

NOWOCZESNE METODY ESTYMACJI NIEZAWODNOŚCI ODLEWÓW, NA PRZYKŁADZIE STOPU AlSi17Cu3Mg

J. SZYMSZAL¹, A. GIEREK², J. PIĄTKOWSKI³
Katedra Technologii Stopów Metali i Kompozytów, Politechnika Śląska,
ul. Krasińskiego 8, 40-019 Katowice, POLSKA.

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono metodę statystycznej analizy wyników badań wytrzymałościowych pod kątem określenia dopuszczalnego ryzyka (prawdopodobieństwa przetrwania), a szczególnie jego miary jakości, którą może być współczynnik Weibulla na przykładzie nadeutektycznych stopów układu Al-Si.

Key words: cast reliability, statistical analyses, Weibulls modulus, silumin

1. WSTĘP

W ostatnich latach – wraz z rozwojem techniki komputerowej – opracowano szereg specjalistycznych programów statystycznych, za pomocą których można dokonać bardzo dokładnej oceny wyników badań. Programy te charakteryzują się jednak dość skomplikowaną obsługą, a interpretacja uzyskanych wyników nie należy do prostych [1]. Oprócz drogich, specjalistycznych pakietów statystycznych, do których zalicza się populamy na polskim rynku pakiet STATISTICA firmy StatSOFT, możemy również z powodzeniem wykorzystywać popularne arkusze kalkulacyjne, w tym głównie Excel firmy Microsoft i Quattro-Pro firmy Borland [2].

Przykład oceny statystycznej wyników badań wytrzymałościowych pod kątem określenia dopuszczalnego ryzyka (prawdopodobieństwa przetrwania), oparto na wynikach badań odlewniczych stopów nadeutektycznych układu Al-Si do obróbki cieplnej, które znajdują coraz większe zastosowanie jako tworzywa konstrukcyjne dla motoryzacji [3, 4]. Charakteryzują się one jednak obok szeregu cennych właściwości,

¹ dr inż. – adiunkt,

² prof. zw. dr hab. inż. – profesor,

³ dr inż. – adiunkt.

takich jak wysoka twardość i wytrzymałość (dochodząca do 200MPa), dobra udarność, względnie niska plastyczność, która powoduje, że łatwo ulegają one kruchemu pękaniu przy obciążeniach niższych od granicy plastyczności. Stwierdzono, że jest to wynikiem obecności wewnętrznych wad (karbów strukturalnych), charakterystycznych dla tworzyw odlewanych, przy czym na charakter tych wad (ich wielkość, ilość, kształt i rozłożenie) mają niewątpliwie wpływ warunki krystalizacji pierwotnej, a w tym wpływ modyfikacji, jak również późniejsza obróbka cieplna.

Celem badań jest szczegółowe przedstawienie metodyki wyznaczenia funkcji rozkładu Weibulla dla tworzywa odlanego ze stopu AlSi17Cu3Mg. Przy wyznaczeniu omawianego rozkładu posłużono się metodyką zaproponowaną przez M. Ashby i D. Jones'a [3]. Pragniemy podkreślić, że prawidłowe wyznaczenie modułu Weibulla ma duże praktyczne znaczenie i może być wykorzystane zarówno podczas projektowania konkretnego elementu maszyny lub urządzenia, jak również w analizie możliwości zamiany jednych tworzyw - innymi.

Prawidłowo przeprowadzona analiza statystyczna powinna stanowić ważny krok w praktycznym zastosowaniu projektowania elementów wykonanych z różnych materiałów, a szczególnie nowo opracowanych tworzyw odlewniczych, takich jak np. nadeutektyczne stopy Al-Si-Me.

