

## ANALIZA WRAŻLIWOŚCI OPTYMALNEGO WYBORU ASORTYMENTU PRODUKCJI ZAKŁADU ODLEWNICZEGO

J. PIĄTKOWSKI <sup>1</sup>, J. SZYMSZAL <sup>2</sup>, A. GIĘREK <sup>3</sup>

Katedra Technologii Stopów Metali i Kompozytów, Politechnika Śląska,  
 ul. Krasińskiego 8, 40-019 Katowice, Polska

### STRESZCZENIE

Spośród różnych możliwości skutecznie prowadzonego procesu decyzyjnego, czołową rolę odgrywają zagadnienia optymalizacji liniowej, bazujące na algorytmie sympleks. Jest to jedna z metod badań operacyjnych, polegająca na ocenie wrażliwości optymalnego wyboru asortymentu produkcji wybranego zakładu odlewniczego. Praca określa profil produkcyjny odlewni, czyli które wyroby i w jakich ilościach należy wytworzyć, aby nie przekroczyć posiadanych zasobów środków produkcji oraz spełnić ewentualne ograniczenia, dotyczące struktury możliwości wykonawczych, przy uzyskaniu maksymalnego zysku z ich sprzedaży.

*Key words: analysis sensibilities, module Solver, and linear optimisation*

### 1. WSTĘP

Następstwem coraz bardziej złożonych przedsięwzięć wytwórczych oraz dystrybucyjnych, jest podejście systemowe i analiza rachunków optymalizacyjnych, które ułatwiają podejmowanie trafnych decyzji gospodarczych. Prawidłowe określenie zakresów stabilności zadania optymalnego pozwala na właściwe podejmowanie decyzji menedżerskich, co daje przewagę nad tymi, którzy działają bez znajomości podstawowych zagadnień logistycznych w produkcji [1].

---

<sup>1</sup> dr inż. – adiunkt,

<sup>2</sup> dr inż. – adiunkt,

<sup>3</sup> prof. zw. dr hab. inż. – profesor.



również dane związane z zyskiem, jaki zakład osiągnie ze sprzedaży 100 kg każdego rodzaju masy przy aktualnych kosztach produkcji i zaplanowanych cenach zbytu.

Tabela 1. Hipotetyczne dane potrzebne do obliczenia optymalnego wyboru asortymentu produkcji  
Table 1. Hypothetic necessary dates to calculation of optimum choice assortment of production

Rodzaj masy rdzeniowej (symbol)	Nakłady na 100 kg produkcji			Zysk ze sprzedaży 100 kg masy [zł]
	Masy żywicy [kg / j. pr.]	Pracy mieszarki [h / j. pr.]	Roboczo-godzin [zł / j. pr.]	
Masa1	20	3,0	120	520
Masa2	35	1,8	210	310
Zasoby	350 [kg]	7 [h]	500 [zł]	-

### 3. OPTIMALIZACJA LINIOWA

Do rozwiązania przedstawionego zadania optymalizacyjnego wykorzystano moduł Solver, arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel. Wyznaczenie decyzji optymalnej w ujęciu matematycznym sprowadza się do wyznaczenia wektora  $x [x_1 \ x_2]$ , stanowiącego rozwiązanie zadania, w którym funkcja celu przyjmuje postać:

$$f(x) = 520 \cdot x_1 + 310 \cdot x_2 \rightarrow \max, \quad (3)$$

oraz warunków ograniczających:

$$\left. \begin{aligned} (W1): \quad & 20 \cdot x_1 + 35 \cdot x_2 \leq 350 \quad (\text{co do zasobów masy żywicy}), \\ (W2): \quad & 3 \cdot x_1 + 1,8 \cdot x_2 \leq 7 \quad (\text{co do zasobów czasu pracy mieszarki}), \\ (W3): \quad & 120 \cdot x_1 + 210 \cdot x_2 \geq 500 \quad (\text{co do warunków płacowych}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Jak widać, jest to zadanie optymalizacji liniowej, gdyż funkcja celu (3) oraz zapisane w nim ograniczenia definiujące zbiór decyzji dopuszczalnych (4) są wyrażeniami typu liniowego zmiennych decyzyjnych  $x_1$  i  $x_2$  [2].

