ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: AUTOMATYKA z. 47 Nr kol. 605

Marek KIMMEL

# ZAGADNIENIA STATYSTYCZNE W PROCESIE MONTAŻU

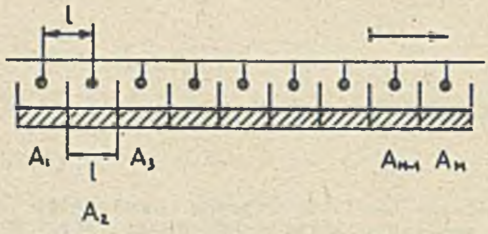
Streszczenie. W pracy przedstawiono statystyczne podejście do procesu montażu dla prostego przypadku linii montażowej. Sformułowano statystyczny wskaźnik jakości i zbadano niektóre jego własności. Podano konkretny przykład wskaźnika jakości oraz sugestie dotyczące praktycznego wykorzystania opracowanego w artykule modelu procesu.

## 1. Wstęp

W pracy rozważony jest prosty model statystyczny linii montażowej, nawiązujący do realnej sytuacji, jaka ma miejsce na linii montażu silnika samochodu FIAT 126-p w Bielsku-Białej. W oparciu o analizę tego modelu na gruncie teorii prawdopodobieństwa sformułowano statystyczny wskaźnik jakości i zadanie jego minimalizacji w sensie wartości oczekiwanej. Celem minimalizacji wskaźnika jakości jest dobór cyklu linii zapewniającego najmniejsze straty ekonomiczne z tytułu usterek montażu oraz niewykorzystanego czasu pracy. Przedstawiono przykład budowy wskaźnika jakości jak i propozycje dotyczące praktycznego wykorzystania modelu statystycznego. Stosowany aparat teorii prawdopodobieństwa jest elementarny i nie wykracza poza pierwsze rozdziały [4].

## 2. Opis obiektu i konstrukcja modelu

Linia montażowa jest systemem stanowisk pracy o strukturze szeregowej. Na stanowiskach linii wykonywane są kolejne etapy montażu gotowego produktu. Rozdział operacji pomiędzy operatorów poszczególnych stanowisk linii jest odrębnym zagadnieniem znanym w literaturze pod nazwą zadania przydziału zadań na linii (oryginalny termin angielski: "line balancing") i opisywanym szerzej np. w [1, 2, 3]. Ilość stanowisk linii (rys. 1) oznaczono symbolem M, długość każdego stanowiska wynosi 1, stanowiska umieszczono są ściśle obok siebie (tzw. stanowiska zamknięte, por. [5]). Wzdłuż stanowisk przesuwa się transporter linii, na którego zawieszkach zamocowane są montowane obiekty w odstępach 1. Ogólnie ilość zawieszek $M_z$ jest większa od M, jednak w pracy rozważana jest sytuacja uproszczona $M_z = M$, co przy dodatkowym założeniu jednorodności produktu montowanego na linii nie zmniejsza ogólności zadania (por. [2]). Czasy operacji na kolejnych stanowiskach linii charakteryzuje ciąg $\{A_i\}$, $i=1,2,\dots,M$. Wielkości $A_i$ są zmiennymi losowymi typu ciągłego o danych gęstościach prawdopodobieństwa. W ujęciu deterministycznym zamiast losowych czasów $A_i$ występują normatywne czasy stanowisk $a_i$ zdefiniowane jako kwantyle zm. los. $A_i$ rzędu q:




Rys. 1. Schemat linii montażowej rozpatrywanej w pracy. Oznaczenia jak w punkcie 2 pracy

$$F_i(a_i) = \int_0^{a_i} f_i(A_i)dA_i = q \tag{1}$$

gdzie:

$f_i$, $F_i$ – odpowiednio gęstość i dystrybuanta zmiennej losowej $A_i$.

Ponieważ prędkość v przesuwu transportera linii jest określona przez najdłuższy z czasów $a_i$, tzn.:

$$v = 1/\max_{1\leq i\leq M}\{a_i\} \tag{2}$$

gotowe produkty opuszczają linię w odstępach czasu C:

$$C = 1/v = \max_{1\leq i\leq M}\{a_i\} \tag{2'}$$

Wielkość C zwana jest cyklem linii. Stosowanie czasów normatywnych do wyznaczania prędkości linii sprawia, że co najmniej na jednym ze stanowisk linii zdarza się z prawdopodobieństwem 1-q usterka montażu spowodowana brakiem czasu. W celu zlikwidowania takich usterek należałoby zredukować prędkość linii, co z kolei wpłynęłoby na powiększenie "luzów czasowych" na pozostałych stanowiskach. Pojawia się więc naturalny problem minimalizacji wskaźnika jakości będącego funkcją kosztów obu wymienionych czynników.

