

**WPLYW DOBORU ZASTĘPCZEJ POJEMNOŚCI CIEPLNEJ  
ŻELIWA NA WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH**J. MENDAKIEWICZ<sup>1</sup>Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki  
Wydział Mechaniczny Technologiczny, Politechnika Śląska  
ul. Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice, Polska

## STRESZCZENIE

Symulacja numeryczna krzepnięcia i stygnięcia stopów metali wymaga znajomości rozkładu utajonego ciepła krzepnięcia. Sposób wydzielania się tego ciepła zależy od właściwości stopu, tj. od jego składu chemicznego i położenia krzywych likwidusu i solidusu na wykresach równowagi. Żeliwo jako typowy stop odlewniczy krzepnący z przemianą eutektyczną wymaga opracowania postaci funkcji zastępczej pojemności cieplnej z uwzględnieniem krystalizacji poszczególnych faz (austenitu i eutektyki).

W prezentowanej pracy przedstawiono propozycję czterech wariantów opisu zastępczej pojemności cieplnej dla żeliwa szarego podeutektycznego oraz wyniki obliczeń numerycznych.

*Key words: solidification process, numerical modelling, substitute thermal capacity*

**1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA**

Typowe stopy odlewnicze krzepną w pewnym zakresie temperatury lub dodatkowo z przystankiem temperatury (żeliwo). W rzeczywistości dla stopów krzepnących z przemianą eutektyczną, mamy do czynienia z dwoma podzakresami temperatury, ponieważ przemiana eutektyczna nie zachodzi w stałej temperaturze[1].

Metoda analizy termicznej krzepnących i stygnących metali jest od dawna znaną metodą wyznaczania temperatur przemian fazowych. W procesie ciągłego chłodzenia za jej pomocą można wyznaczyć funkcję temperatury  $T(t, x)$  oraz pochodną tej funkcji  $\partial T(t, x)/\partial t$  (analiza termiczna i derywacyjna – ATD).

---

<sup>1</sup> dr inż., [jerzy.mendakiewicz@polsl.pl](mailto:jerzy.mendakiewicz@polsl.pl)

Metoda analizy krzywej różniczkowej procesu stygnięcia jest doskonałym narzędziem do uzyskania informacji dotyczących krystalizacji poszczególnych faz powstających w trakcie krzepnięcia stopu, a przede wszystkim – do opisu kinetyki wydzielania się ciepła tych przemian [2].

Utajone ciepło krzepnięcia stopów metali wydziela się w całym zakresie temperatury  $T_L - T_S$ . Ciepło to często określane jest jako spektralne ciepło krystalizacji. Spektralne ciepło krystalizacji stopów krzepnących w zakresie temperatury krzepnięcia zależy od właściwości stopu, tj. od jego składu chemicznego i położenia krzywych likwidusu i solidusu na wykresach równowagi. Zmianie temperatury stopu towarzyszy nie tylko krystalizacja, ale i wydzielanie ciepła zakumulowanego w stopie. Ilość ciepła zakumulowanego określa się za pomocą ciepła właściwego stopu i temperatury [3].

Zależność własności termofizycznych stopów metali od temperatury powoduje konieczność opisu wydzielania ciepła krzepnięcia za pomocą zastępczej pojemności cieplnej [4, 5]. W celu określenia zastępczej pojemności cieplnej, niezbędna jest znajomość rozkładu wartości utajonego i zakumulowanego ciepła krzepnięcia w funkcji temperatury. Parametry te można odczytać bezpośrednio z wykresu ATD dla analizowanego stopu. Następnie dopasowywana jest funkcja ciepła krzepnięcia zgodnie z przyjętym modelem. Dobierane są przede wszystkim proporcje ciepła krzepnięcia poszczególnych faz oraz sumaryczne ciepło krzepnięcia. Znajomość funkcji ciepła krzepnięcia pozwala na wykonanie symulacji numerycznych i analizowanie przebiegu procesu krystalizacji badanych stopów metali.