Fragment arkusza kalkulacyjnego z wprowadzonymi danymi określającymi funkcję celu (B3:C3), optymalną ilością produkowanych mas (w początkowej fazie przyjmuje się wartości zerowe – B5:C5), całkowitym zyskiem z produkcji mas (D5) oraz zdefiniowanymi warunkami ograniczającymi przedstawiono na rysunku 1.

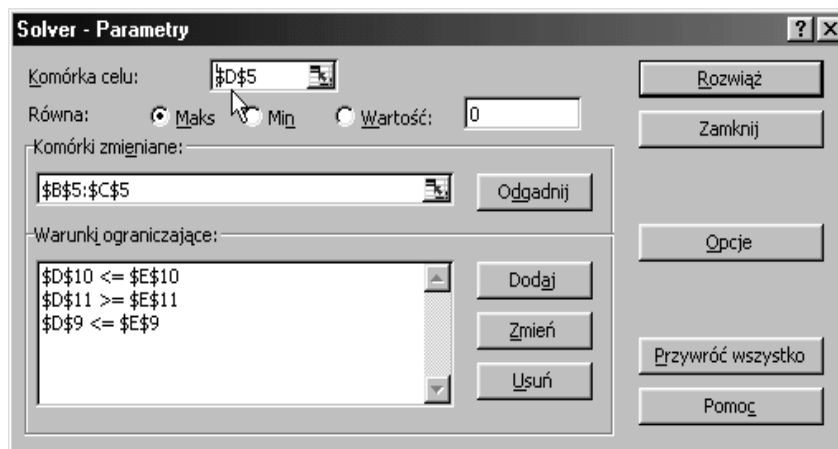
Następnie, z menu *Narzędzia* wybrano opcje *Solver* i wypełniono okno dialogowe *Solver-Parametry*. Jak wynika z zależności (3), komórce celu ( $\$D\$5$ ) przypisano wartość maksymalną, zdefiniowano komórki zmiennych decyzyjnych ( $\$B\$5:\$C\$5$ ) oraz zgodnie z zależnością (4) wprowadzono warunki ograniczające.

Okno dialogowe *Solver – Parametry* przedstawiono na rysunku 2.

W celu wyznaczenia zbioru decyzji dopuszczalnych, należy uruchomić okno dialogowe *Solver-Opcje* (wybierając przycisk *Opcje*), zadeklarować liniowość zadania optymalizacyjnego i nieujemność komórek zmienianych decyzyjnych – gdyż z założenia odrzucamy wszystkie ujemne rozwiązania.

D5	=SUMA.ILOCZYNÓW(\$B\$5:\$C\$5;B3:C3)				
	A	B	C	D	E
1	Optymalny wybór asortymentu produkcji:				
2					
3	<b>FUNKCJA CELU</b>	<b>520</b>	<b>310</b>	<b>CAŁKOWITY</b>	
4	ZMIENNE	x1	x2	<b>ZYSK</b>	
5	ILOŚĆ	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	
6					
7	WARUNKI	Współczynniki		WARUNEK	
8	OGRANICZAJĄCE			L. STRONA	P. STRONA
9	(W1)	20	35	<b>0</b>	<b>350</b>
10	(W2)	3	1,8	<b>0</b>	<b>7</b>
11	(W3)	120	210	<b>0</b>	<b>500</b>
12					

Rys.1. Funkcja celu i zdefiniowane warunki ograniczające.  
Fig.1. Function aim and defined restrictive conditions.



Rys.2. Okno dialogowe Solver – Parametry.  
Fig.2. Window dialogue Solver – Parameters.

