

**OB LICZ AN IE N AM I A R U W S A D U M E T A L O W E G O
Z W Y K O R Z Y S T A N I E M A L G O R Y T M U S I M P L E K S**J. PIĄTKOWSKI¹, J. SZYMSZAL², F. BINCZYK³Katedra Technologii Stopów Metali i Kompozytów, Politechnika Śląska,
ul. Krasińskiego 8, 40-019 Katowice, Polska

STRESZCZENIE

Uniwersalną metodą rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych z zastosowaniem programowania liniowego jest algorytm simpleks. Jest to nowoczesny sposób badań operacyjnych, polegający na poszukiwaniu kolejnych rozwiązań bazowych programowania liniowego w postaci kanonicznej. W pracy przedstawiono metodę wyznaczania namiaru wsadu metalowego opartą o optymalizację simpleks, pozwalającą na określenie położenia ekstremum funkcji wielu zmiennych. Obliczenia prowadzono na przykładzie nadeutektycznego siluminu AlSi17 z dodatkiem Cu, Ni i Mg.

Key words: simplex algorithm, Solver module, hypereutectic Al-Si alloys

1. WPROWADZENIE

Postępująca komputeryzacja wspomagająca zarządzanie oraz towarzyszące tym procesom doskonalenie technik i technologii produkcyjnych, powinny się przyczynić do usprawniania procesu technologicznego na każdym jego odcinku. Wiąże się to między innymi z wprowadzaniem nowych systemów matematyczno-logistycznych, w których istotną rolę odgrywają badania operacyjne, bazujące na programowaniu liniowym [1]. Uniwersalną metodą rozwiązywania zadań programowania liniowego jest algorytm simpleks [2], jako procedura iteracyjna, pozwalająca na rozwiązywanie zagadnień optymalizacyjnych. Jednym z przykładów badań operacyjnych jest tzw. problem mieszanek [3].

¹ dr inż,

² dr inż

³ dr hab. inż. - prof. Pol. Śl.

W zagadnieniach optymalnego doboru składu mieszanek należy określić, jakie ilości podstawowych surowców trzeba użyć (zmieszać), aby w końcowym etapie otrzymać produkt o wymaganym składzie chemicznym, przy możliwie najniższych kosztach zakupu surowców potrzebnych do jego wytworzenia.

Szczególnym wariantem problemu mieszanek może być obliczenie namiaru wsadowego w produkcji odlewniczej wraz z optymalizacją (minimalizacją) całkowitego kosztu jego wytworzenia.

Mając do dyspozycji „*n*” surowców (zapraw odlewniczych, czystych pierwiastków), w których jest zawarte „*k*” składników, problem mieszanek (namiaru wsadowego) sprowadza się do rozwiązania następującego zadania [3]:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \quad (1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + \dots + a_{kn} \cdot x_n = b_k; \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = p;$$

$$x_j \leq z_j \text{ dla niektórych } j,$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0.$$

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \min, \quad (3)$$

gdzie:

a_{ij} – zawartości *i-tego* składnika w jednostce *j-ego* surowca dla ($i=1, 2, \dots, k$; $j=1, 2, \dots, n$),

b_i – zawartości *i-tego* składnika w jednostce *j-ego* produktu czyli odlewanego stopu,

c_j – cena *j-ego* składnika w jednostce *j-ego* produktu czyli odlewanego stopu.

x_j – wielkości (udziały) *j-ego* surowca dla $j=1, 2, \dots, n$,

z_j – posiadany zapas surowca do produkcji stopu.

W konkretnych przypadkach mogą dochodzić jeszcze warunki ograniczające wynikające np.: z pojemności tygla pieca „*p*”, rezerw magazynowych *j-ego* surowca, powszechności zastosowania materiałów wsadowych, zdolności przetwórczych urządzeń, itd.

