

BUDOWNICTWO z. 26

P. 3343/40

JAKUB MAMES

PROBABILISTYCZNA OCENA BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI
W OPARCIU O TEORIĘ ROZKŁADU WARTOŚCI SKRAJNYCH

25-LECIE

POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

P O L I T E C H N I K A Ś L Ą S K A
ZESZYT NAUKOWY Nr 272 – GLIWICE 1970

SPIS TREŚCI

	str.
Wstęp	
1. Definicje	6
2. Miary bezpieczeństwa	7
3. Statystyczne opis najmniejszych wartości wytrzymałości betonu	11
4. Statystyczny opis obciążeń	45
5. Ocena bezpieczeństwa konstrukcji	47

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE



P.3343/70

Nr 272

JAKUB MAMES

**PROBABILISTYCZNA OCENA BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI
W OPARCIU O TEORIĘ ROZKŁADU WARTOŚCI SKRAJNYCH**

PRACA HABILITACYJNA Nr 97

**REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ**

Fryderyk Staub

REDAKTOR DZIAŁU

Włodzimierz Starosolski

SEKRETARZ REDAKCJI

Witold Gużkowski

**Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. M. Strzody 18**

PJ288/70

Nakł. 50+175 Ark. wyd. 2,83 Ark. druk. 3,63 Papier offsetowy kl. III. 70x100. 80 g
Oddano do druku 9. 12. 1969 Podpis. do druku 7. 5. 1970 Druk ukończono w maju 1970
Zam. 68 9. 12. 1969 O-23 Cena zł 3,50

**Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach**

WSTĘP

Współczesna nauka o bezpieczeństwie konstrukcji porzuca klasyczne koncepcje deterministyczne i rozpatruje zagadnienie bezpieczeństwa w kategoriach rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. W dotychczasowych ujęciach probabilistycznej teorii bezpieczeństwa podstawowym narzędziem jest analiza rozkładu prawdopodobieństwa obciążeń, wytrzymałości i innych czynników wpływających na bezpieczeństwo, traktowanych jako zmienne losowe. Głównym niedostatkim takiego ujęcia jest oparcie analizy i przewidywań na statystyce zdarzeń częstych, czyli zdarzeń opisanych przez strefę centralną rozkładu. Rozkład zmiennej losowej rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$, a więc teoretycznie pozwala obliczać prawdopodobieństwa również zdarzeń rzadkich. W rzeczywistości rozkład teoretyczny wytrzymałości czy obciążeń jest rozkładem hipotetycznym, dobranym lepiej lub gorzej do rozkładu empirycznego w próbie. Za pomocą testów zgodności (np. testu χ^2) można zweryfikować hipotezę rozkładu, ale tylko w jego strefie środkowej. Strefy skrajne wymykają się wszelkim sprawdzianom, czego naocznym dowodem jest fakt, że stosując test χ^2 łączymy klasy skrajne w jedną wspólną klasę o dostatecznie dużej liczebności. O ile prawdopodobieństwa zdarzeń częstych można z wystarczającą dla potrzeb praktycznych dokładnością obliczać na podstawie hipotetycznego rozkładu, o tyle wnioskowanie probabilistyczne na tej podstawie o zdarzeniach rzadkich może być obarczone dowolnie dużym błędem. Analiza zdarzeń rzadkich powinna być niezależna od hipotezy rozkładu.

Punktem wyjścia przedstawionej w pracy koncepcji jest oczywiste stwierdzenie, że katastrofy konstrukcji są zdarzeniami rzadkimi, wywołanymi wystąpieniem równie rzadkich przyczyn, i

że jedynie statystyka zdarzeń rzadkich jest narzędziem matematycznym adekwatnym do opisu zjawiska. Wymaga to zastąpienia rozkładów zmiennych losowo parametrów bezpieczeństwa¹⁾ przez asymptotyczne rozkłady ich wartości skrajnych.

Skrajna - najmniejsza x_1 lub największa x_n - wartość w próbie, pobranej z populacji zmiennej losowej x (zmiennej pierwotnej), jest z kolei sama zmienną losową. Zgodnie z teorią asymptotyczny rozkład tej zmiennej może być jednym z trzech blisko ze sobą spokrewnionych rozkładów typu wykładniczego, a mianowicie albo rozkładem Gumbela²⁾

$$\phi^{(1)}(x_n) = \exp \left[- e^{-\alpha(x_n - u)} \right] \quad (1)$$

albo rozkładem Fréchet'a

$$\phi^{(2)}(x_n) = \exp \left[- \left(\frac{y}{x_n} \right)^k \right] \quad (2)$$

albo też rozkładem Weibulla

$$\phi^{(3)}(x_n) = \exp \left[- \left(\frac{\omega - x_n}{\omega - v} \right)^k \right] \quad (3)$$

zależnie od zachowania się funkcji $f(x)$ rozkładu pierwotnej zmiennej w nieskończoności, natomiast - co jest szczególnie ważne - niezależnie od typu rozkładu tej zmiennej. Zostało to udowodnione dla bardzo obszernej klasy rozkładów. Bliższe omówienie i obszerną literaturę przedmiotu znaleźć można u E.J. Gumbela [8].

Tak więc ocena bezpieczeństwa konstrukcji oparta o rozkłady skrajnych wartości parametrów bezpieczeństwa ma między innymi

¹⁾ Parametr bezpieczeństwa jest tutaj rozumiany tak, jak w pracach J. Murzewskego [12].

²⁾ Nazwy rozkładów podane tak, jak to się przyjęło w literaturze, chociaż ani Gumbel, ani Weibull nie byli pierwsi, którzy te rozkłady podali i opisali.

tę przewagę nad dotychczasowymi ujęciami, że jest oceną niezależną od hipotez rozkładu (ang. distribution-free), a tym samym w większym stopniu zobiektywizowaną. Treścią niniejszej pracy jest przedstawienie tej koncepcji i wskazanie efektywnych metod oceny bezpieczeństwa w oparciu o rozkłady wartości skrajnych.

Przedstawiona w niniejszej pracy koncepcja nie może być bezpośrednio zastosowana do zagadnień wytrzymałości dynamicznej, w których zniszczenie konstrukcji następuje nie wskutek wystąpienia szczególnie dużych obciążeń (co jest zdarzeniem rzadkim), lecz wskutek wielokrotnie powtarzającego się identycznego cyklu obciążenia (będącego zdarzeniem częstym).

Definicja bezpieczeństwa konstrukcji jest w wysokim stopniu kontrowersyjna. Dla lepszego zrozumienia treści pracy podano w rozdziale pierwszym przyjęty przez autora układ definicji, określający bezpieczeństwo jako mierzalną cechę konstrukcji. Takie ujęcie umożliwia skonstruowanie różnych probabilistycznych miar bezpieczeństwa, co jest treścią drugiego rozdziału.

W rozdziale trzecim zilustrowano na przykładzie wytrzymałości betonu sposób statystycznego opisu parametru bezpieczeństwa w oparciu o rozkład wartości skrajnych. Oszacowanie parametrów sześciu analizowanych rozkładów empirycznych wykazało istnienie dodatniego lewostronnego ograniczenia wytrzymałości betonu.

W rozdziale czwartym naszkicowano sposób analogicznego opisu obciążeń działających na konstrukcję.

W rozdziale piątym podano koncepcje oceny bezpieczeństwa konstrukcji na podstawie teorii rozkładu wartości skrajnych. Za miarę bezpieczeństwa przyjęto prawdopodobieństwo dodatniego zapasu nośności, zdefiniowanego jako rozstęp między najmniejszą wartością r_1 nośności konstrukcji a największą wartością p_n obciążenia. Wskazano możliwości zastosowania rozkładów wartości skrajnych również przy innych ujęciach zagadnienia bezpieczeństwa.

1. DEFINICJE

Z podanego niżej układu definicji nie wszystkie zostały wykorzystane w dalszej części pracy. Mimo to zostały one przytoczone w celu uniknięcia niejasności i lepszego zrozumienia całości wyводу.

1.1. Bezpieczeństwo konstrukcji jest to mierzalna cecha, określająca zdolność trwania eksploatowanej konstrukcji w stanie zdatnym do użytku.

1.2. Stan dopuszczalny jest to stan konstrukcji pozwalający na jej użytkowanie zgodnie z przeznaczeniem.

Stan przeciwny nazywamy stanem niedopuszczalnym.

1.3. Stan graniczny jest to stan rozdzielający klasy stanów dopuszczalnych i niedopuszczalnych.

Ze względu na przyczyny, uniemożliwiające użytkowanie konstrukcji, wyróżniamy stany graniczne zniszczenia, utraty stateczności, utraty równowagi ogólnej, zarysowania itd.

W określeniach 1.2 i 1.3 należy przyjmować, że stan konstrukcji dany jest przez jej opis geometryczny.

1.4. Prawdopodobieństwo przetrwania (ang. probability of survival) okresu (t_1, t_2) jest to prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że przedział czasowy od chwili t_1 do chwili t_2 będzie sekwencją stanów dopuszczalnych. Prawdopodobieństwo $q(t_1, t_2)$ zdarzenia przeciwnego nazywamy prawdopodobieństwem uszkodzenia lub katastrofy.

1.5. Stan bezpieczny jest to stan konstrukcji, któremu można przypisać dostatecznie dużą miarę bezpieczeństwa.

W powyższej definicji stan konstrukcji dany jest przez jej opis geometryczny i fizyczny.

1.6. Trwałość konstrukcji (elementu) jest to okres czasu $t = t_u - t_0$ od chwili t_0 przekazania konstrukcji (elementu) do eksploatacji do chwili t_u powstania pierwszego uszkodzenia wymagającego naprawy, odbudowy lub wymiany uszkodzonej konstrukcji (elementu).

1.7. Zapas nośności jest to rozstęp (różnica)

$$E = R_1 - P_0$$

między skrajną najmniejszą wartością r_1 nośności konstrukcji a skrajną (największą lub najmniejszą) wartością p_n obciążenia działającego na konstrukcję w planowanym okresie eksploatacji.

Rozumie się, że obie wielkości r_1 i p_n muszą być wyrażone w tych samych jednostkach, np. w jednostkach obciążenia zewnętrznego lub uogólnionej siły wewnętrznej.

Mimo pozornej oczywistości niektórych przytoczonych definicji nie są one wcale uzgodnione ani powszechnie przyjęte. Najwięcej dyskusji wzbudza samo pojęcie bezpieczeństwa, rozumiane przez niektórych autorów jako stan, jako zdarzenie, jako prawdopodobieństwo lub wreszcie jako brak zagrożenia życia i zdrowia ludzkiego w przypadku katastrofy. Bezpieczeństwo, tak jak zostało ono zdefiniowane w p. 1.1, odpowiada pojęciu niezawodności.

2. MIARY BEZPIECZEŃSTWA

Określone w poprzednim rozdziale bezpieczeństwo jest mierzalną cechą konstrukcji, tak jak na przykład wytrzymałość jest mierzalną cechą materiału. Chcąc ocenić bezpieczeństwo budowli trzeba uzgodnić sposób mierzenia tej cechy. W ujęciach klasycznych taką miarą była wartość współczynnika bezpieczeństwa lub wartość naprężenia w materiale w stosunku do jego wytrzymałości. Praktyka związała obie powyższe miary z koncepcjami deterministycznymi. W niniejszej pracy interesować nas będą probabilistyczne miary bezpieczeństwa.

2.1. W pracach z dziedziny probabilistycznej teorii bezpieczeństwa konstrukcji najczęściej przyjmuje się za miarę bezpieczeństwa prawdopodobieństwo $p(t_0, t_k)$ przetrwania od chwili t_0 oddania obiektu do użytku do chwili t_k zakończenia planowanego okresu eksploatacji [3]. Ze względu na ułatwienia obliczeniowe ocenia się niekiedy bezpieczeństwo na podstawie prawdopodobieństwa $q = 1 - p$ zdarzenia przeciwnego. Prawdo-

podobieństwo katastrofy q zawiera się zwykle w przedziale od $1 \cdot 10^{-3}$ do $1 \cdot 10^{-6}$.

Prawdopodobieństwo przetrwania jako miara bezpieczeństwa zależy od programowych obciążeń konstrukcji, cech zastosowanych materiałów, wymiarów, układu konstrukcyjnego, warunków pracy budowli oraz od planowanego okresu eksploatacji. Jeżeli, abstrahując od poprzednich czynników, będziemy traktować prawdopodobieństwo przetrwania $p(t_0, t_k)$ wyłącznie jako funkcję zmiennej długości $t = t_k - t_0$ planowanego okresu eksploatacji, to prawdopodobieństwo przetrwania stanie się tożsame z funkcją niezawodności [4]

$$p(t_0, t_k) \equiv R(t)$$

2.2. Dla elementów konstrukcyjnych małej trwałości, niewielkich wymiarów i łatwych w wymianie stosowanie podanej w p. 2.1 miary bezpieczeństwa jest niedogodne. Określenie prawdopodobieństwa przetrwania drewnianego podkładu kolejowego, wbudowanego w odcinek toru o planowanym 50-letnim okresie eksploatacji, byłoby pozbawione praktycznego sensu, skoro wiadomo, że po kilku latach trzeba będzie podkład wymienić.

Dla tego rodzaju elementów właściwsze będzie przyjęcie średniej trwałości \bar{t} jako miary bezpieczeństwa. Trwałość t jest zmienną losową, której rozkład $f(t)$ można ustalić na podstawie danych empirycznych. Z definicji trwałości wynika, że dystrybuanta $F(t)$ określa prawdopodobieństwo nieprzetrwania okresu t . Tak więc prawdopodobieństwo przetrwania $p(t)$ i dystrybuanta trwałości $F(t)$, jako prawdopodobieństwa zdarzeń przeciwnych, związane są relacją

$$p(t) + F(t) = 1,$$

co zresztą nie ma większego znaczenia praktycznego, gdyż obie miary bezpieczeństwa mają odrębne dziedziny zastosowań.

Przyjęcie średniej trwałości jako miary bezpieczeństwa umożliwia wykorzystanie metod teorii niezawodności.

2.3. W powyższych rozważaniach prawdopodobieństwo traktowane jest jako pojęcie pierwotne, którego się nie definiuje, wymagając jedynie, aby spełniało układ aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa [1,5]. Oznacza ono ogólnie "szansę" sukcesu lub niepowodzenia. Tak na przykład prawdopodobieństwo uszkodzenia

$$q = 48 \cdot 10^{-6}$$

oznacza, że należy oczekiwać 48 przypadków niezdatności do użytkowania w planowanym okresie eksploatacji wśród miliona podobnych konstrukcji. Liczba q jest przypisana danej konstrukcji niezależnie od liczności N zbioru wszystkich konstrukcji tego samego typu.

W przypadku dużej liczności prawdopodobieństwo q posiada wyżej podaną interpretację częstościową, traci ją jednak w przypadku $N \ll \frac{1}{q}$.

W takich sytuacjach, a zwłaszcza gdy w grę wchodzi obiekty o szczególnej ważności (np. mosty, tamy), lepiej jest za miarę bezpieczeństwa przyjąć prawdopodobieństwo Q_r określonej liczby r katastrof w zbiorze N wszystkich budowli danego typu.

Próba, polegająca na obserwacji zachowania się poszczególnych konstrukcji w okresie eksploatacji, może mieć tylko dwa wyniki: albo przetrwanie (z prawdopodobieństwem p), albo katastrofę (z prawdopodobieństwem q). Jeżeli przyjmiemy - co jest w wysokim stopniu uzasadnione - że prawdopodobieństwa te nie ulegają zmianie w czasie trwania obserwacji oraz że wyniki dwóch różnych prób są zdarzeniami niezależnymi, to zagadnienie sprowadza się do schematu Bernoulliego i prawdopodobieństwo r katastrof w zbiorze N konstrukcji wyrazi się wzorem [5]

$$Q_r = \binom{N}{r} p^{N-r} q^r \quad (4)$$

Oczywiście konieczna jest umowa w kwestii przyjęcia liczby r , przy której oceniać będziemy bezpieczeństwo. W grę wchodzi $r = 0$ lub $r = 1$, bo dla większych r prawdopodobieństwo Q_r przyjmuje wartości zbyt małe. Można na przykład ustalić $r = 0$, nazwać Q_0 prawdopodobieństwem braku katastrof i przyjąć je

za miarę bezpieczeństwa konstrukcji mało licznych. Dla $r = 0$ wzór (4) przyjmuje prostszą postać

$$Q_0 = p^N \quad (5)$$

skąd widoczna jest zależność prawdopodobieństwa braku katastrof od liczebności zbioru konstrukcji.

