

OPTIMALIZACJA DWUKRYTERIALNA ASORTYMENTU PRODUKCJI W ODLEWNI

F. BINCZYK¹, J. PIĄTKOWSKI², J. SZYMSZAL³
Katedra Technologii Stopów Metali i Kompozytów,
Politechnika Śląska, ul. Krasińskiego 8, 40-019 Katowice

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono metodę wyznaczenia optymalizacji nieliniowej-dwukryterialnej na przykładzie wybranego zakładu odlewniczego. Programowanie ilorazowe, oparte na funkcji liniowo-ułamkowej zwaną funkcją kryterialną posłużyło do optymalizacji struktury asortymentowej produkcji dwóch rodzajów łączników żeliwnych: EE1 i EE2. Dane potrzebne do wyznaczenia optymalizacji hiperbolicznej zaimportowano do arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel, a wszystkich obliczeń dokonano przy użyciu modułu Solver.

Keywords: Solver module, non-linear programmes, hyperbolically optimisation

1. WPROWADZENIE

Przy rozwiązywaniu problemów współczesnego „zarządcy produkcji”, często występuje problem rozwiązania zadania optymalizacyjnego, w którym występują dwie funkcje celu: osiągnięcie maksymalnego efektu (np. zysku) przy jednoczesnej minimalizacji nakładów (kosztów lub poniesionej straty). Podczas rozpatrywania zagadnień, w których występuje więcej niż jedna funkcja celu, można mówić o optymalizacji wielokryterialnej, z której najczęściej stosowaną jest optymalizacja wykorzystująca zagadnienia dwukryterialne [1, 2].

Dotychczas nie znaleziono bezpośredniej metody rozwiązania tak postawionych celów, korzysta się więc z metod pośrednich, z których najczęściej stosowaną jest me-

¹ dr hab. inż. – prof. Pol. Śl.

² dr inż. – adiunkt

³ dr inż. – adiunkt

toda wykorzystująca tzw. funkcję kryterium. Funkcja ta jest wskaźnikiem o budowie liniowo-ułamkowej, dlatego często programowanie oparte na tej funkcji zwane jest ilorazowym. Nie jest to jednak zadanie optymalizacji liniowej, lecz zadanie optymalizacyjne z ułamkowo-liniową funkcją celu, nazywane również zadaniem optymalizacji hiperbolicznej [2, 3].

W zagadnieniach tych, np. przy optymalizacji struktury asortymentowej produkcji lub problemu mieszanek, ważną rolę odgrywają parametry ilorazowe (współczynniki), np. koszt jednostkowy, rentowność, wydajność pracy, które należą do zagadnień optymalizacji nieliniowej. Wielu autorów zwraca bowiem uwagę przed użyciem modułu Solver do poszukiwania decyzji optymalnych w zadaniach optymalizacji nieliniowej na utrudnienia, jakie może napotkać użytkownik, wynikające zarówno ze specyfiki działania samego modułu, jak i charakteru rozwiązywanych zadań optymalizacyjnych.

W zagadnieniach optymalizacji liniowej, decyzja optymalna (jeśli istnieje), jest tzw. optimum globalnym, co jest równoznaczne z faktem, że wyznaczona przez tę decyzję wartość funkcji celu jest największą, (bądź najmniejszą), w całym zbiorze decyzji dopuszczalnych. Natomiast, w zadaniach optymalizacji nieliniowej bardzo często, oprócz optimum globalnego, mogą istnieć tzw. optima lokalne, których obecność znacznie utrudnia znalezienie optimum globalnego (czyli decyzji optymalnej).

2. OPTIMALIZACJA DWUKRYTERIALNA

Matematyczny model optymalizacji hiperbolicznej przy wyborze asortymentu produkcji przedstawiono w oparciu o przedsiębiorstwo odlewnicze, które wytwarza produkty według następujących danych:

- łączniki żeliwne w ilości n ich asortymentów, przy produkcji których zużywa p środków produkcji,
- jednostkowe nakłady środków produkcji a_{ij} (gdzie: $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$) pomnożone przez wielkości zmiennych decyzyjnych x_j (czyli wielkość produkcji danego asortymentu łączników j), powinny być niższe od limitów środków produkcji b_i .

A więc:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (1)$$

Ponadto znane są :

- współczynniki wartości produkcji c_j ,
- współczynniki zatrudnienia d_j przypadające na jednostkę j -tego asortymentu łącznika.