2. METODYKA BADAŃ

Badaniom poddano silumin nadeutektyczny AlSi17 o zawartości ~17%wag. Si oraz ~3%wag. Cu i ~1%wag. Mg. Badania wytrzymałościowe prowadzono na maszynie typu Instron 4469. Badaniom poddano 117 identycznych próbek z siluminu odlanego w stanie surowym o średnicy 10 mm i długości 100mm. Próbkę te poddano działaniu naprężenia σ_i z wcześniej określonych przedziałów oraz wyznaczono liczbę próbek, które wytrzymują to naprężenie. Wartość tą podzielono przez wszystkie badane przy tym naprężeniu próbki (dla każdego z naprężeń badano po 13 próbek) i otrzymano tzw. prawdopodobieństwo przetrwania, tzn. P_{σ_i} (tabl.1), które przeliczono na wartości dziesiętne (p_i).

Tabela 1. Wyniki badań wytrzymałościowych dla siluminu w stanie po odlaniu.

Table 1. The results of strength test and the statistic parameters for silumin after mould casting.

Silumin w stanie po odlaniu		
P_{σ_i}	p_i	σ_i [MPa]
12/13	0,9231	160
11/13	0,8462	165
11/13	0,8462	170
10/13	0,7692	175
8/13	0,6154	180

Silumin w stanie po odlaniu		
P_{σ_i}	p_i	σ_i [MPa]
6/13	0,4615	185
5/13	0,3846	190
2/13	0,1538	195
1/13	0,0769	200

3. ESTYMACJA FUNKCJI ROZKŁADU WEIBULLA ZA POMOCĄ REGRESJI NIELINIOWEJ

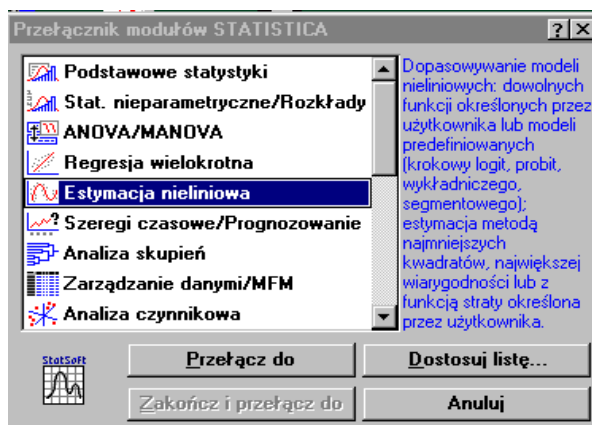
Po wprowadzeniu uzyskanych danych (tab.1) do arkusza Excel zaimportowano je do programu Statistica v. 5.1. PL. Jak już wspomniano, wykorzystamy zależność zaproponowaną przez autorów [3] w postaci:

$$p = \exp(-(\sigma/\sigma_0)^m) \quad (1)$$

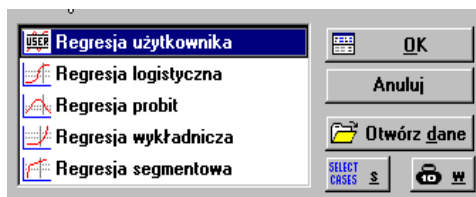
gdzie: m to moduł Weibulla,

σ_0 to naprężenie rozciągające, dla którego 37% próbek wytrzymałe obciążenie (wynika to z faktu, iż $1/e = 0,37$).

Ze względu na nieliniowy charakter funkcji (1) do estymacji jej współczynników (w tym przypadku stałej m) wykorzystamy złożony aparat matematyczny regresji nieliniowej. W tym celu z przełącznika modułów pakietu Statistica uruchamiamy moduł *Estymacja nieliniowa* (rys.1), a następnie opcję *Regresja użytkownika* (rys.2).

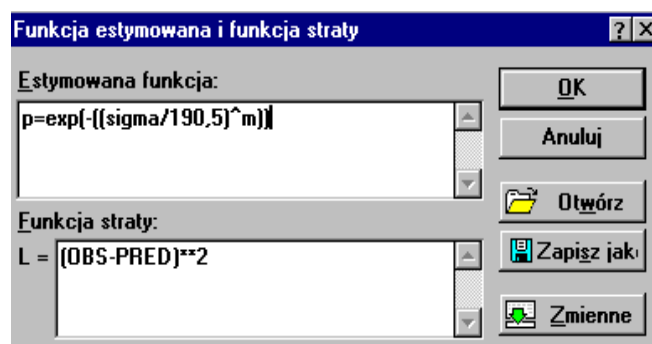


Rys.1. Wybór modułu *Estymacja nieliniowa*.
Fig.1. The selection of the *non-linear modulus estimation*.