Z treści tego rozdziału wynika, że istnieją różne probabilistyczne miary bezpieczeństwa, znajdujące zastosowanie do różnych rodzajów konstrukcji. Co więcej, nawet w tej samej konstrukcji bezpieczeństwo różnych jej części ze względu na różne stany graniczne może i powinno być oceniane według różnych miar, np. bezpieczeństwo ze względu na stan graniczny nośności na podstawie prawdopodobieństwa braku katastrof, ze względu na inne stany graniczne - na podstawie prawdopodobieństwa przetrwania, a bezpieczeństwo elementów wymieniających - na podstawie trwałości średniej.

2.4. Wymienione powyżej miary bezpieczeństwa oparte są wszystkie na analizie rozkładów parametrów bezpieczeństwa w strefie centralnej, a więc w strefie zdarzeń częstych. Z przy czyn omówionych we wstępie pracy racjonalne jest przyjęcie miary bezpieczeństwa opartej o rozkłady skrajnych wartości parametrów bezpieczeństwa. Zdefiniowany w punkcie 1.7 zapas nośności jest zmienną losową, będącą kompozycją (splotem) losowo zmiennych skrajnych wartości nośności i obciążenia. Dodatni zapas nośności $z > 0$ świadczy o tym, że katastrofa nie nastąpi nawet w skrajnie niekorzystnym przypadku wyjątkowo małej nośności i wyjątkowo dużego obciążenia. Im większe będzie prawdopodobieństwo $P_z(z > 0)$ takiego zdarzenia, tym większe będzie bezpieczeństwo konstrukcji.

Autor proponuje, aby przyjąć prawdopodobieństwo $P_z(z > 0)$ dodatniego zapasu nośności za probabilistyczną miarę bezpieczeństwa konstrukcji.

Metodyka oceny prawdopodobieństwa $P_z(z > 0)$ została bliżej omówiona w rozdziale 5, w tym miejscu należy jedynie podkreślić, że prawdopodobieństwo P_z jest pojęciowo różne od prawdopodobieństwa przetrwania p . Jest ono również liczbowo róż-

ne, co jest jego dodatkową zaletą, bowiem prawdopodobieństwo przetrwania przyjmuje niedogodne wartości bliskie jedności (rzędu $p = 1 - 1 \cdot 10^{-6}$), podczas gdy prawdopodobieństwo P_z będzie znacznie bliższe wartości 0,5, dostępnej wyczuć przeciętnego inżyniera.

Układ definicyj, przyjęty w rozdziale 1, umożliwia skonstruowanie jeszcze innych probabilistycznych miar bezpieczeństwa, a o ich celowości stanowić będzie ich praktyczna użyteczność.

3. STATYSTYCZNY OPIS NAJMNIEJSZYCH WARTOŚCI WYTRZYMAŁOŚCI BETONU

Wytrzymałość betonu oznaczana jest na ciałach próbnych sporządzanych, pielęgnowanych i badanych w sposób określony przepisami. Normy różnych krajów różnie określają kształt i wymiary ciał próbnych, ich liczbę i warunki badania, ale wszystkie za podstawową wytrzymałość betonu przyjmują wartość średnią \bar{R} z wyników uzyskanych na serii ciał próbnych. Wielkość ta, pod względem statystycznym będąca wartością średnią w próbie

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

była do niedawna, a praktycznie pozostaje do chwili obecnej, jedynym parametrem opisującym wytrzymałość betonu.

Dopiero niedawne ustalenia organizacji międzynarodowych (RILEM, CEB, Komisja Budownictwa RWPG) wprowadzają drugi wskaźnik statystyczny, będący miarą rozproszenia wyników pomiaru wytrzymałości. Za miarę tę przyjmuje się albo współczynnik zmienności

$$v = \frac{\sigma_R}{R}$$

będący stosunkiem odchylenia średniego σ_R do wytrzymałości średniej, albo współczynnik jednorodności

$$k = \frac{R_{\alpha}}{\bar{R}}$$

będący stosunkiem kwantyla R_{α} do wytrzymałości średniej. Rząd α kwantyla przyjmuje się w granicach od $\alpha = 0,05$ do $\alpha = 0,0013$, co dla rozkładu normalnego odpowiada standaryzowanemu odchyleniu od $y = -1,645$ (CEB) do $y = -3$ (RWPG).

Z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji oba parametry statystyczne \bar{R} i k są niewystarczające. Przede wszystkim sporne jest przyjęcie poziomu α , a jeszcze bardziej samego typu rozkładu wytrzymałości betonu. Dla małych wartości α określenie kwantyla R_{α} z próby jest praktycznie niemożliwe, gdyż wymagałoby przebadania próby zawierającej kilka lub kilkanaście tysięcy elementów. Pozostaje obliczanie kwantyla R_{α} na podstawie hipotetycznego rozkładu wytrzymałości, co jest oszacowaniem dość dowolnym i dla małych α obarozonym dużym błędem. Rozkład normalny, przyjmowany często ze względu na ułatwienia obliczeniowe, nie jest tu w niczym uprzywilejowany. Pogląd, że przyjęcie takiego lub innego rozkładu nie odgrywa większej roli w praktycznych obliczeniach, jest słuszny tylko w odniesieniu do strefy centralnej rozkładu. Najważniejszym niedostatkim wymienionych parametrów \bar{R} i k jest fakt, że opisują one rozkład w strefie zdarzeń częstych, podczas gdy o bezpieczeństwie konstrukcji decydują szczególnie niskie wytrzymałości materiału, a więc zdarzenia rzadkie.

W rozdziale tym podjęto próbę statystycznego opisu tych właśnie zdarzeń rzadkich, stosując teorię rozkładu wartości skrajnych^{x)}. Oparto się przy tym na podstawowej dla tego zagadnienia pracy E.J. Gumbela "Statistics of Extremes" [8], wykorzystując zwłaszcza lansowane przez niego siatki

x) G. Demarre [2] pierwszy wyraził pogląd o celowości stosowania teorii rozkładu wartości skrajnych przy ocenie bezpieczeństwa konstrukcji.

prawdopodobieństwa. Za zmienną losową przyjęto dla ilustracji wytrzymałość betonu zwykłego.

Rozkład wytrzymałości betonu musi być lewostronnie ograniczony, gdyż wytrzymałość (w dalszym ciągu oznaczana dla wygody przez x) nie może przyjmować wartości ujemnych. Oznaczmy lewostronną granicę rozkładu przez ε ($x \geq \varepsilon$) i załóżmy, że w otoczeniu punktu $x = \varepsilon$ dystrybuanta $F(x)$ spełnia warunek podany przez B.W. Gniedienkę (por. [8])

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{F(\varepsilon + \alpha x)}{F(\varepsilon + x)} = c^k \quad (6)$$

przy czym

$$F(\varepsilon) = 0; \quad F(\varepsilon + \delta) > 0; \quad \delta > 0, \quad c > 0, \quad k > 0.$$

Jeżeli z takiego rozkładu pobierzemy losowo próbę o liczności n , to asymptotyczny (dla $n \rightarrow \infty$) rozkład najmniejszej wartości skrajnej x_1 będzie rozkładem Weibulla określonym dystrybuantą

$$\Phi(x_1) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x_1 - \varepsilon}{v - \varepsilon} \right)^k \right] \quad (7)$$

przy warunkach

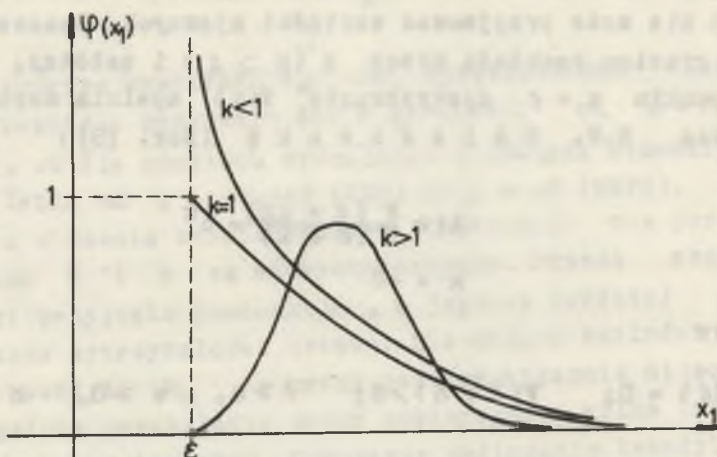
$$\Phi(\varepsilon) = 0; \quad \Phi(\varepsilon + \delta) > 0; \quad \delta > 0, \quad k > 0; \quad x_1 \geq \varepsilon, \quad v > \varepsilon$$

Parametr ε jest to tzw. parametr progowy rozkładu ($x_1 \geq \varepsilon$), v - parametr skali - jest kwantylem rzędu 0,632 rozkładu, co wynika z podstawienia $x_1 = v$ do równania (7)

$$\Phi(v) = 1 - \frac{1}{e} = 0,63212$$

zaś k jest parametrem kształtu, zmieniającym wykres funkcji gęstości $\varphi(x_1)$ (patrz rys. 1).

Rozkład Weibulla przechodzi w rozkład Frécheta dla $k < 0$, w rozkład wykładniczy dla $k = 1$ lub w rozkład Rayleigha dla $k = 2$.



Rys. 1. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Weibulla

Dla dalszych wywodów szczególnie ważny jest fakt, że rozkład zmiennej x_1 jest rozkładem Weibulla niezależnie od charakteru rozkładu pierwotnego $F(x)$, byle był spełniony warunek (6).

Pobierzmy z populacji generalnej o rozkładzie lewostronnie ograniczonym N prób o liczebności n każda. W każdej próbie pojawi się jakaś wartość najmniejsza x_1 badanej cechy. O tym, czy empiryczny rozkład N najmniejszych wartości jest zgodny z teorią rozkładem Weibulla, przekonamy się za pomocą niżej opisanych siatek prawdopodobieństwa (rys. 2 i nast.). Z uwagi na bliskie pokrewieństwo trzech rozkładów wartości skrajnych rozkład Weibulla nanosi się zwykle na siatkę prawdopodobieństwa rozkładu Gumbela, której konstrukcję krótko opiszemy.

Na dolnej osi poziomej odkładamy w skali liniowej wartości zmiennej zredukowanej

$$y = \alpha(x + \beta)$$

od $y = -2$ do $y = 8$. Powyżej nanosimy przyporządkowane prawdopodobieństwa P , wynikające z dystrybuanty rozkładu Gumbela (por. (1))

$$P = \Phi^{(1)}(y) = \exp(-e^{-y}) \quad (8)$$

a na górnej osi poziomej okresy powrotu T , obliczone ze związku

$$T = \frac{1}{1-P}.$$

Jeżeli na osi pionowej natniemy liniową skalę zmiennej x , to w takim układzie współrzędnych rozkład Gumbela (8) przedstawi się w postaci linii prostej niezależnie od wartości parametrów α i β . Musimy zastosować odpowiednią transformację, jeżeli chcemy, aby rozkład Weibulla naniesiony na powyższą siatkę był również linią prostą.

Przyjmijmy hipotezę, że lewostronna granica rozkładu równa jest zeru

$$\xi = 0.$$

Wówczas rozkład Weibulla (7) przyjmuje prostszą postać

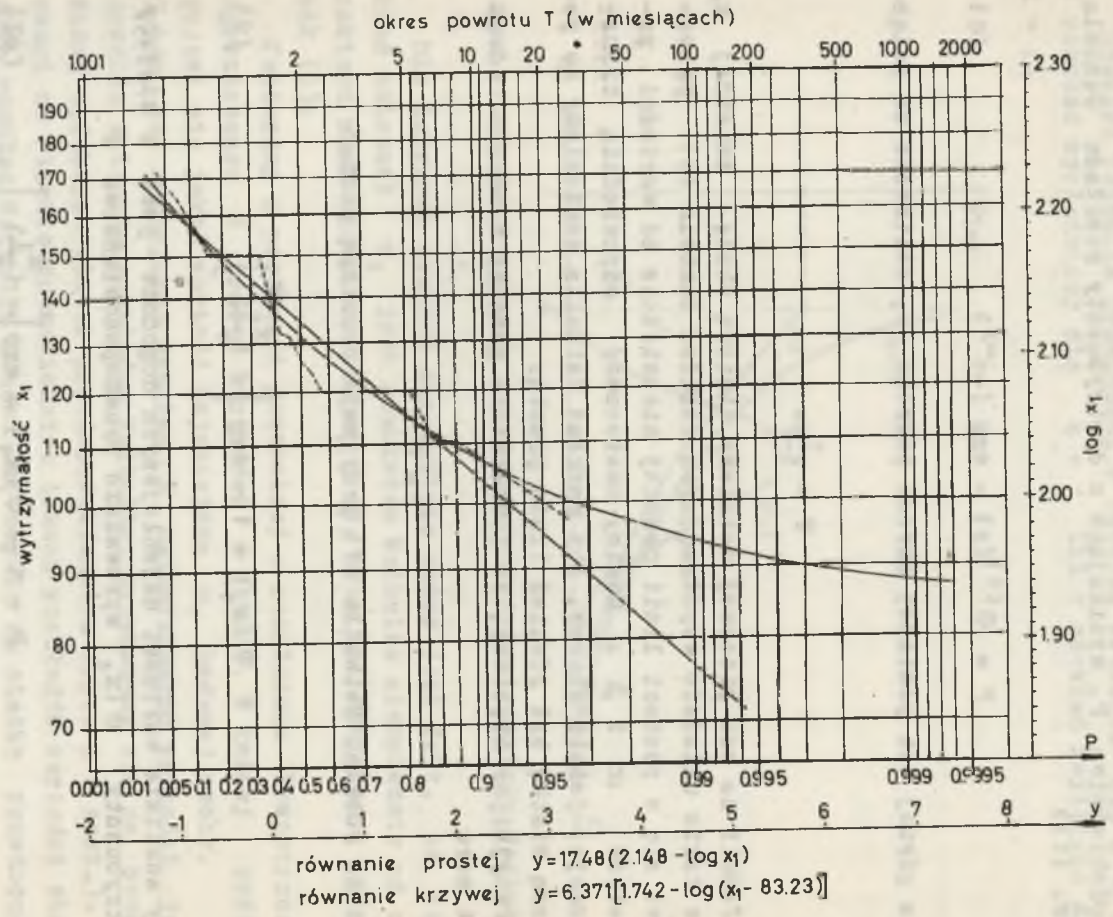
$$\Phi(x_1) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x_1}{\gamma}\right)^k\right] \quad (9)$$

Przy analizie wartości najmniejszych dogodnie jest w miejsce dystrybuanty $\Phi(x_1)$ wprowadzić prawdopodobieństwo P