Zastępczą pojemność cieplną definiuje się najczęściej w postaci zależności [4]:

$$C(T) = \begin{cases} C_L & , T > T_L \\ C_p(T) & , T_S < T \leq T_L \\ C_S & , T \leq T_S \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $T_L$ ,  $T_S$  – temperatura likwidus i temperatura solidus,  $C_L$ ,  $C_S$  – pojemność cieplna dla fazy ciekłej i stałej:  $C_L = c_L \cdot \rho_L$ ,  $C_S = c_S \cdot \rho_S$ ,  $c_L$ ,  $c_S$  – ciepło właściwe,  $\rho_L$ ,  $\rho_S$  – ciężar właściwy dla fazy ciekłej i stałej.

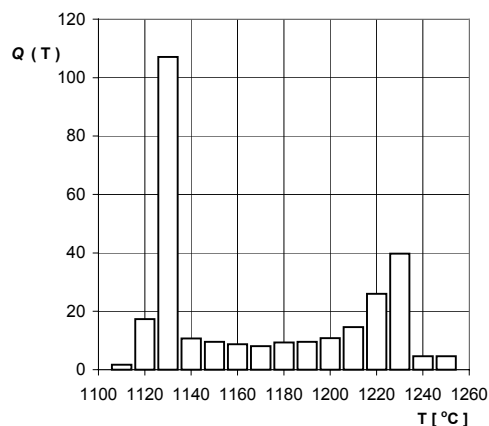
Istotnym problemem pozostaje określenie funkcji  $C_p(T)$  dla strefy przejściowej w zakresie temperatury likwidus–solidus. Wykorzystując znane hipotezy [1, 3, 4, 5], można przyjąć zależność:

$$C_p(T) = [c_p(T) + Q(T)] \cdot \rho_p \quad (2)$$

gdzie  $c_p(T)$ ,  $\rho_p$  – ciepło właściwe i ciężar właściwy dla strefy przejściowej,  $Q(T)$  – utajone ciepło krzepnięcia.

Kształt (postać) funkcji  $Q(T)$  zależy przede wszystkim od rodzaju stopu oraz przyjętego sposobu obliczeń. Wyznaczenie tej funkcji może być zrealizowane z wykorzystaniem wyników analizy termicznej i derywacyjnej (ATD).

Rozkład utajonego ciepła krzepnięcia dla typowego żeliwa podeutektycznego przedstawia rys. 1. Poszczególne porcje ciepła wyznaczono dla stałych interwałów temperatury ( $\Delta T = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$ )



Rys. 1. Rozkład utajonego ciepła krzepnięcia dla żeliwa.  
Fig. 1. Distribution of latent heat for cast iron.

Sumaryczna wartość utajonego ciepła krzepnięcia wynosi  $L = \int_{T_s}^{T_L} Q(T) dT$ .

Dla żeliwa określa się ilość tego ciepła na poziomie 270 [kJ/kg].

### 3. WARIANTY OPISU ZASTĘPCZEJ POJEMNOŚCI CIEPLNEJ

Do rozważań przyjęto dwa stadia krystalizacji żeliwa podeutektycznego: zarodkowanie austenitu i jego wyrastanie w sieć dendrytów oraz powstawanie eutektyki austenit-grafit. Wraz z obniżeniem temperatury poniżej likwidusu dendryty austenitu pogrubiają się i maleje przestrzeń międzydendrytyczna wypełniona przechłodzoną cieczą. Ciecz ta przy określonym przechłodzeniu wykryształizowuje w eutektykę. Ziarna eutektyczne wypełniają wolne przestrzenie międzydendrytyczne aż do całkowitego wyczerpania cieczy. Krystalizacja tych faz kończy się przy przekroczeniu temperatury solidus [1, 3].

Wynika z tego, że utajone ciepło krzepnięcia w przypadku ogólnym można podzielić na dwa efekty cieplne: ciepło krzepnięcia austenitu i ciepło krzepnięcia eutektyki. Na wykresie rozkładu ciepła (rys. 1) można zaobserwować te efekty.

Warianty opisu zastępczej pojemności cieplnej dla strefy przejściowej dotyczą doboru postaci funkcji, którą można byłoby zastosować do aproksymacji rozkładu utajonego ciepła krzepnięcia.