## 3. Statystyczny wskaźnik jakości

Statystyczny wskaźnik jakości jest sformułowany jako suma trzech kosztów:

$$J = J^{+} + J^{-} + J^{o} \tag{3}$$

związanych odpowiednio z usterkami, niewykorzystanym czasem pracy oraz zmniejszeniem produkcji wskutek redukcji prędkości linii.

Koszt $J^{o}$ można przedstawić wzorem:

$$J^{o} = I^{o} + (\varkappa_o/C_{min} - \varkappa_o/C) \tag{4}$$

gdzie $\varkappa_o$ jest stałym współczynnikiem, $I^{o}$ - wartością strat produkcji przy pewnym dostatecznie krótkim cyklu ($C=C_{min}$) traktowanym jako odniesienie. Związany z niewykorzystanym czasem pracy koszt $J^{-}$ przedstawić można w postaci sumy:

$$J^{-} = \sum_{i=1}^{M} J_i^{-} \tag{5}$$

gdzie składnik $J_i^{-}$ jest równy kosztowi usterki na stanowisku i-tym linii.

Wybierając odpowiednią rosnącą (ogólniej, nie malejącą) funkcję $h_i^{-}(t)$ określoną dla dodatnich t, otrzymać można następującą postać $J_i^{-}$:

$$J_i^{-}(A_i, C) = \begin{cases} 0; & A_i \geq C \\ h_i^{-}(C-A_i); & A_i < C \end{cases} \tag{6}$$

Taki dobór $J_i^{-}$ spełnia dwa niezbędne warunki: a) koszt niewykorzystanego czasu pracy rośnie przy wydłużaniu cyklu linii, b) straty występują tylko, gdy $A_i < C$. Wielkość $J_i^{-}$ jest zmienną losową jako funkcja zmiennej losowej $A_i$. Zakłada się dalej, że nośnik gęstości $f_i$:

$$\mathrm{supp}(f_i) = \{a : f_i(a) \neq 0\} = [\alpha_i, \beta_i] \tag{7}$$

co w rzeczywistości jest zawsze spełnione.

Koszt $J^{+}$ związany z usterkami montażu rozpada się analogicznie na składniki $J_i^{+}$, i=1,2,...,M:

$$J^{+} = \sum_{i=1}^{M} J_i^{+} \tag{8}$$

Składniki $J_i^+$ można określić w następujący sposób. Na stanowisku i-tym wykonuje się $n_i$ operacji, a usterki montażu spowodowane są niedokończeniem lub pominięciem pewnej ilości końcowych operacji. Operacje numerowane są począwszy od ostatniej. Można założyć bez większego błędu, że usterki spowodowane pominięciem operacji początkowych lub błędnym wykonaniem operacji nie są zależne od prędkości linii i w związku z tym są nieistotne przy konstrukcji wskaźnika jakości. Koszt usterki związanej z niedokończeniem m końcowych operacji wynosi $q_i^m(q_i^{m+1} > q_i^m)$, losowy czas m-tej (od końca) operacji na stanowisku i-tym oznaczono przez $\tau_i^m$, a odpowiednią gęstość prawdopodobieństwa - $\varphi_i^m$. Zmienne losowe $\tau_i^m$ są niezależne i zachodzi:

$$A_i = \sum_{j=1}^{n_i} \tau_i^j \Longrightarrow f_i(A_i) = \Big(\mathop{\ast}_{j=1}^{n_i} \varphi_i^j\Big)(A_i) \tag{9}$$

gdzie gwiazdka jest symbolem iloczynu splotowego funkcji.