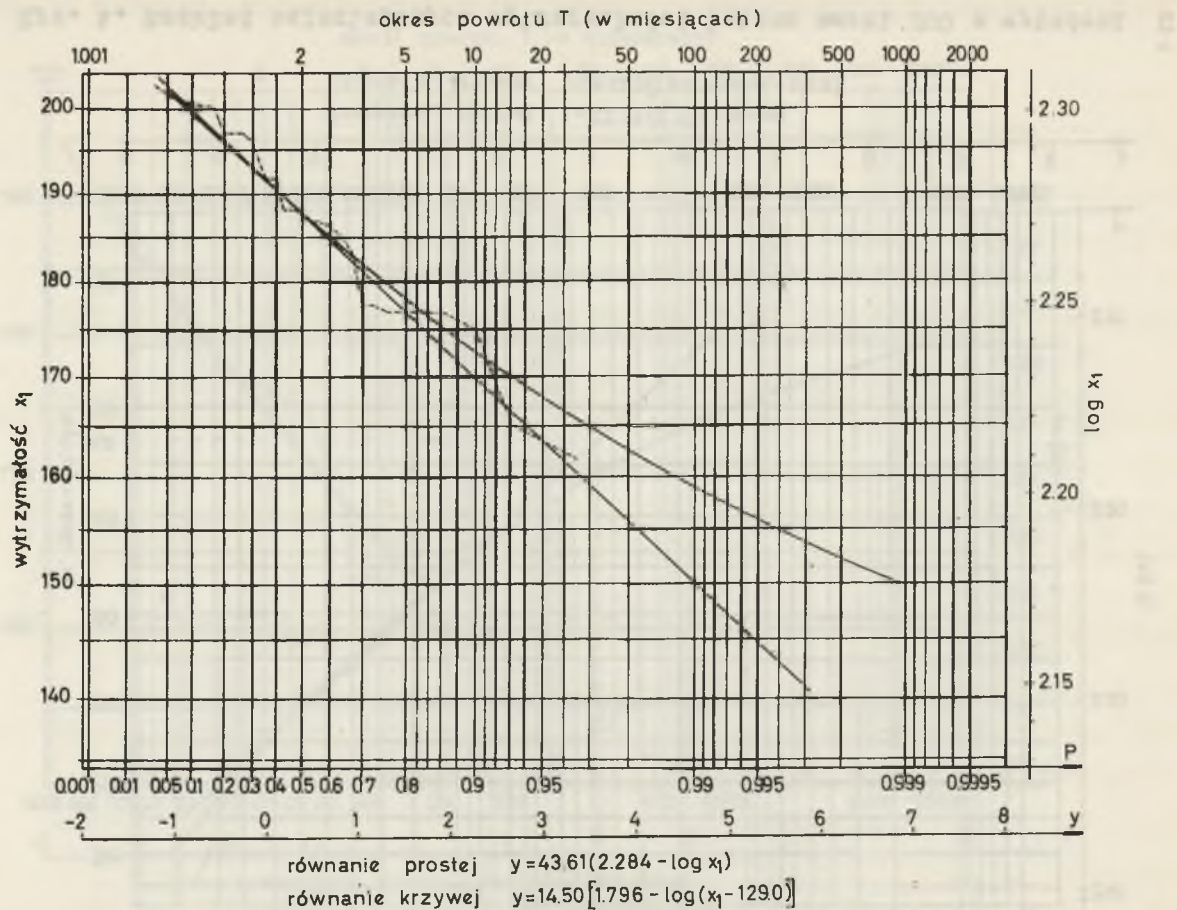
$$P = 1 - \Phi(x_1) = \exp\left[-\left(\frac{x_1}{\gamma}\right)^k\right] \quad (10)$$

pojawienia się wartości większej od danej. Rozkład (10) przejdzie w rozkład Gumbela (8), jeżeli będzie

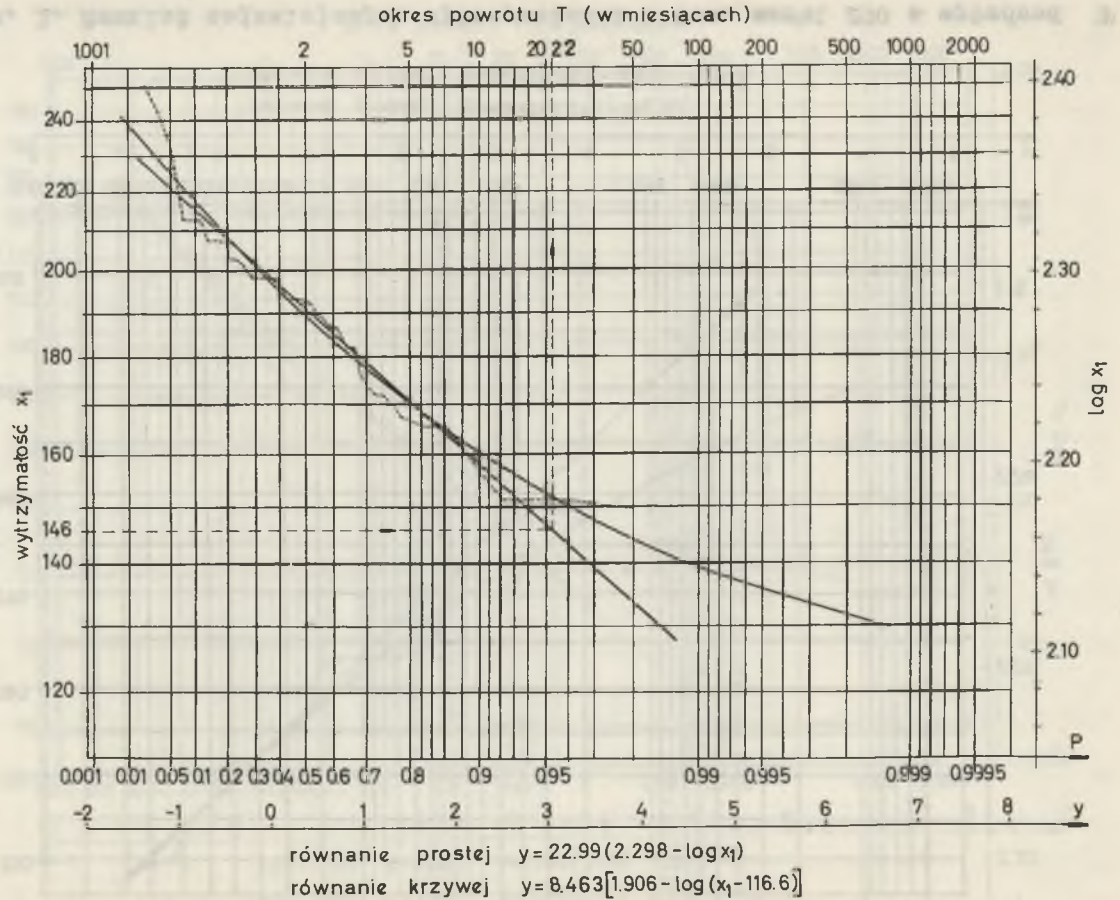
$$\left(\frac{x_1}{\gamma}\right)^k = e^{-y}$$



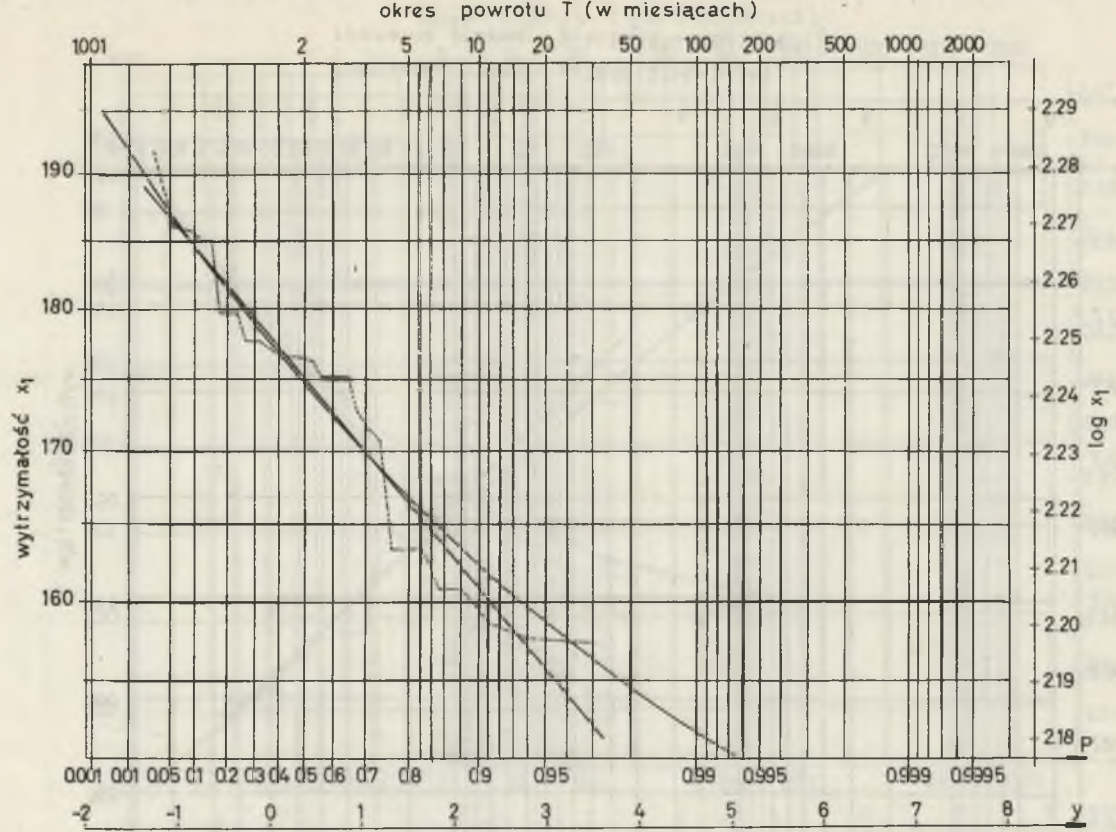
Rys. 2. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni A



Rys. 3. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni B



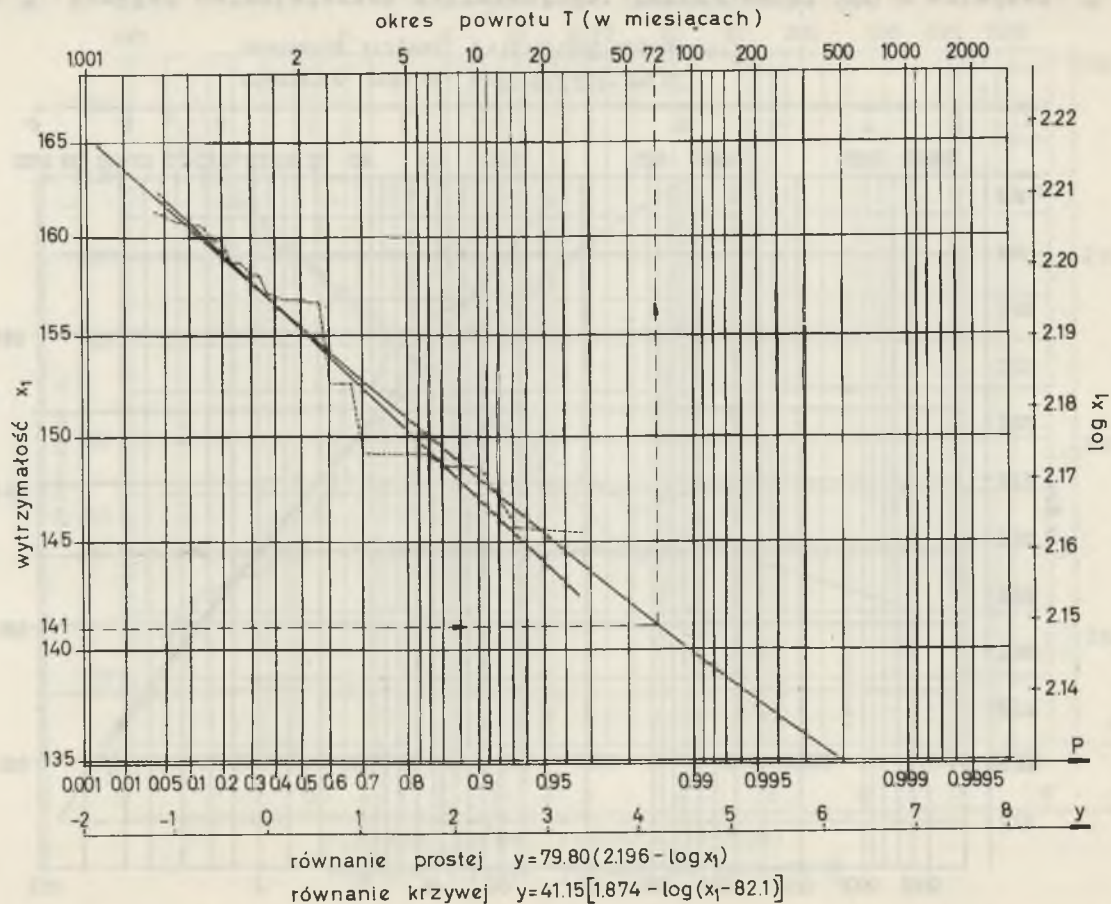
Rys. 4. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni C



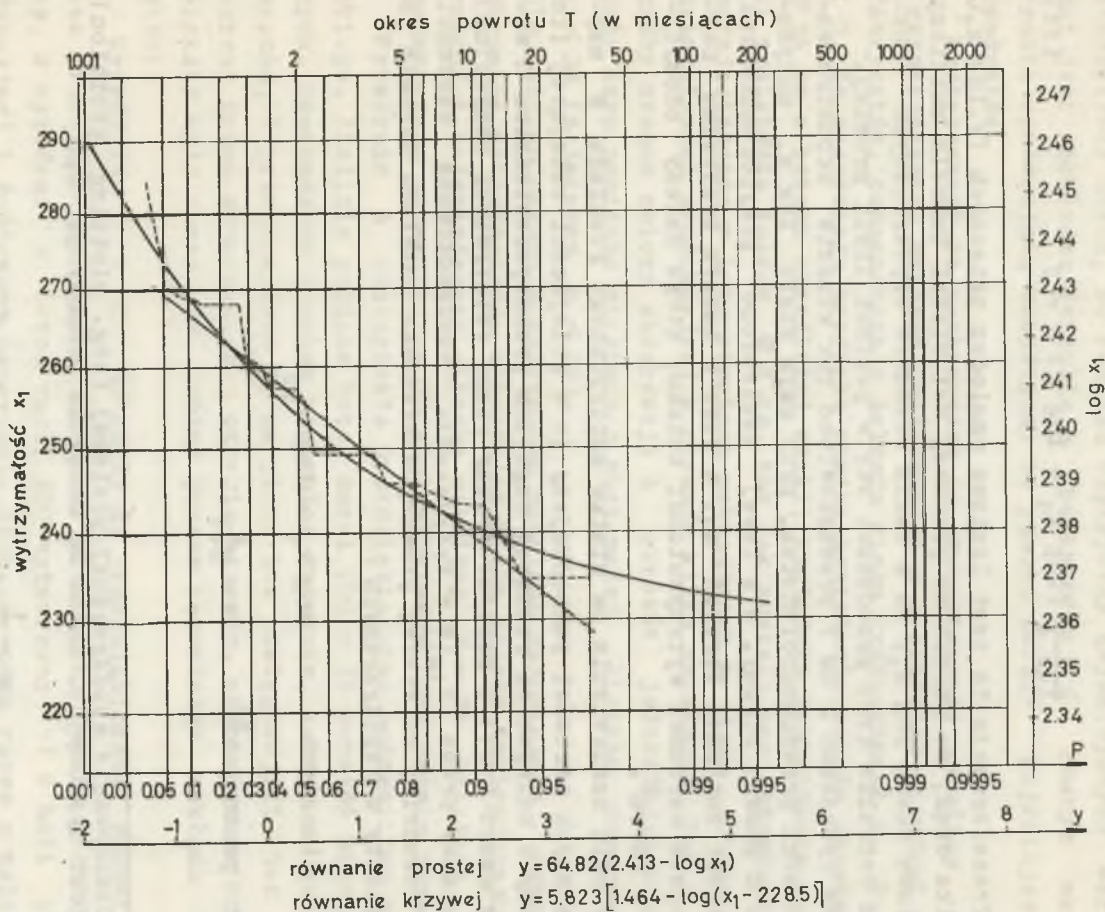
równanie prostej $y = 51.18 (2.251 - \log x_1)$

równanie krzywej $y = 13.18 [1.667 - \log(x_1 - 131.1)]$

Rys. 5. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni D



Rys. 6. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 170 z wytwórni D



Rys. 7. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 300 z wytwórni D

a więc przy zastosowaniu transformacji

$$\frac{k}{\log e} (\log x_1 - \log v) = -y \quad (11)$$

Transformacja ta jest liniowa względem zmiennych $(y, \log x_1)$. Wynika stąd, że jeżeli na pionowej osi siatki Gumbela natniemy liniową skalę $\log x_1$, to w takim układzie współrzędnych rozkład Weibulla (10) przedstawi się w postaci linii prostej.

Na rysunkach 2 do 7 przedstawiono tak właśnie skonstruowane siatki prawdopodobieństwa, przy czym skalę $\log x_1$ narysowano z prawej strony, a z lewej naniesiono przyporządkowane wartości zmiennej losowej x_1 , a więc w naszym przypadku najmniejsze wartości wytrzymałości betonu, które należy odczytać w kg/cm^2 .

W celu naniesienia na siatkę empirycznego rozkładu N najmniejszych wartości porządkujemy je w kolejności malejącej (to znaczy w kolejności rosnącej względem prawdopodobieństwa P według wzoru (10)) i kolejne wyrazy ciągu (statystyki pozycyjne) oznaczamy przez x_{1m} ($m = 1, 2, 3, \dots, N$). Uporządkowane wartości x_{1m} nanosimy na siatkę prawdopodobieństwa rozkładu Gumbela jako punkty o współrzędnych

$$\begin{array}{ll} \text{pionowych} & \log x_1 = \log x_{1m} \\ \text{i poziomych}^{x)} & P = \frac{m}{N+1} \end{array}$$

^{x)} Oszacowanie współrzędnej poziomej (ang. plotting position) jest dyskusyjne. Znane są odmienne propozycje, np.

$$P = \frac{m - \frac{1}{2}}{N}, \quad P = \frac{m - 0,3}{N + 0,4} \quad \text{i i.}$$

W niniejszej pracy przyjęto za Gumbel'em [8] $P = \frac{m}{N+1}$ jako wartość oczekiwaną skumulowanej częstości m -tej statystyki pozycyjnej.