**Wariant 1** – funkcja kawałkami stała z temperaturą graniczną  $T_E$  wyznaczoną dla lokalnego minimum pomiędzy maksymalnymi efektami cieplnymi krystalizacji austenitu i eutektyki.

**Wariant 2** – funkcja kawałkami stała z temperaturą graniczną  $T_E$  wyznaczoną dla miejsca gdzie krzywa różniczkowa procesu stygnięcia wskazuje na początek krystalizacji eutektyki (ATD) [1].

Zastępczą pojemność cieplną dla strefy przejściowej, dla wariantu 1 i wariantu 2 zdefiniowano następująco:

$$C_p(T) = \begin{cases} C_{aus}, & T_E < T \leq T_L \\ C_{eu}, & T_S < T \leq T_E \end{cases} \quad (3)$$

gdzie

$$C_{aus} = C_{sr} + \frac{Q_{aus}}{T_L - T_E} \cdot \rho_{sr}, \quad C_{eu} = C_{sr} + \frac{Q_{eu}}{T_E - T_S} \cdot \rho_{sr}, \quad C_{sr} = \frac{C_S + C_L}{2}, \quad \rho_{sr} = \frac{\rho_L + \rho_S}{2},$$

$$Q_{aus} = \int_{T_E}^{T_L} Q(T) dT, \quad Q_{eu} = \int_{T_S}^{T_E} Q(T) dT$$

**Wariant 3** – funkcja kawałkami stała z dwoma temperaturami granicznymi:  $T_A$  i  $T_E$ , gdzie temperaturę  $T_A$  wyznacza się dla maksymalnej intensywności stygnięcia w zakresie krystalizacji dendrytycznej austenitu (ATD) [1], temperaturę  $T_E$  wyznacza się jak dla wariantu 2.

Zastępczą pojemność cieplną dla strefy przejściowej, dla wariantu 3 zdefiniowano następująco:

$$C_p(T) = \begin{cases} C_{aus1}, & T_A < T \leq T_L \\ C_{aus2}, & T_E < T \leq T_A \\ C_{eu}, & T_S < T \leq T_E \end{cases} \quad (4)$$

gdzie

$$C_{aus1} = C_{sr} + \frac{Q_{aus1}}{T_L - T_A} \cdot \rho_{sr}, \quad C_{aus2} = C_{sr} + \frac{Q_{aus2}}{T_A - T_E} \cdot \rho_{sr}$$

$$Q_{aus1} = \int_{T_A}^{T_L} Q(T) dT, \quad Q_{aus2} = \int_{T_E}^{T_A} Q(T) dT, \quad Q_{eu} = \int_{T_S}^{T_E} Q(T) dT$$

**Wariant 4** – funkcja ciągła  $Q(T) = Q_{aus}(T) + Q_{eu}(T)$ .

Zastępczą pojemność cieplną dla strefy przejściowej, dla wariantu 4 zdefiniowano następująco:

$$C_p(T) = [c_p(T) + Q(T)] \cdot \rho_{sr} \quad \text{dla } T_S < T \leq T_L \quad (5)$$

gdzie  $c_p(T)$  – liniowa aproksymacja ciepła właściwego dla fazy ciekłej i stałej.

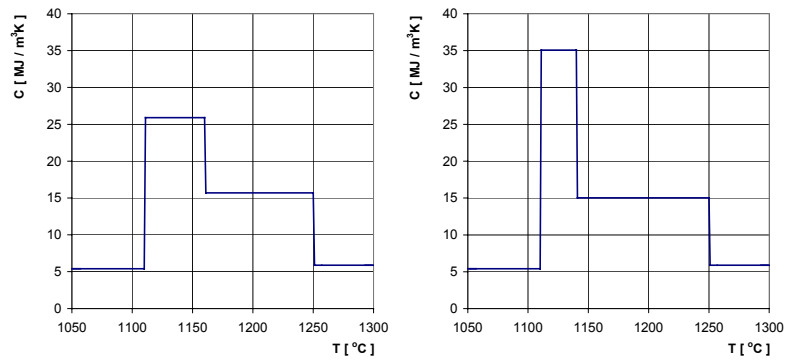
Składniki funkcji  $Q(T)$  zdefiniowano wykorzystując formułę logistycznego wzrostu [6], w postaci następujących zależności:

$$Q_{aus}(T) = \frac{w_1 \cdot w_2 \cdot \exp[w_2 \cdot (w_3 - T)]}{[1 + \exp[w_2 \cdot (w_3 - T)]]^2} + \frac{w_4 / \{1 + \exp[w_5 \cdot (w_6 - T)]\}}{1 + \exp[w_2 \cdot (T - w_3)]} \quad (6)$$

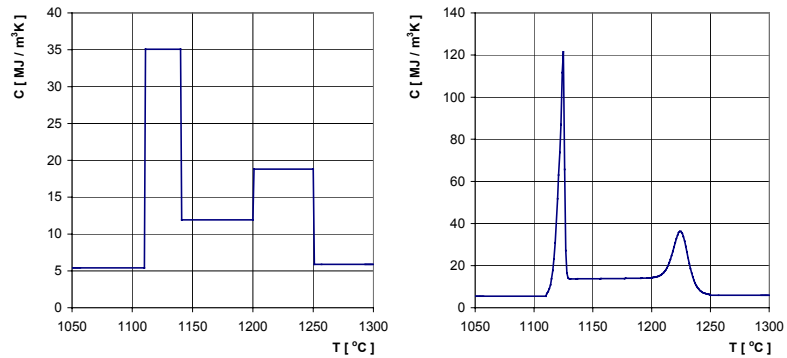
$$Q_{eu}(T) = \frac{w_7 \cdot w_8 \cdot \exp[w_8 \cdot (w_9 - T)]}{[1 + \exp[w_8 \cdot (w_9 - T)]]^2} + \frac{w_{10} / \{1 + \exp[w_{11} \cdot (w_{12} - T)]\}}{1 + \exp[w_8 \cdot (T - w_9)]} \quad (7)$$

gdzie  $w_1, \dots, w_{12}$  to współczynniki funkcji logistycznej i jej pochodnej reprezentujące parametry opisu efektów cieplnych związanych z krystalizacją austenitu i eutektyki.

Na rys. 2 i 3 przedstawiono wykresy funkcji dla poszczególnych wariantów opisu zastępczej pojemności cieplnej dla strefy przejściowej.



Rys. 2. Zastępcza pojemność cieplna żeliwa dla wariantu 1 i 2.  
Fig. 2. Substitute thermal capacity of cast iron for variants 1 and 2.



Rys. 3. Zastępcza pojemność cieplna żeliwa dla wariantu 3 i 4.  
Fig. 3. Substitute thermal capacity of cast iron for variants 3 and 4.

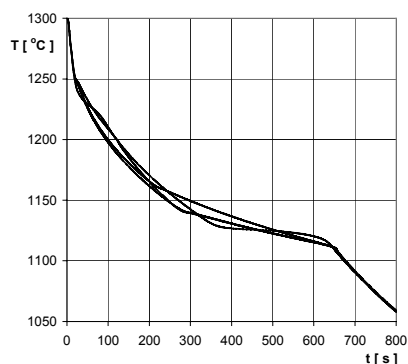
Dla wszystkich zaproponowanych wariantów opisu zastępczej pojemności cieplnej dla strefy przejściowej przeprowadzono obliczenia – symulacje numeryczne procesu krzepnięcia i stygnięcia żeliwa w typowej masie formierskiej. Zastosowano metodę różnic skończonych (zadanie 1D) dla stanu nieustalonego (schemat jawny). Na granicy podobszarów przyjęto warunek brzegowy IV rodzaju. Na zewnętrznych brzegach obszarów przyjęto warunek brzegowy II rodzaju (adiabatyczny). W obszarze odlewu wyróżniono dwa punkty kontrolne: w środkowej części odlewu i w połowie odległości między środkiem i brzegiem odlewu.