Obliczenia kończą się w momencie pojawienia się okna dialogowego *Solver-Wyniki*, które pozwala na generowanie trzech raportów (*Wyników*, *Wrażliwości i Granic*) oraz na przechowanie rozwiązania lub przywrócenia wartości początkowych. Rozwiązanie zadania optymalnego wyboru asortymentu produkcji zakładu odlewniczego przedstawia rysunek 3.

Te same wyniki można zobaczyć w pierwszym z możliwych raportów, tzw. *Raporcie Wyników*, co ilustruje rysunek 4.

D5 =SUMA.ILOCZYNÓW(B5:C5;B3:C3)

	A	B	C	D	E
1	<i>Optymalny wybór asortymentu produkcji:</i>				
2					
3	<b>FUNKCJA CELU</b>	<b>520</b>	<b>310</b>	<b>CAŁKOWITY</b>	
4	ZMIENNE	x1	x2	<b>ZYSK</b>	
5	ILOŚĆ	<b>1,377</b>	<b>1,594</b>	<b>1 210,1 zł</b>	
6					
7	WARUNKI			WARUNEK	
8	OGRANICZAJĄCE	Współczynniki		L. STRONA	P. STRONA
9	(W1)	20	35	<b>83,33</b>	<b>350</b>
10	(W2)	3	1,8	<b>7</b>	<b>7</b>
11	(W3)	120	210	<b>500</b>	<b>500</b>

Rys.3. Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego.

Fig.3. Solution of assignment optimisation.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Microsoft Excel 9.0 Raport wyników</b>						
2	<b>Arkusz: [log_cw2a.xls]Arkusz1</b>						
3	<b>Raport utworzony: 02-02-14 10:46:51</b>						
4	Komórka celu (Maks)						
5	<b>Komórka</b>	<b>Nazwa</b>	<b>Wartość początkowa</b>	<b>Wartość końcowa</b>			
6	\$D\$5	Zysk: zysk	0	<b>1210,145</b>			
7	Komórki decyzyjne						
8	<b>Komórka</b>	<b>Nazwa</b>	<b>Wartość początkowa</b>	<b>Wartość końcowa</b>			
9	\$B\$5	Zysk: x1 (Masa 1)	0	<b>1,377</b>			
10	\$C\$5	Zysk: x2 (Masa 2)	0	<b>1,594</b>			
11	Warunki ograniczające						
12	<b>Komórka</b>	<b>Nazwa</b>	<b>Wartość komórki</b>	<b>formuła</b>	<b>Status</b>	<b>Luz</b>	
13	\$D\$9	(W1) Lewa strona	<b>83,33</b>	\$D\$9<=\$E\$9	<b>Nie wiążące</b>	<b>266,67</b>	
14	\$D\$10	(W2) Lewa strona	<b>7</b>	\$D\$10<=\$E\$10	<b>Wiążące</b>	<b>0</b>	
15	\$D\$11	(W3) Lewa strona	<b>500</b>	\$D\$11>=\$E\$11	<b>Wiążące</b>	<b>0</b>	

Rys.4. Raport Wyników.

Fig.4. The report of Results.

W raporcie tym z bloku *Komórka celu (Maks)* wynika, że, przy danych warunkach ograniczających, maksymalny zysk wyniesie około 1210 zł. Osiągnięcie tego celu jest możliwe po wyprodukowaniu 1,377 jednostki produkcyjnej Masy1 (tzn. 137,7 kg) oraz 1,594 jednostki produkcyjnej Masy2 (tzn. 159,4 kg). Z ostatniego bloku komórek *Raportu wyników* wynika, że warunki ograniczające dotyczące zasobów czasu pracy mieszarki (W2) i warunków płacowych (W3) są *napięte (wiążące)* przy decyzji optymalnej, natomiast warunek ograniczający (W1) dotyczący zasobów masy żywicy jest *luźny (nie wiążący)* przy decyzji optymalnej.