Ułożenie się tych punktów w przybliżeniu wzdłuż linii prostej stanowiłoby dowód, że rozkład empiryczny najmniejszych wartości jest rozkładem Weibulla o parametrze ϵ równym zeru. Prostą wyrównującą znajdujemy za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Postępowanie to zastosowano do statystycznej analizy wytrzymałościowej betonów pochodzących z 4 śląskich wytwórni prefabrykatów, oznaczonych w dalszym ciągu kryptonimami A, B, C i D. Za obserwacje przyjęto wyniki zgniatania walców normowych $\Phi 16$ cm z betonu określonej marki, względnie sprowadzone wyniki zgniatania walców $\Phi 8$ cm, tak jak zostały one uzyskane i zarejestrowane w laboratoriach zakładowych w toku normalnej działalności produkcyjnej w okresie kilku ostatnich lat. Za próby uznano zbiory obserwacji z okresów jednomiesięcznych, przy czym pomijano miesiące o zbyt małej liczbie obserwacji $n < 30$ (wyjątkowo $n < 25$).

Dla każdego okresu miesięcznego ustalano najmniejszą zarejestrowaną wytrzymałość, otrzymując w ten sposób empiryczny zbiór wartości najmniejszych. Liczbę miesięcy $N = 25$ przyjęto za najmniejszą uprawniającą do statystycznego opracowania danych.

Wytwórnia A obsługiwała przedsiębiorstwo budownictwa miejskiego. Analizie poddano beton marki 200 z 25 okresów miesięcznych. Sporządzano 3 walce kontrolne dziennie, każdy z innego zarobu, i przechowywano je na placu bez pielęgnacji i bez ochrony przed zamrażaniem w okresie zimowym, chociaż same prefabrykaty były chronione. Ogólny poziom techniczny zakładu był niski.

Wytwórnie B i C należały do przedsiębiorstw budownictwa przemysłowego i reprezentowały przeciętny poziom techniczny. W wytwórni B beton marki 200 wytwarzany był w hali produkcyjnej i poddawany naperzaniu niskoprężnemu razem z walcami kontrolnymi. Walce przechowywano w laboratorium w stanie wilgotnym do chwili badania w wieku 28 dni.

W wytwórni C beton marki 200 produkowany w typowym węźle betoniar skim doczoany był objętościowo i naperzany. Walce - również naperzane - przechowywane były na placu przy prefabrykach i zgniatane w wieku 28 dni.

Wytwórnia D należała do przedsiębiorstwa budowlanego przemysłu węglowego i reprezentowała dobry poziom techniczny. Walce z betonu nienaparzanego przechowywane były w hali produkcyjnej i pielęgnowane przez 7 dni w stanie wilgotnym, a później w stanie powietrzno-suchym. Z tej wytwórni poddano analizie betony marek 170, 200 i 300.

Sposób opracowania obserwacji zilustrujemy na przykładzie betonu marki 200 pochodzącego z wytwórni C. W kolumnie 2 tabelicy 1 podano uporządkowane w kolejności malejącej najmniejsze wartości wytrzymałości betonu, zaobserwowane w 50 okresach miesięcznych. W kolumnach 5 i 6 zestawiono odpowiednie wartości $\log x_1$ i $(\log x_1)^2$.

Obliczamy kolejno:

$$\text{wartość średnią } \overline{\log x_1} = \frac{1}{N} \sum \log x_1 = \frac{113,700 \ 686}{50} = 2,274 \ 014$$

$$\text{moment } m_2 (\log x_1) = \frac{1}{N} \sum (\log x_1)^2 = \frac{258,684 \ 528}{50} = 5,173 \ 691$$

$$\text{wariancję } \mu_2 (\log x_1) = m_2 - (\overline{\log x_1})^2 = 5,173 \ 691 - 5,171 \ 140 = \\ = 0,002 \ 551$$

$$\text{oraz odchylenie średnie } s(\log x_1) = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{0,002551} = 0,050 \ 074$$

Z podanej przez G u m b e l a [8] tabelicy 6.2.3 odczytujemy dla $N = 50$ wartość średnią zmiennej zredukowanej $\bar{y}_N = 0,54854$ oraz odchylenie średnie zmiennej zredukowanej $\sigma_N = 1,16066$.

Równanie prostej najmniejszych kwadratów ma postać

$$\frac{\sigma_N}{s(\log x_1)} (\log x_1 - \overline{\log x_1}) = - (y - \bar{y}_N)$$

co w powiązaniu z równaniem (11) prowadzi do oszacowania parametrów

$$\frac{\hat{k}}{\log e} = \frac{\sigma_N}{s(\log x_1)} = \frac{1,16066}{0,0505074} = 22,99$$

$$\log \hat{v} = \overline{\log x_1} + \frac{1}{22,99} \bar{y}_N = 2,274 + \frac{0,54854}{22,99} = 2,29786$$

i do ostatecznego równania prostej

$$22,99 (\log x_1 - 2,298) = -y.$$

Tablica 1

Najmniejsze wartości x_1 wytrzymałości betonu
marki 200 z wytwórni C

Lp.	x_1	x_1^2	x_1^3	$\log x_1$	$(\log x_1)^2$
1	2	3	4	5	6
1	250,9	62 951	15 794 400	2,399 501	5,757 605
2	240,3	57 744	13 875 900	2,380 754	5,667 989
3	230,4	53 084	12 230 600	2,362 482	5,581 321
4	212,3	45 071	9 568 600	2,326 950	5,414 697
5	212,3	45 071	9 568 600	2,326 950	5,414 697
6	212,3	45 071	9 568 600	2,326 950	5,414 697
7	207,6	43 098	8 947 100	2,317 227	5,369 541
8	207,6	43 098	8 947 100	2,317 227	5,369 541
9	207,6	43 098	8 947 100	2,317 227	5,369 541
10	207,3	42 973	8 908 400	2,316 599	5,366 625
11	202,9	41 168	8 353 100	2,307 282	5,323 550
12	202,9	41 168	8 353 100	2,307 282	5,323 550
13	201,6	40 643	8 193 500	2,304 491	5,310 678
14	199,6	39 840	7 952 100	2,300 161	5,290 741
15	198,2	39 283	7 785 900	2,297 104	5,276 686
16	198,2	39 283	7 785 900	2,297 104	5,276 686
17	198,2	39 283	7 785 900	2,297 104	5,276 686
18	198,2	39 283	7 785 900	2,297 104	5,276 686
19	198,2	39 283	7 785 900	2,297 104	5,276 686
20	198,1	39 244	7 774 200	2,296 884	5,275 676
21	196,7	38 691	7 610 500	2,293 804	5,261 536
22	193,6	37 481	7 256 300	2,286 905	5,229 935
23	193,6	37 481	7 256 300	2,286 905	5,229 935
24	193,6	37 481	7 256 300	2,286 905	5,229 935
25	193,5	37 442	7 245 100	2,286 681	5,228 910
26	193,3	37 365	7 222 600	2,286 232	5,226 856
27	192,0	36 864	7 077 900	2,283 301	5,213 464
28	189,3	35 835	6 783 500	2,277 151	5,185 416
29	188,7	35 608	6 719 200	2,275 772	5,179 138
30	187,1	35 006	6 549 700	2,272 074	5,162 320
31	187,1	35 006	6 549 700	2,272 074	5,162 320
32	185,8	34 522	6 417 100	2,269 046	5,148 570
33	182,4	33 270	6 068 400	2,261 025	5,112 234
34	182,4	33 270	6 068 400	2,261 025	5,112 234

1	2	3	4	5	6
35	176,6	31 188	5 507 720	2,246 991	5,048 969
36	173,9	30 241	5 258 950	2,240 300	5,018 944
37	172,0	29 584	5 088 450	2,235 528	4,997 585
38	172,0	29 584	5 088 450	2,235 528	4,997 585
39	170,2	28 968	4 930 360	2,230 960	4,977 183
40	167,4	28 023	4 691 010	2,223 755	4,945 087
41	166,7	27 789	4 632 410	2,221 936	4,937 000
42	165,3	27 324	4 516 670	2,218 273	4,920 735
43	165,3	27 324	4 516 670	2,218 273	4,920 735
44	165,3	27 324	4 516 670	2,218 273	4,920 735
45	161,6	26 115	4 220 110	2,208 441	4,877 212
46	157,2	24 712	3 884 700	2,196 453	4,824 406
47	151,2	22 861	3 456 650	2,179 552	4,750 447
48	151,2	22 861	3 456 650	2,179 552	4,750 447
49	151,2	22 861	3 456 650	2,179 552	4,750 447
50	149,6	22 380	3 348 070	2,174 932	4,730 329
Σ	9460,5	1814 198	352 560 090	113,700 686	256,684 528

Prosta ta (patrz rys. 4) jest dystrybuantą teoretyczną przy przyjętej hipotezie $\epsilon = 0$. Stanowi ona prognozę najmniejszych wytrzymałości betonu. Dla dowolnej małej wytrzymałości $x_1 = x_{1a}$ (np. $x_1 = 146$ na rys. 4) możemy odczytać przyporządkowane prawdopodobieństwo $P(x_{1a})$ (na rys. 4 jest $P = 0,954$) pojawienia się wartości większej, a tym samym określić przynależny okres powrotu

$$T(x_{1a}) = \frac{1}{1 - P(x_{1a})} = \frac{1}{1 - 0,954} \approx 22.$$

Tę samą wartość można odczytać wprost na górnej skali poziomej na rysunku 4. Oznacza to, że w danej wytwórni przy niezmienniej technologii produkcji przekroczenie wytrzymałości x_{1a} w stronę wartości mniejszych zdarzy się średnio raz na $T(x_{1a})$ miesięcy.

W podobny sposób oszacowano parametry pozostałych rozkładów empirycznych i odpowiednie proste określono na rysunkach 2 do 7.

Na wszystkich rysunkach (z wyjątkiem jedynie rysunku 3) stwierdzić można słabiej lub silniej zaznaczoną, ale systematyczną tendencję do odginania się dolnych części wykresów em-

pirycznych (linie przerywane) ku górze w stosunku do prostych wyrównujących. Budzi to uzasadnione podejrzenie, że parametr progowy rozkładu jest większy od zera

$$\varepsilon > 0.$$

Aby się o tym przekonać, należy zaniechać czynienia hipotez dotyczących parametru ε i zamiast uproszczonego rozkładu (9) trzeba stosować rozkład Weibulla (7) w jego pełnej trójparametrycznej postaci. Jeżeli ε byłoby równe zero, to wartość ta powinna wynikać z oszacowania parametrów ogólnego rozkładu Weibulla.

Przyjmuje się zwykle, że najlepsze oszacowania parametrów daje metoda największej wiarygodności, jednak w stosunku do rozkładów wartości skrajnych nie zostało to udowodnione [8]. Zastosowana do rozkładu Weibulla metoda ta prowadzi do powikłanego układu równań, możliwego do rozwiązania jedynie drogą uciążliwych prób [9]. Z tego powodu będziemy szacować parametry rozkładu (7) za pomocą metody momentów, co wymaga założenia, że rozkłady empiryczny i teoretyczny są zgodne z dokładnością do trzech pierwszych momentów statystycznych. Dla rozkładu Weibulla wyrażają się one wzorami [18]

$$m_1 = \varepsilon + (v - \varepsilon) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (12)$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = (v - \varepsilon) \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\mu_3 = (v - \varepsilon)^3 \left[2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) + \Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right) \right] \quad (14)$$

gdzie Γ jest funkcją gamma Eulera.

Ze związków (13) i (14) wynika, że współczynnik skośności

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

jest wyłącznie funkcją parametru k , a więc można oszacować k na podstawie obliczonej skośności rozkładu w próbie. Oszacowa-

nia pozostałych dwóch parametrów otrzymujemy ze związków (12) i (13) w postaci

$$\hat{v} = \bar{x}_1 + s(x_1) A(k) \quad (15)$$

$$\hat{c} = \hat{v} - s(x_1) B(k) \quad (16)$$

gdzie:

\bar{x}_1 jest wartością średnią w próbie,
 $s(x_1)$ jest odchyleniem średnim w próbie, a

$$A(k) = \left[1 - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] B(k) \quad \text{oraz}$$

$$B(k) = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]$$

są wielkościami pomocniczymi, stabilizowanymi przez Gumbela, podobnie jak i związek $\gamma = \gamma(k)$.

Tak na przykład dla danych x_1 zestawionych w tabelicy 1 obliczamy x_1^2 oraz x_1^3 (kolumny 3 i 4 tabelicy), a następnie obliczamy kolejno

wartość średnią
$$\bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum x_1 = \frac{9460,2}{50} = 189,21$$

momenty
$$m_2 = \frac{1}{N} \sum x_1^2 = \frac{1814198}{50} = 36283,96$$

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum x_1^3 = \frac{352560090}{50} = 7051201,8$$

$$\mu_2 = m_2 - (\bar{x}_1)^2 = 36283,96 - 35800,42 = 483,54$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2\bar{x}_1 + 2(\bar{x}_1)^3 = -182,980$$

odchylenie średnie
$$s(x_1) = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{483,54} = 21,99$$

skośność
$$\gamma = \frac{\mu_3}{s^3} = -\frac{182,980}{10632,83} = -0,017209.$$

Z podanej przez Gumbela tablicy 7.2.3 odczytujemy dla obliczonego γ

$$k = 3,67539$$

$$B(k) = 3,6611$$

$$A(k) = 0,35827$$

a pozostałe dwa parametry obliczamy z równań (15) i (16)

$$\hat{v} = 189,21 + 21,99 \cdot 0,35827 = 197,088$$

$$\hat{\epsilon} = 197,088 - 21,99 \cdot 3,6611 = 116,58.$$

Według wyżej naszkicowanej procedury oszacowano parametry rozkładu najmniejszych wartości 6 analizowanych betonów i zestawiono je w tablicy 2.

Tablica 2
Parametry rozkładu najmniejszych wartości wytrzymałości betonu

Rys.	Za- kład	Mar- ka	N	Σn	\hat{k}	\hat{v}	$\hat{\epsilon}$	\bar{R}	s_R	z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	A	200	25	750	2,77	138,4	83,2	184,53	25,9	-3,91
3	B	200	29	1800	6,30	191,5	129,0	-	-	-
4	C	200	50	2700	3,68	197,1	116,6	-	-	-
5	D	200	33	1661	5,72	177,5	131,3	208,62	21,6	-3,59
6	D	170	29	1426	17,9	156,9	82,1	184,12	17,8	-5,74
7	D	300	33	1713	2,53	257,6	228,5	294,20	22,8	-2,88

W tablicy tej, oprócz oszacowań \hat{k} , \hat{v} i $\hat{\epsilon}$, podano liczbę N miesięcznych okresów obserwacji, sumę Σn wszystkich walców kontrolnych wyprodukowanych w tym czasie oraz obliczone dla wszystkich walców (a więc dla zmiennej $x = R$, a nie x_1) odchylenie średnie s_R i wytrzymałość średnią \bar{R} .

W ostatniej kolumnie tablicy 2 podano wartości

$$z = \frac{\xi - \bar{R}}{s_R}$$

czyli wartości standaryzowane parametru progowego.