Do obliczeń numerycznych przyjęto następujące dane: Żeliwo szare podeutektyczne o zawartości około 3% węgla i podwyższonej zawartości krzemu, ciepło właściwe  $c_L = 840$ ,  $c_S = 750$  [J/kg K], gęstość  $\rho_L = 7000$ ,  $\rho_S = 7200$  [kg/m<sup>3</sup>], współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda_L = 20$ ,  $\lambda_S = 40$  [W/m K], temperatura zalewania  $T_0 = 1300$  °C, temp. likwidus  $T_L = 1250$  °C, temp. solidus  $T_S = 1110$  °C.

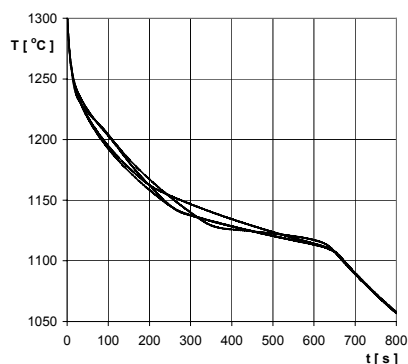
Tabela 1. Temperatury graniczne oraz wartości składników utajonego ciepła krzepnięcia  
Table 1. Temperature limits and values of latent heat

Wariant	Temperatura graniczna [°C]	$Q_{aus}$ [kJ/kg]	$Q_{eu}$ [kJ/kg]
1	1160	127.38	142.67
2	1140	145.63	124.38
3	1200 / 1140	92.66 / 52.95	124.38
4	-	188.14	81.85

Krzywe stygnięcia dla poszczególnych wariantów opisu zastępczej pojemności cieplnej w punktach kontrolnych przedstawiono na rys. 4 i 5.



Rys. 4. Krzywe stygnięcia w punkcie 1.  
Fig. 4. Cooling curves at the point 1.



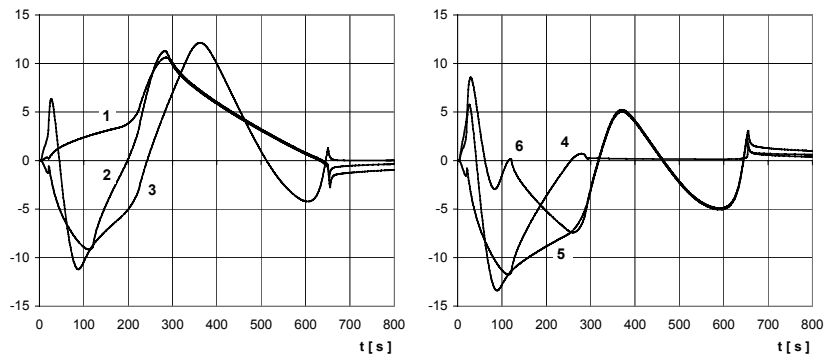
Rys. 5. Krzywe stygnięcia w punkcie 2.  
Fig. 5. Cooling curves at the point 2.

Wartości (min i max) różnic temperatury dla poszczególnych wariantów w punktach kontrolnych przedstawiono w tabeli 2. Wyniki dotyczą wszystkich kombinacji przyjętych wariantów („v nr” oznacza numer wariantu).

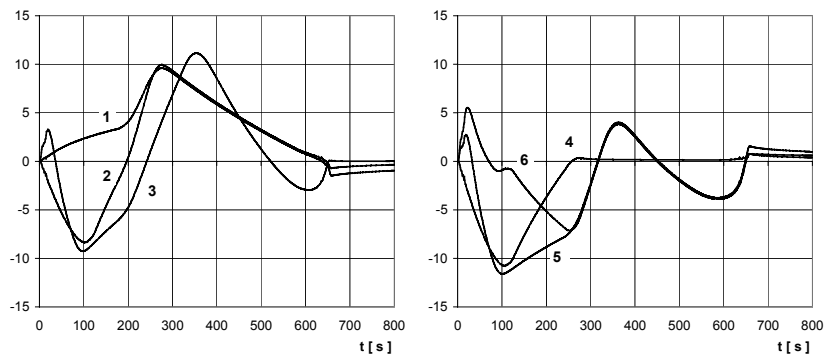
Tabela 2. Różnice temperatury dla poszczególnych wariantów w punktach kontrolnych 1 i 2  
 Table 2. Temperature differences for individual variants at the points 1 and 2