Dodatkowym ograniczeniem jest nieujemność zmiennych decyzyjnych, czyli:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad \text{oraz} \quad c_j, d_j \geq 0 \quad (2)$$

Funkcją celu będzie funkcja mierząca wydajność pracy, tzn. mająca charakter wskaźnika efektywności nakładów, gdyż należy określić taką asortymentową strukturę produkcji łączników, która maksymalizuje wskaźnik wydajności pracy.

W rozpatrywanym zadaniu, chodzi o uzyskanie dwóch następujących wartości optymalnych:

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$F_2(x) = \sum_{j=1}^n d_j \cdot x_j \rightarrow \min. \quad (4)$$

W oparciu o przedstawione wartości optymalne (3) i (4), funkcja celu będzie przedstawiała się następującą zależnością:

$$F(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j}{\sum_{j=1}^n d_j \cdot x_j} \rightarrow \max, \quad (5)$$

przy jednoczesnym spełnieniu podanych wcześniej ograniczeń.

Sformułowane w ten sposób zagadnienie jest zadaniem optymalizacji dwukryterialnej. Rozwiązanie jego jest próbą poszukiwania pewnego kompromisu, gdyż nie można wyznaczyć takiego rozwiązania, przy którym jednocześnie funkcja $F_1(x)$ (czyli wartość produkcji) osiąga maksimum, a $F_2(x)$ (czyli nakłady na zatrudnienie) osiąga minimum. Należy zaznaczyć, że uzyskane rozwiązanie kompromisowe może znacznie odbiegać (przy tych samych ograniczeniach) od rozwiązania, gdy:

$F_1(x) \rightarrow \max$ lub

$F_2(x) \rightarrow \min.$

3. METODYKA BADAWCZA

Wybrana Odlewnia Żeliwa Ciągłego produkuje na eksport dwa rodzaje łączników EE1 oraz EE2. Z analizy technologiczności firmy można uzyskać następujące informacje decyzyjne, które powinny pozwolić na określenie optymalnego asortymentu produkcji na przyszły rok kalendarzowy:

1. zużycie żeliwa na 1 tonę łączników: EE1 – 1,2 tony,
2. EE2 – 1,3 tony,
3. zasoby żeliwa: 6400 ton,
4. zużycie masy formierskiej na 1 tonę łączników: EE1 – 0,85 tony,
5. EE2 – 0,95 tony,
6. zasoby masy formierskiej: 8000 ton,
7. pracochłonność na 1 tonę łączników: EE1 – 48 h,
8. EE2 – 67 h,
9. zasoby czasu pracy: 130000 h,
10. koszt produkcji 1 tony łączników: EE1 – 4200 zł,
11. EE2 – 5100 zł
12. wpływ ze sprzedaży 1 tony łączników: EE1 – 2600 \$,
13. EE2 – 3100 \$,
14. minimalne zapotrzebowanie na łączniki: EE1 – 700 ton,
15. EE2 – 400 ton,
16. maksymalne zapotrzebowanie na łączniki: EE1 – 2500 ton,
17. EE2 – 2600 ton.

W celu rozwiązania przedstawionego zadania optymalizacji dwukryterialnej, należy wskazać, jaki asortymentowy plan produkcji łączników EE1 i EE2, (przy możliwie najniższych kosztach własnych), pozwoli uzyskać maksymalny wpływ dewizowy z ich sprzedaży. Oprócz charakteru asortymentu produkcji, należy podać wysokość wpływu dewizowego, przypadającego na 1 złotówkę kosztów własnych, przy rozwiązaniu optymalnym.

Budowę arkusza kalkulacyjnego [4, 5], z wstępnymi danymi decyzyjnymi, w którym dokonano potrzebnych obliczeń, w celu rozwiązania postawionego zadania optymalizacyjnego przedstawiono na rys.1.

ARCHIWUM ODLEWNICTWA

	A	B	C	D	E	F	G
1	Łączniki	EE1	EE2				
2		x_1	x_2				
3		1	1				
4				Koszt wytworzenia			
5	Jedn. koszt produkcji (1 tony)	4 200 zł	5 100 zł	9300,00			
6				Całkowite wpływy			
7				ze sprzedaży			
8	Jedn. wpływ ze sprzedaży (1 tony)	\$2 600	\$3 100	5700,00			
10	Warunki ograniczające:	Współczynniki	Lewa strona	Prawa strona			
11	(zużycie żeliwa /1 t łączników)	1,2	1,8	3	6400	tony	≤
12	(zużycie masy f. /1 t łączników)	0,85	0,95	2	8000	tony	≤
13	(pracochłonność /1 t łączników)	48	67	115	130000	h	≤
14	A (min zapotrz. łącz. 1)	1	0	1	700	tony	≥
15	B (max zapotrz. łącz. 1)	1	0	1	2500	tony	≤
16	A (min zapotrz. łącz. 2)	0	1	1	400	tony	≥
17	B (max zapotrz. łącz. 2)	0	1	1	2600	tony	≤
19	Funkcja celu:	0,612903					

Rys.1. Dane początkowe.