Rys.2. Wybór opcji *Regresja użytkownika*.
Fig.2. The selection of the *operator regression*.

W pierwszym etapie wyznaczymy wartość naprężenia σ_0 (naprężenie rozciągające dla którego $p=0,37$). Z danych przedstawionych w tab. 1 wynika, że naprężenie to jest nieco większe od 190 MPa. Po wybraniu opcji *Regresja użytkownika* otwiera się okno Funkcja regresji określona przez użytkownika z którego wybieramy przycisk *Funkcja estymowana i funkcja straty*, po czym definiujemy model regresji i funkcję straty. Formuła definiowanej funkcji regresji po przyjęciu (w pierwszym przybliżeniu) $\sigma_0=190,5$ jest przedstawiona na rysunku 3.



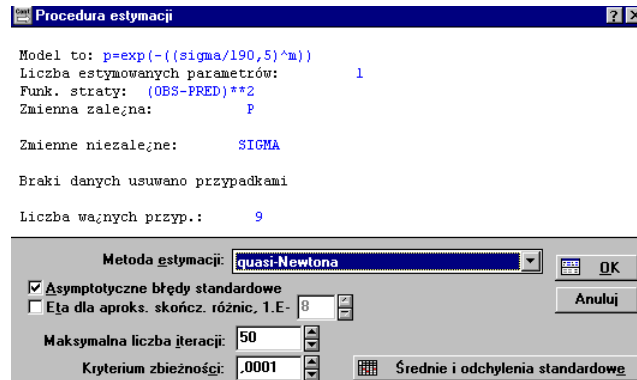
Rys.3. Okno definicji modelu regresji i funkcji straty.
Fig.3. The window of regression model of the define and loss function.

Warto zauważyć, że w zdefiniowanym modelu wykorzystaliśmy operatory ($/$ i $^$), znak funkcji (\exp) znane z arkuszy kalkulacyjnych, zmienne σ i p , to odpowiednio zmienna niezależna i zależna (zawarte w kolumnach arkusza pod tymi samymi nazwami), a m (moduł Weibulla), to parametr modelu funkcji, który zostanie estymowany.

Należy zwrócić uwagę na tzw. funkcję straty (rys. 3). Postać tej funkcji można wyspecyfikować w dolnym okienku, a ma ona za zadanie oszacować wielkość odchyłań wartości przewidywanych (PRED) od wartości obserwowanych (OBS). Każde bowiem odchylenie wartości obserwowanej od przewidywanej jest pewną stratą w trafności naszego przewidywania. Minimalizacja funkcji straty jest więc procedurą estymacji współczynników równania regresji. Postać tej funkcji zmienia się więc w zależności od stosowanej metody szacowania parametrów.

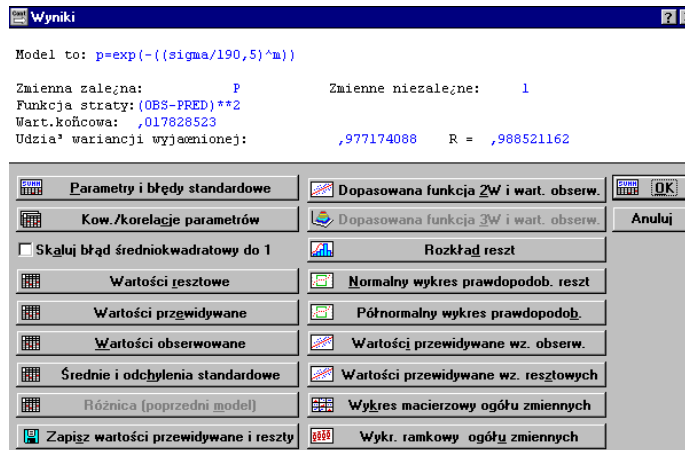
W zastosowanej przez nas metodzie najmniejszych kwadratów, funkcję straty definiujemy jako sumę kwadratów odchyłań wartości przewidywanych od obserwowanych (znak $**$ oznacza potęgowanie).