Trójparametryczny rozkład Weibulla (por. (7) i (10)) przejdzie w rozkład Gumbela (8) przy spełnianiu się równości

$$\left(\frac{x_1 - \xi}{v - \xi}\right)^k = e^{-y}$$

czyli przy zastosowaniu transformacji logarytmicznej

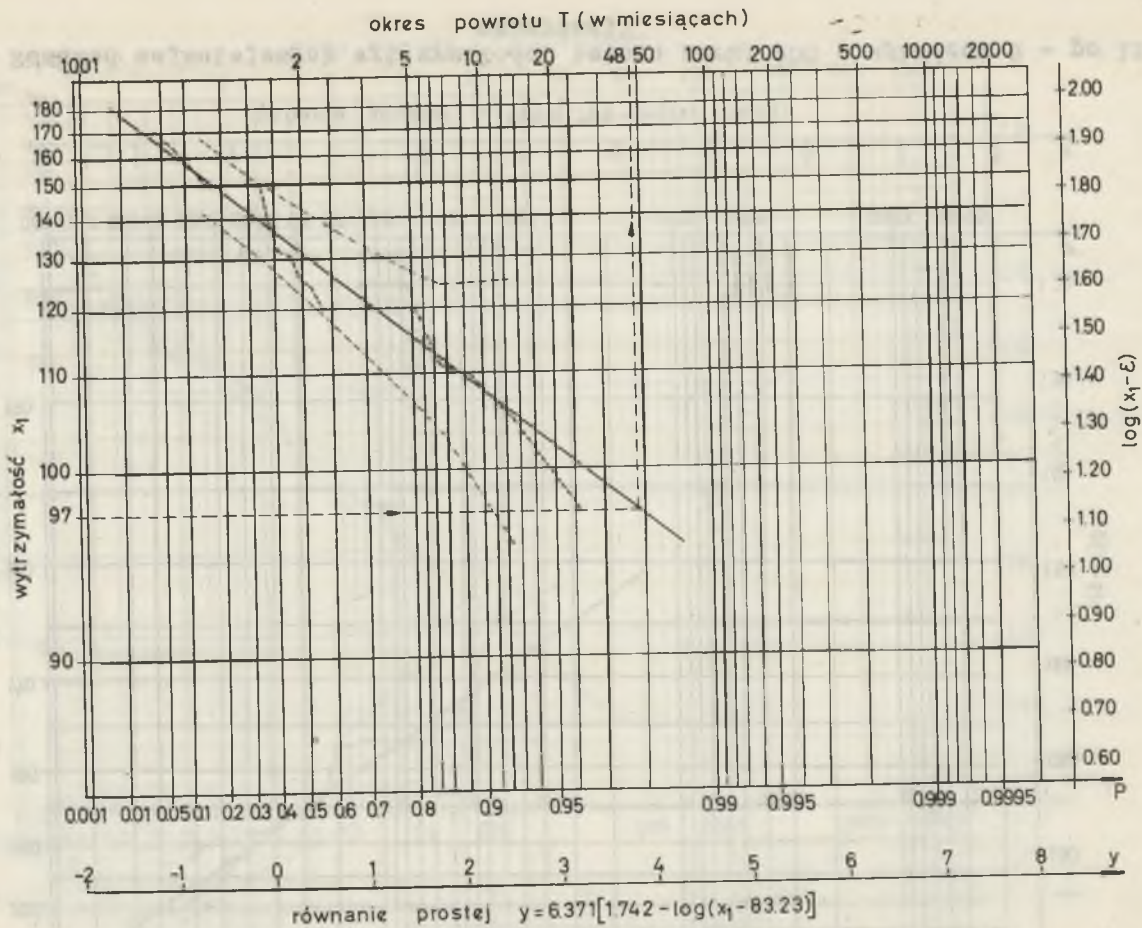
$$\frac{k}{\log e} [\log(x_1 - \xi) - \log(v - \xi)] = -y \quad (17)$$

nieliniowej względem zmiennych $(y, \log x_1)$. Tak więc na wyżej opisanych siatkach prawdopodobieństwa rozkład Weibulla w przypadku $\xi > 0$ przedstawi się w postaci krzywej o równaniu (17).

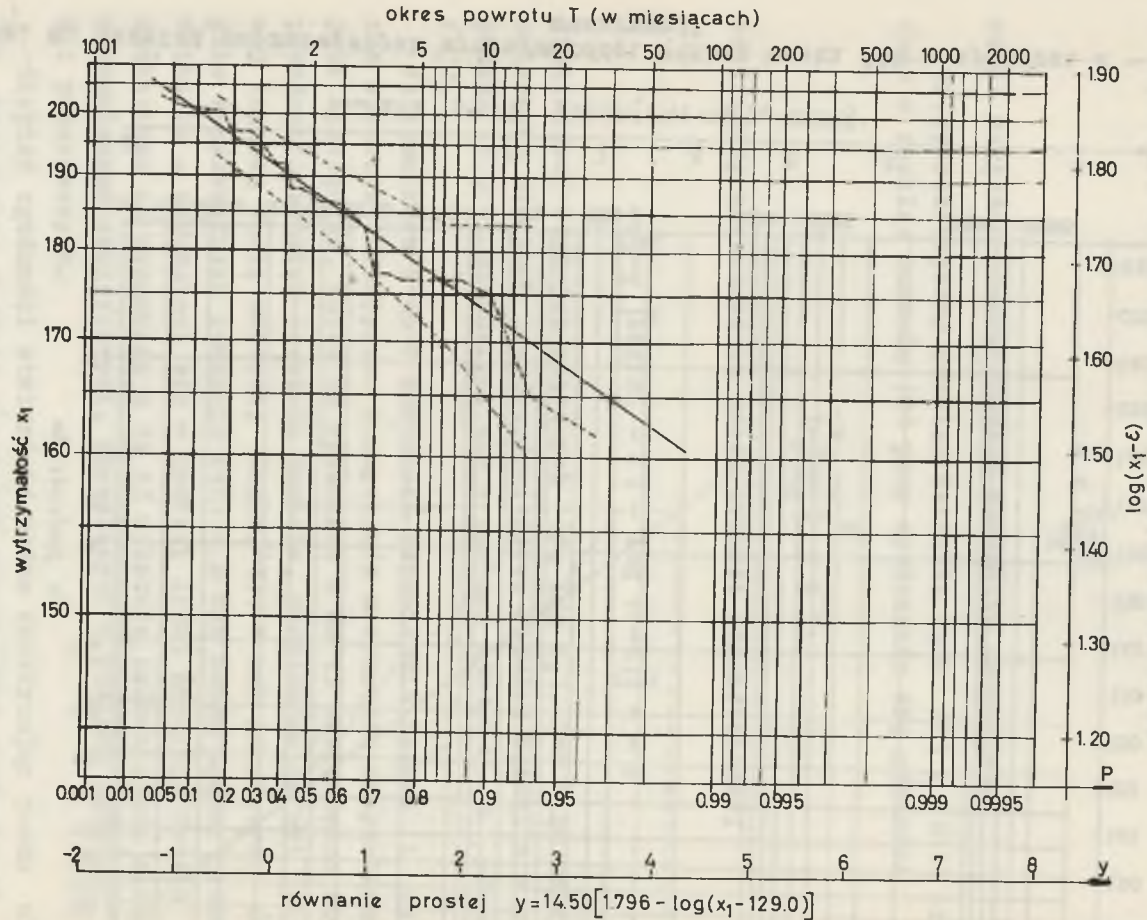
Na rysunkach 2 do 7 określono odpowiednie krzywe i podano ich równania. Praktyczne korzystanie z wykresów krzywoliniowych jest niewygodne, toteż na rysunkach 8 do 13 zastosowano siatki prawdopodobieństwa rozkładu Gumbela, przyjmując na osi pionowej liniową skalę zmiennej $\log(x_1 - \xi)$. W tak przyjętym układzie współrzędnych równanie (17) - a tym samym ogólny rozkład Weibulla - przedstawi się w postaci linii prostej. Proste te, naniesione na rysunkach 8 do 13 wykazują zadowalającą zgodność z rozkładami empirycznymi, określonymi w postaci łamanych linii przerywanych.

Stopień zgodności stwierdzić można konstruując pasma ufności. Odchylenie średnie statystyk pozycyjnych centralnych wyraża się dla rozkładu Gumbela wzorem [8]

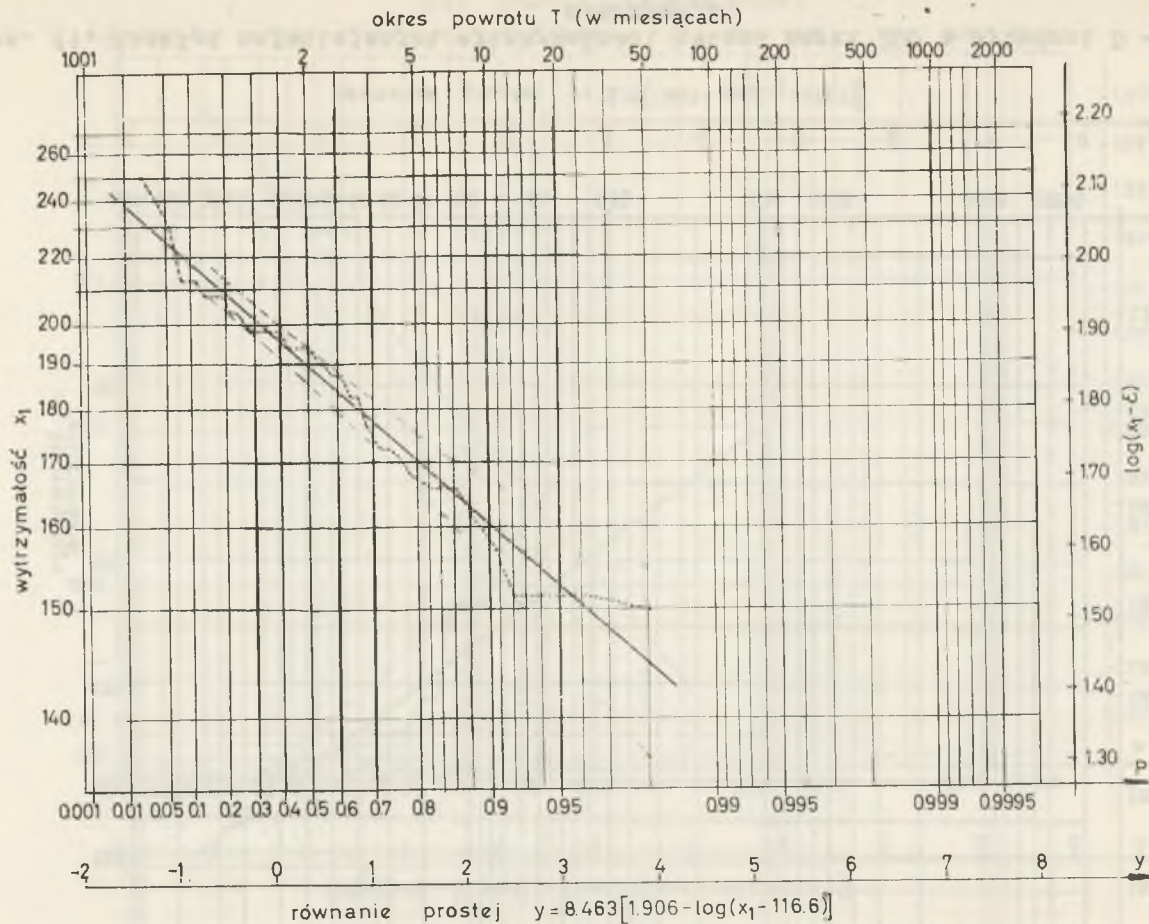
$$\sigma(x_{1n}) = \frac{1}{\alpha\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\frac{1}{\phi} - 1}}{-\ln \phi} = \frac{1}{\alpha\sqrt{N}} \cdot c \quad (18)$$



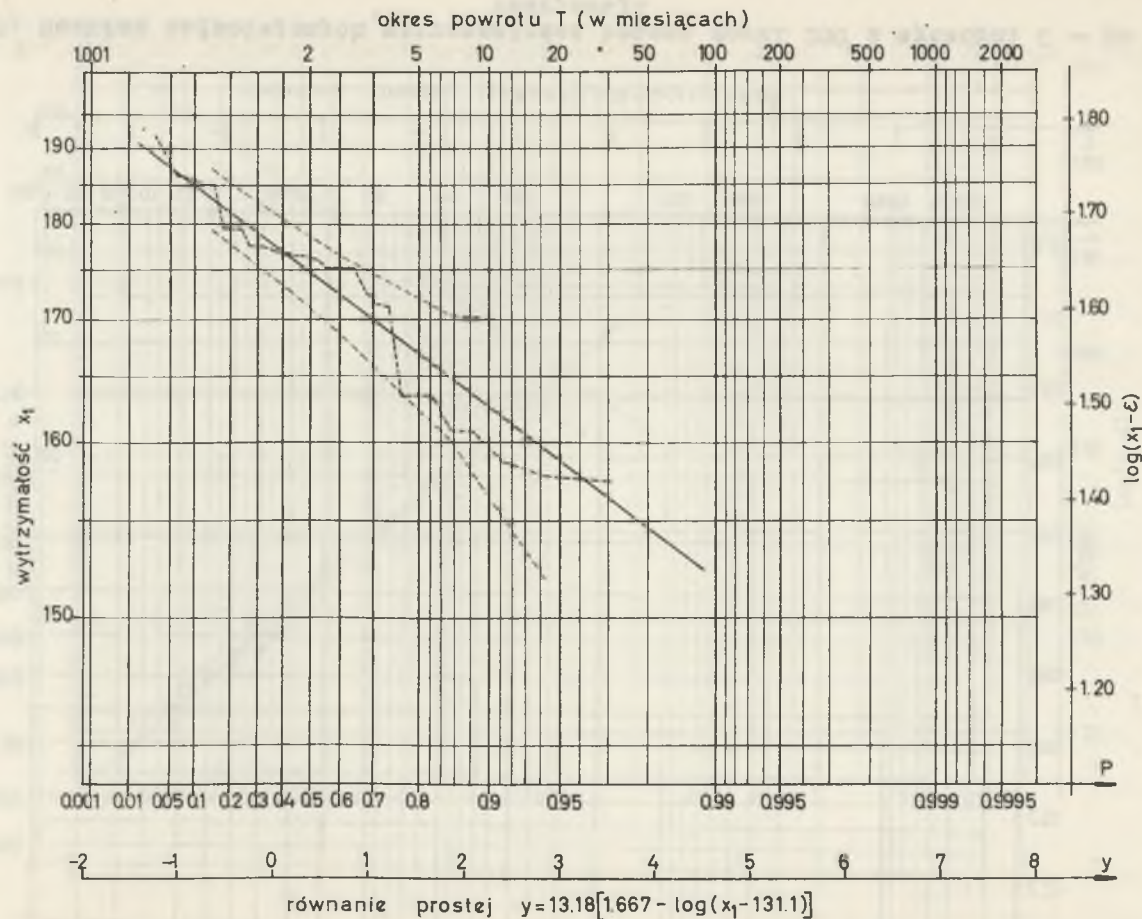
Rys. 8. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni A - po linearyzacji



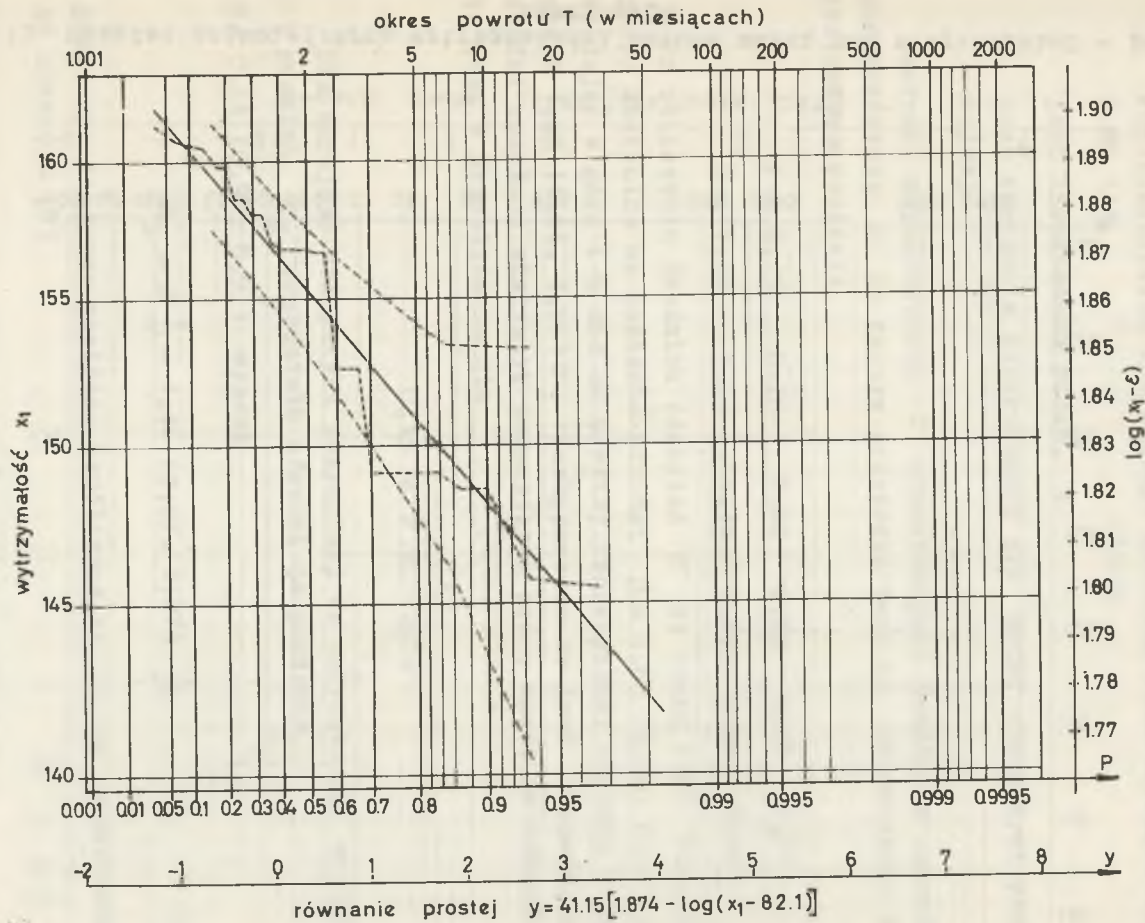
Rys. 9. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni B - po liniaryzacji



