

Andrzej KOLMER

ALGORYTM UKŁADANIA RÓWNAŃ WĘZŁOWYCH OBWODU  
ZAWIERAJĄCEGO ŹRÓDŁA STEROWANE

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono zmodyfikowaną metodę analizy potencjałów węzłowych. Umożliwia ona ułożenie macierzy admitancyjnej obwodu zawierającego źródła sterowane i niesterowane oraz indukcyjności wzajemne. Podano ponadto schemat blokowy algorytmu pozwalający na maszynowe ułożenie macierzy admitancyjnej.

Wstęp

Metoda, przy pomocy której tworzy się równania obwodu, jest ważnym elementem programów komputerowej analizy i projektowania układów elektronicznych. Decyduje ona w znacznym stopniu o złożoności programu, a tym samym o czasie jego uruchomienia, zajętości obszaru pamięci i również o szybkości wykonania obliczeń. Aby metoda była użyteczna, musi być łatwa do zaprogramowania i powinna zajmować stosunkowo mały obszar pamięci. Metoda potencjałów węzłowych jest klasyczną metodą, która nie tylko spełnia powyższe wymagania, ale ponadto tworzy macierz admitancyjną obwodu zawierającą głównie elementy rozłożone blisko przekątnej, co jest korzystne z numerycznego punktu widzenia rozwiązywania układu równań. Z tych powodów jest ona bardzo popularna i była szeroko stosowana we współczesnych programach komputerowych takich jak ECAP, BIAS-3, CANCER [1], [9], [10]. Jak wiadomo, metodą tą nie można analizować obwodów zawierających w gałęzi źródła sterowane prądowo i idealne źródła napięciowe. Było to powodem stosowania innych metod w takich programach jak ECAP II [2], ASTAP [3].

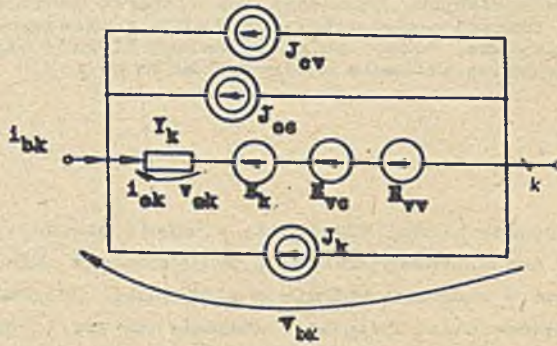
Obecnie szczególną uwagę zwrócono na rozszerzenie metody potencjałów węzłowych - np.: przez wprowadzenie dodatkowych zmiennych, jakimi są prądy sterujące [4], co umożliwi analizę obwodu składającego się z dowolnych elementów. Osobnym problemem jest uwzględnienie w równaniach potencjałów węzłowych indukcyjności sprzężonych. Można tego dokonać w ten sposób, że grupę indukcyjności sprzężonych rozpatruje się jako  $n$ -biegunnik, a następnie po obliczeniu i odwróceniu macierzy  $Z$  tego  $n$ -biegunnika dodaje się ją do macierzy admitancyjnej obwodu [5].

W artykule tym proponuje się modyfikację metody potencjałów węzłowych pozwalającą na analizę obwodu zawierającego cztery rodzaje źródeł sterowanych. Na jej podstawie podany zostanie schemat blokowy algorytmu układa-

jącego równania węzłowe. Zostanie przedstawiony również sposób uwzględnienia indukcyjności wzajemnych w równaniach potencjałów węzłowych przy zastosowaniu źródeł napięciowych sterowanych prądowo.