Na tej podstawie można stwierdzić, że przy optymalnym planie produkcji w całości wykorzystana jest dostępna ilość czasu pracy mieszarki (ograniczenie typu  $\leq$  i z tego powodu luz dla drugiego warunku wynosi 0), natomiast wynagrodzenia za pracę dla decyzji optymalnej ustali się na poziomie minimalnym (ograniczenie typu  $\geq$  i z tego powodu luz dla trzeciego warunku wynosi 0). Wartość (po zaokrągleniu) 266,67 dla pierwszego warunku ograniczającego informuje, że po wykonaniu optymalnego planu produkcji pozostanie około 266,67 kg niewykorzystanej żywicy formaldehydowej (350-83,33).

#### 4. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI DECYZJI OPTIMALNEJ

Moduł *Solver*, po rozwiązaniu zadania optymalizacji liniowej nie ogranicza się wyłącznie do przedstawienia w *Raporcie Wyników* decyzji optymalnej i optymalnej wartości funkcji celu. Uzyskane rezultaty można uzupełnić o posilkowe informacje przyjętego rozwiązania optymalnego (w *Raporcie Wyników*), dotyczące np. wyszczególnienia napiętych i luźnych warunków ograniczających.

Dodatkowy zestaw informacji o decyzji optymalnej dotyczy jej wrażliwości na zmiany parametrów modelu i jest zawarty w *Raporcie Wrażliwości*. Dla obu zmiennych decyzyjnych *Przyrost krańcowy* jest równy zero, co oznacza, że nie można brać pod uwagę jakiegokolwiek zmiany dodatnich wartości zmiennych decyzyjnych.

Jest to jednoznaczne z informacją, że wyznaczona decyzja optymalna jest jedyną decyzją optymalną w rozpatrywanym przykładzie (rys.5).

A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 9.0 Raport wrażliwości						
2	Arkusz: [log_cw2a.xls]Arkusz1						
3	Raport utworzony: 02-02-14 10:46:51						
4	Komórki decyzyjne						
5			<b>Wartość</b>	<b>Przyrost</b>	<b>Współczynnik</b>	<b>Dopuszczalny</b>	<b>Dopuszczalny</b>
6	<b>Komórka</b>	<b>Nazwa</b>	<b>końcowa</b>	<b>krańcowy</b>	<b>funkcji celu</b>	<b>wzrost</b>	<b>spadek</b>
7	\$B\$5	Zysk: x1 (Masa 1)	1,377	0	520	1E+30	3,33
8	\$C\$5	Zysk: x2 (Masa 2)	1,594	0	310	2	1E+30
10	Warunki ograniczające						
11			<b>Wartość</b>	<b>Cena</b>	<b>Prawa strona</b>	<b>Dopuszczalny</b>	<b>Dopuszczalny</b>
12	<b>Komórka</b>	<b>Nazwa</b>	<b>końcowa</b>	<b>dualna</b>	<b>w. o.</b>	<b>wzrost</b>	<b>spadek</b>
13	\$D\$9	(W1) Lewa strona	83,33	0	350	1E+30	266,67
14	\$D\$10	(W2) Lewa strona	7	173,91	7	5,5	2,71
15	\$D\$11	(W3) Lewa strona	500	-0,01	500	316,67	220

Rys.5. Raport Wrażliwości.  
Fig.5. Report of sensibility.

Liczby w kolumnach *Dopuszczalny wzrost* i *Dopuszczalny spadek* w bloku informacyjnym *Komórki decyzyjne*, określają zakresy stabilności decyzji optymalnej względem zmian wartości poszczególnych *współczynników funkcji celu*, gdy wartości innych pozostaną bez zmian.