Zmienna losowa $\lambda$ określająca ilość niedokończonych (lub pominiętych) operacji jest scharakteryzowana następująco:

$$\begin{aligned} &\lambda = m < n_i \Longleftrightarrow C - \tau_i^m < \sum_{j=m+1}^{n_i} \tau_i^j \leqslant C \\ &\lambda = m = n_i \Longleftrightarrow \qquad \tau_i^m > C \end{aligned} \tag{10}$$

Składnik $J_i^+$ wskaźnika jakości jest zmienną losową:

$$J_i^+ = q_i^\lambda \tag{11}$$

W oparciu o powyższe rozważania można podać ścisłą postać zadania poszukiwania statystycznie optymalnej wartości cyklu linii $C^o$. Jest to wartość minimalizująca wartość oczekiwaną wskaźnika jakości:

$$C^o : \min_{C_{min} \leqslant C \leqslant C_{max}} \Big\{E\big[J(C)\big]\Big\} = E\big[J(C^o)\big] \tag{12}$$

gdzie $E[\cdot]$ oznacza operację brania wartości oczekiwanej zmiennej losowej J. Powyższy wzór należy traktować jako formalny. Teoretycznie ma on sens tylko wtedy, kiedy w przedziale $[C_{min}, C_{max}]$ dopuszczalnych wartości cyklu linii wartość oczekiwana wskaźnika jakości $E[J(C)]$ osiąga swój kres dolny. Przy pewnych założeniach można wykazać, że jest tak w rzeczywistości. Wystarczy bowiem wykazać, że funkcja $E[J(C)]$ jest ciągła na $[C_{min}, C_{max}]$. Składnik $J^o$ jest ciągły dla dodatnich C.

Dostatecznie ogólną charakteryzację składników $J_i^-$ można otrzymać, kładąc w (6):

$$h_i(C-A_i) = h_i(C-A_i) + \sum_{j=1}^{N} g_i^j \, 1(C-A_i-d_i^j) \tag{13}$$

gdzie $h_i$ jest rosnącą nieujemną funkcją ciągłą określoną dla dodatnich argumentów, $1(.)$ jest funkcją Haeveside'a, a $g_i^j$, $d_i^j > 0$ są stałymi współczynnikami. Ciągłość $E\left[J_i^-(C)\right]$ równoważna jest ciągłości funkcji:

$$r_i(C) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} 1(C-A_i-d_i^j) f_i(A_i) dA_i \tag{14}$$

$$s_i(C) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} h_i(C-A_i) f_i(A_i) dA_i \tag{15}$$

Funkcje te są ciągłe, o ile dystrybuanta $F_i(A_i)$ jest ciągła, tzn. gęstość zmiennej losowej $A_i$ istnieje i jest funkcją (a nie dystrybucją).

Składniki $J_i^+$ scharakteryzowane są wzorami (10, 11). Wartość oczekiwana:

$$E\left[q_i^\lambda\right] = \sum_{k=1}^{n_i} q_i^k P(\lambda = k) \tag{16}$$

gdzie:

$$P(\lambda = k) = \begin{cases} P(C-\tau_i^k < \sum_{j=k+1}^{n_i} \tau_i^j \leq C); & k < n_i \\ P(\tau_i^k > C); & k = n_i \end{cases} \tag{17}$$

Oznaczając przez $P_i^k(C)$ dystrybuantę zmiennej losowej $G_i^k = \sum_{j=k}^{n_i} \tau_i^j$ :

$$P_i^k(C) = \int_0^C \left(\mathop{\ast}_{j=k}^{n_i} \varphi_i^j\right)(\gamma) d\gamma \tag{18}$$

i całkując po obszarach wyznaczonych przez (17) otrzymuje się:

$$P(\lambda = k) = \begin{cases} P_i^{k+1}(C) - P_i^k(C); & k < n_i \\ 1 - P_i^{n_i}(C); & k = n_i \end{cases} \tag{19}$$

a więc:

$$E\left[J_i^+\right] = E\left[q_i^\lambda\right] = \sum_{k=z}^{n_i} P_i^k(C)(q_i^{k-1} - q_i^k) + q_i^{n_i} - q_i^1 P_i^1(C) \tag{20}$$

(wyprowadzenie wzoru (19) zamieszczono w Dodatku). $E(J_i^+)$ jest z uwagi na ciągłość dystrybuant, ciągłą funkcją C. Warto zauważyć, że

a) prawdopodobieństwo wystąpienia jakiejkolwiek usterki:

$$P_u = \sum_{j=1}^{n_i} P(\lambda = j) = 1 - P_i^1(C) = 1 - F_i(C) \tag{21}$$

(por. (1)),

b) $E(J_i^+)$ jest nierosnącą funkcją C.