### 1. Równania obwodów zawierających źródła sterowane

W celu otrzymania macierzy admitancyjnej obwodu zawierającego źródła sterowane rozpatrzmy jedną z jego gałęzi przedstawioną na rys. 1. Zakładamy, że źródła zależne prądowe i napięciowe mogą być sterowane prądem lub



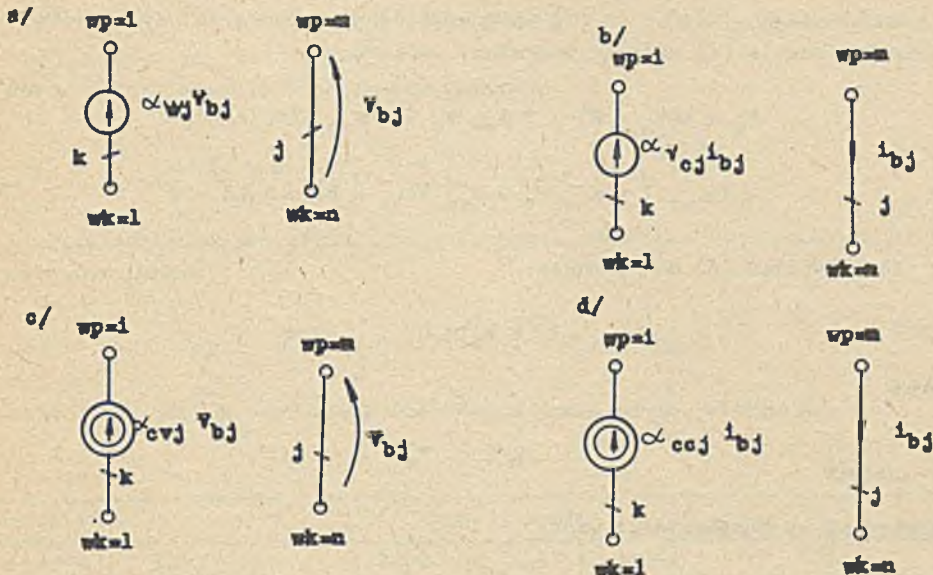
Rys. 1. Gałąź obwodu ze źródłem sterowanym

napięciem dowolnej gałęzi obwodu pod warunkiem, że ona sama ich nie zawiera. Ponadto wszystkie wielkości i wartości elementów uważamy za wielkości zespolone. Zamieniając źródła napięciowe na równoważne źródła prądowe i stosując I prawo Kirchhoffa możemy wartość prądu gałęziowego  $i_{bk}$  obliczyć w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 i_{bk} &= i_{ek} - I_k - I_{cc} - I_{ov} = Y_k v_{ek} - I_k - I_{cc} - I_{cv} = \\
 &= Y_k (v_b - E_k - E_{vc} - E_{vv}) - I_k - I_{cc} - I_{cv} = \\
 &= Y_k v_b - Y_k E_{vc} - Y_k E_{vv} - I_{cc} - I_{cv} - Y_k E_k - I_k
 \end{aligned} \tag{1}$$

Źródła sterowane napięciowe są zdefiniowane następująco (rys. 2)

$$E_{vv} = \alpha_{vvj} v_{bj} \tag{2}$$



Rys. 2. Rodzaje źródeł sterowanych

a) źródło napięciowe sterowane napięciem VCVS, b) źródło napięciowe sterowane prądem VCVS, c) źródło prądowe sterowane napięciem VCCS, d) źródło prądowe sterowane prądem CCCS

$$E_{vc} = \alpha_{vcj} i_{bj} = \alpha_{vcj} (i_{ej} - I_j) =$$

$$= \alpha_{vcj} Y_j v_{bj} - \alpha_{vcj} Y_j E_j - \alpha_{vcj} I_j \tag{3}$$

gdzie: "j" jest numerem gałęzi sterującej.