Fig.1. First files.

Do komórek B5 i C5 wprowadzono jednostkowe koszty produkcji łączników typu EE1 i EE2, a w komórce D5 za pomocą formuły =SUMA.ILOCZYNÓW(B3:C3;B5:C5) obliczono ogólne koszty wytworzenia rocznej produkcji obu rodzajów łączników, gdyż będą one równe:

$$F_2(x) = 4200x_1 + 5100x_2 \quad (6)$$

Podobnie do komórek B8 i C8 wprowadzono odpowiednio, jednostkowe wpływy dewizowe ze sprzedaży produkowanych łączników, a w komórce D8 za pomocą formuły =SUMA.ILOCZYNÓW(B3:C3;B8:C8) obliczono ogólne wpływy dewizowe ze sprzedaży rocznej produkcji obu rodzajów łączników, gdyż będą one równe:

$$F_1(x) = 2600x_1 + 3100x_2 \quad (7)$$

Na podstawie zależności (5) oraz (6) i (7) funkcja celu w analizowanym zagadnieniu optymalizacyjnym będzie zdefiniowana następująco:

$$F(x) = \frac{2600x_1 + 3100x_2}{4200x_1 + 5100x_2} \quad (8)$$

Ponieważ licznik tej funkcji ma dążyć do maksimum (wpływy dewizowe), natomiast mianownik do minimum (koszty produkcji) - więc wartość całej funkcji powinna dążyć do maksimum. Formuła obliczająca funkcję celu: =D8/D5 wprowadzona do komórki B19 informuje nas jednocześnie, jaki zysk (w dolarach) możemy uzyskać z każdej zainwestowanej w produkcję złotówki.

Po zdefiniowaniu funkcji celu, należy określić warunki ograniczające:

- ❑ do komórki A13 wprowadzono nazwę warunku ograniczającego W1 - dotyczącego zużycia żeliwa na 1/tonę łączników, który jest następujący: $1,2x_1 + 1,8x_2 \leq 6400$, natomiast do komórek B13 i C13 wprowadzono odpowiednio, współczynniki zużycia żeliwa na 1 tonę łączników EE1 (1,2) i EE2 (1,8); do komórki D13 lewą stronę tego warunku =SUMA.ILOCZYNÓW(\$B\$4:\$C\$4;B13:C13), a do komórki E13 wartość prawej jego strony (limit zasobów żeliwa) - czyli liczbę 6400,
- ❑ w komórce A14 wprowadzono warunek ograniczający W2 dotyczący zużycia masy formierskiej na 1/tonę łączników, który jest następujący: $0,85x_1 + 0,95x_2 \leq 8000$, natomiast komórki B14 i C14 wypełniono współczynniki zużycia masy na 1 tonę łączników EE1 (0,85) i EE2 (0,95); do komórki D14 wprowadzono lewą stronę tego warunku przy pomocy funkcji =SUMA.ILOCZYNÓW(\$B\$4:\$C\$4;B14:C14), a do komórki E14 wartość prawej jego strony (limit zasobów masy) - czyli liczbę 8000,
- ❑ do komórki A15 wprowadzono nazwę warunku ograniczającego W3 dotyczącego prędkości na 1/t łączników, który jest następujący: $48x_1 + 67x_2 \leq 130000$, natomiast do komórek B15 i C15, współczynniki prędkości na 1 tonę łączników EE1 (48) i EE2 (67); do komórki D15 wpisano lewą stronę tego warunku według formuły: =SUMA.ILOCZYNÓW(\$B\$4:\$C\$4;B15:C15), a do komórki E15 wartość prawej jego strony (limit zasobów prędkości) - czyli liczbę 130000,
- ❑ w komórce A16 umieszczono nazwę warunku ograniczającego W4A dotyczącego minimalnej podaży rocznej łączników EE1, który jest następujący: $x_1 \geq 700$, natomiast do komórek B16 i C16 wprowadzono, odpowiednio, współczynniki 1 i 0; do komórki D16 wprowadzimy lewą stronę tego warunku =SUMA.ILOCZYNÓW(\$B\$4:\$C\$4;B16:C16), a do komórki E16 wartość prawej jego strony (dolna granica podaży) - czyli liczbę 700,
- ❑ do komórki A17 wprowadzimy nazwę warunku ograniczającego W4B dotyczącego maksymalnej podaży rocznej łączników EE1, który jest następujący: $x_1 \leq 2500$, natomiast do komórek B17 i C17 wprowadzimy, odpowiednio, współczynniki 1 i 0; do komórki D17 lewą stronę tego warunku =SUMA.ILOCZYNÓW(\$B\$4:\$C\$4;B17:C17), a do komórki E17 wartość prawej jego strony (górną granicę podaży) - czyli liczbę 2500,
- ❑ do komórki A18 wprowadzono nazwę warunku ograniczającego W5A dotyczącego minimalnej podaży rocznej łączników EE2, który jest następujący: $x_2 \geq 400$, natomiast do komórek B18 i C18 odpowiednio, współczynniki 0 i 1; do komórki