Po zatwierdzeniu zdefiniowanej funkcji regresji przechodzimy do okna *Procedura estymacji*, co przedstawiono na rysunku 4.



Rys.4. Okno wyboru procedury estymacji.
 Fig.4. The window of selection estimation procedure.

W oknie tym otrzymujemy informację o wybranych zmiennych postaci modelu i funkcji straty oraz liczbie ważnych przypadków. Opcja *Asymptotyczne błędy standardowe* powinna być zaznaczona, gdyż chcemy w arkuszu wyników otrzymać standardowe błędy dla wyliczonych estymatorów. Są one pomocne przy ocenie istotności otrzymanych estymatorów. Opcja *Eta dla aproksymacji skończonych różnic* jest stosowana do obliczenia błędów standardowych metodą aproksymacji różnic skończonych cząstkowych pochodnych drugiego rzędu. Po uruchomieniu procedury estymacji parametrów program wykonuje niezbędne obliczenia i po osiągnięciu zbieżności można przejść do okna *Wyniki* (rys. 5).



Rys.5. Okno dialogowe *Wyniki*.
 Fig.5. The window of the *results*.

W oknie tym widzimy, że 97,717% zmienności zmiennej p może być wyjaśnione naprężeniem σ (przy wartości $\sigma_0=190,5$). Aby przekonać się, jakie wartości przyjmują współczynniki regresji, klikamy w tym oknie przycisk *Parametry i błędy standardowe* i otrzymujemy następujący arkusz wyników (rys. 6).

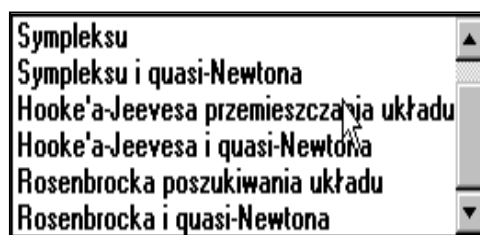
Model: p=exp(-((sigma/190,5)^m)) (wiebul1.sta)	
Dalej...	Zmn. zal: P Str.: (OBS-PRED)**2 Końc.strata ,017828523 R=,98852 Wyjaśniona warian.: 97,717%
N=9	M
Ocena	14,88350
Błąd est	1,29980
t(8)	11,45059
poziom p	,00000

Rys.6. Arkusz wyników analizy regresji.
Fig.6. The sheet of the results of regression analysis.

Wyliczone wartości pozwalają zapisać równanie regresji wraz z błędami szacunku

$$p = \exp(-(\sigma/190,5)^{14,88}) \quad (\text{błąd szacunku} = 1,205) \quad (2)$$

Powróćmy do *Okna wyboru procedury estymacji* (rys.4), w którym po rozwinięciu listy *Metody estymacji* ukazują się pozostałe (prócz metody quasi-Newtona, którą dotychczas stosowaliśmy) dostępne metody znajdowania minimum funkcji straty, co przedstawiono na rysunku 7.



Rys.7. Lista z dostępnymi metodami estymacji.
Fig.7. The report of estimation methods.