Tak więc, jeśli chodzi o wartości odpowiadające zmiennej  $x_1$  to okazuje się, że jeśli jej współczynnik (wynoszący 520, który jest zyskiem z produkcji 100 kg Masy1) zmniejszy się o nie więcej niż 3,33 zł (czyli obniży się co najwyżej do wartości 516,67 zł), to nie spowoduje to zmiany decyzji optymalnej, (przy nie zmienionym zysku z produkcji 100 kg Masy2 wynoszącym 310 zł). Zmiana decyzji optymalnej nie nastąpi również wówczas, gdy zysk ze sprzedaży Masy1 wrośnie o dowolną dodatnią wartość (w notacji naukowej *Solver* określił ją na poziomie  $10^{30}$ ), co w rzeczywistości oznacza brak ograniczenia z góry.

Podobne informacje dotyczące produkcji Masy2, zawiera wiersz raportu komórek decyzyjnych przyporządkowany zmiennej  $x_2$ , z którego można wnioskować, że nawet spadek wartości zysku ze sprzedaży 100 kg Masy2 z kwoty 310 zł o dowolnie dużą wartość, (przy stałym zysku ze sprzedaży 100 kg Masy1 wynoszącym 520 zł) nie doprowadzi do zmiany decyzji optymalnej. Decyzji tej nie zmieni również wzrost zysku ze sprzedaży 100 kg Masy2 o kwotę 2 zł, to znaczy do wartości 312 zł/100 kg.

Druga część *raportu wrażliwości* zawiera dane dotyczące stabilności decyzji optymalnej względem zmian wyrazów wolnych z warunków ograniczających. W kolumnie *Wartość końcowa*, *Solver* podaje ponownie liczby lewych stron warunków ograniczających otrzymane dla optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. Tu również istnieje możliwość sprawdzenia warunku poprzez porównanie *Wartości końcowej* z *Prawą stroną w.o.* W raporcie wrażliwości mamy jednak jeszcze inną możliwą interpretację bilansu wartości lewej i prawej strony każdego z warunków ograniczających przy uzyskanej decyzji optymalnej, na co pozwala, tzw. *Cena dualna* wyrazów wolnych.

Pierwszy warunek ograniczający, (dotyczący zasobów masy żywicy) jest luźny przy decyzji optymalnej. Zasoby żywicy formaldehydowej przeznaczonej do produkcji mas (350 kg) nie zostały w całości wykorzystane. Można zauważyć, że zwiększanie podaży żywicy ponad 350 kg nie wpłynie na zmianę wielkości produkcji, czyli na zmianę łącznego zysku. Bezpośrednio informuje o tym zerowa wartość ceny dualnej wyrazu wolnego w pierwszym warunku ograniczającym.

Drugi warunek ograniczający, (odnośnie zasobów czasu pracy mieszarki) jest napięty przy decyzji optymalnej, co oznacza, że dostępny czas pracy mieszarki do produkcji piasku otaczanego (7 h) jest wykorzystany w całości. Gdyby jednak udało się ten czas zwiększyć o godzinę (jednostkę), nie zmieniając jednocześnie ani zasobów żywicy, ani minimalnej kwoty przeznaczonej na płace robotników, to wtedy optymalny plan produkcji Masy1 i Masy2 zapewniałby łączny zysk o 173,91 zł. większy od maksymalnego zysku 1210,14 zł, osiąganego bez wydłużania czasu pracy mieszarki.

Trzeci warunek ograniczający jest również napięty przy decyzji optymalnej. Pracownicy produkujący piaski otaczane zarobią łącznie 500 zł, czyli minimalną kwotę (prawa strona tego warunku to właśnie 500 zł) przeznaczoną na opłacenie robocizny.

Cena dualna wyrazu wolnego w trzecim warunku ograniczającym jest ujemna i wynosi  $-0,01$ . Oznacza to, że zwiększenie kosztów robocizny o 1 zł (jednostkę) bez zmiany czasu pracy mieszarki i zmiany zasobów żywicy spowoduje zmniejszenie łącznego zysku netto tylko o 0,01 zł.