ARCHIWUM ODLEWNICTWA

D18 lewą stronę tego warunku =SUMA.ILOCZYNÓW (\$B\$4:\$C\$4; B18:C18), a do komórki E18 wartość prawej jego strony (dolna granica podaży) - czyli liczbę 400,

- ❑ do komórki A19 wpisano nazwę warunku ograniczającego W5B dotyczącego maksymalnej podaży rocznej łączników EE2, który jest następujący: $x_2 \leq 2600$, natomiast do komórek B19 i C19 wprowadzono, odpowiednio, współczynniki 0 i 1; do komórki D19 lewą stronę tego warunku =SUMA.ILOCZYNÓW (\$B\$4:\$C\$4; B19:C19), a do komórki E19 wartość prawej jego strony (górną granicę podaży) - czyli liczbę 2600.

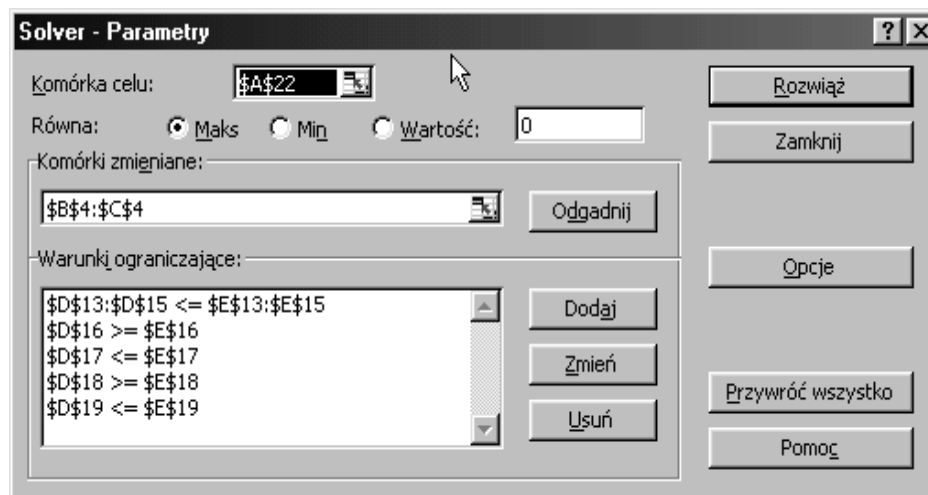
Dodatkowo, blok komórek zawierający warunki ograniczające należy uzupełnić o jednostki (komórki F13:F19) oraz znaki nierówności danych warunków (rys. 1), które znakomicie ułatwiają późniejsze ich definiowanie w oknie Solver-Parametry.

Po zaimportowaniu wszystkich danych do arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel, określeniu funkcji celu i zdefiniowaniu warunków ograniczających, należy uruchomić moduł Solver.

W kolejny etap należy wykonać trzy czynności:

- określić komórkę zawierającą funkcję celu (jest nią komórka A22), rodzaj optymalizacji (Maks),
- zdefiniować adresy komórek zmienianych (zmiennych decyzyjnych) (blok komórek B4:C4),
- określić blok warunków ograniczających z odpowiednimi znakami.

Przykładowe okno dialogowe Solver-Parametry przedstawiono na rys. 2.



Rys.2. Okno dialogowe Solver-Parametry.

Fig.2. The window dialogue Solver-Parameter.