Podobnie dla źródeł sterowanych prądowych:

$$I_{cv} = \alpha_{cvj} v_{bj} \tag{4}$$

$$I_{co} = \alpha_{coj} i_{bj} = \alpha_{coj} Y_j v_{bj} - \alpha_{coj} Y_j E_j - \alpha_{coj} I_j \tag{5}$$

Określmy dla źródeł napięciowych sterowanych napięciem macierz  $\alpha_{vv}$  o wymiarach  $g \times g$  ( $g$  - liczba gałęzi w obwodzie) w następujący sposób:

$$\alpha_{vv}(i,j) = \begin{cases} \alpha_{vvj} & \text{- gdy "i" równa się numerowi gałęzi zawierającej źródło sterowane, a "j" równa się numerowi gałęzi sterującej,} \\ 0 & \text{- w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Podobnie określamy macierze  $\alpha_{vc}$ ,  $\alpha_{cv}$ ,  $\alpha_{co}$ .

Podstawiając (2)+(5) do (1) oraz wprowadzając macierze sterowania  $\alpha$ , możemy równanie (1) zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_b &= Y(\mathbf{v}_b - \mathbf{E}) - Y\alpha_{vv} \mathbf{v}_b - Y\alpha_{vo} Y(\mathbf{v}_b - \mathbf{E}) - \\ &- Y\alpha_{vo} \mathbf{I} - \alpha_{ov} \mathbf{v}_b - \alpha_{oo} Y(\mathbf{v}_b - \mathbf{E}) - \alpha_{oo} \mathbf{I} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (6)$$

Podstawiając (6) do równania:

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_b = 0$$

oraz

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_n$$

otrzymamy po przekształceniach:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A} Y \mathbf{A}^T - \mathbf{A} [Y(\alpha_{vv} + \alpha_{vo} Y) + \alpha_{ov} + \alpha_{oo} Y] \mathbf{A}^T \right\} \mathbf{v}_n = \\ = \mathbf{A}(Y \mathbf{E} + \mathbf{I}) - \mathbf{A} [(Y \alpha_{vo} + \alpha_{oo}) Y \mathbf{E} + (Y \alpha_{vo} + \alpha_{oo}) \mathbf{I}] \end{aligned} \quad (7)$$

Bezpośrednie maszynowe ułożenie równań potencjałów węzłowych obwodu na podstawie równania (7), aczkolwiek możliwe [6], jest mało ekonomiczne głównie z dwóch powodów:

- macierze  $\alpha$  źródeł sterowanych są przeważnie rzadkie i zajmują duży obszar pamięci,
- czas ułożenia równań jest długi, ponieważ trzeba wykonać wiele operacji na zerowych elementach macierzy z uwagi na pkt a).

## 2. Algorytm układania równań węzłowych obwodu

Aby określić algorytm maszynowego układania równań węzłowych obwodu, równanie (7) przedstawmy w postaci:

$$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) \mathbf{v}_n = \mathbf{I}_{n1} + \mathbf{I}_{n2} \quad (8)$$

gdzie:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A} Y \mathbf{A}^T \quad (8a)$$

- macierz admittancyjna obwodu nie zawierającego źródeł sterowanych,

$$I_{n1} = A(Y E + I) \quad (8b)$$

- wektor zastępczych sił prądomotoryznych,

$$Y_2 = -A[Y(\alpha_{vv} + \alpha_{vo} Y) + \alpha_{ov} + \alpha_{oo} Y]A^T \quad (8c)$$

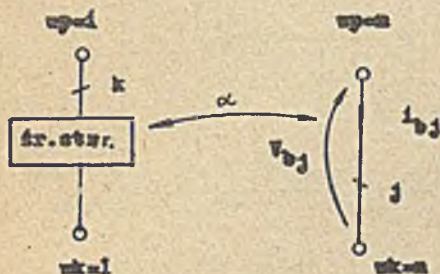
- macierz admitancyjna obwodu niesymetryczna, związana z istnieniem źródeł sterowanych,

$$I_{n2} = -A[Y(\alpha_{vo} + \alpha_{cc})Y E + (Y\alpha_{vo} + \alpha_{oo})]I \quad (8d)$$

- wektor sił prądomotoryznych wnoszonych przez źródła sterowane.