Informacje zawarte w kolumnach *Dopuszczalny wzrost* oraz *Dopuszczalny spadek* w drugiej części *Raportu Wrażliwości* dotyczą zmian wyrazów wolnych, które nie zmieniają zestawu dodatnich zmiennych w decyzji optymalnej, choć ich dodatnie wartości będą ulegać zmianom. Zmniejszenie dostępnego zasobu żywicy o mniej niż 266,67 (do dolnej wartości krytycznej 83,33 kg) albo jej zwiększenie o dowolną wielkość nie spowoduje żadnych zmian w wielkości produkcji obu rodzajów mas (warunek ten jest luźny). Zależność ta jest słuszna wówczas, gdy czas pracy mieszarki nie zmniejszy się więcej niż o 2,71 godz. do dolnej wartości krytycznej równej 4,29 h, (7,0-2,71), albo nie zwiększy się więcej niż o 5,5 godz. do górnej wartości krytycznej równej 12,5 h (7,0+5,5). Wtedy, optymalny plan realizacji będzie nadal oparty na produkcji obu rodzajów mas, przy kosztach robocizny, będących w granicach od 280 zł (500-220) do 816,67 zł (500+316,67), a produkcja w odpowiednich ilościach przyniesie maksymalny łączny zysk od 1205,56 zł. (przy kosztach robocizny 816,67 zł), do 1211,88 zł. (przy kosztach robocizny 380 zł).



Trzecim możliwym do uzyskania raportem po zastosowaniu modułu Solver jest *Raport granic*, przedstawiony na rysunku 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 9.0 Raport granic									
2	Arkusz: [log_cw2a.xls]Arkusz1									
3	Raport utworzony: 02-02-14 10:46:51									
4	<b>Cel</b>									
5	<b>Komórka</b>	<b>Nazwa</b>	<b>końcowa</b>							
6	\$D\$5	Zysk: zysk	1210,145							
8	<b>Zmienne decyzyjne</b>			<b>Dolna</b>	<b>Cel</b>	<b>Górna</b>	<b>Cel</b>			
9	<b>Komórka</b>	<b>Nazwa</b>	<b>końcowa</b>	<b>granica</b>	<b>Wynik</b>	<b>granica</b>	<b>Wynik</b>			
10	\$B\$5	Zysk: x1 (Masa 1)	1,377	1,377	1210,145	1,377	1210,145			
11	\$C\$5	Zysk: x2 (Masa 2)	1,594	1,594	1210,145	1,594	1210,145			

Rys.6. Raport Granic.  
Fig.6. Report of limits.

Podaje on informację odnośnie dopuszczalnego zakresu zmian każdej ze zmiennych decyzyjnych, które osiągnęły wartość dodatnią, przy nie zmienionych wartościach pozostałych zmiennych. Z raportu tego wynika, że nie można zmieniać optymalnej wielkości produkcji obu rodzajów mas, bez jednoczesnego zachowania drugiej zmiennej decyzyjnej.

### LITERATURA

- [1] *Mała encyklopedia ekonomiczna*. PWN, Warszawa (1974).
- [2] K. Kukuła: *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. PWN, Warszawa (2001).
- [3] S. Abt: *Systemy logistyczne w gospodarowaniu*. Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań (1997).

**ANALYSIS SENSIBILITY OF THE OPTIMUM CHOICE  
OF ASSORTMENT PRODUCTION OF FOUNDRY**

**SUMMARY**

From among different possibility effectively led process linear base of optimisation questions play decision front part on algorithm simplex. It is this one from methods of investigations operating depending on opinion of sensibility of optimum choice of assortment of production of chooses metal institution.

Article defines that is executive profiles of foundry, which articles and in which one should quantities to produce, to not to cross possessed supplies of resources of production as well as to fulfil possible limitations of relate structure of executive possibility, at obtainment of maximum profit from them of sale.

Recenzował: prof. dr hab. inż. Stanisław Jura