funkcja strat



Rys. 5. Przykład 2. Parametr b(t) i jego estymaty

Wykorzystana do estymacji wariancja szumu pomiarowego i szumu parametrów wynosi odpowiednio

$$R = 9 \cdot 10^{-2}$$

$$Q\Delta = \mathrm{diag}\left[10^{-7},\ 2 \cdot 10^{-3}\right]$$

Początkowa wartość parametrów modelu i macierz kowariancji współczynników wynosi:

$$\Theta(1|0) = \left[10^{-1},\ 10^{-1}\right]$$

$$P(1|0) = \mathrm{diag}\left[4,\ 4\right]$$

Analiza uśrednionej funkcji strat (rys. 4) wskazuje, że sterowanie perturbacyjne jest bardziej wrażliwe na zmiany współczynników modelu niż sterowanie dualne. Wprawdzie dla modelu zmian b(t) jak w [4] sterowania te są porównywalne, lecz dla innych zmian możliwe jest - jak w tym przykładzie - uzyskanie nawet gorszych efektów niż dla sterowania niedualnego.

Przykładowy przebieg estymacji parametru b(t) (rys. 5) pozwala na zaobserwowanie korzystnej cechy sterowania dualnego - stopniowego udokładnienia estymaty b(t). Rys. 5 zasługuje dodatkowo na uwagę ze względu na wystąpienie zjawiska wygaszania w przypadku sterowania niedualnego. Objawia się to wyzerowaniem estymaty b(t). Efektem takiego stanu jest przyjęcie przez model postaci

$$y(t) = a(t)y(t-1) + e(t)$$

W przypadku, gdy $a(t) < 1$, narastanie y(t) oraz macierzy kowariancji błędu estymacji nie jest zbyt szybkie i stan wygaszenia trwa do końca okresu symulacji.

5. Uwagi końcowe

Zaproponowany nowy rodzaj suboptymalnego sterowania dualnego wykorzystujący miarę kowariancji błędu estymacji parametrów do okresowego ukierunkowywania sterowania na identyfikację jest stosunkowo prosty numerycznie.

Efektem stosowania tego algorytmu było:

- zabezpieczenie się przed wystąpieniem zjawiska wygaszania dla każdego z rozpatrywanych systemów,
- uzyskanie mniejszej wartości wskaźnika jakości niż przy sterowaniu perturbacyjnym czy niedualnym,

- mniejsza wrażliwość algorytmu dualnego na zmiany parametrów systemu (możliwa przybliżona ocena wartości QA).

Dalsze możliwości tego algorytmu tkwią we właściwym zaprojektowaniu sposobu zmian m(t) w zależności od sterowanego obiektu.

LITERATURA

[1] Åström K.J., Wittenmark B.: Problems of Identification and Control. J.Math.Anal.Appl. 10 (1971).

[2] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Archiwum Autom. i Telemech. z. 4. (1976).

[3] Gessing R.: Zastosowanie zasady minimalizacji i uśredniania do wyznaczania sterowania optymalnego. Archiwum Autom. i Telemech. z.4 (1976).

[4] Wieslander J., Wittenmark B.: An Approach to Adaptive Control Using Real Time Identification. Automatica Vol 7 (1971).

СУБОПТИМАЛЬНОЕ ДВОЙСТВЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

В статье рассматривается новый вид адаптационного управления выполняющего в равной мере, функции опознавания и управления. Он выведен из минимализации среднего значения варианции исходного сигнала на один шаг вперёд, учитывая ограничение следа одношаговой эстиматы матрицы ковариантности ошибки эстимации.

Для вычисления в действительном времени эстимат параметров системы и информационной матрицы используемых алгоритм управления, применена техника фильтра Кальмана. Два номерических примера позволяют сравнить этот алгоритм управления с недвойственным и пертурбационным управлением.

SUBOPTIMUM DUAL CONTROL OF OBJECTS OF UNKNOWN PARAMETERS

S u m m a r y

A new adaptive control algorithm where the control is for both, regulation and identification, is presented in this article. It was derived by minimizing the one-step-ahead expected squared output subject to a constraint on the trace of the one-step-ahead estimation error covariance matrix. Kalman filter technique was used to give in real time the values of estimated parameters and information matrix. Two examples have let us compare this algorithm to nondual and perturbation control.