Tablica 1

Wartości elementów macierzy $Y_2$ i $I_{n2}$	Rodzaj źródła			
	VCVS	CCVS	VCCS	CCCS
$Y_2(i, m)$	$-\alpha_{vvj} Y(k)$	$-\alpha_{voj} Y(m) Y(j)$	$-\alpha_{ovj}$	$-\alpha_{ooj} Y(j)$
$Y_2(i, \bar{n})$	$\alpha_{vvj} Y(k)$	$\alpha_{voj} Y(m) Y(j)$	$\alpha_{ovj}$	$\alpha_{ooj} Y(j)$
$Y_2(1, k)$	$\alpha_{vvj} Y(k)$	$\alpha_{voj} Y(m) Y(j)$	$\alpha_{ovj}$	$\alpha_{ooj} Y(j)$
$Y_2(1, n)$	$-\alpha_{vvj} Y(k)$	$-\alpha_{voj} Y(m) Y(j)$	$-\alpha_{ovj}$	$-\alpha_{ooj} Y(j)$
$I_{n2}(i)$	0	$\alpha_{voj} Y(m) [Y(j) E(j) + I(j)]$	0	$\alpha_{ooj} [Y(j) E(j) + I(j)]$
$I_{n2}(1)$	0	$-\alpha_{voj} Y(m) [Y(j) E(j) + I(j)]$	0	$-\alpha_{ooj} [Y(j) E(j) + I(j)]$



Rys. 3. Gałąź sterująca i gałąź zawierająca źródło sterowane

Aby obliczyć  $Y_1$  i  $I_{n1}$ , można wykorzystać np.: algorytm opisany w [7]. Z równań (8c) i (8d) wynika, że wartości elementów macierzy  $Y_2$  i wektor  $I_{n2}$  będą takie, jak podano w tablicy 1. Oznaczenia węzłów początkowych i końcowych gałęzi sterującej i sterowanej pokazano na rys. 3.

Z wyników zamieszczonych w tablicy 1 wynika, że aby określić macierze  $Y_2$  i  $I_{n2}$ , należy znać:

- 1) numery gałęzi sterowanych,
- 2) numery węzłów początkowych i końcowych gałęzi sterującej i sterowanej,
- 3) rodzaj, źródła i wielkości sterującej,
- 4) współczynnik sterowania.

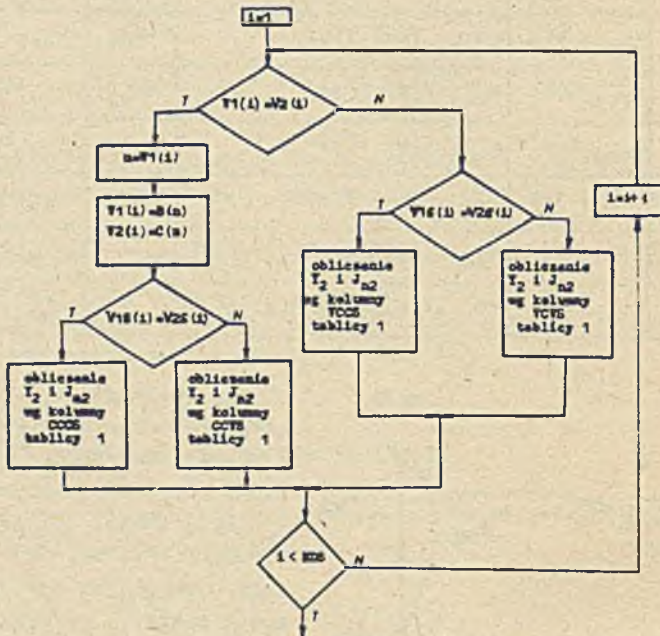
W związku z powyższym źródła sterowane można scharakteryzować przez podanie następujących danych:

- 1) macierz BRN, której wartości elementów są równe numerom gałęzi zawierających źródła sterowane,
- 2) macierze  $V1$  i  $V2$ , których wartości elementów są równe odpowiednio numerom węzłów początkowych i końcowych gałęzi sterujących,
- 3) macierze  $V1S$  i  $V2S$ , których wartości elementów są równe odpowiednio numerom węzłów początkowych i końcowych gałęzi sterowanych,
- 4) macierz  $WS$ , której elementy są równe współczynnikom sterowania poszczególnych źródeł sterujących.