	A	B	C	D	E	F	G
2	ŁĄCZNIK	EE1	EE2				
3		x_1	x_2				
4		2150,00	400,00				
6				Koszt ogólny wytworzenia			
7	Jedn. koszt produkcji (1 tony)	4 200 zł	5 100 zł	11070000,00			
9				Suma wpływów ze sprzedaży			
10	Jedn.wpływ ze sprzedaży (1 tony)	\$2 600	\$3 100	6830000,00			
12	Warunki ograniczające:	Współczynniki		Lewa strona	Prawa strona (limit)		
13	zużycie żeliwa /1 t łączników	1,2	1,8	3300	6400 tony	<	
14	zużycie masy f. /1 t łączników	0,85	0,95	2208	8000 tony	<	
15	pracochłonność /1 t łączników	48	67	130000	130000 h	<	
16	min zapotrz. łącz. 1	1	0	2150	700 tony	>	
17	max zapotrz. łącz. 1	1	0	2150	2500 tony	<	
18	min zapotrz. łącz. 2	0	1	400	400 tony	>	
19	max zapotrz. łącz. 2	0	1	400	2600 tony	<	
21	Funkcja celu:	0,62					

Rys.3. Rozwiązanie zadania optymalizacji nieliniowej.

Fig.3. Solution of assignment of non-linear optimization.

Po wypełnieniu okna dialogowego *Solver-Parametry*, kolejną czynnością jest uaktywnienie przycisku *Opcje* i w oknie dialogowym *Solver-Opcje* trzeba zadeklarować nieujemność zmiennych decyzyjnych (*Przyjmij nieujemne*). Ze względu na nieliniowość funkcji celu nie wolno zaznaczyć wyboru modelu liniowego (*Przyjmij model liniowy*). Następnie powracamy do okna dialogowego *Solver-Parametry* i uaktywniamy opcję *Rozwiż*. Uruchamia to proces rozwiązywania zadania optymalizacyjnego (rys.3).

W efekcie uzyskujemy rozwiązanie optymalne, z którego wynika, że aby uzyskać maksymalne wpływy z eksportu produkowanych łączników, w stosunku do zainwestowanych nakładów, odlewnia powinna wyprodukować 2150 ton łączników EE1 oraz 400 ton łączników EE2.

Warto również nadmienić, iż w rozwiązaniu decyzji optymalnej i optymalnej wartości funkcji celu, moduł Solver podaje także trzy raporty: wyników, wrażliwości i granic. Uzyskane rezultaty można uzupełnić o posilkowe informacje przyjętego rozwiązania optymalizacji dwukryterialnej, dotyczące np. wyszczególnienia napiętych i luźnych warunków ograniczających. W raporcie wrażliwości istnieje jeszcze jedna, dodatkowa interpretacja bilansu wartości lewej i prawej strony warunków ograniczających, o czym mówi tzw. *Cena dualna* wyrazów wolnych.

Kolejnych wskazówek do „pełnej” analizy ekonomicznej rozwiązania optymalnego dają informacje zawarte w bloku komórek *Przyrostu krańcowego*, które dotyczą wrażliwości na zmiany parametrów modelu dodatnich wartości zmiennych decyzyjnych.

4. PODSUMOWANIE

Z przedstawionego rozwiązania optymalizacji dwukryterialnej wybranego asortymentu produkcji odlewni wynika, że w celu uzyskania największych dochodów z eksportu produkowanych łączników, w stosunku do zainwestowanych nakładów, zakład powinien wyprodukować 2150 ton łączników EE1 oraz 400 ton łączników EE2. Oprócz tego, Solver podaje, iż wysokość wpływu dewizowego przypadającego na jedną złotówkę poniesionych kosztów własnych wynosi około 0,62 dolara, przy decyzji optymalnej. Oznacza to, że każda, zainwestowana w produkcję łączników złotówka przyniesie zysk dewizowy w wysokości około 0,62 dolara.

LITERATURA

- [1] Szymshal J., Blacha L.: *Wspomaganie decyzji optymalnych w metalurgii i inżynierii materiałowej*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, (2003).
- [2] Kukuła K.: *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe, PWN, Warszawa (2001).
- [3] Abt S.: *Systemy logistyczne w gospodarowaniu*. Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań, (1997).
- [4] Walkenbach J.: *Excel 2000. Biblia*. Wydawnictwo RM, Warszawa, (1999).
- [5] Szapiro T.: *Decyzje menedżerskie z Excelem*. PWN, Warszawa, (2000).

TWO-TEST OPTIMIZATION OF ASSORTMENT OF PRODUCTION IN THE FOUNDRY

SUMMARY

In this work the results of method of delimitation of non-linear optimization was introduced two-test on example of choose foundry Enterprise's. This programming, leaning on function linear - fractional called test function was of service to optimization of structure of assortment's production of two kinds of cast-iron links: EE1 and EE2. Necessary data's to delimitation of hyperbolical optimization Microsoft Excel were imported to spreadsheet's sheet and all calculations Solver were executed at use of module.

Recenzował: prof. dr hab. inż. Adam Gierek