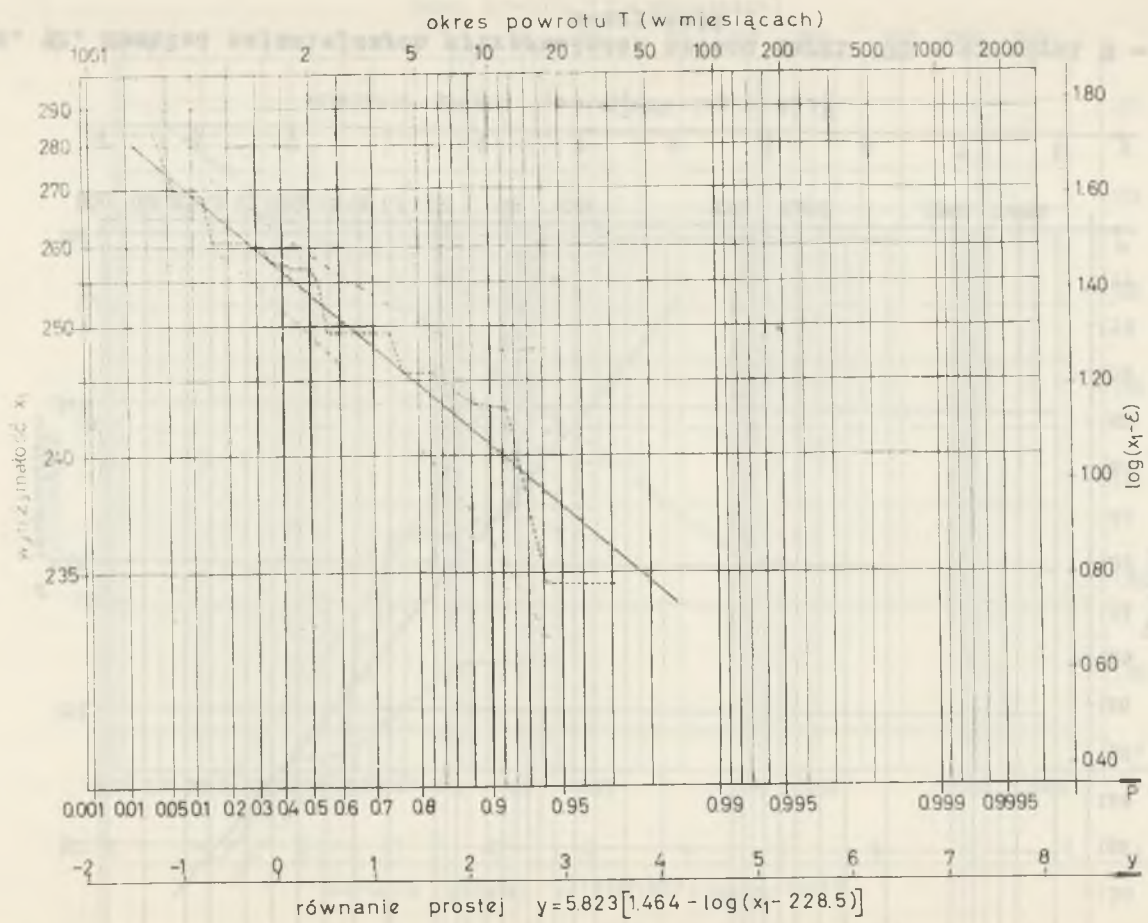
Rys. 10. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni C - po liniaryzacji



Rys. 11. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 200 z wytwórni D - po liniaryzacji



Rys. 12. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 170 z wytwórni D - po liniaryzacji



Rys. 13. Rozkład najmniejszych wytrzymałości betonu marki 300 z wytwórni D - po li-
nearyzacji

gdzie:

α jest parametrem rozkładu (por. (1)), a jednocześnie współczynnikiem kierunkowym prostych teoretycznych (rys. 8 do 13),

N jest liczebnością próby, a

ϕ jest wartością dystrybuanty dla m -tej statystyki pozycyjnej.

Wartości współczynnika C odpowiadające przyjętym prawdopodobieństwom P (w naszym przypadku jest to odpowiednik ϕ) zestawiono poniżej:

$P = 0,15$	$0,20$	$0,40$	$0,60$	$0,80$	$0,85$
$C = 1,25$	$1,24$	$1,34$	$1,60$	$2,24$	$2,58$

Po obliczeniu średnich odchyłeń σ ze wzoru (18) budujemy pasmo kontrolne na poziomie ufności $\beta = 0,68$ ($0,90, 0,95$) odkładając w górę i w dół od prostej teoretycznej odcinki o długości $1,00$ ($1,64, 1,96$) σ . Postępowanie to jest uzasadnione, dopóki rozkłady statystyk pozycyjnych można uznać za normalne, to jest w przybliżeniu dla

$$0,15 \leq P \leq 0,85.$$

Dla skrajnej statystyki pozycyjnej (o największej wartości P) promień Δ_N przedziału ufności na poziomie $\beta = 0,68$ ($0,90, 0,95$) wynosi

$$\Delta_N = \Delta \frac{1}{\alpha} = 1,14 \quad (2,25, 3,07) \quad \frac{1}{\alpha} \quad (19)$$

przy czym liczbowe wartości współczynnika Δ są pierwiastkami równania [8]

$$\exp(-e^{-\Delta}) - \exp(-e^{\Delta}) = \beta$$

Przykładowo dla betonu marki 200, pochodzącego z wytwórni C (rys. 10) obliczamy (wzór (18))

dla

$$P = 0,15 \quad \sigma(x_{1n}) = 1,25 \frac{1}{\alpha\sqrt{N}} = 1,25 \frac{1}{8,463\sqrt{50}} = 1,25 \cdot 0,0167 = 0,0210$$

$$P = 0,20 \quad \sigma = 1,24 \cdot 0,0167 = 0,0208$$

$$P = 0,40 \quad \sigma = 1,34 \cdot 0,0167 = 0,0224$$

$$P = 0,60 \quad \sigma = 1,60 \cdot 0,0167 = 0,0267$$

$$P = 0,80 \quad \sigma = 2,24 \cdot 0,0167 = 0,0374$$

$$P = 0,85 \quad \sigma = 2,58 \cdot 0,0167 = 0,0432$$

Obliczone wartości σ odkładamy (w skali zmiennej $\log(x_1 - \epsilon)$) w górę i w dół od prostej teoretycznej, otrzymując pasmo kontrolne w strefie centralnej. Dla wartości skrajnej x_{1N} obliczamy na podstawie wzoru (19))

$$\Delta_N = \frac{1,14}{\alpha} = \frac{1,14}{8,463} = 0,135$$

i dla odciętej

$$P = \frac{N}{N+1} = \frac{50}{51} \approx 0,98$$

konstruujemy wokół prostej teoretycznej przedział o promieniu $\pm \Delta_N$. Końce przedziału łączymy odcinkami prostymi z pasmem kontrolnym w strefie centralnej.

Otrzymaliśmy w ten sposób pasmo kontrolne na poziomie ufności $\beta = 0,68$. Znaczy to, że 68% rozkładów empirycznych, pochodzących z rozkładu Weibulla, mieści się wewnątrz pasma kontrolnego.

Jak widać z rysunku 10 analizowany rozkład empiryczny mieści się w obrębie pasma kontrolnego. Na stosunkowo wysokim poziomie istotności $1 - \beta = 0,32$ nie ma podstawy do odrzucenia hipotezy, że rozkład empiryczny jest istotnie trójparametrycznym rozkładem Weibulla. Dla pozostałych pięciu analizowanych betonów zgodność rozkładów empirycznych i teoretycznych jest gorsza, a to głównie wskutek mniejszej liczebności prób. Szerokości pasm kontrolnych zwiększono, przyjmując poziom ufności $\beta = 0,95$. Na

rysunkach 8 do 13 wrysowano odpowiednie pasma kontrolne liniami przerywanymi. Z wyjątkiem jednego punktu na rysunku 12 wszystkie obserwacje mieszczą się w granicach pasm kontrolnych. Znaczy to, że z wyjątkiem betonu marki 170 (rys. 12) wszystkie pobrane próby można uznać za pochodzące z rozkładów Weibulla. Hipoteza ta została zweryfikowana na poziomie istotności $1-\beta = 0,05$.

Przyczyną widocznych na rysunkach 8 do 13 odchyień wykresów empirycznych od prostych teoretycznych jest w dużym stopniu niedoskonałość wyjściowego materiału statystycznego. W laboratoriach zakładów prefabrykacji oznacza się wytrzymałość walców betonowych w prasach o niskiej klasie dokładności, a wyniki zaokrągla przed ich zarejestrowaniem. W tych okolicznościach zmienna losowa typu ciągłego, jaką jest wytrzymałość betonu, przekształca się w swoistą zmienną skokową, co na wykresach ujawnia się w postaci poziomych "progów". Nie ulega wątpliwości, że w wyniku dokładnie przeprowadzonych pomiarów otrzymalibyśmy rozkłady empiryczne wartości najmniejszej znacznie lepszej zgodne z rozkładami teoretycznymi.

Pozostaje jeszcze kwestia wiarygodności liczbowych wartości parametrów zestawionych w tabelicy 2, jakkolwiek jest to ubocznym celem niniejszej pracy. Najważniejsza jest tu wartość parametru progowego ξ . Uderzająca jest zgodność tego parametru dla betonów marki 200, pochodzących z wytwórni B, C i D. Mimo znacznych rozrzutów oszacowania za pomocą momentu trzeciego rzędu zgodność tę trudno uznać za przypadkową. Mniejsza wartość parametru ξ dla betonu z wytwórni A tłumaczy się włączeniem do analizy przemierzniętych walców betonowych, o czym już uprzednio wspomniano.

Nie można bezpośrednio porównać wartości parametrów podanych w tabelicy 2 z wynikami prac innych autorów, ponieważ przeprowadzona analiza rozkładu najmniejszych wytrzymałości betonu jest pierwszą tego rodzaju próbą w literaturze naukowej. Były natomiast próby zastosowania trójparametrycznego rozkładu Weibulla do opisu rozkładu wytrzymałości różnych materiałów w strefie centralnej, a więc rozkładu zmiennej pierwotnej x , a nie wartości skrajnej x_1 . Dla betonu próbę taką przeprowa-

dzili Kretow, Dychowiczny i Biewz [9]. Szacowali oni parametry rozkładu wytrzymałości betonu marki 200 metodą największej wiarygodności i określili wartość parametru progowego $\epsilon = 104,7$.

Jest to wartość zbliżona do oszacowań parametru ϵ w tablicy 2, co można przyjąć za sprawdzian, ponieważ lewostronne ograniczenie w punkcie ϵ musi być z oczywistych przyczyn identyczne dla rozkładu zmiennej pierwotnej x i dla rozkładu wartości najmniejszej x_1 . Na marginesie warto wspomnieć, że autor niniejszej pracy oszacował metodą momentów parametry rozkładu dla danych wziętych z pracy [9] i otrzymał wartość $\epsilon = 104,7$.

Jak widzimy, w tym przypadku metoda największej wiarygodności i metoda momentów różniły się tylko nieznacznie w oszacowaniu parametru progowego.

Wartości parametrów zestawione w tablicy 2 wykazują w sposób nie budzący wątpliwości ($\epsilon \gg 0$) istnienie dodatniego lewostronnego ograniczenia wytrzymałości betonu. Prawdopodobieństwo przekroczenia wytrzymałości $x = \epsilon$ w stronę wartości mniejszych jest równe zero. Wytrzymałość $x = \epsilon$ jest rzeczywistą wytrzymałością minimalną rozpatrywanego betonu, która oczywiście nie jest stałą fizyczną, ale może być uznana za stałą technologiczną, zależną od zespołu metod produkcji i metod kontroli jakości betonu.

Zestawione w kolumnie 11 tablicy 2 wartości standaryzowane parametru ϵ wykazują znaczne rozrzuty, co wskazuje, że na podstawie znajomości odchylenia średniego s_R nie można wnieść o położeniu parametru progowego ϵ .

Wytrzymałość minimalna R_{\min} obliczona dla betonu marki 200 (tabl. 2) na podstawie lansowanej przez normy RWPG reguły try-

$$R_{\min} = 294,2 - 3 \cdot 22,8 = 225,8$$

podczas gdy dla rozpatrywanego betonu wytrzymałość taka w ogóle nie istnieje, jest bowiem mniejsza od rzeczywistej wytrzymałości minimalnej

$$R_{\min} < \varepsilon$$

$$225,8 < 228,5.$$

Oto przykład, do jakich sprzeczności prowadzi ocena zdarzeń rzadkich na podstawie hipotetycznego rozkładu w strefie centralnej.

Proste wkreślone na siatkach prawdopodobieństwa na rysunkach 8 do 13 stanowią prognozę najmniejszych wytrzymałości betonu. Dla dowolnej małej wytrzymałości $x_1 = x_{1n}$ (np. $x_1 = 97$ na rys. 8) możemy – po rzuceniu tej wartości poziomo na prostą prognozy, a następnie pionowo na skalę T – odczytać przynależny okres powrotu $T(x_{1n})$ (np. $T = 48$ na rys. 8). Oznacza to, że w danej wytwórni przy założeniu nieziennej technologii produkcji przekroczenie wytrzymałości x_{1n} w stronę wartości mniejszych wystąpi średnio raz na $T(x_{1n})$ miesięcy. Sposób wykorzystania krzywej rozkładu jako prognozy pokazano również na rysunku 6.

Z prostej rozkładu wartości najmniejszych możemy również skorzystać przy rozwiązaniu inaczej sformułowanego zadania, a mianowicie: dla ustalonego okresu T znaleźć wartość x_β która w zadanym prawdopodobieństwie β nie zostanie w tym okresie przekroczona. Chodzi tu oczywiście o przekroczenia (ang. exceedance) "w stronę wartości mniejszych", które to określenie będzie w dalszym tekście opuszczone.

Dowolnej wartości x_β można z wykresu na siatce probabilistycznej przyporządkować prawdopodobieństwo $P(x_\beta)$ nieprzekroczenia x_β w pojedynczym okresie miesięcznym. Szukane prawdopodobieństwo nieprzekroczenia x_β w T okresach miesięcznych będzie równe

$$\beta = \exp [T \ln P(x_\beta)] \quad (20)$$

skąd można łatwo obliczyć prawdopodobieństwo

$$P(x_\beta) = \exp \left[\frac{1}{T} \ln \beta \right] \quad (21)$$

oraz przynależny okres powrotu

$$T = \frac{1}{1 - P(x_\beta)} \quad (22)$$

Dla jednej lub drugiej wartości można odczytać z prostej rozkładu szukaną wartość x_β . W celu dokładniejszego obliczenia tej wartości można również dla P obliczonego z wzoru (21) określić y z funkcji rozkładu podwójnie wykładniczego (8), a następnie obliczyć x_β z równania dystrybuanty rozkładu Weibulla (rys. 8 do 13). W tabelicy 3 zestawiono obliczone w ten sposób wartości x_β dla okresu produkcji T równego 5, 10, 15 i 20 lat oraz dla prawdopodobieństw $\beta = 0,5, 0,95$ i $0,99$.