Współczynnik sterowania występuje ze znakiem "+", gdy zwroty źródła sterowanego i wielkości sterującej są jednakowe w stosunku do kierunku dodatniego w danej gałęzi - w przeciwnym przypadku występuje znak "-". Za kierunek dodatni przyjęto zwrot:

- od węzła początkowego gałęzi dla prądów gałęziowych,
- do węzła początkowego dla źródeł sterowanych i napięć gałęziowych.

Wszystkie te macierze mają wymiar  $NDS \times 1$ , gdzie  $NDS$  jest liczbą źródeł sterowanych występujących w obwodzie.



Rys. 4. Algorytm obliczenia macierzy  $Y$  i  $I$

W celu identyfikacji rodzaju źródła sterowanego (napięciowe, prądowe) i wielkości sterującej (prąd, napięcie gałęziowe) przyjmuje się następującą umowę:

a) jeśli źródło sterowane jest prądowe, to wtedy

$$V1S(i) = V2S(i) = BRN(i),$$

b) jeśli wielkością sterującą jest prąd, to wtedy

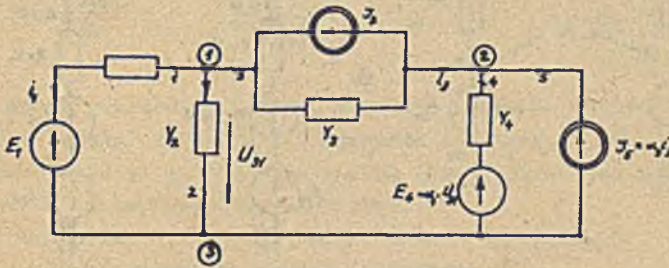
$$V1(i) = V2(i) = n,$$

gdzie:

$n$  - numer gałęzi sterującej.

Tak określone dane w pełni charakteryzują źródła sterowane występujące w obwodzie, a przy tym zajmują znacznie mniej miejsca w pamięci operacyjnej m.c. niż macierze sterowania  $\alpha$  występujące w równaniu (7).

Sposób utworzenia macierzy  $Y_2$  i  $I_{n2}$  w oparciu o powyższe dane przedstawiono na rys. 4. Na rysunku tym  $B(n)$  i  $C(n)$  oznaczają odpowiednio numer węzła początkowego i końcowego gałęzi sterującej o numerze  $n$ .



Rys. 5. Obwód zawierający źródła sterowane

Dla przykładu rozpatrzmy obwód przedstawiony na rys. 5. Dane charakteryzujące źródła sterowane będą następujące:

$$BRN = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad V1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad V2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad V1S = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad V2S = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad WS = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Przyjmując węzeł ③ jako węzeł odniesienia, otrzymamy macierze  $Y_2$  i  $I_{n2}$  zgodnie z tabelicą 1 w następującej postaci:

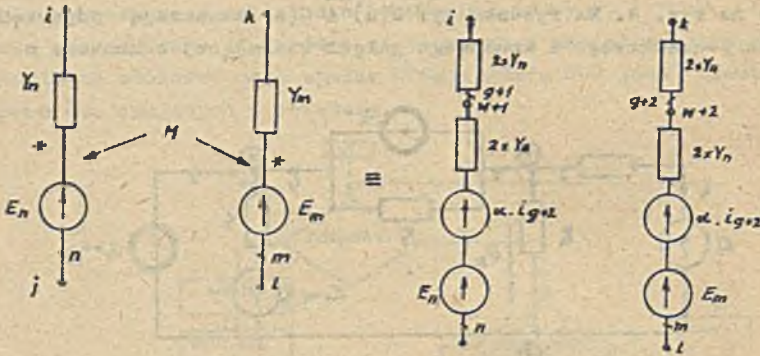
$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 Y_4 - \alpha_2 Y_3 & \alpha_2 Y_3 \end{bmatrix} \quad I_{n2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 I_3 \end{bmatrix}$$

a zgodnie z równaniem (8) równania potencjałów węzłowych są następujące:

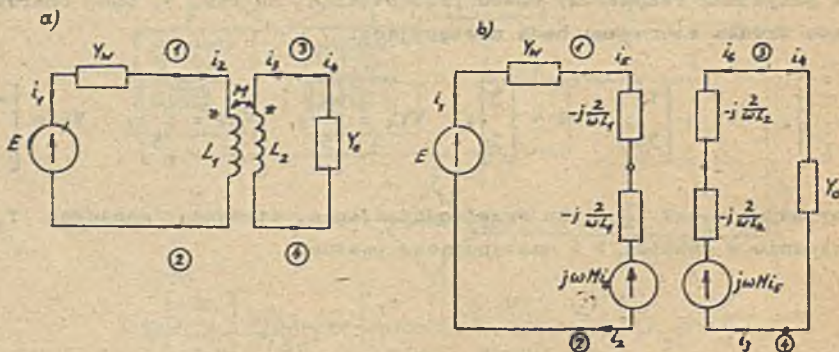
$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_3 \\ -Y_3 + \alpha_1 Y_4 - \alpha_2 Y_3 & Y_4 + Y_3 + \alpha_2 Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 Y_1 + I_3 \\ -I_3 + \alpha_2 I_3 \end{bmatrix}$$

3. Obwody zawierające sprzężenia indukcyjne

Jak wiadomo, do obwodów zawierających sprzężenia indukcyjne nie można stosować bezpośrednio metody potencjałów węzłowych. W celu uzyskania możliwości ułożenia równań potencjałów węzłowych każdą parę gałęzi sprzężonych indukcyjnie modyfikujemy w sposób pokazany na rys. 6. Z rysunku wy-



Rys. 6. Modyfikacja pary gałęzi sprzężonych indukcyjnie



Rys. 7

a) obwód ze sprzężeniem indukcyjnym, b) obwód po modyfikacji zawierający źródła sterowane zamiast sprzężeń indukcyjnych



nika, że każda para gałęzi sprzężonych indukcyjnie powoduje zwiększenie liczby węzłów i gałęzi w obwodzie o 2. Pojawiają się również dodatkowo dwa źródła napięciowe sterowane prądowo. Oczywiście w tym przypadku współczynnik sterowania  $\alpha = j\omega M$ . Po przeprowadzeniu modyfikacji otrzymamy obwód bez sprzężeń indukcyjnych o odpowiednio zwiększonej liczbie węzłów, gałęzi i źródeł sterowanych, dla którego można już określić macierz admittancyjną. Dla obwodu z rys. 7a równania potencjałów węzłowych będą miały następującą postać (węzeł ⑥ jest węzłem odniesienia):

$$\begin{bmatrix} Y_w - j \frac{2}{\omega L_1} & -Y_w & 0 & 0 & j \frac{2}{\omega L_1} \\ -Y_w & Y_w - j \frac{2}{\omega L_1} & -j \frac{4M}{\omega L_1 L_2} & 0 & j \frac{2}{\omega L_2} \\ 0 & 0 & Y_o - j \frac{2}{\omega L_2} & -Y_o & 0 \\ j \frac{4M}{\omega L_1 L_2} & 0 & -Y_o & Y_o - j \frac{2}{\omega L_2} & -j \frac{4M}{\omega L_1 L_2} \\ j \frac{2}{\omega L_1} & j \frac{2}{\omega L_1} & j \frac{4M}{\omega L_1 L_2} & 0 & -j \frac{4}{\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EY_w \\ -EY_w \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ogólnie można powiedzieć, że aby otrzymać macierz admittancyjną obwodu zawierającego źródła sterowane i sprzężenia indukcyjne, należy:

- 1) dokonać modyfikacji gałęzi sprzężonych indukcyjnie tak jak na rys. 6 (może być ona przeprowadzona maszynowo),
- 2) obliczyć macierze  $Y_1$  i  $I_{n1}$  dla obwodu o odpowiednio zwiększonej liczbie węzłów i gałęzi wg znanego algorytmu,
- 3) obliczyć macierze  $Y_2$  i  $I_{n2}$  wg algorytmu przedstawionego na rys. 4,
- 4) macierze  $Y_1$  i  $Y_2$  oraz  $I_{n1}$  i  $I_{n2}$  dodać, otrzymując układ równań (8).

Podsumowując, można powiedzieć, że zaproponowana metoda ułożenia równań potencjałów węzłowych jest stosunkowo prosta i znacznie bardziej efektywna niż układanie równań bezpośrednio z równania (7). Nie wymaga ona dodatkowych zmiennych jak metoda w [4]. Warto zaznaczyć, że tą metodą można rozwiązywać również obwody zawierające idealne transformatory, co nie jest możliwe w metodzie opisanej w [5]. Dlatego też może ona znaleźć zastosowanie w uniwersalnych programach analizy obwodów prądu stałego i zmiennego, zwłaszcza gdy przy rozwiązaniu układu równań (8) wykorzystana się rzadkość macierzy admittancyjnej w przypadku dużych obwodów [6].

## LITERATURA

- [1] Nagel L., Rohrer R.: Computer analysis of nonlinear circuits, excluding radiation (CANCER). IEEE J. Solide-State Circuits, SC-6, No 4, 1971.
- [2] Branin F.H.: ECAP II - A new electronic circuits analysis program. IEEE J. Solid-State Circuits, SC-6, No 4, 1971.
- [3] Mahoney G.W.: Program called ASTAP makes fast work of analyzing large-scale circuits. Electronics, April 18, 1974.
- [4] Chung-Wen Ho: The modified nodal approach to network analysis. IEEE Trans. vol. CAS-22, No 6, June 1975.
- [5] Bojanow: Algorytm i programa PAUSOM-2 dla czastotnowo analiza elektryonnych schem na EOCM. Izv. VUZ Radioelektr. vol. 11, 1973.
- [6] Jenson R.W.: Network analysis (theory and computer methods).
- [7] Chojean J.: Analiza liniowych obwodów prądu stałego (program ALINIES). Skrypt Pol.Śl. nr 385, Gliwice 1972.
- [8] Berry R.D.: An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution. IEEE Trans. vol. CT-18, no 1, January 1971.
- [9] Jensen Randall W., Lieberman Mark D.: IBM Electronic circuit analysis program, Prentice-Hall, New Jersey 1968.
- [10] McCalla W.J., Howard Jr. W.G.: BIAS-3: A program for the nonlinear dc analysis of bipolar transistor circuit, IEEE. J.Solid. State Circuits, Feb. 1971.

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ УЗЛОВЫХ УРАВНЕНИЙ СХЕМ  
СОДЕРЖАЩИХ УПРАВЛЯЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ

## Резюме

Представлен модифицированный метод анализа узловых потенциалов. Он делает возможным составление адмиттанционной матрицы схемы, содержащей управляемые и неуправляемые источники, и также взаимные индуктивности. Кроме того, дана блок-схема алгоритма для машинного составления адмиттанционной матрицы.

ALGORITHM TO DETERMINE NODAL EQUATIONS FOR CIRCUITS  
WITH DEPENDENT SOURCES

## Summary

The modified method of nodal voltage analysis is presented. It makes possible to drive admittance matrix for circuits containing the dependent and independent sources and mutual inductivities. The algorithm block diagram for computer analysis is also given.