2. CEL I ZAKRES PRACY

Obliczenie namiaru wsadu metalowego stopu odlewniczego sprowadza się do wyznaczenia wielkości poszczególnych surowców, które zapewnią uzyskanie wymaganego składu chemicznego stopu. Należy też pamiętać o ewentualnych dodatkowych ograniczeniach, wynikających z osobiście prowadzonego procesu technologicznego, (np.: pojemności tygla, zapasów magazynowych, czy ograniczeń przerobczych urządzeń), z równoczesnym zminimalizowaniem całkowitego kosztu obliczonego namiaru wsadowego.

Celem pracy był dobór materiałów wsadowych, które zapewnią uzyskanie wymaganego składu chemicznego stopu odlewniczego przy jego minimalnej cenie produkcji.

3. METODYKA BADAWCZA

Ze względu na rosnące zainteresowanie między innymi przemysłu motoryzacyjnego na odlewy ze stopów układu Al-Si, do badań wytypowano nadeutektyczny silumin AlSi o zawartości ~17%wag. Si, ~3%wag. Cu, ~1%wag. Mg i ~1%wag. Ni. Założony skład chemiczny badanego stopu z przeliczeniem na udziały masowe w kilogramach przedstawiono w tabeli 1. Przyjęto, że zakład odlewniczy dysponuje piecem indukcyjnym o pojemności tygla 75 l, co zapewnia topienie 200 kg stopów Al-Si.

Tabela 1. Założony skład chemiczny badanego siluminu
Table 1. Chemical composition of Al-Si alloy

Pierwiastek	Zawartość [%]	Zawartość [kg]
Si	17	34,0
Cu	3	6,0
Mg	1	2,0
Ni	1	2,0
Al (reszta)	78	156,0
RAZEM	100	200,0

Do przeprowadzenia wytopu wykorzystano następujące składniki wsadowe: stopy wstępne i zaprawy: AlCu64Z, AlNi25, AlNi10, AlSi12, AG10 oraz: Al, Si i Cu. Nazwy materiałów wsadowych, ich skład chemiczny i cenę przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Skład chemiczny i cena materiałów wsadowych
Table 2. Chemical composition and value of add material

Nazwa	Cu	Mg	Si	Ni	Al (reszta)*	cena 1 [kg/zł]**
AlCu64Z	60%				40%	14
AlNi25				25%	75%	29
AlNi10				10%	90%	19
AlSi12			12%		88%	11
AG10		10%	1%		89%	12
Al					100%	9
Si			100%		0%	5
Cu	100%				0%	13

*- na podstawie Poradnika Inżyniera, tom I „Odlewnictwo”, WNT, Warszawa, 1986

** - Instrukcje branżowe, atesty i cenniki IMN, Katowice, 1998

Po ustaleniu danych, związanych ze składem chemicznym [4] i cenami jednostkowymi surowców wykorzystanych do produkcji stopu, przystąpiono do sformułowania zadania optymalizacyjnego obliczenia namiaru wsadu metalowego.

4. OPTIMALIZACJA LINIOWA Z WYKORZYSTANIEM ALGORYTMU SIMPLEKS

Zagadnienia programowania liniowego można rozwiązywać w oparciu o profesjonalne programy komputerowe, jak również przy pomocy wyspecjalizowanego modułu arkusza kalkulacyjnego Excel-Solver [5]. W tym celu, w oparciu o model matematyczny przedstawiony we wprowadzeniu, wyznaczono funkcję celu, zmierzającą do minimum, która ma postać:

$$Masa_{AlCu64Z} \times c.j._{AlCu64Z} + Masa_{AlNi25} \times c.j._{AlNi25} + Masa_{AlNi10} \times c.j._{AlNi10} + Masa_{AlSi12} \times c.j._{AlSi12} + Masa_{AG10} \times c.j._{AG10} + Masa_{Al} \times c.j._{Al} + Masa_{Si} \times c.j._{Si} + Masa_{Cu} \times c.j._{Cu} \rightarrow \min,$$

gdzie:

$c.j.$ – cena jednostkowa danego surowca.