Numer punktu kontrolnego	Zakres	1	2	3	4	5	6
		v1-v2	v1-v3	v1-v4	v2-v3	v2-v4	v3-v4
1	min	-2,75	-9,15	-11,19	-11,73	-13,39	-7,41
	max	10,61	11,27	12,13	1,62	5,77	8,57
2	min	-1,47	-8,37	-9,26	-10,78	-11,59	-7,11
	max	9,62	9,96	11,14	0,77	3,99	5,53

Na rys. 6 i 7 przedstawiono wykresy obliczonych różnic temperatury dla poszczególnych wariantów w punktach kontrolnych 1 i 2. Cyframi od „1” do „6” oznaczono poszczególne kombinacje obliczonych różnic (patrz tabela 2).

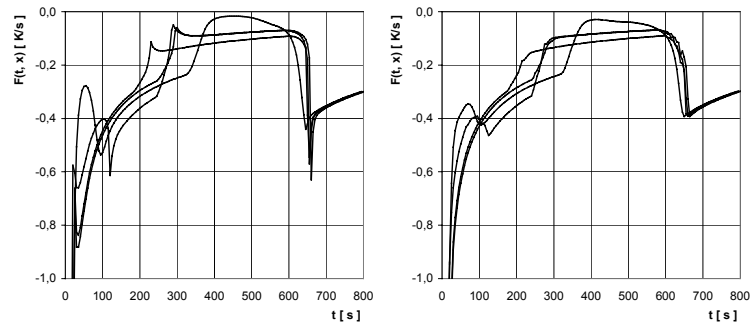


Rys. 6. Różnice temperatury dla krzywych stygnięcia w punkcie 1.  
 Fig. 6. Temperature differences for cooling curves at the point 1.



Rys. 7. Różnice temperatury dla krzywych stygnięcia w punkcie 2.  
 Fig. 7. Temperature differences for cooling curves at the point 2.

Dodatkowo obliczono wartości pochodnych temperatury  $F(t, x) = \partial T(t, x)/\partial t$  dla poszczególnych wariantów w punktach kontrolnych (rys. 8).



Rys. 8. Wykresy funkcji  $F(t, x)$  dla poszczególnych wariantów w punkcie 1 i 2.  
Fig. 8. Courses of function  $F(t, x)$  for individual variants at the point 1 and 2.

## LITERATURA

- [1] C.Podrzucki, *Żeliwo. Struktura, właściwości, zastosowanie*, Wyd. ZG STOP, Kraków, 1991.
- [2] Z.Jura, S.Jura, *Krzywa kalorymetryczna i źródła ciepła w analizie termicznej i derywacyjnej procesu krzepnięcia żeliwa*, Krzepnięcie Metali i Stopów, nr 16, PAN, Katowice, 1992.
- [3] J.Braszczyński, *Kryształizacja odlewów*, WNT, Warszawa, 1991.
- [4] B.Mochnacki, J.S.Suchy, *Modelowanie i symulacja krzepnięcia odlewów*, PWN, Warszawa, 1993.
- [5] W.Longa, *Krzepnięcie odlewów*, Wydawnictwo Śląsk, 1985.
- [6] M.Gruszczynski, M.Podgórska, *Ekonometria*, Wyd. SGH, Warszawa, 2004

## INFLUENCE OF CHOICE OF CAST IRON SUBSTITUTE THERMAL CAPACITY ON THE RESULTS OF NUMERICAL COMPUTATIONS

### SUMMARY

Numerical simulation of solidification process requires the knowledge of the substitute thermal capacity distribution of alloy considered. The way of latent heat evolution depends, among others, on the chemical constitution of alloy and the position of liquidus and solidus curves on the equilibrium diagram. In order to describe the cast iron substitute thermal capacity distribution the austenite and eutectic phases should be taken into account. In the paper four variants of substitute thermal capacity distribution for cast iron are presented and the results of numerical computations are shown.

Recenzował Prof. Bohdan Mochnacki