Każda z tych metod wykorzystuje różne strategie poszukiwania dla znalezienia minimum funkcji:

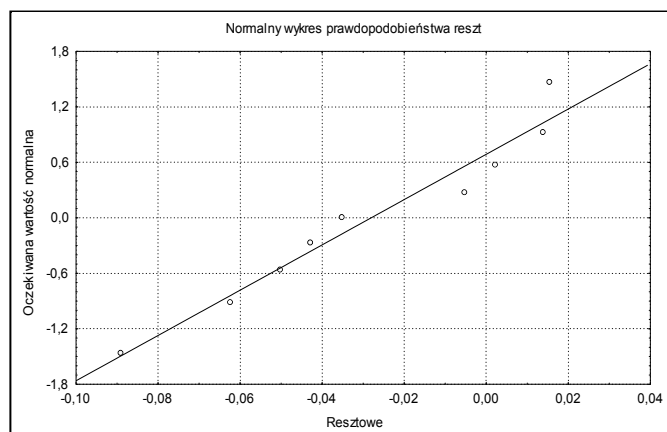
- Metoda quasi-Newtona w każdym kolejnym kroku w różnych punktach oszacowuje funkcje w celu estymacji pochodnych pierwszego i drugiego rzędu, które mówią

nam w którym kierunku i jak szybko zmienia się nachylenie funkcji. Metoda ta nazywana jest często metodą minimalizacji w kierunku największego spadku [6].

- Metoda Sympleksu jest prostą i zarazem dokładną metodą pozwalającą wyznaczyć położenia minimum funkcji wielu zmiennych [7]. Polega ona na znalezieniu (dowolnego) rozwiązania bazowego programu, a następnie sprawdzeniu, czy jest ono optymalne. Jeżeli dane rozwiązanie nie jest optymalne, konstruuje się następne rozwiązanie bazowe lepsze (lub przy- najmniej nie gorsze od poprzedniego). Algorytm sympleksu porównywany często bywa do poruszania się ameby, która kurcząc się lub rozszerzając, chce schować się w najgłębszym dole.
- Metoda Sympleksu i quasi-Newtona łączy w sobie zalety obydwu poprzednich metod. Stosować ją powinniśmy szczególnie w przypadkach, gdy nie mamy pewności co do właściwych wartości początkowych.
- Metoda Hooke'a-Jeevesa przemieszczania układu polega na przesuwaniu – w każdej iteracji – układu punktów w nowe miejsce, przy czym długości kroków przesuwania są stale modyfikowane, tak aby trafić w optimum – stosujemy ją gdy poprzednie metody nie dają sensownych estymatorów.
- Metoda Hooke'a-Jeevesa i quasi-Newtona łączy w sobie zalety obydwu tworzących ją metod. Jest również bardzo przydatna gdy nie mamy pewności co do właściwych wartości początkowych.
- Metoda Rosebrocka poszukiwania układu polega na obracaniu przestrzeni parametrów, tak aby jedna oś była wyrównana do grzbietu funkcji straty natomiast pozostałe osie były do niej ortogonalne – często nazywana jest metodą rotacji współrzędnych. Zalecana jest w przypadku, gdy wszystkie inne zawiodą.

W naszych rozważaniach nad dopasowaniem danej funkcji do zmiennej niezależnej bazować będziemy na wartości *Udział wariancji wyjaśnionej* (rys. 5), przy czym pierwsza podana wartość (0,9771) jest kwadratem R. Obliczamy dla modelu całkowitą sumę kwadratów odchyłeń (CSK), reszkową sumę kwadratów (RSK) oraz tzw. wyjaśnioną przez model sumę kwadratów (WSK=CSK-RSK). Stosunek tej ostatniej do całkowitej sumy kwadratów nazywamy proporcją wyjaśnionej wariancji. Pokazuje ona, jaka część wariancji zmiennej niezależnej jest wytłumaczona przez model. W naszym przykładzie ponad 97,7% zmienności prawdopodobieństwa p może być wyjaśnione na podstawie wartości *sigma*.

Aby dokonać prawidłowej weryfikacji uzyskanego współczynnika m pod względem jego efektywności i nieobciążoności należy sprawdzić, czy rozkład reszt odpowiada rozkładowi normalnemu. Niespełnienie tego założenia nie powoduje utraty przez estymator jego właściwości, a jedynie niemożliwość weryfikacji hipotezy dotyczącej wartości wyliczonego parametru m . W tym celu z okna dialogowego *Wyniki* wybieramy opcję *Normalny wykres prawdopodobieństwa reszt*, otrzymując wykres przedstawiony na rysunku 8, w oparciu o który stwierdzamy bardzo niewielkie odstępstwa od rozkładu normalnego (punkty powinny układać się wzdłuż linii prostej).