Dysponując masą poszczególnych składników wsadowych oraz ich cenami jednostkowymi, zdefiniowaną funkcję celu wprowadzono do arkusza kalkulacyjnego Excel, co przedstawiono na rysunku 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	CENA	14 zł	29 zł	19 zł	11 zł	12 zł	9 zł	5 zł	13 zł	KOMÓRKA
2	NAZWA	AlCu64Z	AlNi25	AlNi10	AlSi12	AG10	Al	Si	Cu	CELU
3	F. CELU	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4										

Rys.1. Funkcja celu obliczenia namiaru wsadu stopu odlewniczego.

Fig.1. Aim function of calculation of bearing batch of casting alloy.

Na uwagę zasługuje fakt, iż w początkowej fazie, zmienne decyzyjne funkcji celu przyjmują wartość zero, natomiast do obliczenia komórki celu ($J3$) wykorzystano funkcję matematyczną [=SUMA.ILOCZYŃÓW(B1:I1;B3:I3)].

Pierwszy argument tej funkcji stanowi blok komórek B1:I1, który zawiera ceny jednostkowe poszczególnych surowców wykorzystywanych do wytopu, natomiast drugi z nich B3:I3 stanowi wartości komórek decyzyjnych, czyli optymalizowaną masę poszczególnych pierwiastków i zapraw stopowych.

W kolejnym etapie zdefiniowano warunki ograniczające (W). Główne warunki ograniczające wynikają z pojemności tygla (200 kg) oraz zawartości w stopie poszczególnych pierwiastków (tabela 1).

W1: $Masa_{AlCu64Z} + Masa_{AlNi25} + Masa_{AlNi10} + Masa_{AlSi12} + Masa_{AG10} + Masa_{Al} + Masa_{Si} + Masa_{Cu} = 200$ [kg] - warunek dotyczący pojemności tygla,

W2: $Masa_{Al} = 156$ [kg] - warunek dotyczący zawartości Al,

- W3: $Masa_{Si} = 34$ [kg] - warunek dotyczący zawartości Si,
 W4: $Masa_{Cu} = 6$ [kg] - warunek dotyczący zawartości Cu,
 W5: $Masa_{Mg} = 2$ [kg] - warunek dotyczący zawartości Mg,
 W6: $Masa_{Ni} = 2$ [kg] -warunek dotyczący zawartości Ni.

Celem podwyższenia stopnia trudności rozpatrywanego zagadnienia optymalizacyjnego, wprowadzono dodatkowe warunki ograniczające, wynikające z braku rezerw magazynowych. Okazuje się bowiem, że zapas krzemu wynosi tylko 20 kg, a zapas miedzi tylko 10 kg. W związku z tym zdefiniowano kolejne dwa warunki ograniczające:

- W7: $Masa_{Si} \leq 20$ [kg] - warunek dotyczący ograniczonej ilości zapasu krzemu,
 W8: $Masa_{Cu} \leq 10$ [kg] - warunek dotyczący ograniczonej ilości zapasu miedzi.

Tak scharakteryzowane warunki ograniczające wprowadzono do arkusza kalkulacyjnego oraz zdefiniowano ich prawe i lewe strony.

W komórce J7 wpisano formułę dotyczącą pierwszego z warunków ograniczających odnoszącego się do pojemności tygla (200 kg). Formuła ta pozwoli na zsumowanie masy wszystkich surowców biorących udział w wytopie, czyli [=SUMA (B3:I3)]. Jest to lewa strona elementarnego warunku ograniczającego. Do komórki K7 wprowadzono wartość prawej strony tego warunku – czyli 200 [kg]. Warunek ten nazwano w komórce A7 „Pojemność tygla”.