Tabela 3

Wytrzymałości x_β które z prawdopodobieństwem β nie zostaną przekroczone w stronę wartości mniejszych w okresie T produkcji betonu

Wy- twór- nia	Mar- ka be- to- nu	$\beta = 0,50$				$\beta = 0,95$		$\beta = 0,99$	
		T w miesiącach							
		60	120	180	240	60	240	60	240
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	200	96,0	91,8	90,6	89,9	87,5	85,2	85,0	84,3
B	200	159,8	156,6	154,9	153,7	149,3	143,3	142,8	140,0
C	200	140,3	136,2	134,2	132,8	128,2	122,9	122,5	120,6
D	200	152,4	150,0	148,7	147,8	144,6	140,3	139,9	138,0
D	170	140,4	138,2	136,9	136,0	132,5	126,6	126,0	122,7
D	300	235,9	232,3	231,7	231,4	230,3	229,2	229,2	228,9

Wielkość x_β , jak to ilustrują przykładowe wartości podane w tabelicy 3, jest zależna nie tylko od parametru ξ , lecz także od kształtu krzywej rozkładu Weibulla, a tym samym także od dwóch pozostałych parametrów, jest więc wskaźnikiem opisującym w sposób syntetyczny zachowanie się rozkładu wartości skrajnych w strefie interesujących nas okresów powrotu. Jest w wysoki

stopniu uzasadnione przyjęcie wielkości x_β za wytrzymałość obliczeniową. Po ustaleniu poziomu ufności np. $\beta = 0,99$, wytrzymałość obliczeniowa R_β będzie to wartość, o której z 99-procentowym prawdopodobieństwem można orzec, że w przewidywanym okresie T produkcji betonu nie zostanie ani razu przekroczona w stronę wartości mniejszych.

Jak widać z tablicy 3, wartości x_β niewiele się zmieniają przy przejściu od $\beta = 0,95$ do $\beta = 0,99$ i dlatego wydaje się uzasadnione określanie wytrzymałości obliczeniowej R_β na stosunkowo wysokim poziomie ufności $\beta = 0,99$. Zresztą prawdopodobieństwo β można uzgodnić na dowolnym poziomie (np. różnym dla różnych typów konstrukcji), a nawet można zażądać $\beta = 1$, w którym to przypadku będzie $R_\beta = \bar{R}$.

Statystyczny opis wytrzymałości betonu będzie w pełni obiektywny dopiero wtedy, gdy będzie niezależny od hipotez rozkładu (ang. distribution-free). Wytrzymałość średnia \bar{R} , współczynnik zmienności v_R , wytrzymałość minimalna $R_{\min} = \epsilon$ oraz zdefiniowana powyżej wytrzymałość obliczeniowa R_β , - są parametrami spełniającymi ten warunek, są bowiem niezależne od typu rozkładu losowo zmiennej wytrzymałości betonu.

Proponuje się, aby wyżej określone wielkości: \bar{R} , v_R , R_{\min} i R_β przyjąć za podstawę klasyfikacji jakości materiału. Parametry \bar{R} i v_R należy rozumieć jako wartość średnią i współczynnik zmienności procesu stochastycznego, jakim jest zmienna wytrzymałość betonu w toku jego produkcji. Opisują one rozkład wytrzymałości materiału w strefie centralnej, podczas gdy parametry R_{\min} i R_β opisują tenże rozkład w strefie wartości skrajnych. Należy podkreślić, że wytrzymałość obliczeniowa R_β w sensie wyżej zdefiniowanym nie pokrywa się z pojęciem wytrzymałości obliczeniowej w sensie ustaleń CEB i RWPG i nie jest kwantylem rozkładu wytrzymałości betonu.

Przyjęcie zaproponowanej w tym rozdziale metodyki wynagałoby przeorganizowania służb kontrolnych w wytwórniach betonu. Zamiast dotychczasowej praktyki pobierania 3 lub 6 walców kontrolnych z jednego zarobu dziennie należałoby dla każdej

produkowanej marki betonu pobierać pojedyncze walce kontrolne z różnych zarobów o różnych porach dnia. Należałoby również zmienić przepis punktu 4.5.1.9 normy PN-55/B-06250 "Beton zwykły", nakazujący odrzucać wyniki odbiegające od średniej o więcej niż 20%. Właśnie te obserwacje są najbardziej istotne dla oceny skrajnej strefy rozkładu. Dlatego też należałoby zobowiązać laboratoria zakładowe do trwałego rejestrowania wszystkich wyników pomiaru, a w przypadku stwierdzenia podejrzenia małych wytrzymałości betonu - do zanotowania charakteru zniszczenia próbki, tak aby można było rozstrzygnąć, czy zaniżony wynik został spowodowany błędem materiału, czy też błędem badania. Analizę rozkładu wartości skrajnych ułatwiłoby wykazywanie w oddzielnej rubryce książki badań najmniejszych wartości zarejestrowanych dla poszczególnych marek betonu w kolejnych miesięcznych okresach produkcji.

Oszacowanie wytrzymałości R' betonu w konstrukcji wydaje się najbardziej racjonalne na podstawie związku

$$R' = cR$$

gdzie c jest współczynnikiem regresji wytrzymałości betonu w konstrukcji do wytrzymałości R w ośmiu próbnym. Należy oczekiwać, że współczynnik c będzie przyjmował różne wartości dla stref środkowej i skrajnej rozkładu wytrzymałości, a także dla różnych technologii wykonania konstrukcji i dla różnych marek betonu. W świetle zaproponowanej metodyki najbardziej interesujące z punktu widzenia bezpieczeństwa budowli byłyby współczynniki regresji c w strefie wytrzymałości obliczeniowych. Określenie liczbowych wartości współczynników c powinno być przedmiotem odpowiednio zaplanowanych badań.

Obszerne informacje na temat wytrzymałości betonu w konstrukcji można znaleźć w pracy N. P e t e r s o n s a [16].

Można przypuszczać, że teoria rozkładu wartości skrajnych zastosowana do innych materiałów, na przykład do stali zbrojeniowych i konstrukcyjnych, wykaże również istnienie dodatkowych wytrzymałości minimalnych ϵ , co byłoby stwierdzeniem bardzo ważnym z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji.

4. STATYSTYCZNY OPIS OBCIĄŻEŃ

W zagadnieniach projektowania i bezpieczeństwa budowli nie interesujemy się obciążeniem p rzeczywiście działającym na konstrukcję, lecz - chociaż często umyka to naszej uwadze - skrajną największą lub najmniejszą wartością p_n tego obciążenia. W celu obliczenia światła mostu potrzebna jest znajomość stanu wielkiej wody np. w roku 1932, natomiast jest obojętne, czy przeciętne stany wody układały się w owym roku w strefie stanów niskich, czy wysokich. Przy wymiarowaniu estakady dla suwnicy o udźwigu 5 ton jest sprawą drugorzędną, jakie będą rzeczywiste obciążenia suwnicy; ważne są natomiast największe wartości tego obciążenia. Jeszcze wyraźniej występuje to w przypadku obciążeń klimatycznych.

Tak więc teoria rozkładu wartości skrajnych, zastosowana w poprzednim rozdziale do opisu najmniejszych wytrzymałości materiału, powinna być również podstawą opisu zmiennych obciążeń działających na konstrukcję. Rozkład zmiennej p_n określimy na podstawie znajomości N wartości skrajnych zarejestrowanych w stosownie dobranych okresach obserwacji. Dla obciążeń klimatycznych takim naturalnym okresem jest rok, dla obciążeń konstrukcji mostowych przyjęło się uwzględniać tygodniowe okresy obserwacji.

W przeważającej części obciążeń użytkowych nie występuje fizycznie uzasadniona wartość maksymalna i wobec tego ich rozkłady będą prawostronnie nieograniczone. W tej sytuacji rozkłady wartości największych będą albo rozkładami Gumbela (por. wzór (1))

$$\Phi(p_n) = \exp \left\{ - \exp [oc(p_n - u)] \right\}, \quad (23)$$

albo rozkładami Fréchéta (por. wzór (2))

$$\Phi(p_n) = \exp \left[- \left(\frac{p_n}{p_n} \right)^k \right] \quad (24)$$

zależnie od zachowania się rozkładu zmiennej pierwotnej p w nieskończoności.

Oba rozkłady można przedstawić na wyżej opisanych siatkach prawdopodobieństwa w postaci linii prostych o dodatnim współczynniku kierunkowym: rozkład Gumbela bezpośrednio, ponieważ na osi poziomej siatki przyjęto skalę funkcji podwójnie wykładniczej, a rozkład Fréchéta - po zastosowaniu transformacji logarytmicznej (por. wzór (17))

$$\frac{k}{\log e} (\log v - \log p_n) = -y \quad (25)$$

Szacowanie wartości parametrów jest tu prostsze niż w przypadku rozkładu Weibulla, ponieważ rozkłady Gumbela i Fréchéta są dwuparametryczne. Jak to wykazano w poprzednim rozdziale w stosunku do wytrzymałości obliczeniowych, jest wysoce uzasadnione przyjęcie za obciążenia obliczeniowe p_γ takich wartości obciążeń skrajnych, które z określonym prawdopodobieństwem γ (np. $\gamma = 0,99$) nie zostaną ani razu przekroczone w planowanym okresie eksploatacji konstrukcji. Metodyka określania obciążeń obliczeniowych jest zupełnie analogiczna do przedstawionego w rozdziale 3 sposobu określania wytrzymałości obliczeniowych.

Nie można natomiast wprowadzić pojęcia obciążenia maksymalnego, będącego odpowiednikiem wytrzymałości minimalnej, ponieważ rozkłady Gumbela i Fréchéta są prawostronnie nieograniczone i nie posiadają wartości progowych. Na to miejsce proponuje się wprowadzić pojęcie obciążenia charakterystycznego \tilde{p}_n jako mediany rozkładu wartości skrajnych obciążenia. Przyjęcie mediany, a więc kwantyla rozkładu, jest bardziej uzasadnione niż przyjęcie wartości średniej, jest dogodniejsze ze względów praktycznych, bo wartość ta może być odczytana wprost na siatce prawdopodobieństwa, a wreszcie jest zgodna z propozycją R. L é v i' e g o, wyrażoną w roku 1956^{x)} [11].

x) "... il s'agit de la valeur mediane des surcharges maximales qui affecteront la pièce calculée pendant le delai de vie envisagé, autrement dit, de la valeur qui a une chance sur deux d'être jamais dépassée".

Proponuje się, ażeby następujące wielkości:

- obciążenie średnie \bar{p}
- współczynnik zmienności obciążenia v_p
- obciążenie charakterystyczne \check{p}_n oraz
- obciążenie obliczeniowe p_y

przyjąć za parametry opisujące pod względem statystycznym rozkład obciążenia działającego na konstrukcję. Parametry te są niezależne od hipotezy rozkładu i spełniają tym samym naczelny postulat wyrażony na wstępie do niniejszej pracy.

5. OCENA BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI

Najczęściej stosowaną probabilistyczną miarą bezpieczeństwa konstrukcji jest prawdopodobieństwo p przetrwania okresu eksploatacji. W najogólniejszym ujęciu obliczenie tego prawdopodobieństwa składa się z czterech kolejnych etapów:

a. Sformułowanie warunku wytrzymałościowego [3] typu

$$Z = f(X_1, X_2 \dots X_n) > 0 \quad (26)$$

jest zadaniem wytrzymałości materiałów, mechaniki budowli i teorii konstrukcji. Warunek ten opisuje relacje fizyczne i zachowuje swą ważność niezależnie od tego, czy przyjmie się deterministyczną, czy też probabilistyczną koncepcję bezpieczeństwa.

Przykładowo dla krępych żelbetowych słupów osiowo ściskanych warunek ten przybiera postać

$$Z = F_b R_s + F_z Q_r - (N_g + N_p) > 0,$$

jest więc warunkiem niezniszczenia elementu lub konstrukcji.

b. Występujące w warunku wytrzymałościowym (26) wielkości X_1 traktuje się jako zmienne losowe i opisuje pod względem statystycznym przez podanie typów rozkładu i ich parametrów oraz związków korelacyjnych zachodzących między nimi.

c. Na podstawie znajomości rozkładów zmiennych X_1 określa się rozkład zmiennej losowej Z , która jest ich funkcją.

d. Oblicza się wartość dystrybuanty $F(Z)$ zmiennej Z w punkcie $Z = 0$. Prawdopodobieństwo

$$p = 1 - F(0) \quad (27)$$

jest szukanym prawdopodobieństwem przetrwania.

To analityczne ujęcie, jakkolwiek zupełnie ścisłe z matematycznego punktu widzenia, jest w praktycznym zastosowaniu bardzo skomplikowane. Rozkłady wielu zmiennych są słabo rozpoznane albo w ogóle nieznane. Niektóre czynniki (np. korozja) z trudem poddają się opisowi statystycznemu. Analityczne określenie rozkładu funkcji wielu zmiennych losowych jest możliwe dla najprostszych postaci funkcji i dla szczególnych rozkładów tych zmiennych. Tak więc dla efektywnej oceny prawdopodobieństwa p konieczne są daleko idące uproszczenia, obwarowane nieraz słabo uzasadnionymi założeniami.

Zaproponowane dotychczas metody, których krytyczny przegląd znaleźć można we wnikliwych studiach Cz. E i m e r a [3] i J. M u r z e w s k i e g o [12], różnią się między sobą głównie charakterem założeń upraszczających.

Zastosowanie elektronicznych maszyn cyfrowych w pewnym stopniu zmniejszyło wspomniane trudności umożliwiając numeryczne określenie rozkładu zmiennej Z nawet bez znajomości postaci funkcyjnej tego rozkładu [15], w dalszym ciągu jednak obliczenie prawdopodobieństwa p jest uciążliwe i z konieczności ograniczone tylko do prostych zagadnień.

Narzucającym się uproszczeniem jest traktowanie tylko niektórych wielkości występujących w warunku wytrzymałościowym (26) jako losowo zmiennych. Pozostałe wielkości przyjmuje się za zmienne w zwykłym sensie, co jest uzasadnione, jeżeli ich wpływ na bezpieczeństwo jest niewielki lub wariancje ich są bardzo małe.

Uproszczeniem idącym jeszcze dalej jest grupowanie zmiennych losowych o podobnym charakterze (por. [3]). W przypadku

przykładowo przytoczonego wyżej słupa żelbetowego nośność r elementu jest funkcją osterech zmiennych: F_b, R_s, F_z i Q_r . Można ustalić rozkłady tych zmiennych i na drodze analitycznej określić rozkład zmiennej r jako ich funkcji, ale można również potraktować nośność r jako grupową zmienną losową i określić jej rozkład bezpośrednio na drodze eksperymentalnej. Obciążenie oalkowite mostu drogowego jest sumą wielu losowo zmiennych składników, ale można je potraktować jako jedną grupową zmienną p i ustalić jej rozkład na przykład przez bezpośredni pomiar reakcji podporowych. Postępowanie takie w wielu przypadkach praktycznych może okazać się nawet prostsze niż uwzględnienie większej liczby zmiennych losowych na drodze matematycznej. Dla żelbetowych belek zginanych postępowanie takie zostało zastosowane w pracach T.C. Z s u t t y' e g o [19] oraz J. M u r z e w s k i e g o i A. S o w y [14].

W celu obliczenia prawdopodobieństwa p ze wzoru (27) konieczne jest przeprowadzenie operacji całkowania w strefach odległych od środków rozkładów. Tak więc naszkicowana powyżej metoda oceny bezpieczeństwa konstrukcji opiera się na często nieuświadomionym przeświadczeniu, że poczynione przez nas hipotezy, dotyczące rozkładów zmiennych losowych X_1 dostarczają wiarygodnych informacji o strefach skrajnych tych rozkładów. Tymczasem, jak to wykazano w rozdziale 3, wnioskowanie statystyczne o skrajnej strefie rozkładu na podstawie hipotezy rozkładu w jego strefie centralnej nie jest uzasadnione i może prowadzić do błędnych wniosków. Prawdopodobieństwo przetrwania chociaż z formalnego punktu widzenia obliczone bezbłędnie, może mieć nikły związek z rzeczywistą szansą przetrwania obiektu.