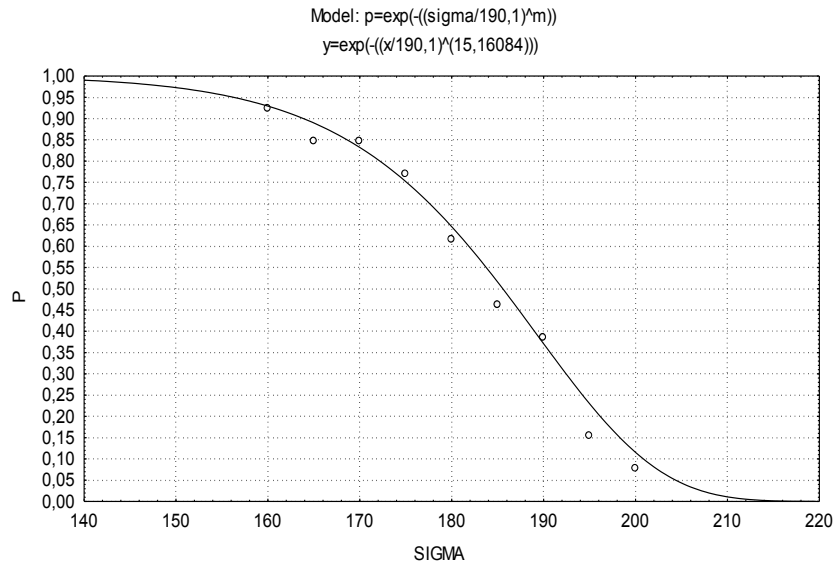
Rys.8. Wykres prawdopodobieństwa reszt.
Fig.8. The diagram of the rest probability.

W celu dokładnego wyznaczenia wartości σ_0 zastosujemy metodę krokową postępującą, co sprowadza się do powtórzenia przedstawionego toku obliczeń dla wartości $\sigma_0=190,4; 190,3; 190,2; 190,1$ i $190,0$. W oparciu wartość *Udział wariancji wyjaśnionej* (rys. 5) zauważamy, że najdokładniej odwzorowuje przebieg punktów empirycznych model $p = \exp(-(\sigma/190,1)^m)$. Okno wyników dla tego modelu przedstawia rysunek 9.

Model: $p = \exp(-(\sigma/190,1)^m)$ (wiebul1.sta)	
Dalej...	Zmn. zal: P Str.: {OBS-PRED}**2 Końc.strata ,013737300 R=,99117 Wyjaśniona warian.: 98,241%
N=9	M
Ocena	15,16100
Błąd est	1,16338
t(8)	13,03190
poziom p	,00000

Rys.9. Końcowy arkusz wyników analizy regresji.
Fig.9. Last sheet of the results of regression analysis.

Dopasowanie naszego modelu jest bardzo dobre (procent wariancji wyjaśnionej przez model wynosi 98,24%). Potwierdza to wykres dopasowanej funkcji, który wywołujemy przyciskiem *Dopasowana funkcja 2W i wartości obserwowane* (rys.10).



Rys.10. Zmiana prawdopodobieństwa p w zależności od zmiany naprężenia SIGMA dla badanego stopu Al-Si.

Fig.10. The change probability p on the tensile strength σ dependence for Si-Al alloy.

W kolejnym etapie dokonano potwierdzenia dobroci dopasowania uzyskanego modelu z wykorzystaniem przedstawionych powyżej innych metod estymacji. W każdym przypadku uzyskano bardzo zbliżone wartości estymatorów danego modelu, co świadczy o bardzo dobrym opisie przez model danych empirycznych.