Do bloku komórek B8:I8 wprowadzono udziały procentowe Al w poszczególnych surowcach, a w komórce J8 lewą stronę elementarnego warunku ograniczającego [=SUMA. ILOCZYNÓW(\$B\$3:\$I\$3;B8:I8)] gdyż:

$$Masa_{AlCu64Z} \times udział\ \%_{Al} + Masa_{AlNi25} \times udział\ \%_{Al} + Masa_{AlNi10} \times udział\ \%_{Al} + Masa_{AlSi12} \times udział\ \%_{Al} + Masa_{AG10} \times udział\ \%_{Al} + Masa\ Al \times udział\ \%_{Al} + Masa\ Si \times udział\ \%_{Al} + Masa\ Cu \times udział\ \%_{Al} = 156 \text{ [kg]}$$

gdzie:

$Masa_n$ – masa poszczególnych składników wsadowych,
 $udział\ \%_{Al}$ – procentowy udział Al w danym surowcu.

Warunek ten nazwano w komórce A8 „kg Al”. Pierwszy argument tej funkcji, to blok komórek B3:I3, czyli zawartość komórek decyzyjnych, określający udziały masowe w namiarze wsadowym poszczególnych surowców, a drugi (B8:I8), to udział procentowy aluminium w poszczególnych surowcach wykorzystywanych do wytopu.

Adresy pierwszego bloku mają charakter bezwzględny (absolutny), gdyż w kolejnym etapie zawartość komórki J8 zostanie skopiowana do bloku komórek J9:J14. Podobnie wprowadzono kolejne warunki ograniczające, dotyczące ilości krzemu, miedzi, magnezu oraz niklu.

Następnie, w komórce A13 i A14 wprowadzono dodatkowe warunki ograniczające, dotyczące rezerw magazynowych odnośnie ilości krzemu [TYLKO 20 kg Si] i ilości

miedzi [TYLKO 10 kg Cu]. Do bloku komórek K8:K12 wprowadzono odpowiednie wartości prawych stron warunków ograniczających, wynikających z obliczonej ilości materiałów wsadowych (tabl.1). Natomiast prawe strony dwóch ostatnich warunków ograniczających stanowią wartość 20 [kg] i 10 [kg]. Tak wypełniony blok komórek warunków ograniczających z ich lewymi oraz prawymi stronami przedstawiono na rysunku 2.

=SUMA.ILOCZYNOWY(\$B\$3:\$I\$3;B8:I8)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
4											
5	DEFINIOWANIE WARUNKÓW OGRANICZAJĄCYCH:										
6	W. OGR.	AlCu64Z	AlNi25	AlNi10	AlSi12	AlG10	Al	Si	Cu	L. STRONA	P. STRONA
7	P-ŚĆ TYGLA	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	200,0
8	kg Al	40%	75%	90%	88%	89%	100%	0%	0%	0,0	156,0
9	kg Si				12%	1%		100%		0,0	34,0
10	kg Cu	60%							100%	0,0	6,0
11	kg Mg					10%				0,0	2,0
12	kg Ni		25%	10%						0,0	2,0
13	TYLKO 20 kg Si							1		0,0	20,0
14	TYLKO 10 kg Cu								1	0,0	10,0
15											

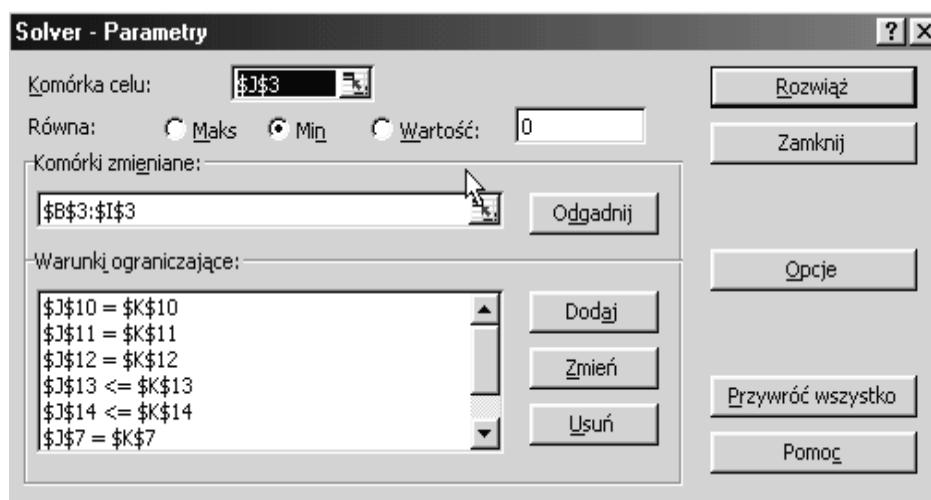
Rys.2. Zdefiniowane warunki ograniczające.