Ciągłość wartości oczekiwanej wskaźnika jakości jako funkcji cyklu gwarantuje teoretyczną poprawność wzoru (12) i ułatwia efektywne znalezienie minimum.

## 4. Zastosowania

Przedstawiony statystyczny wskaźnik jakości procesu montażu ma stosunkowo (w porównaniu ze złożonością rzeczywistego procesu) prostą postać. Problemy związane z jego zastosowaniem dzielą się na dwie kategorie. Po pierwsze, estymacja parametrów procesu jest trudna. Odnosi się to głównie do rozkładów zmiennych losowych $\tau_i^j$ i $A_i$, koszty $J^o$, $h_i^-$ i $q_i^j$ mają bowiem oczywistą interpretację ekonomiczną. Po drugie, obliczenie $E(J^-)$, $E(J^+)$ wymaga wielokrotnego zastosowania procedur całkowania numerycznego, co zawsze wydłuża czas obliczeń. Wydaje się, że najprościej jest założyć, że zmienne losowe $\tau_i^k$ mają rozkłady normalne o różnych wartościach oczekiwanych i wariancjach (odp. $m_i^k$ i $V_i^k$). Wtedy zmienne losowe $A_i$ mają także rozkłady normalne o parametrach $m_i$ i $V_i$, wyrażających się w prosty sposób przez $m_i^k$ i $V_i^k$. Bez większej straty dokładności można "obciąć" rozkłady $A_i$, przyjmując np.:

$$\begin{cases} \alpha_i = m_i - 3\sqrt{V_i} \\ \beta_i = m_i + 3\sqrt{V_i} \end{cases} \tag{22}$$

lub podobnie (ewentualnie można zastosować niesymetryczne rozkłady normalne). Dalszy etap postępowania to tabelaryzacja dystrybuant itp.

Pojęcie o złożoności obliczeń dają następujące przykłady. Niech :

$$h_i^-(C-A_i) = \varkappa_i(C-A_i)\ 1(C-A_i) \tag{23}$$

gdzie $\varkappa_i^-$ stałe współczynniki (koszt niewykorzystanego czasu pracy rośnie liniowo z jego długością). Zakładając dla zmiennej losowej $A_i$ rozkład prostokątny od $\alpha_i$ do $\beta_i$, otrzymuje się:

$$E\left[J_i^-(C)\right] = \begin{cases} 0 & ; \quad C \leqslant \alpha_i \\ \varkappa_i^-(C-\alpha_i)^2/(2\beta_i-2\alpha_i); & \alpha_i < C < \beta_i \\ \varkappa_i^-\left[C - (\alpha_i+\beta_i)/2\right]; & C \geqslant \beta_i \end{cases} \tag{24}$$

Drugi przykład odnosi się do $J^+$. Jeżeli na każdym stanowisku wykonywane są tylko dwie operacje o identycznych rozkładach zmiennych losowych $\tau_i^1$, $\tau_i^2$ (prostokątnych od $\gamma_i$ do $\delta_i$), to $A_i$ ma rozkład trójkątny o parametrach $2\gamma_i = \alpha_i$, $\gamma_i + \delta_i$, $2\delta_i = \beta_i$. Łatwo sprawdzić, że dystrybuanta $P_i^2$ jest odcinkami liniowa, a $P_i^1$ składa się z odcinków linii prostych i parabol. Biorąc pod uwagę wzory (5), (8), (21), stwierdzić można, że analityczne znalezienie w podobnych przypadkach cyklu statystycznie optymalnego jest niemożliwe.

Trudności, wydłużające czas ewentualnych obliczeń na maszynie cyfrowej, są skompensowane przez fakt, że w praktyce konieczność wykonywania obliczeń zachodzi w odstępach kilkugodzinnych, np. co zmianę roboczą lub dodatkowo w przypadkach awaryjnych. Wtedy bowiem parametry procesu mogą ulec zmianie.

## 5. Wnioski

Problemy jakości i kosztów procesu montażu wymagają stosowania podejścia probabilistycznego i w szczególności wprowadzenia statystycznego wskaźnika jakości. Trudności w praktycznym zastosowaniu podobnego wskaźnika wynikają głównie z konieczności oceny wielu parametrów procesu, bowiem program komputerowy dokonujący obliczeń cyklu statystycznie optymalnego (czasochłonnych) można łatwo opracować w oparciu o standardowe procedury.