4. ESTYMACJA FUNKCJI ROZKŁADU WEIBULLA ZA POMOCĄ REGRESJI LINIOWEJ

Do estymacji funkcji rozkładu Weibulla można wykorzystać metodę sprowadzenia jej do postaci liniowej. W tym celu funkcję (1) poddajemy podwójnemu logarytmowaniu otrzymując:

$$\ln(\ln(1/p)) = m \cdot \ln(\sigma/\sigma_0) \tag{3}$$

Obliczamy więc nowe zmienne: zmienna niezależna, to $\ln(\sigma/\sigma_0)$ natomiast zmienna zależna, to $\ln(\ln(1/p))$. Obliczeń tych zmiennych dokonujemy w arkuszu kalkulacyjnym stosując odpowiednie funkcje i operatory.

Końcowy wynik obliczeń w pakiecie Statistica z użyciem modułu *Estymacja nieliniowa* zgodnie z metodyką postępowania opisaną wcześniej dla modelu

$\ln(\ln(1/p))=m*\ln(\sigma/190,1)$ daje następujące okno wyników, które przedstawiono na rysunku 11.

Model: lnln1_p=m*lns_so (wiebul1.sta)	
Dalej...	Zmn. zal: LNLN1_P Str.: (OBS-PRED)**2 Końc.strata ,251101670 R=,98868 Wyjaśniona warian.: 97,749%
N=9	M
Ocena	14,69100
Błąd est	,64244
t(8)	22,71178
poziom p	,00000

Rys. 11. Oszacowanie Modułu Weibulla przy pomocy funkcji liniowej.
Fig.11. Evaluation modulus Weibullus with the assistance linear function.

Analizując uzyskane wyniki widzimy niewielką różnię w wartościach estymowanych parametrów co wynika najprawdopodobniej z zaokrąglenia przeliczeń towarzyszącym procesowi podwójnego logarytmowania.

Do estymacji parametrów modelu funkcji (3) można z powodzeniem wykorzystać również jeden z popularnych arkuszy kalkulacyjnych np. Excel.

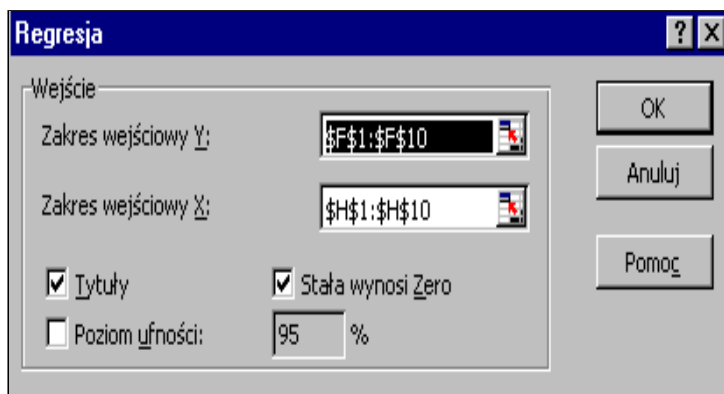
Po obliczeniu wszystkich niezbędnych danych (tab. 2) należy skorzystać z *Menu Narzędzia* a następnie opcji *Analiza danych* wybierając z *Narzędzi analizy – Regresja* (rys. 12).

Tabela 2. Wyniki badań wytrzymałościowych oraz oszacowanie parametrów do analizy statystycznej dla siluminu w stanie po odlaniu

Table 2. The results of strength test and the statistic parameters for silumin after mould casting.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	p	p	1/p	Sigma	$\ln(1/p)$	$\ln(\ln(1/p))$	$\text{Sigma}/\text{sigma0}^*$	$\ln(\text{Sigma}/\text{sigma0})$
2	12/13	0,9231	1,083	160	0,0800	-2,5252	0,8417	-0,1724
3	11/13	0,8462	1,182	165	0,1671	-1,7894	0,8680	-0,1416
4	11/13	0,8462	1,182	170	0,1671	-1,7894	0,8943	-0,1118
5	10/13	0,7692	1,300	175	0,2624	-1,3380	0,9206	-0,0828
6	8/13	0,6154	1,625	180	0,4855	-0,7226	0,9469	-0,0546
7	6/13	0,4615	2,167	185	0,7732	-0,2572	0,9732	-0,0272
8	5/13	0,3846	2,600	190	0,9555	-0,0455	0,9995	-0,0005
9	2/13	0,1538	6,500	195	1,8718	0,6269	1,0258	0,0254
10	1/13	0,0769	13,000	200	2,5649	0,9419	1,0521	0,0508