Fig.2. Defined restrictive conditions.

Następnie, w celu rozwiązania zadania optymalizacyjnego namiaru wsadu metalowego stopu odlewniczego z menu *NARZĘDZIA* wybrano moduł *SOLVER*. W pierwszej kolejności w oknie *Solver - Parametry* ustalono położenie komórki funkcji celu (*J3*), która ze względu na cel zadania optymalizacyjnego ma przyjmować wartość minimalną (koszt namiaru wsadu powinien być możliwie jak najmniejszy).

W kolejnym etapie, określono blok jednostek zmiennych decyzyjnych (komórek, w których zostaje obliczona masa poszczególnych składników wsadowych zadania optymalizacyjnego – B3:I3).

Na zakończenie wprowadzono zdefiniowane wcześniej warunki ograniczające. Okno dialogowe Solver-Parametry przedstawiono na rysunku 3.



Rys.3. Okno dialogowe Solver-Parametry.

Fig.3. Window dialogue Solver-Parameters.

Przed rozwiązaniem należy zadeklarować liniowość zadania optymalizacyjnego oraz nieujemność zmiennych decyzyjnych. Obliczenia kończą się w momencie pojawienia okna dialogowego *Solver-Wyniki*, wypełnienia bloku komórek zmiennych decyzyjnych funkcji celu oraz lewych stron warunków ograniczających, co ilustruje rysunek 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	CENA	14 zł	29 zł	19 zł	11 zł	12 zł	9 zł	5 zł	13 zł	KOMÓRKA	
2	NAZWA	AlCu64Z	AlNi25	AlNi10	AlSi12	AG10	Al	Si	Cu	CELU	
3	F. CELU	0	8	0	115	20	31	20	6	2 194,00 zł	
4											
5	DEFINIOWANIE WARUNKÓW OGRANICZAJĄCYCH:										
6	W. OGR.	AlCu64Z	AlNi25	AlNi10	AlSi12	AG10	Al	Si	Cu	L. STRONA	P. STRONA
7	P-ŚĆ TYGLA	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	200 [kg]	200 [kg]
8	kg Al	40%	75%	90%	88%	89%	100%	0%	0%	156 [kg]	156 [kg]
9	kg Si				12%	1%		100%		34 [kg]	34 [kg]
10	kg Cu	60%							100%	6 [kg]	6 [kg]
11	kg Mg					10%				2 [kg]	2 [kg]
12	kg Ni		25%	10%						2 [kg]	2 [kg]
13	TYLKO 20 kg Si							1		20 [kg]	20 [kg]
14	TYLKO 10 kg Cu								1	6 [kg]	10 [kg]
15											

Rys.4. Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego.
Fig.4. Solution of assignment optimisation.

5. PODSUMOWANIE

Z uzyskanego rozwiązania optymalizacyjnego wynika, że aby zapewnić wymagany skład chemiczny wytapianego stopu odlewniczego AlSi17Cu3NiMg oraz zminimalizować cenę namiaru jego wsadu należy użyć:

- 8 [kg] zaprawy AlNi25,
- 115 [kg] stopu AlSi12,
- 20 [kg] stopu AG10,
- 31 [kg] aluminium,
- 20 [kg] krzemu,
- 6 [kg] miedzi.

Na uwagę zasługuje fakt, iż można zrezygnować z zaprawy AlCu64Z, na rzecz miedzi w postaci czystej i zrezygnować z zaprawy AlNi10, a cały potrzebny nikiel wprowadzić w zaprawie AlNi25.