Wydaje się jednak, że efektywna ocena parametrów procesu jest realna, znane są bowiem (np. [1]) zastosowania praktyczne modeli o podobnym stopniu złożoności, wymagających oceny podobnej ilości parametrów.

## LITERATURA

[1] Kilbridge M., Wester L.: An Economic Model for the Division of Labour. Management Science, vol. 12, 6, 1966.

[2] Marecki F.: Modelowanie symulacyjne linii montażowej samochodu małolitrażowego. Informatyka, 7-8/75.

[3] Pawlik S.: Optymalizacja linii montażowej metodą symulacji cyfrowej. Materiały seminarium nt.: "Zastosowania modelowania cyfrowego". Gliwice 1976.

[4] Rozanow J.A.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1974.

[5] Thomopoulos N.T.: Line Balancing-Sequencing Mixed-Model Assembly. Management Science, vol. 13,2,1967.

## DODATEK

Wyprowadzenie wzorów (19), charakteryzujących rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretnej, równej ilości nie wykonanych operacji montażu

Rozważono dwa przypadki: a) $k < n_i$, b) $k = n_i$.

Ad a. Niech $p_i^k = \mathop{\ast}\limits_{k=k+1}^{n_i} \varphi_i^j$. Łączna gęstość prawdopodobieństwa zm. los. $\tau_i^k$ i $G_i^{k+1}$ jest: $p_i^{k+1}(G_i^{k+1})\varphi_i^k$, z powodu ich niezależności. Z definicji (17)

$$P(\lambda = k) = P(C - {}_i^k < \sum_{j=k+1}^{n_i} \tau_i^j \leq C) =$$

$$= \int_0^C \int_{C-{}_i^{k+1}}^{\infty} p_i^{k+1}(G_i^{k+1})\varphi_i^k(\tau_i^k)d\tau_i^k dG_i^{k+1} =$$

$$= \int_0^C p_i^{k+1}(G_i^{k+1})\left[1 - \int_0^{C-G_i^{k+1}} \varphi_i^k(\tau_i^k)d\tau_i^k\right] dG^{k+1} =$$

$$= p_i^{k+1}(C) - \int_0^C \int_0^{C-G_i^{k+1}} p_i^{k+1}(G_i^{k+1})\varphi_i^k(\tau_i^k)d\tau_i^k dG_i^{k+1}$$

W całce dokonuje się zamiany zmiennych:

$$\begin{cases} \sigma_i^k = \sigma_i^{k+1} + \tau_i^k \\ \tau_i^k = \tau_i^k \end{cases}$$

Jakobian przekształcenia równa się 1, obszar całkowania:

$$\begin{cases} 0 < \sigma_i^k < c \\ 0 < \tau_i^k < \sigma_i^k \end{cases}$$

W takim razie:

$$P(\lambda=k) = P_i^{k+1}(c) - \int_0^c \int_0^{\sigma_i^k} P_1^{k+1}(\sigma_i^k - \tau_i^k)\varphi_i^k(\tau_i^k)\,d\tau_i^k\,d\sigma_i^k =$$

$$= P_i^{k+1}(c) - \int_0^c \Big(\mathop{*}_{j=k}^{n_i} \varphi_i^j\Big)(\sigma_i^k)\,d\sigma_i^k = P_i^{k+1}(c) - P_i^k(c) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Ad b. Z definicji (17):

$$P(\lambda=k) = P(\tau_i^k > c) = P_i^k(c) = P_i^{n_i}(c) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОЦЕССУ СБОРКИ

Р е з ю м е

В статье представлен статистический подход к процессу сборки для простого типа сборочной линии. Сформулирован статистический показатель качества и исследованы некоторые его свойства. Дан конкретный пример показателя качества и суггестии касающиеся практического использования модели процесса разработанной в статье.

STATISTICAL PROBLEMS IN THE ASSEMBLY PROCESS

S u m m a r y

In the paper a statistical approach to the assembly process for a simple case of assembly line is presented. Random quality index has been formulated, and some properties of this index have been studied. An example of such index is given together with suggestions concerning practical application of the process model developed in the paper.