Wiarygodna i obiektywna, bo pozbawiona dowolności hipotezy rozkładu, ocena bezpieczeństwa powinna być oparta o teorię rozkładu wartości skrajnych. Do tego potrzebna jest znajomość rozkładu najmniejszych wartości r_1 grupowej zmiennej r opisującej nośność konstrukcji oraz rozkładu największych (w wyjątkowych przypadkach najmniejszych) wartości p_n grupowej zmiennej p , opisującej obciążenie konstrukcji. W świetle wy-

wodów zamieszczonych w rozdziałach 3 i 4 typy rozkładów tych zmiennych są znane:

dla zmiennej r_1

$$\text{dystrybuanta (p. (7)) } \Phi(r_1) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{r_1 - \xi}{v - \xi} \right)^k \right]$$

$$\text{gęstość } \varphi(r_1) = \frac{k}{v - \xi} \left(\frac{r_1 - \xi}{v - \xi} \right)^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{r_1 - \xi}{v - \xi} \right)^k \right] \quad (28)$$

dla zmiennej p_n

$$\text{dystrybuanta (p. (23)) } \Phi(p_n) = \exp \left\{ - \exp \left[- \alpha(p_n - u) \right] \right\}$$

$$\text{gęstość } \varphi(p_n) = \alpha \exp \left\{ - \alpha(p_n - u) - \exp \left[- \alpha(p_n - u) \right] \right\} \quad (29)$$

Wartości parametrów można oszacować na podstawie konkretnych danych statystycznych w sposób omówiony w rozdziale 3.

Zgodnie z punktem 2.4 różnicę

$$z = r_1 - p_n \quad (30)$$

nazywać będziemy zapasem nośności, a prawdopodobieństwo $P_z(z > 0)$ zdarzenia $z > 0$, czyli prawdopodobieństwo dodatniego zapasu nośności, przyjmiemy za probabilistyczną miarę bezpieczeństwa konstrukcji.

Zapas nośności z jest splotem (kompozycją) dwóch zmiennych losowych r_1 i p_n zgodnie z wzorem (30). Na podstawie znanych wzorów z rachunku prawdopodobieństwa [1, 8] gęstość $f(z)$ zmiennej z wyrazi się wzorem

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x - z) \cdot \varphi_1(x) dx \quad (31)$$

a więc po uwzględnieniu (28) i (29) będzie

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \exp \left\{ - \alpha(x - z - u) - \exp \left[- \alpha(x - z - u) \right] \right\} \frac{k}{v - \xi} \left(\frac{x - \xi}{v - \xi} \right)^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{x - \xi}{v - \xi} \right)^k \right] dx \quad (32)$$

Dystrybuanta $F_Z(z)$ zapasu nośności będzie z definicji równa

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_D(x-z) \varphi_1(x) dx dz \quad (33)$$

a po wprowadzeniu funkcji φ_1 i φ_D z wzorów (28) i (29) i po wykonaniu wewnętrznego całkowania dystrybuanta $F_Z(z)$ wyrazi się w postaci całki niewłaściwej

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \exp \left[- e^{-cc(x-z-u)} \right] \right\} \frac{k}{v-\xi} \left(\frac{x-\xi}{v-\xi} \right)^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{x-\xi}{v-\xi} \right)^k \right] dx \quad (34)$$

Szukane prawdopodobieństwo $P_Z(z > 0)$ dodatniego zapasu nośności będzie równe

$$P_Z = 1 - F_Z(0) \quad (35)$$

Ocena bezpieczeństwa konstrukcji według miary P_Z jest wolna od hipotez rozkładów i stanowi rozwiązanie zagadnienia postawionego na wstępie pracy.

Niestety całki (34) nie można przedstawić w postaci zamkniętej, a rozwinięcie funkcji podcałkowej w szereg następcza bardzo duże trudności. W konkretnych przypadkach trzeba się będzie uciec do obliczenia prawdopodobieństwa P_Z metodami numerycznymi, co będzie możliwe wobec znajomości liczbowych wartości parametrów, figurujących w wyrażeniu podcałkowym.

Obiecujące jest tu zwłaszcza zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej. E.K. P a l o h e i m o natrafił na podobne trudności w swojej dysertacji [15], próbując określić rozkład funkcji kilku zmiennych losowych i pokonał je uciekając się do metod numerycznych z wykorzystaniem maszyny cyfrowej. Całkowanie przybliżone będzie tu ułatwione, ponieważ we wzorze (34) funkcja w nawiasach $\{ \}$ jest dystrybuantą, a więc

funkcją o wartościach ograniczonych do przedziału $[0,1]$, a reszta wyrażenia podcałkowego jest gęstością rozkładu Weibulla, a więc funkcją bardzo szybko malejącą do zera. W tych okolicznościach należy oczekiwać, że całkowanie przybliżone można będzie skończyć w odległości kilku odchyłeń średnich od środka rozkładu. Dalsze uproszczenia przy określaniu dystrybuanty F_z będą możliwe po bliższym rozpoznaniu rozkładów r_1 i p_n .

Rozkłady Weibulla, Gumbela czy Fréchet'a były już wykorzystywane w dotychczasowych pracach z dziedziny teorii bezpieczeństwa konstrukcji (np. przez A.M. F r e u d e n t h a l a [7]), ale jako hipotetyczne rozkłady losowo zmiennych parametrów bezpieczeństwa X_1 w nierówności (26). Pod względem metodologicznym nie różniło się to niczym od przyjęcia rozkładów normalnych przez A.R. R ż a n i c y n a [17] czy też rozkładów logarytmo-normalnych przez R. L é v i e g o [10]. Przedstawiona powyżej koncepcja oceny bezpieczeństwa oparta jest o teorię rozkładu wartości skrajnych i w kwestii typów rozkładów parametrów bezpieczeństwa nie czyni żadnych założeń.

Dla pewnych szczególnych rodzajów obciążenia może się okazać, że rozkład wartości największej p_n obciążenia będzie prawostronnie ograniczony, czyli że wystąpi wartość progowa ω taka, iż będzie $p_n \leq \omega$. Z sytuacją taką możemy się spotkać, analizując obciążenie zbiorników na wodę lub materiały sypkie, obciążenie mostów suwniowych itp.

W powiązaniu z wykazanym w rozdziale 3 istnieniem lewostronnego dodatniego ograniczenia rozkładu wytrzymałości prowadziłoby to do ważnego stwierdzenia, że możliwe jest zaprojektowanie całkowicie pewnej konstrukcji, dla której prawdopodobieństwo zniszczenia byłoby równe zeru. W tym celu wystarczyłoby zaprojektować konstrukcję dla wytrzymałości obliczeniowej $R_B = \epsilon$ i jednocześnie dla obciążenia obliczeniowego $P_Y = \omega$. Przeczy to dotychczasowym poglądom, opartym na klasycznej probabilistycznej koncepcji bezpieczeństwa, jakoby konstrukcja o zerowym prawdopodobieństwie zniszczenia była zupełnie nierealna^{x)}.

x) Por. A.M. F r e u d e n t h a l [6]: "The concept of design for infinite life is as unrealistic as that of design for zero probability of failure..."

W rozdziale 2 przytoczono przykładowo kilka probabilistycznych miar bezpieczeństwa, wywiedzionych z analizy centralnych stref rozkładów. Podobnie można skonstruować różne probabilistyczne miary bezpieczeństwa, które wszystkie oparte będą na teorii rozkładu wartości skrajnych. Tak na przykład zamiast prawdopodobieństwa P_Z według wzoru (35) można rozważać prawdopodobieństwo P zdarzenia

$$\frac{r_1}{p_n} > 1$$

co w zależności od typów rozkładów może się okazać prostsze pod względem rachunkowym.

Można również - w pełnej analogii do koncepcji J. Murze w s k i e g o [13] - uznać za miarę bezpieczeństwa prawdopodobieństwo koniunkcji zdarzeń

$$r_1 > r_{\min}$$

$$p_n < p_{\max}$$

gdzie r_{\min} i p_{\max} są stosownie dobranymi kwantylami rozkładów wartości skrajnych wytrzymałości r_1 i obciążenia p_n . Przy założeniu niezależności tych zdarzeń efektywne obciążenie wymienionego prawdopodobieństwa nie nastroczałoby żadnych trudności.

Dowolnie skonstruowane miary bezpieczeństwa, oparte na rozkładach wartości skrajnych, będą niezależne od hipotez rozkładu i będą oceniały bezpieczeństwo konstrukcji na podstawie statystyki zdarzeń rzadkich, zgodnie z istotą zagadnienia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

- [1] Cramér H. - Metody matematyczne w statystyce, Warszawa, 1958.
- [2] Demarre G. - Les théories des valeurs extrêmes et la sécurité des constructions, Travaux, 1967, nr 389.

- [3] Eimer Cz. - Podstawy teorii bezpieczeństwa konstrukcji, Rozpr. Inż., 1963, z. 1.
- [4] Fidelis E., Firkowicz S., Grzesiak K., Kołodziejski J., Wiśniewski K. - Matematyczne podstawy oceny niezawodności, Warszawa, 1966.
- [5] Fisz M. - Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, Warszawa, 1958.
- [6] Freudenthal A.M. - Safety, reliability and structural design, Proc. ASCE, 1960, nr ST12.
- [7] Freudenthal A.M. - Safety, safety factors and reliability of mechanical systems, Proc. First Symp. on Engin. Appl. of Random Function Theory and Probability, John Wiley & Sons, New York - London, 1963.
- [8] Gumbel E.J. - Statistics of extremes, New York, 1958.
- [9] Kretow W.I., Dychowiczny A.A., Biewz A.A. - Primenienie raspredielenija Weibulla k analizu procznosti bietona, Zawodskaja Laboratoria, 1967, nr 5
- [10] Lévi R. - Calouls probabilistes de la sécurité des constructions, Ann.P.Ch. 1949, nr 7-8.
- [11] Lévi R. - La sécurité dans les constructions, Travaux 1956 nr 262.
- [12] Murzewski J. - Wprowadzenie do teorii bezpieczeństwa konstrukcji, Warszawa, 1963.
- [13] Murzewski J. - Nowa metoda oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych, AIL, 1967, nr 4.
- [14] Murzewski J., Sowa A. - Oszacowanie błędu obliczenia nośności elementu żelbetowego, AIL, 1969, nr 1-2.
- [15] Paloheimo E.K. - Das Problem der Sicherheit der durch Biegung beanspruchten Spannbetonbrücken, Dysertacja, München, 1965.
- [16] Petersons N. - Strength of concrete in finished structures, Trans. Roy, Inst. Techn., Stockholm, 1964, nr 232.
- [17] Rżanicyn A.R. - K problemie rasczetow sooruzenij na bezopasnost, Sbornik statiej "Woprosy bezopasnosti i procznosti stroitielnykh konstrukcji", CNIPS, Moskwa, 1952.
- [18] Weibull W. - Ustalostrynje ispytania i analiz ich rezultatow, (tłum. z ang.), Moskwa, 1964.
- [19] Zsutty T.C. - Ultimate strength behavior study by regression analysis of beam test data, J. ACI, 1963, nr 5.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА БЕЗОПАСНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КРАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Р е з ю м е

Классические методы вероятностной теории безопасности конструкций основывались на анализе и прогнозах на статистике частых событий, описываемых центральной зоной распределения вероятности. Исходной точкой представленной в работе идеи является очевидное утверждение, что аварии конструкций это редкие события, вызванные выступлением одинаково редких причин и что только статистика редких событий может быть математическим инструментом адекватным к описанию явления.

Для этого следует распределения первоначальных случайных переменных заменить асимптотическими распределениями их крайних значений. Таким образом мы освобождаемся от гипотез, касающихся законов распределения, так как согласно теории крайние значения могут распределяться либо по закону Вейбулла (для ограниченных распределений), либо по закону Гумбела или Фрешета (для неограниченных распределений).

В первой главе помещено принятое автором систему дефиниций, которая определяет безопасность как измеримый признак конструкции. Это способствует построению разных вероятностных мер безопасности, что обсуждается во второй главе. В главе третьей метод статистического описания параметра безопасности на основе распределения крайних значений иллюстрируется на примере прочности 6 бетонов изготовленных на 4 сilesских заводах сборных конструкций. При этом использовано метод пробабилистических сеток. Оценка параметров эмпирических распределений доказала существование нижнего предела прочности бетона.

В четвертой главе излагается аналогический метод описания нагрузок, действующих на конструкцию.

В пятой главе предложено оценку безопасности конструкций на основании теории распределения крайних значений. Как меру безопасности автор принял вероятность полагательного запаса несущей способности, определенного как расстояние между наименьшим значением несущей способности конструкции и наибольшим зна-

чением нагрузки, то есть как композицию двух крайних распределений. Указано возможности других применений распределений крайних значений при решении проблемы безопасности.

PROBABILISTIC EVALUATION OF STRUCTURAL SAFETY BASED UPON THE THEORY OF DISTRIBUTION OF EXTREME VALUES

S u m m a r y

The classical concepts of the probabilistic theory of structural safety based the analysis and forecasts upon the statistics of frequent events described by the central zone of the distribution of probability. The starting point of the concept presented in the paper is the evident statement that structural failures are rare events brought about by the occurrence of equally rare causes and that only the statistics of rare events is the mathematical tool adequate for describing the phenomena.

This requires that the distributions of initial variables were replaced by asymptotic distributions of their extremes values. Thus we are liberated from the need of making hypotheses as to the type of distributions, because according to the theory the distributions of extreme values could be either of Weibull's type (for limited distributions) or of Gumbel's, respectively of Fréchet's type (for unlimited distributions).

In the first chapter a system of definitions has been given, defining safety as a measurable property of a structure. This makes possible to construe different probabilistic measures of safety, which have been discussed in the second chapter. In the third chapter the procedure of a statistical description of a safety parameter has been illustrated by the example of the strength of six concretes produced in four Silesian factories for prefabricated elements. To this aim probabilistic papers

were adopted. Estimation of the parameters of the empirical distributions revealed the existence of a positive lower limit of concrete strength.

In the fourth chapter a similar procedure has been outlined for the description of loads acting upon the structure.

In the fifth chapter a new concept has been presented for evaluating the structural safety by means of the theory of distribution of extreme values. As the measure of safety the author adopted the probability of a positive reserve of bearing capacity, defined as the range between the smallest value of the bearing capacity of a structure and the largest value of load, i.e. as the convolution of two extreme variables. Other possibilities of adopting the distributions of extreme values, when dealing with the problem of structural safety, have been indicated.



ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ukazują się w następujących seriach:

- A. AUTOMATYKA
- B. BUDOWNICTWO
- Ch. CHEMIA
- E. ELEKTRYKA
- En. ENERGETYKA
- G. GÓRNICTWO
- IS. INŻYNIERIA SANITARNA
- JO. JĘZYKI OBCE
- MF. MATEMATYKA-FIZYKA
- M. MECHANIKA
- NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty
serii B:

- Budownictwo z. 1, 1956 r., s. 84, zł 13,50
- Budownictwo z. 2, 1957 r., s. 75, zł 14,25
- Budownictwo z. 3, 1960 r., s. 104, zł 28,50
- Budownictwo z. 4, 1961 r., s. 107, zł 18,75
- Budownictwo z. 5, 1962 r., s. 156, zł 12,90
- Budownictwo z. 6, 1962 r., s. 111, zł 8,90
- Budownictwo z. 7, 1961 r., s. 118, zł 9,20
- Budownictwo z. 8, 1962 r., s. 86, zł 6,25
- Budownictwo z. S, 1962 r., s. 128, zł 8,85
- Budownictwo z. 9, 1963 r., s. 80, zł 4,40
- Budownictwo z. 10, 1964 r., s. 81, zł 6,—
- Budownictwo z. 11, 1964 r., s. 78, zł 5,85
- Budownictwo z. 12, 1964 r., s. 90, zł 6,90
- Budownictwo z. 13, 1964 r., s. 143, zł 6,25
- Budownictwo z. 14, 1964 r., s. 262, zł 16,25
- Budownictwo z. 15, 1965 r., s. 111, zł 10,—
- Budownictwo z. 16, 1965 r., s. 136, zł 8,75
- Budownictwo z. 17, 1965 r., s. 91, zł 5,40
- Budownictwo z. 18, 1966 r., s. 110, zł 7,—
- Budownictwo z. 19, 1966 r., s. 95, zł 5,—
- Budownictwo z. 20, 1967 r., s. 224, zł 12,—
- Budownictwo z. 21, 1968 r., s. 125, zł 7,—
- Budownictwo z. 23, 1968 r., s. 107, zł 6,—
- Budownictwo z. 23, 1968 r., s. 98, zł 5,—
- Budownictwo z. 24, 1969 r., s. 99, zł 5,—
- Budownictwo z. 25, 1969 r., s. 201, zł 10,—

Cena di 3,50