Wszystkie dodatki potrzebne do otrzymania wymaganego siluminu są w ilościach całkowitych, co niewątpliwie ułatwia i skraca proces przygotowania materiałów wsadowych. Analizując uzyskane rozwiązanie widać, że wszystkie warunki ograniczające zostały spełnione. Minimalny koszt potrzebny do wykonania 200 [kg] namiaru wsadu metalowego stopu AlSi17Cu3NiMg wynosi 2194 zł. Siedem pierwszych warunków

ograniczających rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego jest napiętych (wiązących), co oznacza, że podane przez Solver rozwiązanie jest jedyne przy decyzji optymalnej. Na uwagę zasługuje ostatni (W8) z tzw. dodatkowych warunków ograniczających, dotyczący rezerw magazynowych miedzi. Okazuje się bowiem, iż z 10 kilogramów zapasu Cu, do wytworzenia 200 [kg] stopu AlSi17Cu3NiMg, przy minimalnym koszcie jego wytworzenia, wystarczy zużyć jedynie 6 [kg] miedzi. W związku z tym, że ostatni warunek ograniczający ma charakter nie wiążący (luźny), do wykonania optymalnego planu namiaru wsadu metalowego pozostanie 4 [kg] nie wykorzystanej miedzi. Ostatnim etapem obliczeń namiaru wsadu powinno być uwzględnienie wielkości zgaru zależnego od rodzaju pieca odlewniczego oraz ilość zanieczyszczeń występujących w materiałach wsadowych. Jednakże, w zagadnieniach optymalizacyjnych, zarówno zanieczyszczenia jak i zgar, są tak mało istotnymi czynnikami, że pominięcie ich nie wpłynie znacząco na zmianę optymalizowanych cech wynikowych zmiennych decyzyjnych.

Jak wynika z przedstawionej metody wyznaczania namiaru wsadu nowoczesnymi metodami optymalizacyjnymi, zamiast korzystać ze specjalistycznych pakietów informatycznych, można używać bardzo popularnych arkuszy kalkulacyjnych, wyposażonych w podstawowe narzędzia analizy statystycznej. Sposób określenia wsadu metalowego przedstawiony na przykładzie stopu układu Al-Si z dodatkiem Cu, Ni i Mg, oprócz zalet typowo technologicznych, posiada również swoje uzasadnienie ekonomiczne. Biorąc pod uwagę obecne realia gospodarki rynkowej, poprawnie prowadzony proces technologiczny jak i jego stała kontrola na każdym odcinku produkcji może mieć kluczowe znaczenie podczas podejmowania trafnych decyzji menedżerskich i dawać przewagę nad tymi, którzy działają „na oślep”.

LITERATURA

- [1] Statistica v-5, *Poradnik użytkownika*, Wyd. StatSoft, Kraków 1995
- [2] Maliński M., Szymzal J.: *Współczesna statystyka matematyczna w medycynie w arkuszach kalkulacyjnych*, Wyd. Śląskiej Akademii Medycznej, Katowice 1999
- [3] Kukuła K. i inni: *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001
- [4] *Poradnik Inżyniera*, tom I „*Odlewnictwo*”, WNT, Warszawa 1986
- [5] Walkenbach J.: *Excel 2000*, Wydawnictwo RM, Warszawa 1999

CALCULATION OF BEARING OF METAL BATCH WITH UTILIZATION OF SIMPLEX ALGORITHM

SUMMARY

Simplex algorithm is universal method of dissolving of questions optimisation with utilization of linear programmes. It is this modern way of operating investigations, depending on search of next base solutions of linear programme in canonical form. In work metal leaning of marking of bearing of batch method was introduced about optimisation simplex, permitting onto qualification of position of extreme variable function. Calculation hypereutectic AlSi17 alloy with addition Cu, Ni and Mg alloys was led on example.

Recenzował: prof. dr hab. inż. Jerzy Mutwil