* - za sigma0^* przyjęto wartość 190,1 MPa



Rys.12. Okno analizy *Regresja*.
 Fig.12. The window of the regression analysis.

W oknie *Regresja*, ze względu na charakter funkcji należy zaznaczyć opcję *Stała wynosi zero*. Po wykonaniu obliczeń uzyskujemy takie same wyniki, jak w przypadku wykorzystania pakietu Statistica, co przedstawiono na rysunku 13.

	A	B	C	D	E	F
18	<i>Statystyki regresji</i>					
19	Wielokrotność R	0,988679691				
20	R kwadrat	0,977487532				
21	Dopasowany R kwadrat	0,852487532				
22	Błąd standardowy	0,177165766				
23	Obserwacje	9				
24						
25	ANALIZA WARIANCJI					
26		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Istotność F</i>
27	Regresja	1	10,9027918	10,90279	347,3586	3,1775E-07
28	Resztkowy	8	0,25110167	0,031388		
29	Razem	9	11,15389347			
30						
31		<i>Współczynniki</i>	<i>Błąd standardowy</i>	<i>t Stat</i>	<i>Wartość-p</i>	
32	ln(Sigma/sigma0)	14,691	0,642440031	22,71178	1,5E-08	

Rys.13. Oszacowanie Modułu Weibulla wg estymacji liniowej.
 Fig. 13. Evaluation on the Weibullus modulus for linear estimation.

5. PODSUMOWANIE

Jak wynika z przeprowadzonej oceny właściwości badanego siluminu pod kątem wyznaczenia parametrów funkcji rozkładu Weibulla, można wykorzystać zarówno metody estymacji oparte na regresji nieliniowej z wykorzystaniem specjalistycznych pakietów statystycznych, jak również można korzystać z bardzo popularnych arkuszy kalkulacyjnych np. Excel. Każdy z nich jest obecnie wyposażony w podstawowe narzędzia analizy statystycznej, jednakże dopiero po sprowadzeniu modelu funkcji do postaci liniowej.

LITERATURA

- [1] STATISTICA (Wersja 5), Poradnik użytkownika. Wyd. StatSoft, Kraków 1995.
- [2] M. Maliński, J. Szymśzal: *Współczesna statystyka matematyczna w medycynie w arkuszach kalkulacyjnych*. Wyd. Śląskiej Akademii Medycznej, Katowice 1999.
- [3] Z. Poniewierski: *Krystalizacja, struktura i właściwości siluminów*. Warszawa WNT (1989).
- [4] S. Pietrowski: *Siluminy tłokowe, Monografia*. Krzepnięcie Metali i Stopów PAN, Komisja Odlewnictwa, z. 29, (1997).
- [5] M. F. Ashby, Dawid R.H. Jones: *Materiały Inżynierskie cz.2, Kształtowanie struktury i właściwości, dobór materiałów*. Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, (1996).
- [6] G. Seber, C. Wild : *Nonlinear regresion*, Wiley, New York, (1989).
- [7] Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz: *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. PWN, Warszawa, (2000).

NEW METHODS OF ESTIMATION THE RELIABILITY OF CAST, ON THE BASE OF ALSi17Cu3Mg ALLOY

SUMMARY

In this paper the results of the statistical analyses of tensile strength investigations are introduced and permissible risk (surviving probability) was determined, particularly its quality measure like Weibulls modulus, on the base of hypereutectic Al-Si alloys.

Recenzował prof. dr hab. inż. Stanisław Jura